



*Zwei-Fächer-Bachelor-Studiengang Mathematik*

# BACHELORARBEIT

**Der Menger-Schwamm und das Kugelvolumen  
in höheren Dimensionen**

*vorgelegt von*  
**Niklas Müller**

*Betreuender Gutachter*  
**Prof. Dr. Daniel Grieser**

*Zweiter Gutachter*  
**Dr. Ivan Shestakov**

*Oldenburg, den 29. Oktober 2018*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
1.1	Der SIERPINSKI-Teppich . . . . .	1
1.2	Der MENGER-Schwamm . . . . .	2
1.3	Die Modifikation von SIERPINSKI-Teppich und MENGER-Schwamm . . . . .	3
1.3.1	Das WALLIS-Produkt . . . . .	4
1.3.2	Volumen und Flächeninhalt von SIERPINSKI-Teppich und MENGER-SCHWAMM . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Das Kugelvolumen</b>	<b>11</b>
2.1	Einige Grundlagen zur Berechnung des Kugelvolumens . . . . .	11
2.2	Die Berechnung des benötigten Integrals . . . . .	13
2.3	Der Nenner des Kugelvolumens: Die Gamma-Funktion . . . . .	15
2.4	Der Beweis der Volumenformel . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Der höherdimensionale Würfel</b>	<b>19</b>
3.1	Der Würfel im Allgemeinen . . . . .	19
3.2	Die Anzahl der Seitenelemente . . . . .	20
3.2.1	Eine kombinatorisch-theoretische Herleitung . . . . .	20
3.2.2	Ein kombinatorisch-anschaulicher Beweis . . . . .	21
3.3	Die Suche nach einer Durchbohrung . . . . .	22
3.3.1	Der zweidimensionale Fall . . . . .	22
3.3.2	Eine Verallgemeinerung unserer Durchbohrung . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Die Volumengleichheit</b>	<b>26</b>
4.1	Das Volumen des modifizierten Menger-Schwamms . . . . .	26
4.2	Der Beweis der Volumengleichheit . . . . .	27
4.3	Die Anschaulichkeit im Höherdimensionalen . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>34</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>36</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>37</b>
	<b>Eigenständigkeitserklärung</b>	<b>38</b>

# 1 Einleitung und Motivation

Dass die Unendlichkeit faszinierende Phänomene aufwerfen kann, ist nicht bloß Mathematikern schon lange bekannt und mittlerweile fast schon populär geworden. Auch in dieser Arbeit soll es um ein Phänomen im Unendlichen gehen, die konkrete Ausgangssituation sollen dabei der SIERPINSKI-Teppich sowie der MENGER-Schwamm sein. Es handelt sich dabei um fraktale Figuren unterschiedlicher Dimension, die aber beide eine Gemeinsamkeit mitbringen, die sich im Flächeninhalt beziehungsweise im Volumen äußert.

Aufgeworfen wurde die Thematik durch MATT PARKER, der sich selbst als „Stand-Up-Mathematician“ bezeichnet.<sup>1</sup> Unter anderem auf YouTube versucht er auf eine humorvolle und unterhaltsame Art und Weise seinem Zuschauer mathematische Themen näher zu bringen und durch dieses Vorgehen ist auch die Kernfrage dieser Bachelorarbeit entstanden. Das konkrete Video ist dabei unter [Par16] zu finden. Darin berichtet er über die oben bereits genannten SIERPINSKI-Teppiche und MENGER-Schwämme, untersucht diese hinsichtlich einer besonderen Eigenschaft und modifiziert jene, um weitere Erkenntnisse zu erlangen. Um genau diese Inhalte soll es in diesem einleitenden Kapitel und damit in den folgenden Unterkapiteln gehen:

## 1.1 Der Sierpinski-Teppich

Beim SIERPINSKI-Teppich, benannt nach WALCLAW SIERPIŃSKI, handelt es sich um ein Fraktal, das folgendermaßen definiert ist:

**Definition 1.1.** *Der SIERPINSKI-Teppich.*

Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Wir bezeichnen den SIERPINSKI-Teppich als das Grenzbild  $T$ , welches durch den folgenden Iterationsprozess entsteht. Dabei ist jedes  $T_k$  eine Vereinigung von kongruenten Quadraten mit achsenparallelen Seiten.

1. Wir wählen als Start für  $T_0$  das Einheitsquadrat, wie es in Abbildung 1.1 (Bild 1) dargestellt ist.
2. Für  $k \in \mathbb{N}$  erhält man  $T_k$  aus  $T_{k-1}$ , indem man jedes der Quadrate von  $T_{k-1}$  in  $9 = 3 \cdot 3$  kongruente kleinere Quadrate zerlegt und davon jeweils das mittlere entfernt.
3. Der Sierpinski Teppich  $T$  ist definiert als der Schnitt aller  $T_k$ .

Das Hervorgehen des SIERPINSKI-Teppichs aus dem Einheitsquadrat sowie die ersten Iterationsstufen sind in Abbildung 1.1 dargestellt.

---

<sup>1</sup>Vergleiche [Par18].

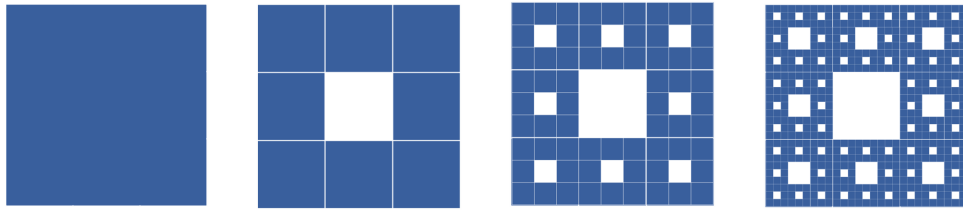


Abbildung 1.1: Die ersten vier Iterationsstufen des SIERPINSKI-Teppichs.

Die besondere Eigenschaft dieses Fraktals, auf der im Folgenden der Fokus liegen soll, äußert sich im Flächeninhalt. Da in jeder Iterationsstufe insgesamt genau  $1/9$  des Flächeninhalts entfernt wird, berechnet sich der Gesamtflächeninhalt des Fraktals mit unendlich vielen Iterationen, wobei der Flächeninhalt  $A_{Sierpinski}$  der nullten Stufe 1 ist, als

$$A_{Sierpinski} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0.$$

Der SIERPINSKI-Teppich ist damit also eine geometrische Figur mit einem Flächeninhalt von 0.

## 1.2 Der Menger-Schwamm

Übertragen wir die Überlegungen des vorangegangenen Kapitels in die dritte Dimension, so entsteht ein Würfel, der auf allen Seitenflächen wie der SIERPINSKI-Teppich aussieht und sich Menger-Schwamm nennt, benannt nach KARL MENGER. Dargestellt ist dieser in den ersten Iterationsstufen in Abbildung (1.2). Die genaue Definition lässt sich analog zum zweidimensionalen Vorbild wie folgt formulieren:

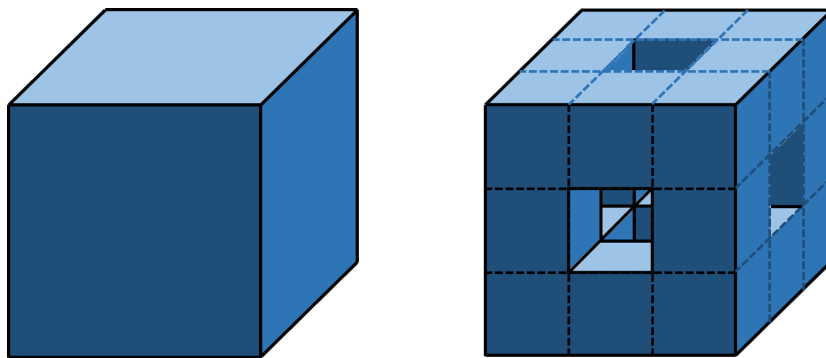


Abbildung 1.2: Die ersten zwei Iterationsstufen des Menger-Schwamms.

