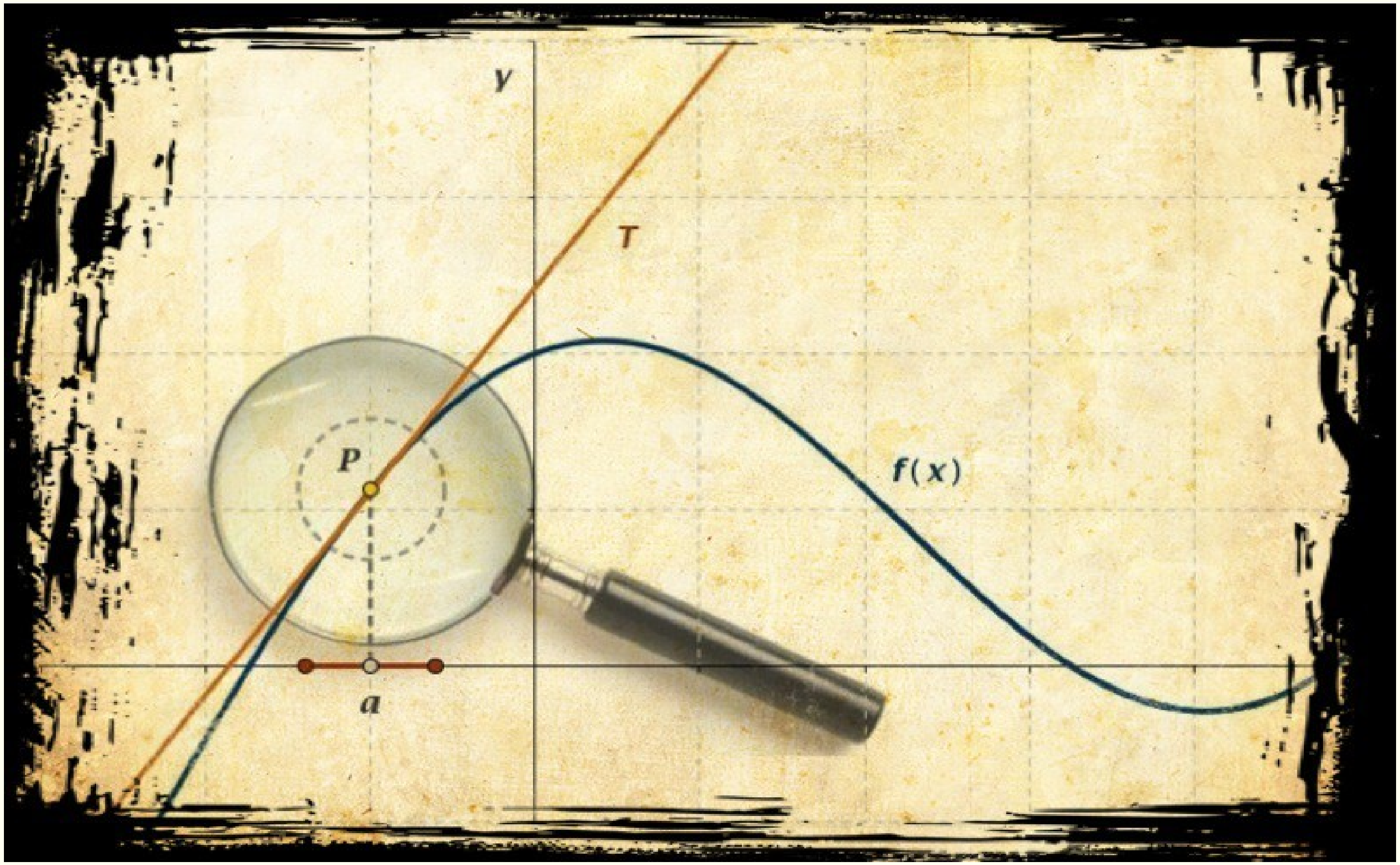


Linearisierung einer Funktion

Tangente, Normale

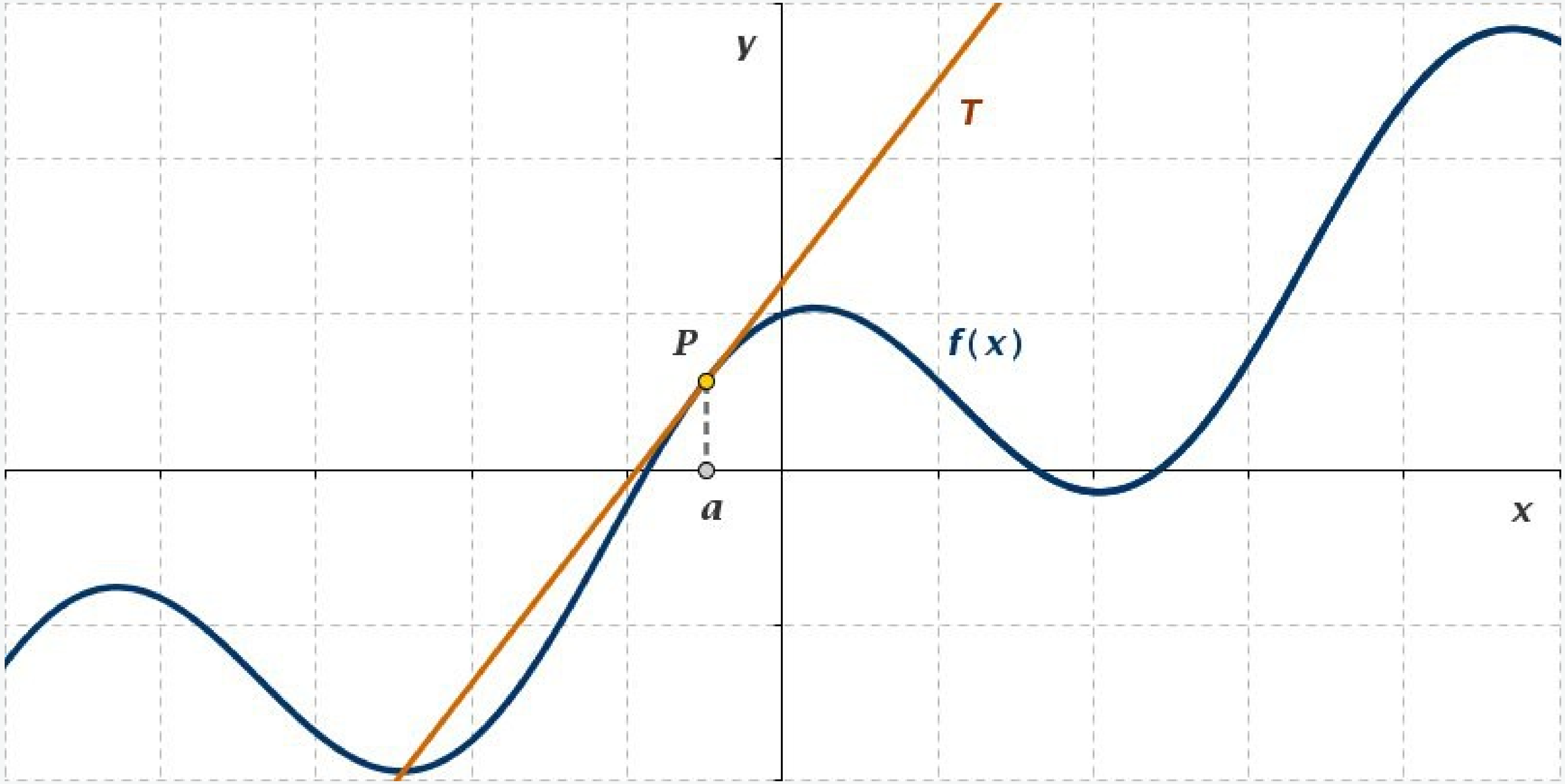


Abb. 1-1: Die Gerade T ist die Tangente der Funktion $y = f(x)$ im Punkt P

Eine im Punkt $x = a$ differenzierbare Funktion $y = f(x)$ hat in diesem Punkt eine eindeutig bestimmte Tangente.

