Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

Probeklausur zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2014/2015

Teil I

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr " oder „falsch" sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch oder nicht angekreuzte Aussage erhalten Sie 0 Punkte.

wahr	falsch	Aussage
	x	Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen kann maximal endlich viele Unstetigkeitsstellen haben.
x		Für jede Folge von unabhängigen, identisch verteilten, integrierbaren Zufallsvariablen gilt das schwache Gesetz der großen Zahlen.
	x	Die Vereinigung von zwei σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra.
x		Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind, dann gilt $\mathbb{P}(A\|B) = \mathbb{P}(A)$.
	x	Eine reelle Zufallsvariable mit negativem Erwartungswert nimmt nur negative Werte an.
	x	Für zwei reelle Zufallsvariable X, Y gilt $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
x		Für eine reelle Zufallsvariable X gilt stets $\mathrm{cov}(X, X) \geq 0$.
x		Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ gibt es eine beschränkte Menge mit $\mathbb{P}(E) > 0.99$.
	x	Aus $\mathbb{E}(\|X\|) < \infty$ folgt $\mathbb{E}(X^2) < \infty$.
x		Es gilt $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit genau dann, wenn $\|X - X_n\| \to 0$ in Wahrscheinlichkeit.

Teil II

1. Aufgabe (2+4=6 Punkte)
Auf $\Omega = \{1,2,3,4\}$ mit der Gleichverteilung betrachte man die Zufallsvariablen

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in \{2\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Prüfen Sie, ob X und Y unabhängig sind.

b) Sei $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Finden Sie drei verschiedene Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{E}$, für die gilt: A und B sind unabhängig, B und C sind unabhängig, aber A und C sind nicht unabhängig. D.h., die Eigenschaft der Unabhängigkeit ist nicht transitiv.

Lösung:
a) (2 Punkte) Damit X und Y unabhängig sind, muss $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$ für alle möglichen Werte $x, y \in \{0,1\}$ gelten. Es ist aber beispielsweise

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\{2,4\}) \cdot \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1),$$

d.h., X und Y sind nicht unabhängig.
b) (4 Punkte) Wähle zum Beispiel $A = \{1,2\}$, $B = \{2,4\}$ und $C = \{3,4\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

und

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

aber

$$\mathbb{P}(A \cap C) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C).$$

2. Aufgabe (2+4=6 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable, deren Dichte f für $a \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + ax & : \ x \in [0,1] \\ 0 & : \ x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases}$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie a.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung:
a) (2 Punkte) Eine Dichtefunktion muss im Integral den Wert 1 ergeben: $\int_0^1 \frac{1}{2} + at\, dt = 1$. Also

$$\int_0^1 \frac{1}{2} + at\, dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}at^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a \stackrel{!}{=} 1.$$

Umstellen ergibt $a = 1$.
b) (4 Punkte) Für eine reelle Zufallsvariable mit Dichtefunktion f gilt allgemein $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x f(x)\, dx = \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} + x\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x + x^2\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Die Varianz ist gegeben durch $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Mit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{1}{2} + x\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

folgt daher

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}.$$

3. Aufgabe (2+4=6 Punkte)
Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

a) Bestimmen Sie Y so, dass $X_n \xrightarrow{\text{i.W.}} Y$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass auch $X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} Y$ für das in a) gewählte Y gilt. Verwenden Sie dabei nicht das Ergebnis aus a), sondern direkt die Definition von Konvergenz in Verteilung.