**Definition 1.2.** *Der Menger-Schwamm.*

Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Wir bezeichnen den Menger-Schwamm als das Grenzbild  $S$ , welches durch den folgenden Iterationsprozess entsteht. Dabei ist jedes  $S_k$  eine Vereinigung von kongruenten Würfeln mit achsenparallelen Seiten.

1. Wir wählen als Start für  $S_0$  den Einheitswürfel, wie er in Abbildung 1.2 (Bild 1) dargestellt ist.

2. Für  $k \in \mathbb{N}$  erhält man  $S_k$  aus  $S_{k-1}$ , indem man jeden der Würfel von  $S_{k-1}$  in  $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$  kongruente kleinere Würfel zerlegt. Anschließend werden, vom mittleren Würfel jeder Seitenfläche ausgehend, alle drei hintereinander positionierten Würfel entfernt, sodass der in Abbildung 1.2 (Bild 2) dargestellte Würfel entsteht.
3. Der MENGER-Schwamm  $S$  ist definiert als der Schnitt aller  $S_k$ .

Wir erhalten durch diese Konstruktion ein Volumen von  $20/27$  des Volumens der vorherigen Stufe in jeder Iterationsstufe, da von allen 27 kleineren Würfeln jeweils drei in jede Richtung, aber die Mitte nicht mehrfach, also  $3 \cdot 3 - 2 = 7$  Würfel, entfernt werden. Nach unendlich vielen Iterationen erhalten wir mit einem Volumen des Würfels der nullten Stufe von 1 also ein Gesamtvolumen  $V_{Menger}$  von

$$V_{Menger} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{20}{27} \right)^n = 0.$$

Der MENGER-Schwamm ist also – ganz analog zum SIERPINSKI-Teppich – eine geometrische Figur mit einem Volumen von 0.

### 1.3 Die Modifikation von Sierpinski-Teppich und Menger-Schwamm<sup>2</sup>

Wir wollen die Ideen vom SIERPINSKI-Teppich und MENGER-Schwamm aufgreifen und leicht modifizieren, um damit ein neues Fraktal zu erzeugen. Dazu wollen wir mit *zunehmender* Iteration *weniger* entfernen, um am Ende einen Flächeninhalt ungleich null zu erhalten.

Konkret heißt das für den SIERPINSKI-Teppich, dass anstelle der im zweiten Iterationsschritt ursprünglich entfernten  $1/9$  des vorherigen Flächeninhalts bloß  $1/25$  entfernt werden. Dazu teilen wir analog zum obigen Vorgehen jedes Quadrat von  $T_1$  also im zweiten Schritt in  $25 = 5 \cdot 5$  Quadrate. Mit diesem Vorgehen fahren wir fort und entfernen im dritten Iterationsschritt dann  $1/49$  des vorherigen Flächeninhalts durch Teilen jedes Quadrates von  $T_2$  in  $49 = 7 \cdot 7$  Quadrate. Das Prinzip lässt sich allgemein wie folgt formulieren: Anstelle des Teilens jedes Quadrates von  $T_{k-1}$  in  $9 = 3 \cdot 3$  kleinere Quadrate, betrachten wir das Quadrat der nächsthöheren ungeraden Zahl und teilen jedes Quadrat von  $T_{k-1}$  in eben so viele kleinere Quadrate. Der Flächeninhalt  $A_{Sierpinski}^*$  nach unendlich vielen Iterationsschritten ergibt sich also durch

$$A_{Sierpinski}^* = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2}.$$

Analog soll auch beim MENGER-Schwamm vorgegangen werden: Die nächsthöhere Iterationsstufe entsteht, indem jeder der Würfel von  $S_{k-1}$  zunächst in  $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ , anschließend in

<sup>2</sup>Auch die Überlegungen der Modifikation entstammen aus [Par16] und wurden in [Peg16] aufgegriffen und präzisiert.

$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ , ... kongruente kleinere Würfel zerlegt wird und anschließend die entstehenden kleineren Würfel analog zum Vorgehen beim originalen MENGER-Schwamm entfernt werden. Dazu „durchbohren“ wir diesen in jede der drei Dimensionsrichtungen, indem wir jeweils die mittleren Würfel entnehmen. Um dabei die Mitte nicht mehrmals zu zählen, addieren wir am Ende die zwei zu häufig gezählten Würfel wieder hinzu. Hier ergibt sich das Volumen  $V_{Menger}^*$  nach unendlich vielen Iterationsschritten durch

$$V_{Menger}^* = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3 - 3 \cdot (2n+1) + 2}{(2n+1)^3}.$$

Wir wollen diese neuen Fraktale „modifizierte SIERPINSKI-Teppiche“ bzw. „modifizierte MENGER-Schwämme“ taufen – in Abbildung 1.3 sind diese in der dritten Iterationsstufe dargestellt. Mit Verweis auf spätere Erkenntnisse in noch folgenden Kapiteln<sup>3</sup> wollen wir an dieser Stelle auf eine konkrete Definition verzichten.

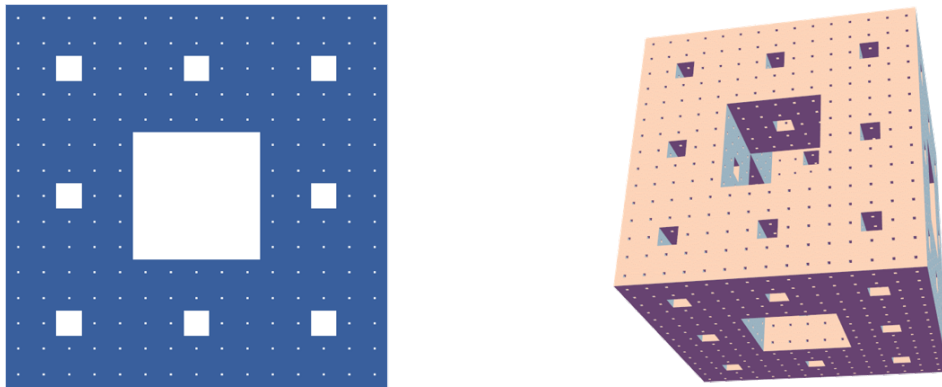


Abbildung 1.3: Der modifizierte SIERPINSKI-Teppich (links) und der modifizierte MENGER-Schwamm (rechts), jeweils in der dritten Iterationsstufe.<sup>4</sup>

Im nächsten Schritt sind wir nun an der Berechnung des Flächeninhalts beziehungsweise des Volumens dieser Fraktale interessiert. Dazu benötigen wir jedoch noch ein Hilfsmittel, welches im folgenden Unterkapitel Gegenstand der Untersuchung sein soll:

### 1.3.1 Das Wallis-Produkt<sup>5</sup>

Das nach dem britischen Mathematiker JOHN WALLIS benannte WALLIS-Produkt soll uns bei der bevorstehenden Berechnung behilflich sein. Multipliziert werden dabei die folgenden Brüche:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

<sup>3</sup>Die konkrete Definition ist in 3.7 zu finden.

<sup>4</sup>Rechts: Entnommen aus [Peg16].

<sup>5</sup>Vergleiche [Koe04].