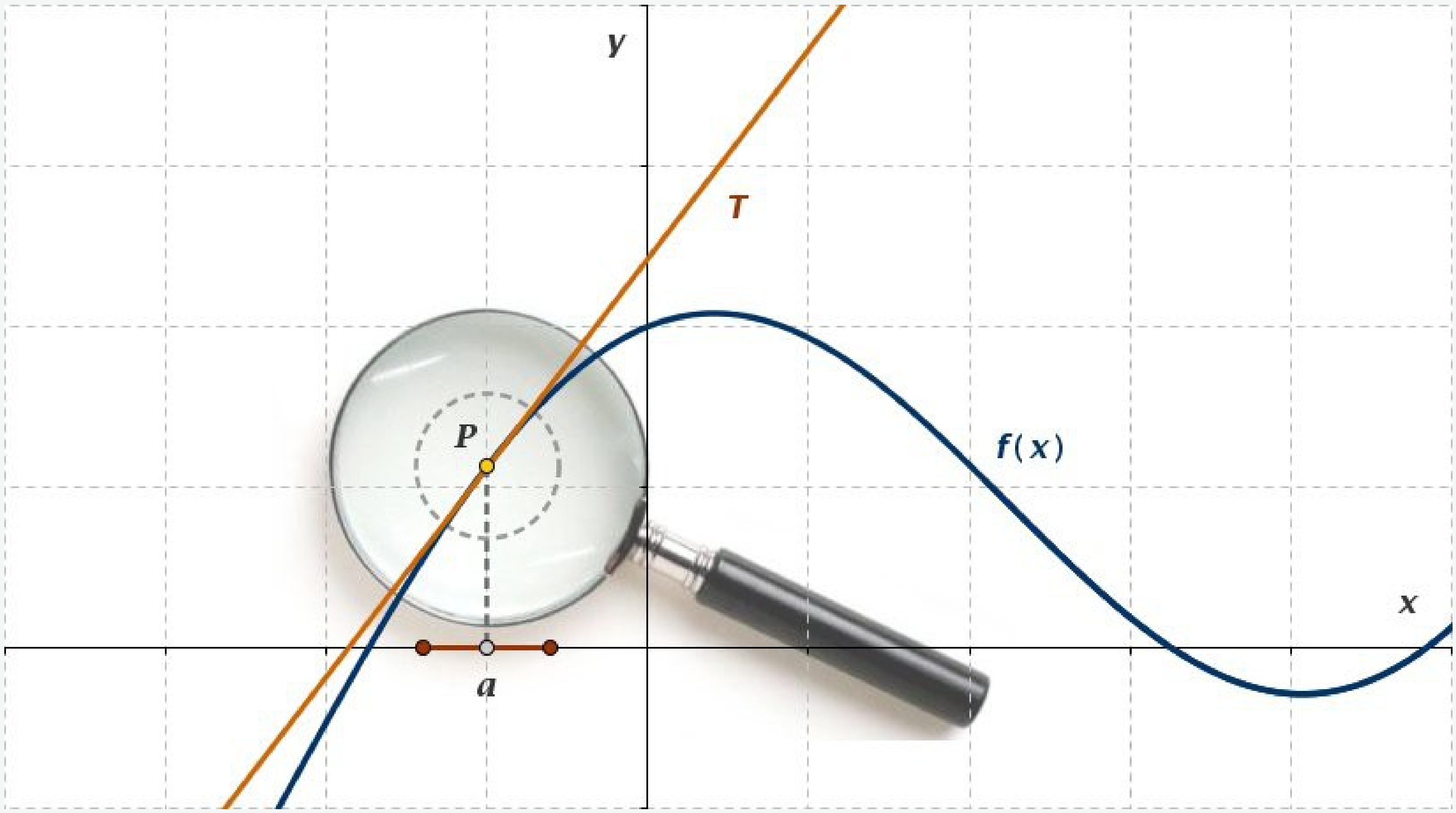


Abb. 1-2: Die Funktion $y = f(x)$, die Tangente T im Punkt P und die Umgebung des Punktes $x = a$

Die im Punkt $x = a$ differenzierbare Funktion $y = f(x)$ kann in diesem Punkt näherungsweise durch eine lineare Funktion, die Kurventangente T, ersetzt werden.

Funktionsgleichung der Tangente

Die Funktionsgleichung der Tangente im Punkt P lautet:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) = m_T, \qquad P = (x_0, f(x_0)) = (x_0, y_0)$$

Diese Gleichung bringen wir in die Form $y = a\,x + b$:

$$y - y_0 = m_T\,(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = m_T\,(x - x_0) + y_0$$

$$\boxed{y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)}$$

Der Punkt P wird in technischen Anwendungen als “Arbeitspunkt” bezeichnet.

Linearisierung der Funktion $y = f(x)$, oder lineare Approximation, bedeutet, dass wir in der Umgebung eines Punktes P, in dem die Funktion differenzierbar ist, die Funktion durch ihre Tangente in P ersetzen wobei die Umgebung so klein gewählt werden muss, dass wir die Abweichung von $y = f(x)$ vernachlässigen können.

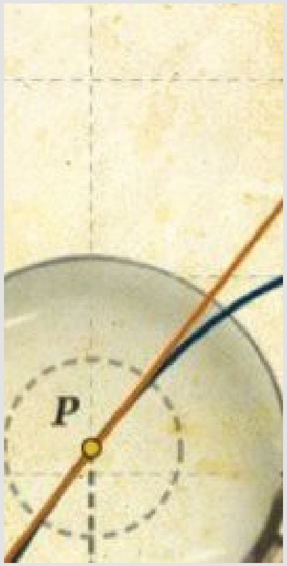
Die Normale im Kurvenpunkt P ist eine Gerade, die senkrecht zur Kurventangente steht. Die Steigung der Normale ist negativ reziprok Tangentensteigung:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)} = m_N, \qquad P = (x_0, \; f(x_0)) = (x_0, \; y_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{m_T}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{m_T}(x - x_0) + y_0$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)}$$



Aufgabe 1:

Die Funktion $y = f(x)$ soll in der Umgebung der Stelle x_0 durch eine lineare Funktion angenähert werden:

$a)\quad y = x^2 - x, \qquad x_0 = 1$

$b)\quad y = e^{2x}, \qquad x_0 = 0$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $x = a$:

$a)\quad y = x^2, \qquad b)\quad y = x^3$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle Punkte des Graphen der Funktion $y = f(x)$, in welchen die Tangente den Winkel $135°$ mit der x-Achse bildet.

