

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I



Christof Schütte

Wintersemester 2018/19

Computer-orientierte Mathematik

5. Vorlesung - Christof Schuette

23.11.18

Relative Kondition der Grundrechenarten:

Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.

Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert

(Auslöschung). **Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.**

Relative Kondition der Grundrechenarten:

Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.

Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert

(Auslöschung). **Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.**

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:

Die **absolute Kondition** κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|).$$

Relative Kondition der Grundrechenarten:

Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.
Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert
(Auslöschung). **Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.**

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:

Die **absolute Kondition** κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|).$$

Sätze zur absoluten Kondition:

Ist f differenzierbar in x_0 , so gilt $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)|$.

Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L , so gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq L$.

Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt

$$\kappa_{\text{abs}} \leq \kappa_{\text{abs}}(g, y_0) \kappa_{\text{abs}}(h, x_0) .$$

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \neq x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$

Problem: (*)

Auswertung von f an der Stelle x_0

Definition (Relative Kondition)

Die **relative Kondition** κ_{rel} von (*) ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|).$$

Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{rel} vor, so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

Satz:

Es gilt

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{\text{abs}}$$

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

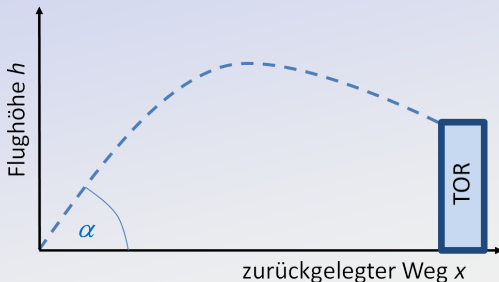
$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

Satz:

Es gilt

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{\text{abs}}$$

ACHTUNG: Formel gilt nicht für Funktionen mit mehreren Variablen!

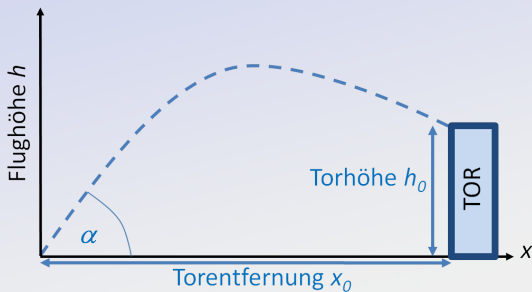


Flughöhe und zurückgelegter Weg in Abhängigkeit von der Zeit t , der Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$h(t) = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x(t) = vt \cos \alpha$$

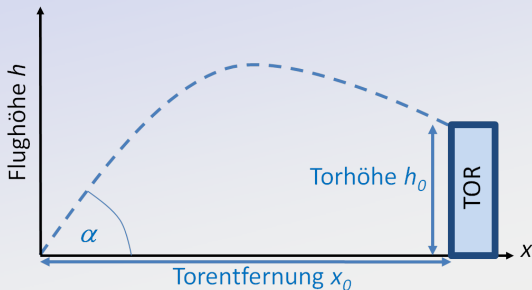
g : Fallbeschleunigung = $9.81m/s^2$



Überflughöhe in Abhängigkeit von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v, \alpha) = x_0 \tan \alpha - \frac{1}{2}g \frac{x_0^2}{v^2 \cos^2 \alpha}$$

g : Fallbeschleunigung = $9.81m/s^2$

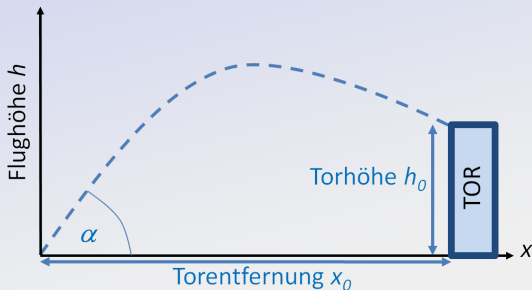


Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0, \alpha_0) = h_0 = 2.50\text{m}$$

$$g = 9.81\text{m/s}^2 \Rightarrow \text{z.B. } \alpha_0 = 45^\circ, v_0 = 13.64\text{m/s}$$

Lattentreffer mit zurückspringendem Ball



Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta \alpha) = h_0 + \Delta h = 2.50m \pm 0.04m$$

g : Fallbeschleunigung = $9.81m/s^2$

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta \alpha) = h_0 + \Delta h = 2.50m \pm 0.04m$$

Maximale "Eingabefehler" Δv und $\Delta \alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04$?