Das Prinzip wird schnell klar, sodass wir den folgenden Ausdruck, den wir als  $w_k$  bezeichnen wollen, finden können:

$$w_k = \prod_{n=1}^k \frac{(2n)^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Schnell stellt sich die Frage nach der Konvergenz für  $k \rightarrow \infty$ , die durch folgenden Satz beantwortet wird:

**Satz 1.3.** *Das WALLIS-Produkt.*

Es gilt:

$$w_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k \frac{(2n)^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

Dieses Ergebnis wirkt zunächst überraschend und gleichzeitig faszinierend, da das Auftreten von  $\pi$  im Grenzwert dieses Produktes sicherlich nicht für jeden zu erwarten war. Als nächstes wollen wir uns dem Beweis des Satzes zum WALLIS-Produkt widmen, auch wenn jener nur wenig konstruktiv und der Beginn ein wenig unerklärlich scheint:

**Beweis** von Satz 1.3.

Der Beweis beruht auf der Berechnung des Integrals

$$c_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für  $n \geq 2$  erhalten wir durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \sin^{n-1}(x) \, dx \\ &= \left[ -\sin^{n-1}(x) \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n-1) \cdot \cos^2(x) \cdot \sin^{n-2}(x) \, dx \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cdot \cos^2(x) \cdot \sin^{n-2}(x) \, dx \\ &= (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \cdot \sin^{n-2}(x) \, dx, \quad \text{da } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\ &= (n-1) \cdot \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx \right) \\ &= (n-1) \cdot (c_{n-2} - c_n) \end{aligned}$$

Durch Umstellen gelangen wir zu einer rekursiven Darstellung für  $c_n$ :

$$\begin{aligned} c_n &= (n-1) \cdot (c_{n-2} - c_n) \\ \Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Rightarrow \frac{c_n}{c_{n-2}} = \frac{n-1}{n} \quad (1.2)$$

Unterscheiden wir nun gerade und ungerade Zahlen, so erhalten wir durch (1.1) folgende Darstellungen:

i) **Für gerade  $n$  gilt mit  $n = 2k$ , wobei  $k \in \mathbb{N}_0$ :**

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \\ c_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot c_{2k-2} \\ &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot c_{2k-4} \\ &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot c_0 \\ &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ii) **Für ungerade  $n$  gilt mit  $n = 2k+1$ , wobei  $k \in \mathbb{N}_0$ :**

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ c_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} \cdot c_{2k-1} \\ &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot c_{2k-3} \\ &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot c_1 \\ &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Betrachten wir nun erneut das WALLIS-Produkt und ergänzen unsere neu erlangten Er-



kenntnisse über  $c_n$  aus (1.3) und (1.4), so gilt:

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1) \cdot (2k+1)} \\ &= \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k+1} \right) \cdot \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2k}{2k-1} \right) \\ &= \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k+1} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} \right)^{-1} \\ &= \frac{c_{2k+1}}{c_{2k}} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Für unseren Beweis bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{2k+1}}{c_{2k}} = 1.$$

Für  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sin(x) \leq 1 \\ \Rightarrow \sin^{2k}(x) &\geq \sin^{2k+1}(x) \geq \sin^{2k+2}(x) \\ \Rightarrow c_{2k} &\geq c_{2k+1} \geq c_{2k+2} \\ \Rightarrow 1 &\geq \frac{c_{2k+1}}{c_{2k}} \geq \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} \stackrel{(1.2)}{=} \frac{2k+1}{2k+2} \end{aligned}$$

Da aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k+2} = 1 \text{ ist,}$$

folgt direkt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} = 1 \text{ ist.}$$

Wir konnten unseren Grenzwert also nach oben wie nach unten gegen 1 abschätzen, und erhalten schließlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{2k+1}}{c_{2k}} = 1.$$

□

### 1.3.2 Volumen und Flächeninhalt von Sierpinski-Teppich und Menger-Schwamm

Die Frage, die sich an dieser Stelle nun unlängst aufdrängt, ist die Frage nach dem Zusammenhang zwischen WALLIS-Produkt und modifiziertem SIERPINSKI-Teppich. Doch sie

lässt sich schnell beantworten, denn Umformen des WALLIS-Produktes ergibt:

$$\begin{aligned}
w_\infty &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow 4 \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots = \pi \\
&\Rightarrow 4 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2) \cdot 2n}{(2n+1)^2} = \pi \\
&\Rightarrow 4 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2 + 2 \cdot 2n + 1 - 1}{(2n+1)^2} = \pi \\
&\Rightarrow 4 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} = \pi \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Damit haben wir nicht nur den Flächeninhalt des modifizierten SIERPINSKI-Teppichs berechnen, sondern gleichzeitig herausfinden können, dass dieser eine Visualisierung des WALLIS-Produktes ist.

Weiterhin konnten wir die faszinierende Erkenntnis erlangen, dass vier aneinandergelagerte modifizierte SIERPINSKI-Teppiche, die damit ein „durchbohrtes“ Quadrat mit einer Kantenlänge von zwei Einheiten bilden, den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreis mit einem Durchmesser von zwei Einheiten besitzen.

Offen geblieben ist die Frage nach dem Volumen des modifizierten MENGER-Schwamms, das wir im Folgenden berechnen wollen. Wir sind also auf der Suche nach

$$V_{Menger}^* = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 3 \cdot (2n+1) + 2}{(2n+1)^3},$$

welchen wir durch das Zurückführen auf das WALLIS-Produkt erhalten wollen. Dazu faktorisieren wir dieses aus dem obigen unendlichen Produkt, weswegen wir zunächst einige Umformungsschritte machen:

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3 - 3 \cdot (2n+1) + 2}{(2n+1)^3} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3(n+1) - (6n+1)(n+1)}{(2n+1)^3(n+1)} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3(n+1) - 6n^2 - 7n - 1}{(2n+1)^3(n+1)} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2(2n+1)(n+1) - (2n+1)^2 - (2n+1)(n+1) + 1}{(2n+1)^3(n+1)} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{((2n+1)^2 - 1)((2n+1)(n+1) - 1)}{(2n+1)^3(n+1)} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1) - 1}{(2n+1)(n+1)}
\end{aligned}$$

Während wir den linken Faktor bereits als WALLIS-Produkt wiedererkennen, gilt es den Grenzwert des rechten Faktors noch zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1) - 1}{(2n+1)(n+1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k \frac{(2n+1)(n+1) - 1}{(2n+1)(n+1)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(n+1)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(k-1) \cdot (2k+1)}{k \cdot (2k-1)} \cdot \frac{k \cdot (2k+3)}{(k+1) \cdot (2k+1)} \right) \end{aligned}$$

Es lässt sich erkennen, dass sich das Teleskopprodukt durch geschicktes Kürzen vereinfachen lässt. Dazu wird der hier zuerst notierte Faktor des Nenners jeweils mit dem ersten Faktor des Zählers des folgenden Bruches sowie der als zweites notierte Faktor des Nenners mit dem zweiten Faktor des Zählers des vorhergehenden Bruches gekürzt. Übrig bleibt das Produkt aus den folgenden Faktoren:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1) - 1}{(2n+1)(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{2k+3}{k+1} \right) = \frac{1}{3} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{2k+3}{k+1} \right) = \frac{2}{3}$$

Es ergibt sich schließlich für das Volumen des modifizierten MENGER-Schwamms:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 3 \cdot (2n+1) + 2}{(2n+1)^3} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1) - 1}{(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{w_{\infty}}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Das können wir wie folgt formulieren:

$$8 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 3 \cdot (2n-1) + 2}{(2n+1)^3} = \frac{4}{3} \cdot \pi$$

Wir erhalten ein weiteres faszinierendes Ergebnis, denn das Volumen eines „durchbohrten“ Würfels, der aus acht modifizierten MENGER-Schwämmen besteht und somit eine Kantenlänge von zwei Einheiten besitzt, entspricht exakt dem Volumen einer Kugel mit zwei Einheiten Durchmesser – doch noch faszinierender: Dieses Phänomen ist uns nicht unbekannt. Bereits im Zweidimensionalen haben wir diesen Zusammenhang bei den Flächeninhalten entdeckt.