$$y = \frac{x+2}{x-2}$$

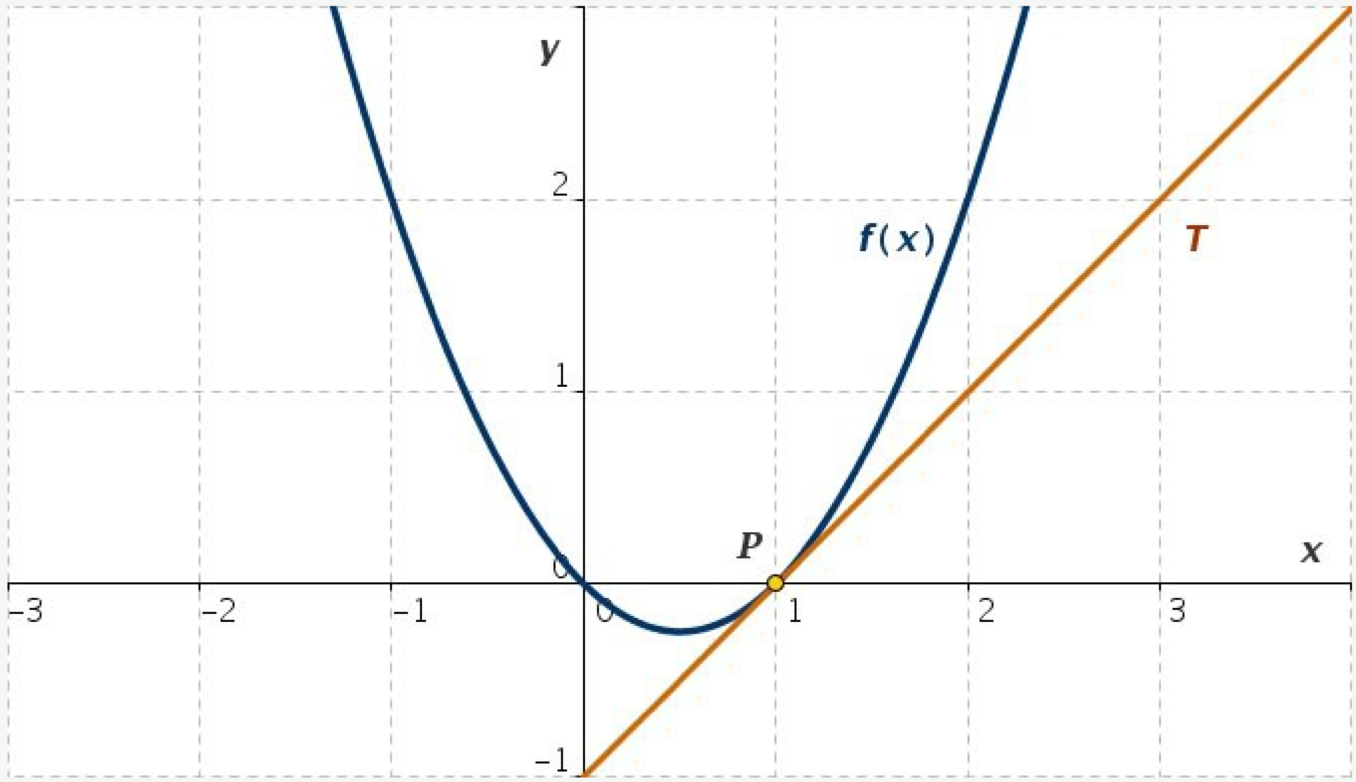


Abb. 2-1: Die Funktion $y = f(x)$ und die Tangente T im Punkt P

$$y = x^2 - x\,, \qquad x_0 = 1$$

Tangentenberührungspunkt: $P = (1,\ 0)$

Tangentensteigung: $y\,' = 2\,x - 1, \qquad m_T = y\,'(1) = 1$

Tangente in P: $y_T = x - 1$

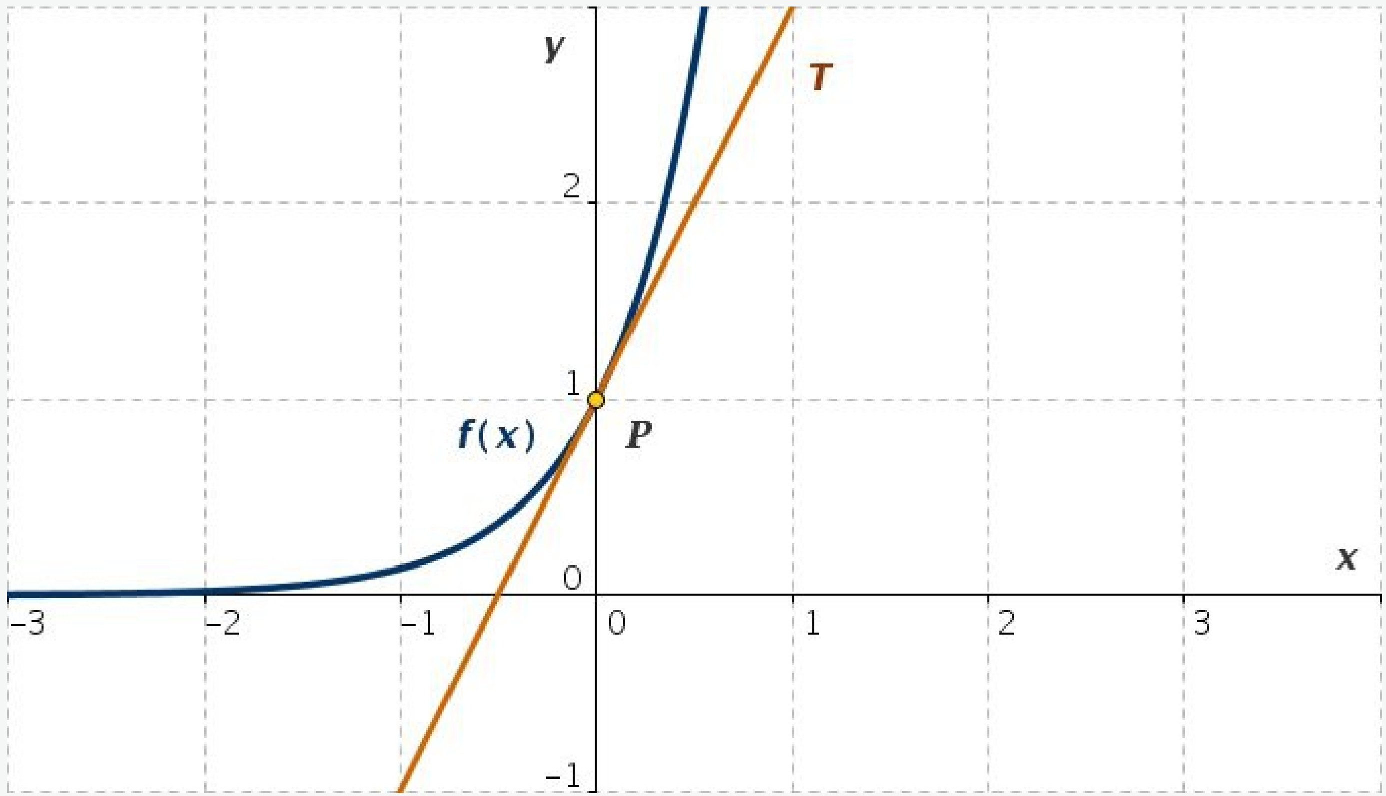


Abb. 2-2: Die Funktion $y = f(x)$ und die Tangente T im Punkt P

$$y = e^{2x}, \qquad x_0 = 0$$

<u>Tangentenberührungspunkt:</u> $P = (0,\ 1)$

<u>Tangentensteigung:</u> $y' = 2\,e^{2x}, \qquad m_T = y'(0) = 2$

<u>Tangente in P:</u> $y_T = 2\,x + 1$

$$y = y'(a)\,(x - a) + y(a), \qquad x_0 = a$$

$$a)\quad y = x^2, \qquad P = (a,\ a^2), \qquad y(a) = a^2$$

$$y' = 2x, \qquad y'(a) = 2a, \qquad y = 2ax - a^2$$

$$b)\quad y = x^3, \qquad P = (a,\ a^3), \qquad y(a) = a^3$$

$$y' = 3x^2, \qquad y'(a) = 3a^2, \qquad y = 3a^2 x - 2a^3$$

Wenn wir die beiden Gleichungen analysieren, können wir feststellen, dass die Tangenten für $x = a$ die x-Achse in den folgenden Punkten schneiden:

$$a)\quad y = 2ax - a^2: \qquad 0 = a(2x - a) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}$$

$$b)\quad y = 3a^2 x - 2a^3: \qquad 0 = a^2(3x - 2a) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2a}{3}$$