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta \alpha) = h_0 + \Delta h = 2.50m \pm 0.04m$$

Maximale "Eingabefehler" Δv und $\Delta \alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04$?

Vereinfachung: Perfekter Abschusswinkel $\Delta \alpha = 0$

$$|\Delta h(\Delta v)| = |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| \leq 0.04m$$

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta \alpha) = h_0 + \Delta h = 2.50m \pm 0.04m$$

Maximale "Eingabefehler" Δv und $\Delta \alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04m$?

Vereinfachung: Perfekter Abschusswinkel $\Delta \alpha = 0$

$$|\Delta h(\Delta v)| = |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| \leq 0.04m$$

Kondition

$$\begin{aligned} |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| &\leq \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) \cdot |\Delta v| \\ \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \left| \frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0) \right| \end{aligned}$$

Vereinfachung: Perfekter Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g \frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) = \left| \frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0) \right| = 2g \frac{x_0^2}{v_0^3}$$

$$v_0 = \frac{|x_0| \sqrt{g}}{\sqrt{x_0 - h_0}}$$

$$\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{(x_0 - h_0)^{3/2}}{x_0} = 1.98 \text{sec}$$

Vereinfachung: Perfekter Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g \frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{(x_0 - h_0)^{3/2}}{x_0} = 1.98 \text{sec}$$

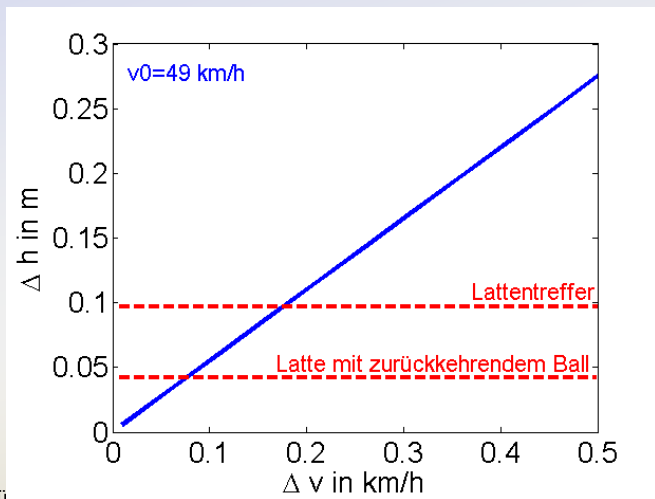
$$\kappa_{\text{rel}}(H, v_0) = \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) \frac{v_0}{H(v_0, \alpha_0)}$$

$$\kappa_{\text{rel}}(H, v_0) = 2 \frac{|x_0 - h_0|}{h_0} = 10.8$$

Ronaldinhos Kondition: Fehler in der Überflughöhe

Perfekter Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

Fehler Δv in Abschussgeschwindigkeit



Perfekter Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

Fehler Δv in Abschussgeschwindigkeit

Damit der Ball zu ihm zurückspringt müsste Ronaldinho die Abschussgeschwindigkeit auf

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{0.05 \text{ km/h}}{49 \text{ km/h}} \approx 0.001,$$

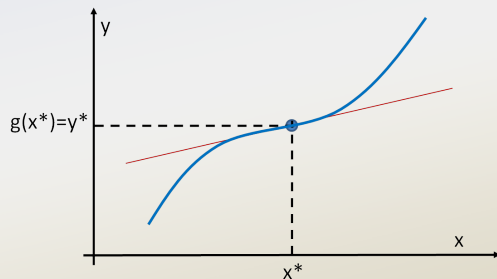
also auf ein Promille genau treffen.