Doch das alles muss kein glücklicher Zufall sein, unsere Intuition liefert uns schon eine mögliche Erklärung: Sowohl der Kreis bzw. die Kugel entstehen durch einen Grenzprozess, nichts anderes passiert bei unseren zwei- bzw. dreidimensionalen Fraktalen.<sup>6</sup> Besteht also die Möglichkeit, dass sich das hier entdeckte Phänomen auch in höheren – zwar

---

<sup>6</sup>Vergleiche [Par16].

anschaulich nur noch schwer vorstellbaren – Dimensionen zeigt? Mit der Beantwortung dieser Fragestellung möchte ich mich auf den folgenden Seiten beschäftigen und ich lade Sie herzlich dazu ein, mich auf dieser Reise durch die Welt der höherdimensionalen MENGER-Schwämme zu begleiten.

Die Kernfrage meiner Bachelorarbeit möchte ich an dieser Stelle formulieren:

**„Lässt sich in jeder Dimension  $d \geq 2$  eine fraktale „Durchbohrung“ des Einheitswürfels finden, sodass Vielfache des  $d$ -dimensionalen modifizierten Menger-Schwamms dem Volumen der  $d$ -dimensionalen Kugel entsprechen?“**

Bevor wir nun thematisch in die Untersuchungen einsteigen, möchte ich noch kurz auf das Begriffsverständnis eingehen: Obwohl es sich formal in höheren Dimensionen um das  $d$ -dimensionale Volumen handelt, werde ich im Folgenden zur besseren Lesbarkeit das Wort *Volumen* für den Begriff des  $d$ -dimensionalen Volumens verwenden.

## 2 Das Kugelvolumen

Zunächst wollen wir uns der Frage nach dem Kugelvolumen widmen. Im zweidimensionalen Fall ist die Kreisfläche mit Radius  $r$  mit  $\pi r^2$  und im dreidimensionalen das Kugelvolumen mit  $\frac{4}{3}\pi r^3$  wohl jedem gut bekannt. Doch welches Volumen hat die vierdimensionale oder – wesentlich allgemeiner – die  $d$ -dimensionale Kugel?

Dazu wollen wir zunächst den Begriff der  $d$ -dimensionalen Kugel präzise definieren:

**Definition 2.1.** *Die  $d$ -dimensionale Kugel.*

Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Dann definieren wir die Menge

$$\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |(x_1, \dots, x_d)| \leq r\}$$

als  $d$ -dimensionale Kugel mit Radius  $r$ . Dabei ist  $|(x_1, \dots, x_d)| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_d)^2}$  die euklidische Norm.

Hauptbestandteil dieses Kapitels wird der Beweis des folgenden Satzes sein, welcher uns das Volumen einer  $d$ -dimensionalen Kugel angibt:

**Satz 2.2.** *Das Volumen der  $d$ -dimensionalen Kugel.*

Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für das Volumen  $V_d(r)$  der  $d$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $r$ :

$$V_d(r) = r^d \cdot \frac{\sqrt{\pi}^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

Die benötigten Grundlagen zum Beweis dieses Satzes sowie der Beweis selbst sollen im Folgenden erarbeitet werden.

### 2.1 Einige Grundlagen zur Berechnung des Kugelvolumens

Um uns im Folgenden die Arbeit ein wenig zu erleichtern, wollen wir den Kugelradius als Faktor aus der Volumenformel herauslösen. Es ist anschaulich schnell zu erkennen, dass folgendes Lemma gilt:

**Lemma 2.3.** *Die Faktorisierung des Volumens.*

Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für das Volumen  $V_d(r)$  der  $d$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $r$ :

$$V_d(r) = r^d \cdot V_d(1)$$

Dieses Lemma wollen wir mit Verweis auf [Koe02] unbewiesen belassen.

Es ist nun also lediglich von Bedeutung, das Volumen der Einheitskugel  $V_d(1)$  für alle natürlichen Zahlen  $d$  zu finden. Das Vorgehen dabei ist induktiv: Betrachten wir dazu zunächst eine eindimensionale Einheitskugel auf einer Achse liegend, wie es in Abbildung 2.1 auf der linken Seite dargestellt ist. Das Volumen dieser Kugel lässt sich mithilfe des Integrals

$$V_1(1) = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

schnell berechnen und wir erhalten direkt

$$V_1(r) = 2r.$$

Die zweidimensionale Einheitskugel besteht nun aus unendlich vielen eindimensionalen Kugeln infinitesimal-kleiner Dicke sowie unterschiedlich großem Radius, welcher sich über den SATZ DES PYTHOGORAS als  $r = \sqrt{1 - x^2}$  berechnen lässt. In Abbildung 2.1 ist diese Überlegung auf der rechten Seite grafisch veranschaulicht. Das Volumen dieser zweidimensionalen Einheitskugel lässt sich durch folgende Überlegung bestimmen:

$$V_2(1) = \int_{-1}^1 2r dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

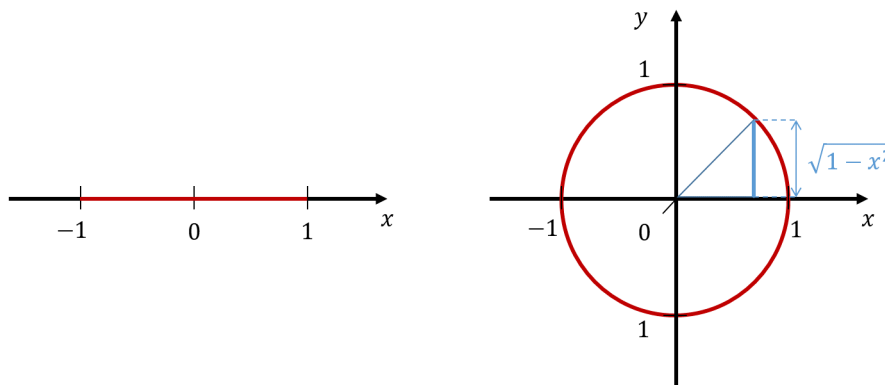


Abbildung 2.1: Eine eindimensionale (links) sowie zweidimensionale (rechts) Kugel im Koordinatensystem.

Die Berechnung dieses Integrals ist allerdings mit unseren bisherigen Kenntnissen<sup>1</sup> ein wenig umständlich und an dieser Stelle auch nicht zielführend, viel wichtiger ist die folgende Überlegung:

Wir können den begonnenen Prozess iterativ endlos fortsetzen und damit das Kugelvolumen einer beliebigdimensionalen Einheitskugel rekursiv bestimmen. Diese Idee erlaubt uns das Aufstellen des folgenden Lemmas:

<sup>1</sup>Die Berechnung ist in Unterkapitel 2.4 nachzulesen.

**Lemma 2.4.** *Die rekursive Volumen-Formel.*

Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für das Volumen  $V_d(1)$  der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel:

$$V_{d+1}(1) = V_d(1) \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^d dx$$

Der Beweis beruht auf der obigen Überlegung sowie wenigen kleinen Umformungsschritten:

**Beweis** von Lemma 2.4. Bereits oben haben wir die folgende rekursive Berechnungsweise für das Kugelvolumen hergeleitet:

$$V_d(1) = \int_{-1}^1 V_{d-1}(\sqrt{1-x^2}) dx$$

Durch Umformen sowie die Verwendung von Lemma 2.3 ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} V_d(1) &= \int_{-1}^1 V_{d-1}(\sqrt{1-x^2}) dx \\ &\stackrel{L.2.3}{=} \int_{-1}^1 V_{d-1}(1) \cdot (\sqrt{1-x^2})^{d-1} dx \\ &= V_{d-1}(1) \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^{d-1} dx \\ \Rightarrow V_{d+1}(1) &= V_d(1) \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^d dx \end{aligned}$$

□

## 2.2 Die Berechnung des benötigten Integrals<sup>2</sup>

Das Bestimmen des obigen Integrals erfordert etwas Arbeit und soll deshalb Inhalt dieses Unterkapitels sein.