Daraus folgt, dass sich in beiden Fällen eine einfache Möglichkeit ergibt, die Tangenten für $x = a$ zu zeichnen.

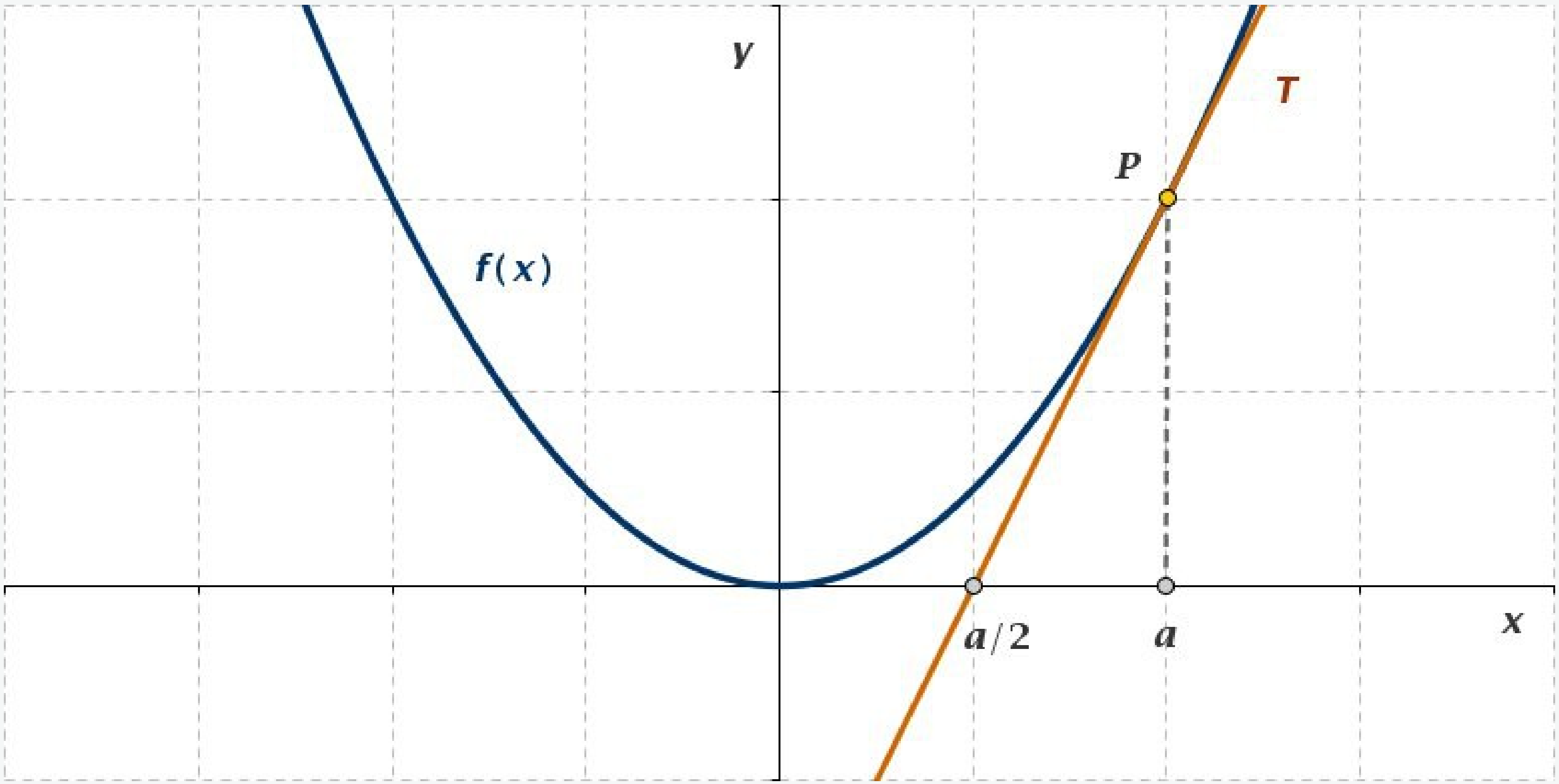


Abb. 2-3: Die Funktion $y = x^2$ und die Tangente T im Punkt P (a, a^2)

Um die Kurventangente der Funktion $y = x^2$ zu zeichnen, kann man das Intervall $[0, a]$ in zwei gleiche Teilen teilen und eine Gerade durch die beiden Punkte $(a/2, 0)$ und $(a, y(a))$ legen.

