Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ralf Banisch

1. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2014

Abgabe bis Mittwoch, 30. April 2014, 14 Uhr

1. Aufgabe (Borel-σ-Algebra, 4 Punkte) Zeigen Sie, dass jedes der folgenden Mengensysteme ein Erzeuger der σ-Algebra der Borelmengen, $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^n &= \{O \subset \mathbb{R}^n \colon O \text{ offen}\} \\ \mathcal{C}^n &= \{A \subset \mathbb{R}^n \colon A \text{ abgeschlossen}\} \\ \mathcal{I}^n &= \{(a,b] \subset \mathbb{R}^n \colon a,b \in \mathbb{R}^n,\ a \le b\} \\ \mathcal{I}^n_\infty &= \{(-\infty,c] \subset \mathbb{R}^n \colon c \in \mathbb{R}^n, \} \end{aligned}$$

wobei $(a,b] = (a_1,b_1] \times \ldots \times (a_n,b_n]$ das n-dimensionale, halboffene Intervall zwischen a und b bezeichnet und $a \le b$ komponentenweise zu lesen ist. (Das Intervall $(-\infty,c]$ ist analog definiert.)

2. Aufgabe (Maß, 4 Punkte) Beweisen Sie die Aussage: Ist Ω eine nichtleere, überabzählbare Menge und

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \colon A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

ein Mengensystem über Ω, so wird durch

$$\mu \colon \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}\,, \quad \mu(A) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. (**Hinweis:** Machen Sie sich klar, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.)

3. Aufgabe (Lebesgue-Maß, 4 Punkte)
Zeigen, dass das n-dimensionale Lebesgue-Maß $\lambda^n \colon \mathcal{B}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ unter Drehungen invariant ist, d.h., ist $D \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Transformation (Drehung), so gilt

$$\lambda^n(D(A)) = \lambda^n(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}^n$, wobei $D(A)$ die Menge $\{Dx \colon x \in A\}$ bezeichnet.

4. Aufgabe (Messbarkeit, 4 Punkte)
Gegeben seien zwei Messräume $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, wobei $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ von einem Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugt werde. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ genau dann messbar ist, wenn

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_1\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie als erstes, dass die Elemente des Mengensystems

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega_2 \colon f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1\}$$

eine σ-Algebra über Ω_2 bilden.