Zur Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^d dx$$

wollen wir die folgende Substitution betrachten:

$$x = \sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t) dt$$

Unter Zuhilfenahme der Identität  $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$  folgt

$$\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$$

---

<sup>2</sup>Vergleiche [Tem14].

und daraus weiter

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^d dx &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-\sin(t)^2}^d dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^d \cdot \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{d+1} dt. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$I_d := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^d dt \stackrel{s.o.}{=} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^{d-1} dx \quad (2.1)$$

so gilt unter Verwendung partieller Integration

$$\begin{aligned} I_d &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{d-1}(t) \cos(t) dt \\ &= \left[ \cos^{d-1}(t) \cdot \sin(t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (d-1) \cos^{d-2}(t) \cdot \sin^2(t) dt \\ &= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (d-1) \cos^{d-2}(t) \cdot (1 - \cos^2(t)) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (d-1) \cos^{d-2}(t) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (d-1) \cos^d(t) \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} I_d &= (d-1) \cdot I_{d-2} - (d-1) \cdot I_d \\ \Rightarrow I_d &= \frac{d-1}{d} \cdot I_{d-2}. \end{aligned}$$

Die gesuchten Integrale lassen sich nun rekursiv berechnen, dabei betrachten wir gerade und ungerade  $d$  getrennt voneinander.

i) **Für gerade  $d$  gilt mit  $d = 2n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}_0$ :**

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \pi$$



sowie

$$\begin{aligned}
 I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} \\
 &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-2} \\
 &\quad \vdots \\
 &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 \\
 &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \pi
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

ii) **Für ungerade  $d$  gilt mit  $d = 2n + 1$ , wobei  $n \in \mathbb{N}_0$ :**

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

sowie

$$\begin{aligned}
 I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1} \\
 &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot I_{2n-3} \\
 &\quad \vdots \\
 &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 \\
 &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 2
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

## 2.3 Der Nenner des Kugelvolumens: Die Gamma-Funktion<sup>3</sup>

Schließlich ist ein wichtiger Aspekt, den wir für den Beweis der Volumenformel für das Kugelvolumen benötigen, die Betrachtung des Nenners und damit der Gamma-Funktion, die sich wie folgt definieren lässt:

**Definition 2.5.** *Die Gamma-Funktion.*<sup>4</sup>

Für  $x > 0$  bezeichnen wir

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

als Gamma-Funktion.

Wir wollen uns dabei die folgenden Eigenschaften<sup>4</sup> der Gamma-Funktion zu nutzen machen, wobei  $x \in \mathbb{R}^{>0}$ :

i)  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$

<sup>3</sup>Vergleiche [Tem14].

<sup>4</sup>Nachzulesen in [For16].

ii)  $\Gamma(1) = 1$

iii)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Für den Nenner der Volumenformel des Kugelvolumens aus Satz 2.2 gilt damit unter Verwendung von Eigenschaft (i):

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) &= \frac{d}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \\ &= \frac{d}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{d-2}{2} + 1\right) \\ &= \frac{d}{2} \cdot \frac{d-2}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Auch hier hilft eine Unterscheidung gerader und ungerader  $d$ :

i) **Für gerade  $d$  gilt mit  $d = 2n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}_0$ :**

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) &= \frac{d}{2} \cdot \frac{d-2}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \\ &\vdots \\ &= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-2}{2} \cdots 2 \cdot \Gamma(2) \cdot \Gamma(1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} &= \frac{\sqrt{\pi}^d}{\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-2}{2} \cdots 2 \cdot 1}\end{aligned}\tag{2.4}$$

ii) **Für ungerade  $d$  gilt mit  $d = 2n - 1$ , wobei  $n \in \mathbb{N}_0$ :**

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) &= \frac{d}{2} \cdot \frac{d-2}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \\ &\vdots \\ &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} &= \frac{\sqrt{\pi}^d}{\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}\end{aligned}\tag{2.5}$$

## 2.4 Der Beweis der Volumenformel<sup>5</sup>

Schließlich sind wir mit allen vorangegangenen Überlegungen nun in der Lage, die Formel für das Kugelvolumen aus Satz 2.2 zu beweisen. Einige Betrachtungen in den vorigen Kapiteln suggerieren bereits, dass wir die vollständige Induktion als Beweisprinzip verwenden wollen.

**Beweis von Satz 2.2 mittels VOLLSTÄNDIGER INDUKTION.**

**Induktionsanfang:** Für  $d = 1$  ist die folgende Gleichung zu zeigen:

$$V_1(1) = \frac{\sqrt{\pi}^0}{\frac{1}{2}} = 2$$

Diese können wir verifizieren, da wir  $V_1(1)$  bereits in Unterkapitel 2.1 berechnet haben.

**Induktionsvoraussetzung:** Gelte für beliebige  $d \in \mathbb{N}$  folgende Gleichheit:

$$V_d(1) = \frac{\sqrt{\pi}^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

**Induktionsschritt:**

i) **Für gerade  $d$  schließen wir mit  $d = 2n$  für  $n \in \mathbb{N}$  wie folgt:  $2n \rightarrow 2n + 1$**

$$\begin{aligned} V_{2n+1}(1) &= V_{2n}(1) \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^{2n} dx, && \text{nach Lemma 2.4} \\ &= V_{2n}(1) \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) dt, && \text{nach (2.1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^{2n}}{\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-2}{2} \cdots 2 \cdot 1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 2, && \text{nach IV., (2.3) sowie (2.4)} \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Faktoren im Zähler des linken Bruchs mit den Faktoren rechts zusammenführen. Dazu werden die entsprechenden Faktoren gekürzt und zusammengefasst. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} V_{2n+1}(1) &= \frac{\sqrt{\pi}^{2n}}{\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^{2n}}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}}, && \text{nach (2.5)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^{2n+1}}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2} + 1\right)} \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Vergleiche [Tem14].

ii) **Für ungerade  $d$  schließen wir mit  $d = 2n - 1$  für  $n \in \mathbb{N}$  wie folgt:  $2n - 1 \rightarrow 2n$**

$$\begin{aligned} V_{2n}(1) &= V_{2n-1}(1) \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^{2n-1} dx, && \text{nach Lemma 2.4} \\ &= V_{2n-1}(1) \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt, && \text{nach (2.1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^{2n-1}}{\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \pi, && \text{nach IV., (2.2) sowie (2.5)} \end{aligned}$$

Wir wollen hier analog wie im ersten Fall vorgehen und erhalten:

$$\begin{aligned} V_{2n}(1) &= \frac{\sqrt{\pi}^{2n}}{\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-2}{2} \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^{2n}}{\Gamma\left(\frac{2n}{2} + 1\right)}, && \text{nach (2.4)} \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Volumenformel für beliebigdimensionale Einheitskugeln nun bewiesen. Unter Verwendung von Lemma 2.3 lässt sich diese auf höherdimensionale Kugeln mit beliebigem Radius erweitern, und wir erhalten

$$V_d(r) = r^d \cdot \frac{\sqrt{\pi}^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)},$$

womit Satz 2.2 bewiesen ist.