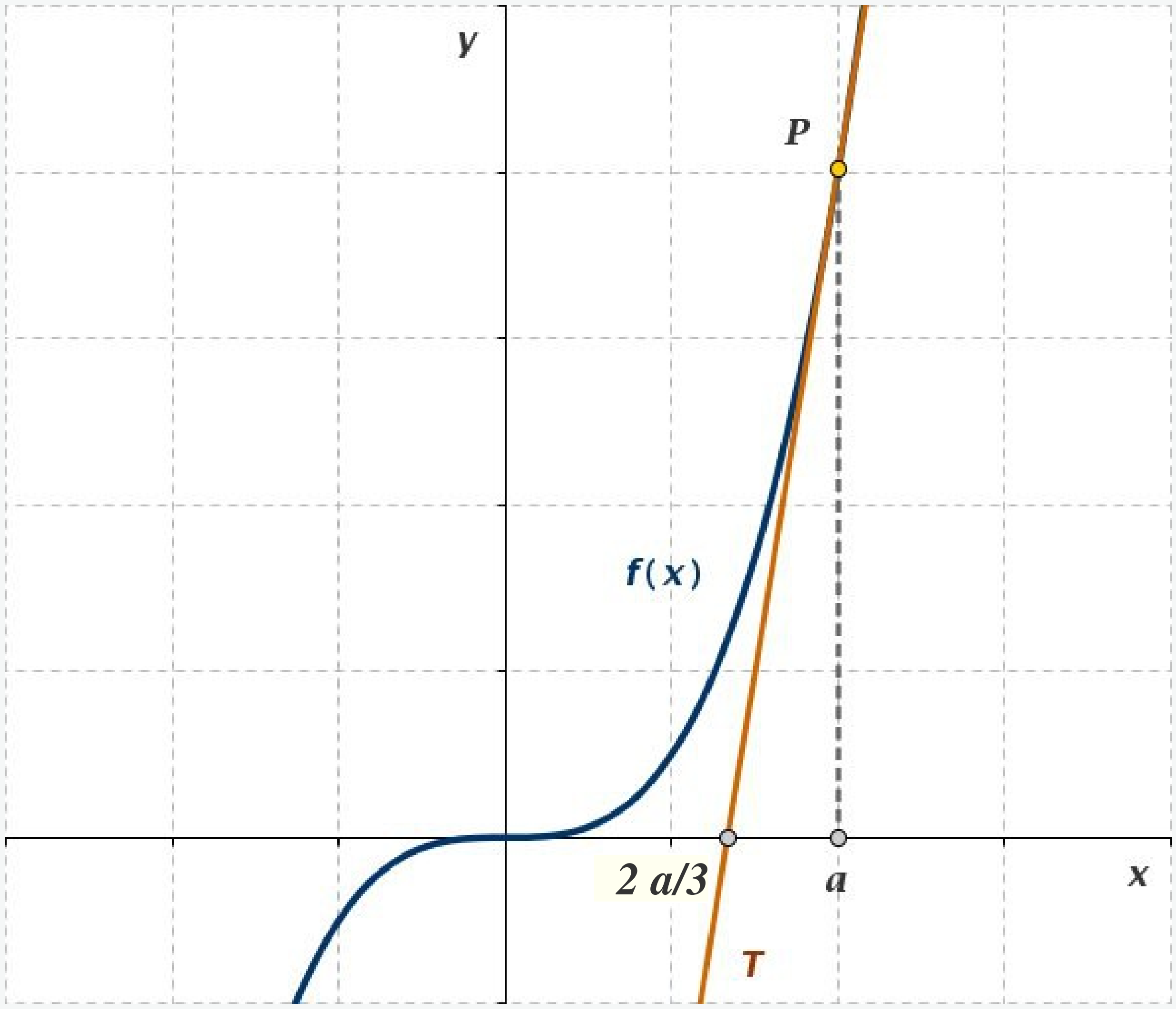


Abb. 2-4: Die Funktion $y = x^3$ und die Tangente T im Punkt P (a, a^3)

Um die Kurventangente der Funktion $y = x^3$ zu zeichnen, kann man das Intervall $[0, a]$ in drei gleiche Teilen teilen und eine Gerade durch die beiden Punkte $(2a/3, 0)$ und $(a, y(a))$ legen.

$y = m\,x + b$ sei die Gleichung einer Tangente, die den Winkel *135°* mit der x-Achse bildet. Dann ist

$$m_T = f\,'(x_0) = \tan 135^\circ = -1$$

$$y = \frac{x+2}{x-2}$$

$$y\,' = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)' = \left(1 + \frac{4}{x-2}\right)' = -\,\frac{4}{(x-2)^2}$$

$$x = x_0\,, \qquad m_T = y\,'(x_0) = -\,\frac{4}{(x_0-2)^2} = -1 \quad \Rightarrow$$

$$(x_0-2)^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_0^{(1)} = 0, \qquad x_0^{(2)} = 4$$

$$x_0^{(1)} = 0, \qquad y\,(x_0^{(1)}) = -1, \qquad P_1 = (0,\,-1)$$

$$x_0^{(2)} = 4, \qquad y\,(x_0^{(2)}) = 3, \qquad P_2 = (4,\,3)$$

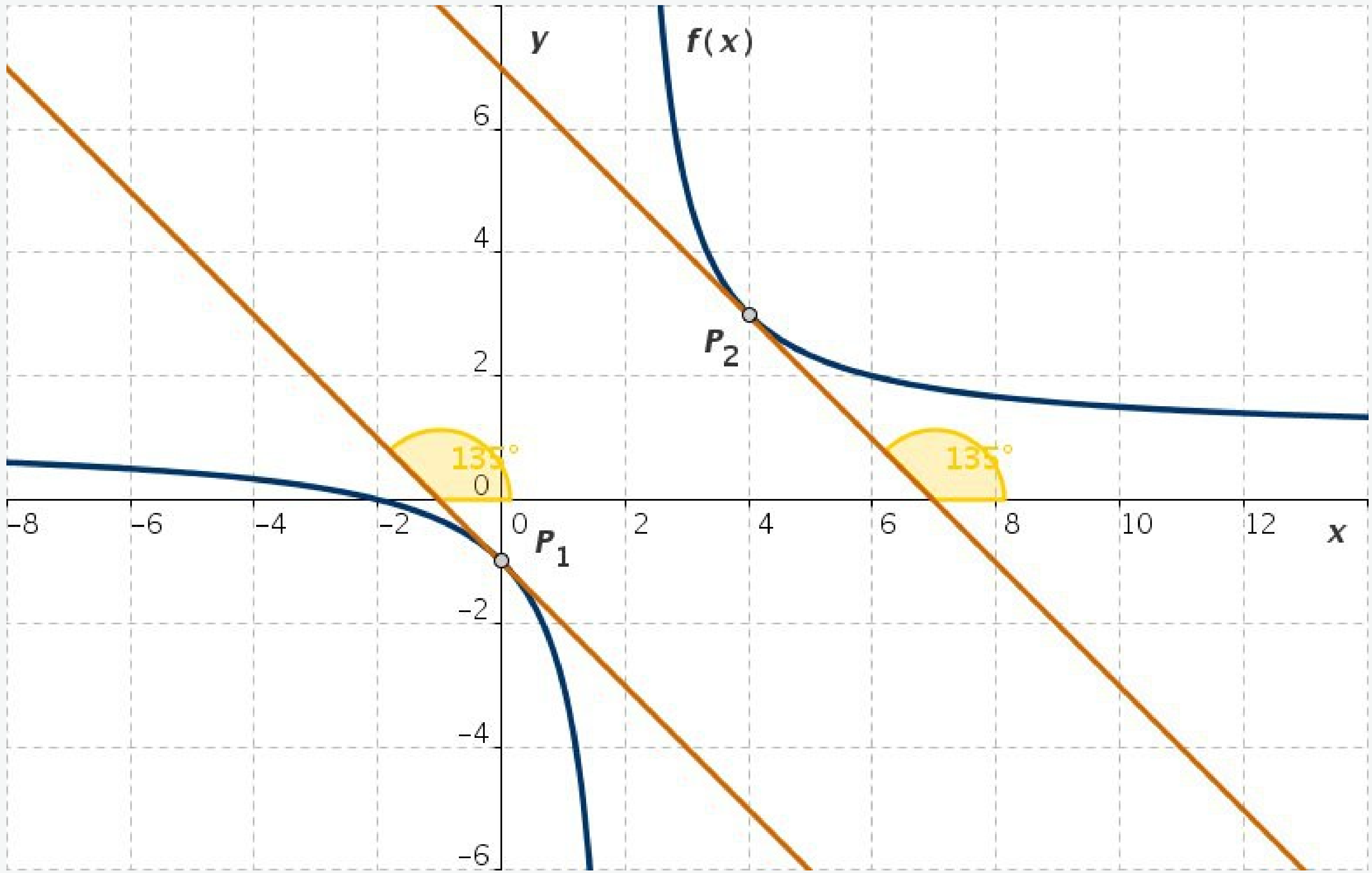
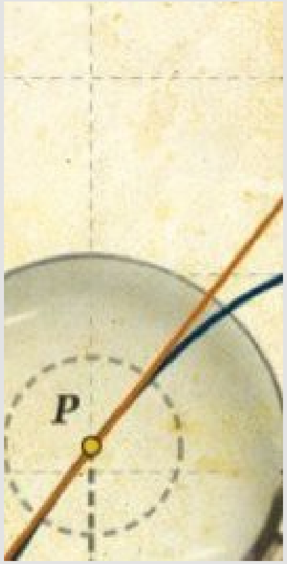