Nichtlineare Gleichungen

gegeben: Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $y^* \in \mathbb{R}$

Problem: (*)

Finde $x^* \in I$ so dass $g(x^*) = y^*$



Definition:

Die **absolute Kondition** κ_{abs} von (*) ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|x^* - x| \leq \kappa_{\text{abs}} |y^* - y| + o(|y^* - y|)$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y| > 0$ zu y^* und den zugehörigen Lösungen x des **gestörten Problems**

$$x \in (a, b) : \quad g(x) = y .$$

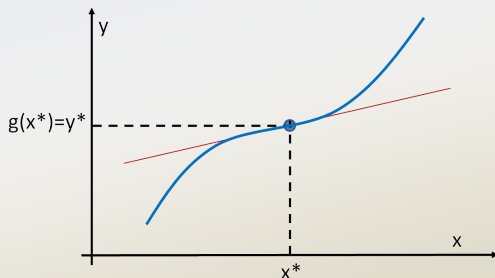
Existiert keine solche reelle Zahl κ_{abs} , so wird $\kappa_{\text{abs}} = \infty$ gesetzt.

Satz:

Sei g differenzierbar in I , $x^* \in I$ und es gelte $g(x^*) = y^*$ sowie

$$g'(x^*) \neq 0.$$

Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < x^* < \beta < b$, so daß das gestörte Problem (*) für jedes $y \in V = [g(\alpha), g(\beta)]$ eine **eindeutig bestimmte Lösung** $x \in U = [\alpha, \beta]$ besitzt.



Satz:

Sei g differenzierbar in I , $x^* \in I$ und es gelte $g(x^*) = y^*$ sowie

$$g'(x^*) \neq 0.$$

Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < x^* < \beta < b$, so daß das gestörte Problem (*) für jedes $y \in V = [g(\alpha), g(\beta)]$ eine **eindeutig bestimmte Lösung** $x \in U = [\alpha, \beta]$ besitzt.

Folgerung:

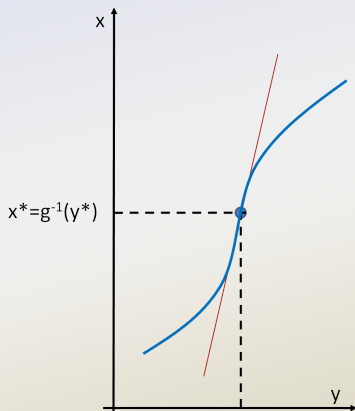
Falls $g'(x^*) \neq 0$ existiert eine **Umkehrfunktion** $g^{-1} : V \rightarrow U$ so dass

$$g(g^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in V.$$

Äquivalentes Problem

gegeben: Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $y^* \in \mathbb{R}$ mit $g'(x^*) \neq 0$

Problem: Auswertung von $g^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ in $y^* \in V$

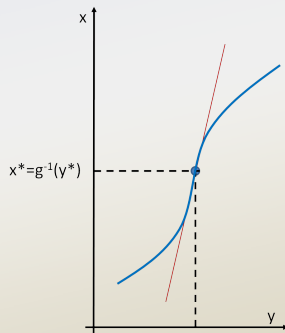
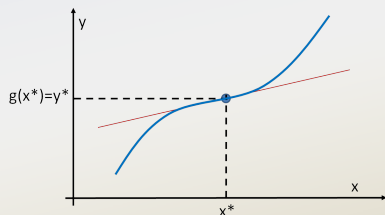


Ableitung der Umkehrfunktion

Unter den obigen Voraussetzungen ist g^{-1} differenzierbar und es gilt

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \quad \forall y \in V.$$

Denn, mit Kettenregel: $1 = \frac{d}{dy}y = \frac{d}{dy}g(g^{-1}(y)) = g'(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1})'(y)$



Sei g differenzierbar, $x^* \in (a, b)$, $g(x^*) = y^*$, sowie $g'(x^*) \neq 0$.
Dann ist die **absolute Kondition** κ_{abs} der Lösung der nichtlinearen Gleichung bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Sei g differenzierbar, $x^* \in (a, b)$, $g(x^*) = y^*$, sowie $g'(x^*) \neq 0$.
Dann ist die **absolute Kondition** κ_{abs} der Lösung der nichtlinearen Gleichung bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Die **relative Kondition** ergibt sich zu

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|y^*|}{|g^{-1}(y^*)|} \kappa_{\text{abs}} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*| |g'(x^*)|}.$$

Einfachstes Beispiel

Gegeben: $g(x) = \frac{1}{\gamma}(x - 1) + 1$, $y^* = 1$

Lösung: $x^* = 1$, $g^{-1}(y) = 1 + \gamma(y - 1)$, $x^* = 1$

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|} = \kappa_{\text{abs}} = \gamma$$

Konsequenz: schlecht konditioniert für grosses γ
(=schleifender Schnitt)