□

# 3 Der höherdimensionale Würfel

Nachdem wir nun eine konkrete Vorstellung des Kugelvolumens in höheren Dimensionen erhalten haben, wollen wir uns anschließend mit dem Würfel im Allgemeinen beschäftigen, um einen MENGER-Schwamm in höheren Dimensionen und das daraus resultierende Volumen betrachten zu können.

Die Kernziele dieses Kapitels sind also einerseits eine mathematisch präzise und gleichzeitig anschauliche Sichtweise des Würfels in höheren Dimensionen sowie andererseits das Finden einer geeigneten „Durchbohrung“ des Würfels, die aus diesem einen möglichen MENGER-Schwamm erzeugt.

## 3.1 Der Würfel im Allgemeinen

Wir wollen zunächst eine allgemeine und gleichzeitig handliche Definition für den  $d$ -dimensionalen Würfel einführen:

**Definition 3.1.** *Der  $d$ -dimensionale Einheitswürfel.*

Für  $d \in \mathbb{N}_0$  sei der  $d$ -dimensionale Würfel  $W_d$  definiert als:

$$W_d = [0, 1]^d$$

Mit dieser Definition lassen sich schnell die uns bekannten Bilder  $d$ -dimensionaler Würfel erzeugen, wie es in Abbildung 3.1 dargestellt ist. Dabei entsteht jeder Würfel der Dimension  $d$  durch das Kopieren des  $(d - 1)$ -dimensionalen Würfels in eine neue orthogonale Dimensionsrichtung und das anschließende Verbinden aller Ursprungsecken mit den entsprechenden Kopieecken. Mithilfe dieses Prinzips kann man sich das Aussehen höherdimensionaler Würfel zwar vorstellen, für eine präzise mathematische Beschreibung der anschaulich vorhandenen Strukturen ist dies aber längst nicht ausreichend.

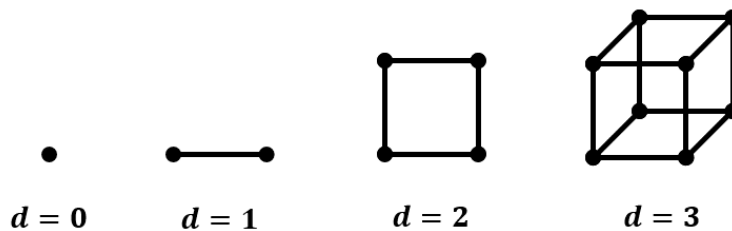


Abbildung 3.1: Drahtgitter-Darstellung  $d$ -dimensionaler Würfel für  $0 \leq d \leq 3$ .

## 3.2 Die Anzahl der Seitenelemente

Die Frage nach dem „Aussehen“ des höherdimensionalen Würfels kann als die Frage nach der Anzahl seiner ihn begrenzenden Seitenelemente (Ecken, Kanten, Flächen, ...) interpretiert werden, deren Beantwortung Ziel dieses Unterkapitels sein soll. Im nächsten Schritt soll dabei der Begriff des Seitenelements klar definiert werden:

**Definition 3.2.** *Seitenelement.*

Für  $d \in \mathbb{N}_0$  definieren wir: Ein Seitenelement des  $d$ -dimensionalen Würfels ist eine Menge der Form

$$\{(x_1, \dots, x_d) \mid x_i \in X_i \ \forall i\}, \text{ wobei jedes } X_i \in \{\{0\}, [0, 1], \{1\}\}.$$

Dabei nennen wir das Seitenelement

- *Ecke*, wenn jedes  $X_i \in \{\{0\}, \{1\}\}$
- *Kante*, wenn  $|\{i \mid X_i = [0, 1]\}| = 1$
- *Fläche*, wenn  $|\{i \mid X_i = [0, 1]\}| = 2$
- *Volumen*, wenn  $|\{i \mid X_i = [0, 1]\}| = 3$
- *s-dimensionales Seitenelement*, wenn  $|\{i \mid X_i = [0, 1]\}| = s$ , für  $s \in \mathbb{N}_0$  und  $s \leq d$

Die Bezeichnungen der Seitenelemente werden anschaulich sehr schnell klar: Man stelle sich vor, als mit Koordinaten versehener Beobachter auf einer der Eckenpositionen stehend den Weg in Richtung einer beliebigen Kante einzuschlagen. Dabei verändert sich dann genau eine aller Koordinaten, welche dann über ganz  $[0, 1]$  variieren kann. Schlägt man nun den Weg in Richtung einer Fläche ein, so verändert sich eine weitere Koordinate: Die Anzahl der Koordinaten, die über  $[0, 1]$  variieren kann, ist nun zwei. Dieses Prinzip setzt sich für jedes  $s$ -dimensionale Seitenelement fort.

### 3.2.1 Eine kombinatorisch-theoretische Herleitung

Mit kombinatorischen Überlegungen lässt sich aus der obigen Definition die Anzahl der  $s$ -dimensionalen Seitenelemente  $S(d, s)$  in Abhängigkeit von  $d$  und  $s$  herleiten:

Für die Anzahl an Möglichkeiten, aus  $d$  Koordinaten  $s$  auszuwählen, die über  $[0, 1]$  variieren können, gilt:

$$S_1(d, s) = \binom{d}{s}.$$

Weiter gilt für die Anzahl an Möglichkeiten der restlichen  $d - s$  Koordinaten die Werte 0 oder 1 anzunehmen

$$S_2(d, s) = 2^{d-s}.$$

Da ein  $s$ -dimensionales Seitenelement durch die Auswahl von  $s$  Koordinaten, die über  $[0, 1]$  variieren, und dann durch eine Wahl von 0 oder 1 für jede der übrigen Koordinaten eindeutig festgelegt ist, folgt folgender Satz:

**Satz 3.3.** *Anzahl der Seitenelemente.*

Seien  $d, s \in \mathbb{N}_0$ ,  $s \leq d$ . Dann gilt für die Anzahl der  $s$ -dimensionalen Seitenelemente des  $d$ -dimensionalen Würfels:

$$S(d, s) = \binom{d}{s} \cdot 2^{d-s}$$

Durch diesen Satz kennen wir nun eine Beschreibung des  $d$ -dimensionalen Würfels. Auch wenn wir daraus nur schwer eine anschauliche Vorstellung entwickeln können, ist sie zumindest mathematisch in jeder Dimension gut nachvollziehbar.

### 3.2.2 Ein kombinatorisch-anschaulicher Beweis

Ein signifikanter Vorteil theoretischer Beweise liegt auf der Hand und wurde auch im vorigen Unterkapitel deutlich: Sie lassen sich kurz und knapp formulieren und nachvollziehen. Oft sind sie aber nur wenig anschaulich und nicht immer intuitiv. Wir wollen versuchen, den *Satz zur Anzahl der Seitenelemente* anschaulich zu beweisen:

*Beweis von Satz 3.3:*

Dazu betrachten wir zur besseren Vorstellung zunächst ein dreidimensionales Würfel-Drahtgitter, wie es in Abbildung 3.1 dargestellt ist, und erweitern unsere Überlegungen anschließend auf den  $d$ -dimensionalen Würfel. Dieser entsteht laut Definition als  $d$ -faches Mengenprodukt des Einheitsintervalls  $[0, 1]$ . In Abbildung 3.2 wurden alle drei dieser Intervalle neben dem Würfel mit unterschiedlicher Farbe eingezeichnet. Die Farben entsprechen den einzelnen Richtungen, in die sich die Einheitsintervalle ausbreiten. Die einzelnen Seitenelemente, die aus den entsprechenden Einheitsintervallen hervorgehen, wurden hier identisch eingefärbt. Es ist erkennbar, dass sich die Menge aller  $s$ -dimensionalen Seitenelemente in Farbklassen einteilen lässt. Das Produkt aus der Anzahl der Farbklassen und der Anzahl der Seitenelemente pro Farbkategorie gibt also die Anzahl aller Seitenelemente wieder.