Abb. 2-5: Die Funktion y = (x + 2)/(x - 2) und die Tangenten in den Punkten (0, -1) und (4, 3), die den Winkel 135° mit der x-Achse bilden



Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normale der Funktion $y = f(x)$ im Punkt x_0

a) $y = \sqrt{x}\,, \qquad x_0 = 4$

b) $y = \ln x\,, \qquad x_0 = 1$

c) $y = x + \ln x\,, \qquad x_0 = 1$

d) $y = \sin x\,, \qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

$$y = \sqrt{x}\,, \qquad x_0 = 4, \qquad y(x_0) = 2, \qquad P = (4,\ 2)$$

Tangentenberührungspunkt: $P = (4,\ 2)$

Tangentensteigung: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,, \qquad m_T = y'(4) = \dfrac{1}{4}$

Tangente in P:

$$y_T = m_T\,(x - x_0) + y_0 \quad \Leftrightarrow \quad y_T = \frac{1}{4}\,(x - 4) + 2$$

$$y_T = \frac{x}{4} + 1$$

Normale in P:

$$y_N = -\,\frac{1}{m_T}\,(x - x_0) + y_0 \quad \Leftrightarrow \quad y_N = -4\,(x - 4) + 2$$

$$y_N = -4\,x + 18$$

Auf welche Eigenschaften dieser Funktion kann man aus der der Ableitung schließen ?

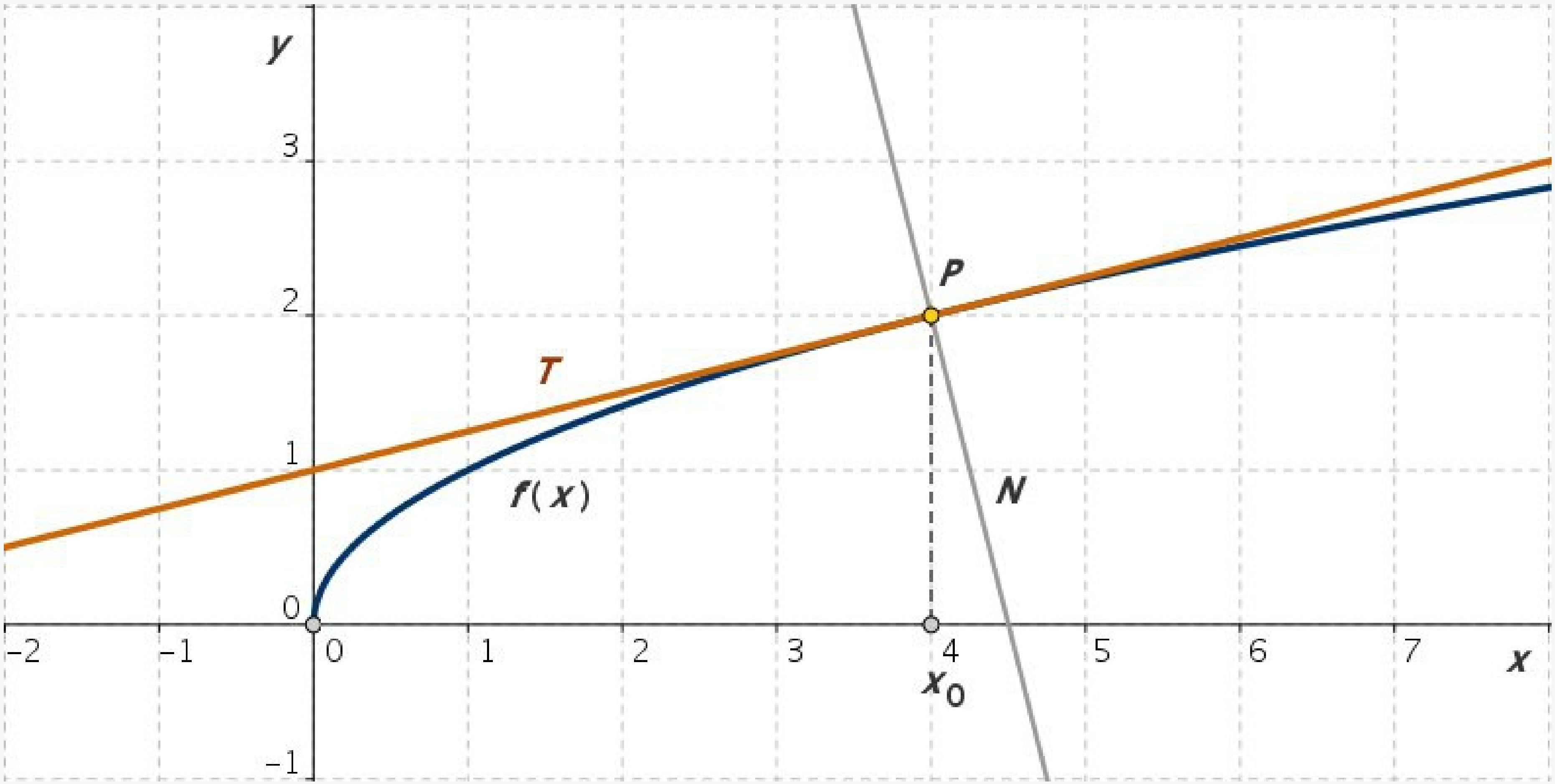


Abb. 3-1: Die Funktion $y = \sqrt{x}$, die Tangente und die Normale im Punkt (4, 2)

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad x \in [\,0,\ \infty\,)$$

Die Ableitung der Funktion ist im ganzen Definitionsbereich positiv, d.h. die Tangente hat in jedem Kurvenpunkt eine positive Steigung. Die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ ist also im ganzen Definitionsbereich monoton wachsend.

