

1. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2013/2014

Abgabe bis Freitag, 31.10.14, 12 Uhr

1. Aufgabe (Mengensysteme, 4 Punkte)

Gegeben sei die Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Betrachten Sie die folgenden Mengensysteme S_1, S_2, S_3, S_4 auf Ω und beurteilen Sie jeweils, ob diese stabil bezüglich \cup und \cap sind:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \\ S_2 &= \{\{1\}, \{1, 2\}\} \\ S_3 &= \{\emptyset, \Omega, \{1\}\} \\ S_4 &= \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} \end{aligned}$$

Welche dieser Mengensysteme bilden eine σ -Algebra auf Ω ? Wie kann man die Mengensysteme gegebenenfalls erweitern, um jeweils eine σ -Algebra zu erhalten?

2. Aufgabe (Wahrscheinlichkeitsmaß, 4 Punkte)

Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω . Wir fixieren ein $\omega_0 \in \Omega$ und definieren die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ wie folgt:

$$\mathbb{P}(E) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \omega_0 \notin E, \\ 1 & \text{wenn } \omega_0 \in E. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Es wird das zu ω_0 gehörige *Punktmaß* genannt.

3. Aufgabe (Bernoulli-Prozess, 4 Punkte)

Eine Münze mit $\mathbb{P}(\text{Kopf}) = p$, $0 \leq p \leq 1$, wird immer wieder geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Kopf tritt irgendwann auf"?

4. Aufgabe (Kombinatorik, 4 Punkte)

Eine Waschmittelfirma will für ihr neues Waschmittel "SOREIN" werben. Zu diesem Zweck wird jedem Paket ein Buchstabe des Wortes "SOREIN" beigefügt und zwar so, dass insgesamt jeder Buchstabe gleich häufig vorkommt. Jedem Kunden, der den Namen des Waschmittels aus den den Paketen beiliegenden Buchstaben zusammensetzen kann, wird ein Gratispaket versprochen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass ein Verbraucher nach dem Kauf von 7 Paketen das Wort "SOREIN" bilden kann?

Hinweis: Geben Sie auch den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum (mit kurzer Begründung) an.