Um die Anzahl der Farbklassen zu ermitteln, ist es hilfreich zu betrachten, wie viele Einheitsintervalle ein Seitenelement bilden. Für ein  $s$ -dimensionales Seitenelement werden dazu genau  $s$  Einheitsintervalle benötigt. Die Anzahl der Farbklassen entspricht also der Auswahl von  $s$  Einheitsintervallen, von denen es insgesamt  $d$  gibt. Wir erhalten als Anzahl der Färbungen den Binomialkoeffizienten  $\binom{d}{s}$ .

Die Frage nach der Anzahl der Seitenelemente pro Farbkategorie ist gleichbedeutend mit der Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein Seitenelement einer bestimmten Färbung

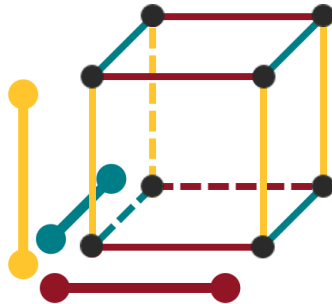


Abbildung 3.2: Drahtgitter-Darstellung des dreidimensionalen Würfels mit gefärbten Einheitsintervallen. Die aus den Intervallen entstehenden Kanten sind entsprechend gefärbt.

anzuordnen. Dabei lässt sich jedes Seitenelement an jeder Ecke eines Einheitsintervalls, das selbst nicht an der Bildung jenes Seitenelements beteiligt ist, anordnen. Davon gibt es insgesamt  $d-s$  viele. Mit zwei Ecken pro Einheitsintervall bleiben also  $2^{d-s}$  Möglichkeiten.

Das Produkt beider Anzahlen führt genau zu der zu beweisenden Formel.

□

### 3.3 Die Suche nach einer Durchbohrung

Nachdem wir eine gute Vorstellung des höherdimensionalen Würfels finden konnten, ist es nun die nächste Aufgabe, aus diesem einen höherdimensionalen MENGER-Schwamm zu formen, wozu der Würfel nach einem festgelegten Prinzip fraktal durchbohrt werden soll. Zwar lassen sich unendlich viele verschiedene solcher Prinzipien finden, allerdings soll unsere Durchbohrung später auch die Eigenschaft der Volumen-Gleichheit – wie sie im zwei- und dreidimensionalen Fall bereits auftritt – erfüllen.

#### 3.3.1 Der zweidimensionale Fall

Zunächst soll dazu der zweidimensionale Fall – also der SIERPINSKI-Teppich – betrachtet werden. Wir wollen für  $0 < a < b < 1$  den Würfel in die folgenden Intervalle unterteilen:

$$A = [0, a], \quad T = (a, b), \quad B = [b, 1]$$

Damit ist  $[0, 1] = A \cup T \cup B$  und es entsteht das in Abbildung 3.3 dargestellte Bild. Der gesamte Würfel  $W_2$  lässt sich nun als folgende Vereinigung schreiben:

$$\begin{aligned} W_2 = & (A \times A) \cup (A \times T) \cup (A \times B) \cup \\ & (T \times A) \cup (T \times T) \cup (T \times B) \cup \\ & (B \times A) \cup (B \times T) \cup (B \times B) \end{aligned}$$



Umsortieren ergibt:

$$W_2 = (A \times A) \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B) \cup \\ (A \times T) \cup (T \times A) \cup (B \times T) \cup (T \times B) \cup \\ (T \times T)$$

Diese Sortierung soll uns nun die folgende Einteilung der einzelnen Mengenprodukte in Klassen erlauben, sodass alle Mengenprodukte einer Zeile in einer gemeinsamen Klasse zusammengefasst werden können:

$$E_2 = \{X \times Y \mid X, Y \in \{A, B\}\} \quad (\text{Klasse der Eckenobjekte})$$

$$K_2 = \{X \times Y \mid X = T \vee Y = T\} \quad (\text{Klasse der Kantenobjekte})$$

$$L_2 = \{X \times Y \mid X = Y = T\} \quad (\text{Klasse der Lückenobjekte})$$

Diese Einteilung ist in Abbildung 3.3 bereits gut erkennbar dargestellt: Die blau-gefärbten Flächen entsprechen den Eckenobjekten, die gelben den Kantenobjekten und die rote dem Lückenobjekt. Wir können also an dieser Stelle festhalten, dass es sich auch anschaulich um eine sinnvolle Aufteilung des Würfels handelt.

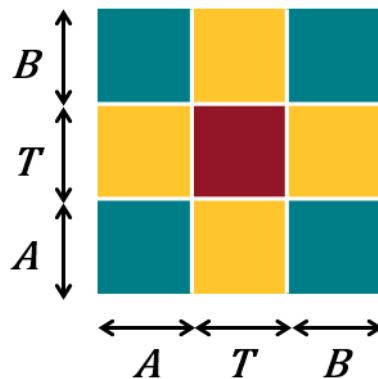


Abbildung 3.3: Der zweidimensionale Würfel mit eingezeichneten Intervallen  $A$ ,  $T$  und  $B$  für  $a = \frac{1}{3}$  sowie  $b = \frac{2}{3}$ . Die Eckenobjekte  $E_2$  sind blau, die Kantenobjekte  $K_2$  gelb und das Lückenobjekt  $L_2$  ist rot eingefärbt.

### 3.3.2 Eine Verallgemeinerung unserer Durchbohrung

Nachdem wir für den zweidimensionalen Fall eine passable Durchbohrung haben finden können, wollen wir nun versuchen, diese auf den allgemeinen Fall eines  $d$ -dimensionalen Würfels zu verallgemeinern.

Dabei soll uns die Fragestellung helfen, wie sich die obige Klasseneinteilung in den dreidimensionalen Fall, für den wir ebenfalls den MENGER-Schwamm bereits kennen, übertragen lässt.

Es stellt sich heraus, dass Eckenobjekte Mengenprodukte von ausschließlich Intervall  $A$  oder  $B$  sind, während Kantenobjekte Mengenprodukte mit genau einem Intervall  $T$  und

ansonsten ausschließlich  $A$  oder  $B$  sind. Daraus lässt sich folgende allgemeine Einteilung des Würfels entwickeln:

**Definition 3.4.** *Klassen der Ecken-, Kanten- und Lückenobjekte.*

Sei  $A = [0, a]$ ,  $T = (a, b)$ ,  $B = [b, 1]$  sowie  $X_i \in \{A, T, B\}$  mit  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Wir unterteilen den Einheitswürfel  $W_d$  in die Klassen:

- i) *Eckenobjekte:*  $E_d = \{X_1 \times \dots \times X_d \mid X_1, \dots, X_d \in \{A, B\}\}$
- ii) *Kantenobjekte:*  $K_d = \{X_1 \times \dots \times X_d \mid \exists! i \in \{1, \dots, d\} : X_i = T\}$
- iii) *Lückenobjekte:*  $L_d = \{X_1 \times \dots \times X_d \mid (X_1 \times \dots \times X_d) \notin (E_d \cup K_d)\}$

Aus dieser Definition lassen sich direkt zwei Korollare ableiten:

**Korollar 3.5.** *Die Disjunktheit der Ecken-, Kanten- und Lückenobjekte.*

Die in *Definition 3.4* eingeführten Objektklassen sind alle disjunkt.