$$\lim_{x \to \infty} y' = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

Die Tangente nähert sich einer horizontalen Geraden, wenn $x \to \infty$

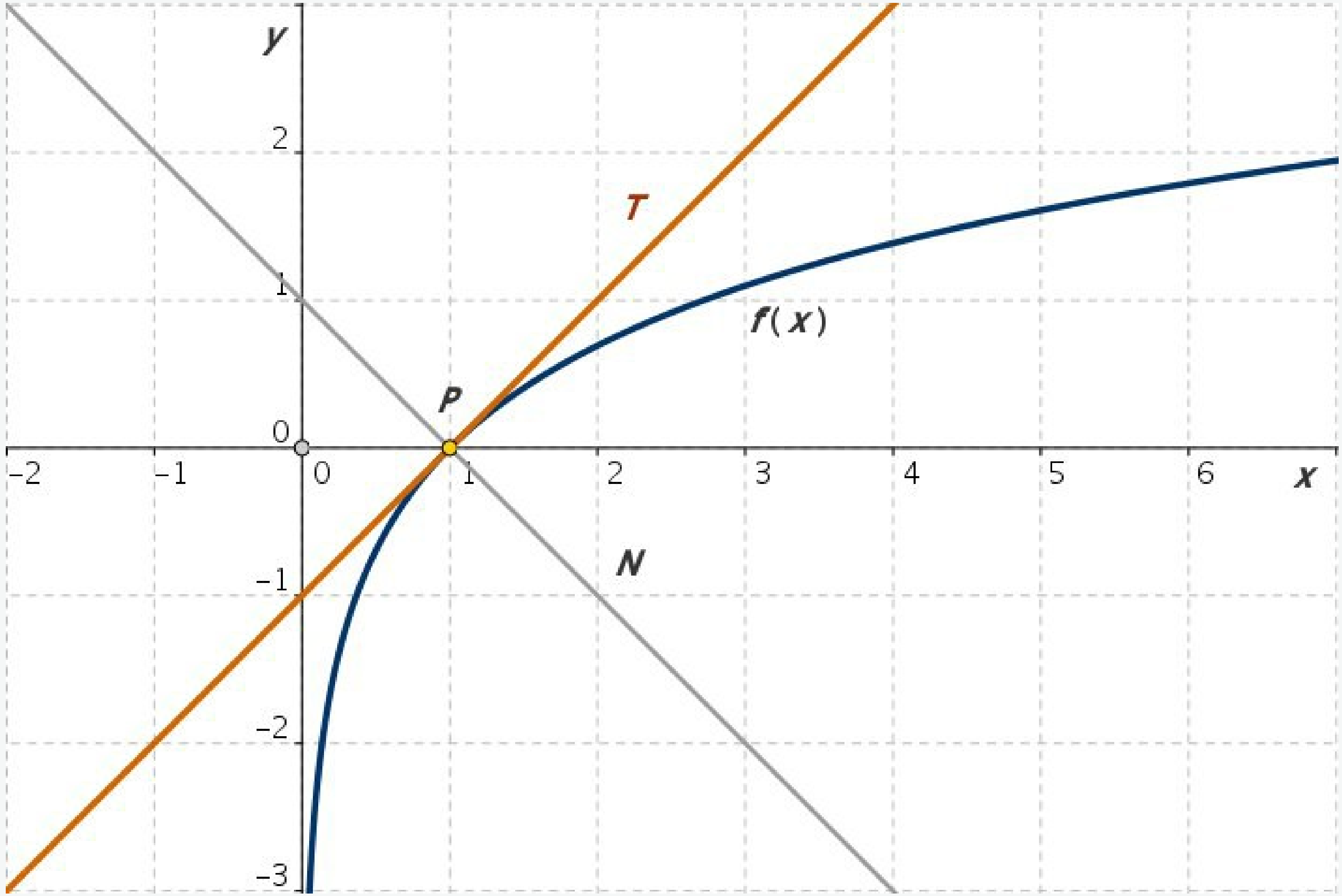


Abb. 3-2: Die Funktion y = ln x, die Tangente und die Normale im Punkt (1, 0)

$$y_T = x - 1, \qquad y_N = -x + 1$$

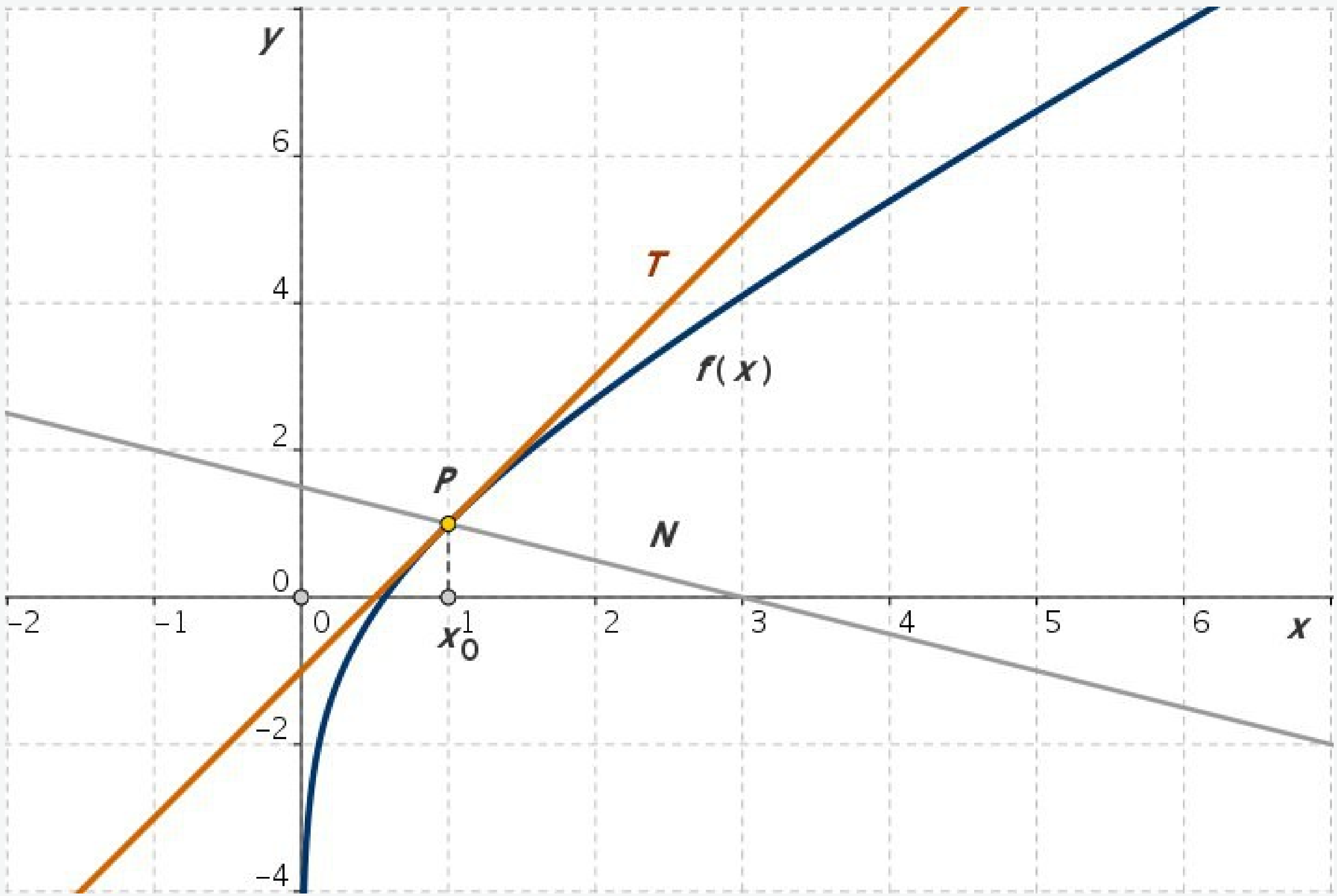


Abb. 3-3: Die Funktion y = x + ln x, die Tangente und die Normale im Punkt (1, 1)

$$y_T = 2x - 1, \qquad y_N = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