Lösung:
a) (2 Punkte) Wähle $Y = 0$ f.s., d.h. $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$. Fixiere ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \begin{cases} 0 & : \quad 1/n \leq \varepsilon \\ 1 & : \quad 1/n > \varepsilon. \end{cases}$$

Damit gilt $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$ für alle $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Insgesamt folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0,$$

sodass $X_n \xrightarrow{\text{i.W.}} Y$.
b) (4 Punkte) Es ist

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 1 & : \quad x \geq 0 \end{cases},$$

d.h., F_Y ist stetig überall bis auf an der Stelle $x = 0$. Daher muss $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(x)$ für alle $x \neq 0$ gezeigt werden. Es ist

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -1/n \\ 1/2 & : \quad -1/n \leq x < 1/n \\ 1 & : \quad x \geq 1/n \end{cases}.$$

Sei $x < 0$. Dann gilt $F_{X_n}(x) = 0$ für $x < -\frac{1}{n}$ bzw. $n > -\frac{1}{x} > 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 0 = F_Y(x)$.
Sei $x > 0$. Dann gilt $F_{X_n}(x) = 1$ für $x \geq \frac{1}{n}$ bzw. $n \geq \frac{1}{x} > 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 1 = F_Y(x)$.

4. Aufgabe (3+3=6 Punkte)
Die Zufallsvariable X sei poissonverteilt zum Parameter $\lambda > 0$, d.h., es ist $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ für $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Dabei ist λ unbekannt und soll durch k unabhängige Messungen $X_1, ..., X_k$ geschätzt werden. Wir wählen den Schätzer

$$T_k = T(X_1, ..., X_k) = \frac{X_1 + ... + X_k}{k}.$$

a) Untersuchen Sie den Schätzer T_k auf Erwartungstreue und Konsistenz.

b) Angenommen der wahre Wert ist $\lambda = 4$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10.000 Messungen diesen Wert bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0.05$ genau zu schätzen? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit entweder approximativ mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes oder schätzen Sie sie mithilfe der Tschebyschev-Ungleichung ab. (Sie können sich einen der beiden Lösungswege aussuchen!)
Eine Tabelle zur Standardnormalverteilung finden Sie im Anhang auf Seite 4.

Lösung:
a) (3 Punkte) Für die Poissonverteilte Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}(X) = \lambda$, d.h. es gilt ebenso $\mathbb{E}(X_i) = \lambda$ für alle unabhängigen Kopien X_i, $i = 1, ..., k$, von X. Damit folgt

$$\mathbb{E}(T_k) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + ... + X_k}{k}\right) = \frac{1}{k}(\mathbb{E}(X_1) + ... + \mathbb{E}(X_k)) = \mathbb{E}(X) = \lambda,$$

d.h., T_k ist erwartungstreu.
Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahl gilt

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_k - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

für den Mittelwert $\bar{X}_k$, d.h. $\bar{X}_k \xrightarrow{\text{i.W.}} \mathbb{E}(X)$. Wegen $T_k = \bar{X}_k$ und $\lambda = \mathbb{E}(X)$ folgt sofort $T_k \xrightarrow{\text{i.W.}} \lambda$ und T_k ist konsistent.
b) (3 Punkte) Verwende den zentralen Grenzwertsatz: Danach ist $\bar{X} = \bar{X}_{10.000}$ annähernd normalverteilt, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 4| < 0.05) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X} - 4}{\sqrt{1/10.000 \cdot 4}}\right| < \frac{0.05}{\sqrt{1/10.000 \cdot 4}}\right) \approx \mathbb{P}(|Y| < 2.5),$$

wobei Y standardnormalverteilt ist. Umformen und Ablesen aus der Tabelle zur Standardnormalvertilung ergibt

$$\mathbb{P}(|Y| < 2.5) = \mathbb{P}(Y < 2.5) - \mathbb{P}(Y \leq -2.5) = 2 \cdot \mathbb{P}(Y < 2.5) - 1 = 0.9876.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also annähernd 99%.

Verwende die Tschebyschev-Ungleichung: Danach gilt

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 4| < 0.05) = 1 - \mathbb{P}(|\bar{X} - 4| \geq 0.05) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(\bar{X})}{0.05^2} = 1 - \frac{1/10.000 \cdot 4}{0.05^2} = 0.84.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also mindestens 84%.