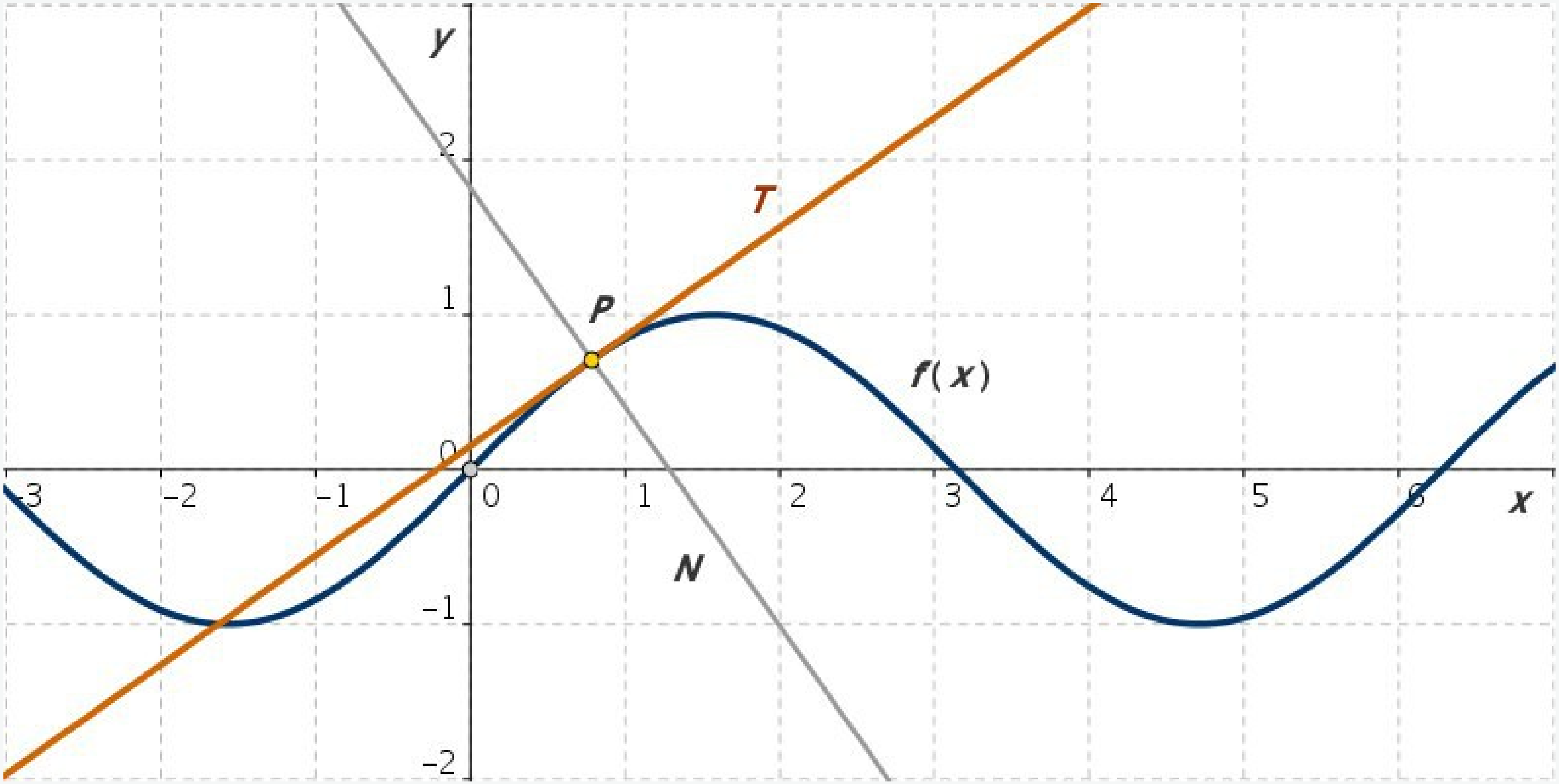
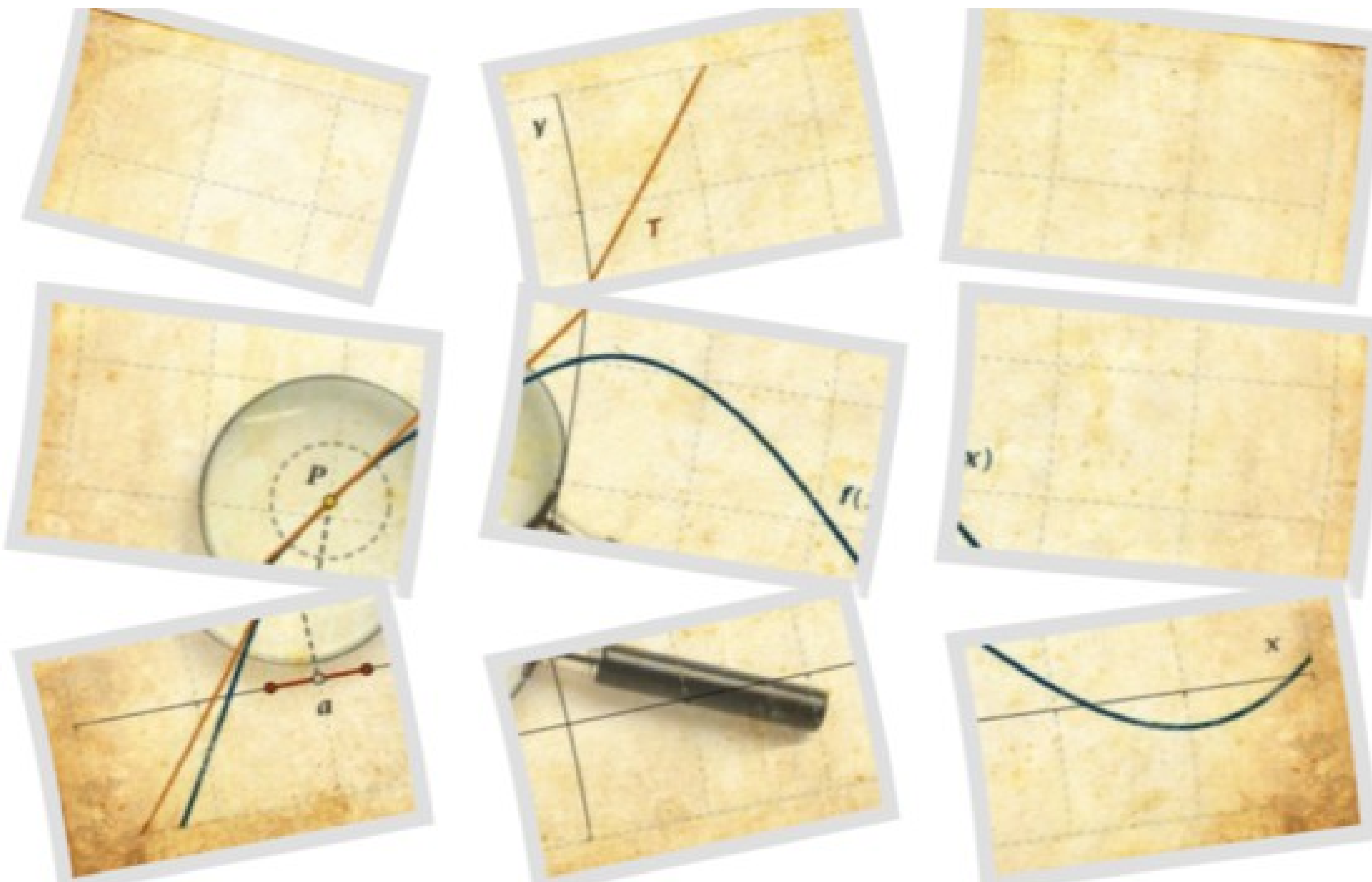


Abb. 3-4: Die Funktion y = sin x, die Tangente und die Normale im Punkt (π/4, 1/√2)

$$y_T = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \simeq 0.71\,x + 0.15$$

$$y_N = -\sqrt{2}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \simeq -1.41\,x + 1.82$$


y
T
P
f(
x)
a
x