**Beweis** von *Korollar 3.5:*

Die Disjunktheit folgt nahezu direkt aus der Konstruktion. Dennoch soll hier der kurze Beweis aufgeführt werden:  $L_d \cap K_d = \emptyset$  sowie  $L_d \cap E_d = \emptyset$  folgen aus der Definition. Weiter gilt aber auch  $E_d \cap K_d = \emptyset$ , da die Eckenobjekte als Mengenprodukt aus ausschließlich  $A$  und  $B$  gebildet werden und zur Bildung der Kantenobjekte im Mengenprodukt  $T$  ein Faktor ist.  $\square$

Das zweite Korollar behandelt die Mächtigkeiten der Klassen der Ecken- sowie Kantenobjekte, um deren Anzahl zu ermitteln.

**Korollar 3.6.** *Die Anzahl der Ecken- und Kantenobjekte.*

Sei  $d \in \mathbb{N}$  sowie  $W_d$  der in *Definition 3.1* festgelegte Einheitswürfel mit den aus *Definition 3.4* bekannten Objekten.

- i) Für die Anzahl der Eckenobjekte gilt

$$|E_d| = 2^d .$$

- ii) Für die Anzahl der Kantenobjekte gilt

$$|K_d| = d \cdot 2^{d-1} .$$

**Beweis** von *Korollar 3.6:*

Um an dieser Stelle die Anzahl der Ecken- sowie Kantenobjekte zu ermitteln, wollen wir die folgende Bijektion betrachten: Es wird schnell klar, dass wir jeder Ecke des Würfels ein Eckenobjekt und jeder Kante ein Kantenobjekt zuordnen können. Da wir die Anzahl der Ecken und Kanten eines Würfels aus *Satz 3.3* bereits kennen, können wir die Anzahl der Ecken- und Kantenobjekte angeben. So gilt:

$$S(d, 0) = 2^d = |E_d|$$

sowie

$$S(d, 1) = d \cdot 2^{d-1} = |K_d|.$$

□

Schließlich ist es uns nun noch möglich, eine genaue Definition für den modifizierten Menger-Schwamm anzugeben:

**Definition 3.7.** *Der  $d$ -dimensionale modifizierte Menger-Schwamm.*

Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Wir bezeichnen den  $d$ -dimensionalen modifizierten Menger-Schwamm  $M$  als den Schnitt aller Mengen  $M_k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , wobei jedes  $M_k$  eine Vereinigung von Würfeln ist. Dabei ist  $M_k$  induktiv wie folgt definiert:

1. Wähle als Start den Einheitswürfel, also  $M_1 = W_d$ .
2. Für  $k \in \mathbb{N}$  erhalten wir  $M_{k+1}$  aus  $M_k$  wie folgt:
  - 2 a. Teile den Würfel in  $(2k + 1)^d$  gleichgroße kleinere Würfel, indem jede Kante in  $(2k + 1)$  gleichgroße Intervalle geteilt wird und anschließend alle Mengenprodukte gebildet werden.
  - 2 b. Entferne in jedem so zerteilten Würfel in  $M_k$  alle Lückenobjekte für  $a = \frac{k}{2k+1}$  sowie  $b = \frac{k+1}{2k+1}$ .

Mit dieser Definition haben wir jetzt eine mathematische Vorstellung des modifizierten Menger-Schwamms für jede Dimension erlangen können, die allerdings nur schlecht vorstellbar scheint. Etwas anschaulicher wird diese Vorstellung des höherdimensionalen Menger-Schwamms, wenn man die einzelnen Lückenobjekte nochmals genauer betrachtet. Die einzelnen Koordinaten variieren nach Definition 3.4 an mindestens zwei Positionen über das Intervall  $T = (0, 1)$ , weswegen maximal  $d - 2$  dieser Koordinaten den Wert 0 oder 1 annehmen können. Nimmt man nun noch die Definition 3.2 eines Seitenelements hinzu, so fällt auf, dass die von Lückenobjekten „durchbohrten“ Seitenelemente mindestens zweidimensional sind. Anschaulich bedeutet das, dass jedes Seitenelement der Dimension zwei oder höher – also Seitenflächen, Seitenvolumen,... – zum Generieren des Menger-Schwammes durchbohrt werden.

## 4 Die Volumengleichheit

Ziel dieses vierten Kapitels soll das Zusammenführen aller bereits gesammelten Erkenntnisse sowie die Beantwortung der Kernfrage sein. Dazu werden wir im ersten Schritt einen mathematischen Ausdruck für das Volumen des  $d$ -dimensionalen modifizierten Menger-Schwamms suchen. Im nächsten Schritt soll dann geprüft werden, ob es uns gelungen ist, die Durchbohrung des Menger-Schwamms so zu wählen, dass das Volumen in jeder Dimension mit dem Vielfachen des Volumens der  $d$ -dimensionalen Kugel übereinstimmt. Schließlich soll noch kurz auf weiterführende Überlegungen eingegangen werden.

### 4.1 Das Volumen des modifizierten Menger-Schwamms

Um einen mathematischen Ausdruck für das Volumen des  $d$ -dimensionalen modifizierten Menger-Schwamms – wie er aus Definition 3.7 bekannt ist – zu finden, wollen wir uns zunächst die einzelnen Iterationsstufen genauer ansehen. Dazu sind in Abbildung 4.1 die Durchbohrungen der Quadrate in den ersten Iterationsstufen des modifizierten Sierpinski-Teppichs dargestellt. Wir können dies als die Draufsicht auf ein zweidimensionales Seitenelement eines  $d$ -dimensionalen Menger-Schwamms ansehen und daran unsere Überlegungen festmachen.

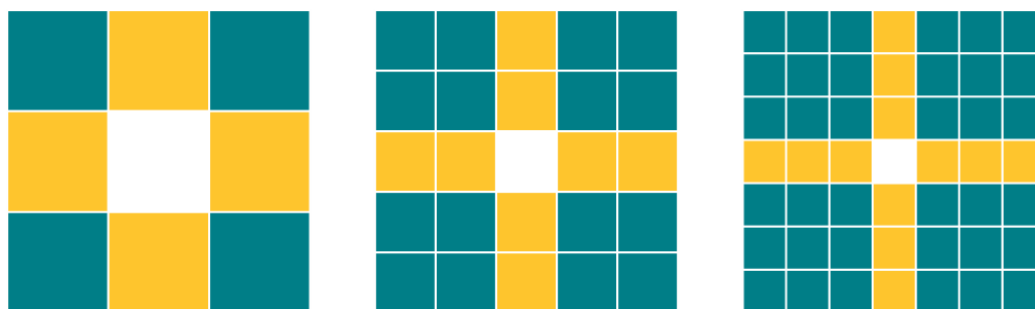


Abbildung 4.1: Das Verhalten der Ecken- (blau) und Kantenobjekte (gelb) nach den ersten zwei Iterationsstufen des modifizierten Sierpinski-Teppichs.

Es ist ersichtlich, dass die einzelnen Quadrate des modifizierten Sierpinski-Teppichs in der ersten Iterationsstufe ausschließlich die Ecken- und Kantenobjekte darstellen.

In der zweiten Iterationsstufe allerdings bilden jeweils vier Quadrate ein Eckenobjekt und jeweils zwei Quadrate ein Kantenobjekt. Um hier das Volumen des Schwamms korrekt zu ermitteln, müssen wir die Anzahl der Ecken- sowie der Kantenobjekte mit jeweils entsprechendem Faktor multiplizieren. Wir erkennen, dass sich in der ersten Iterationsstufe in den Eckenobjekten die Anzahl der Quadrate in jede Dimensionsrichtung verdoppelt und ent-

nehmen daraus den Faktor  $2^d$ . Bei den Kantenobjekten findet ebenfalls eine Verdopplung der Anzahl der Quadrate statt – allerdings nicht in jede Dimensionsrichtung. Anschaulich gesprochen können sich die Quadrate der Kantenobjekte in Richtung der Eckenobjekte nicht vervielfachen, da hier die Eckenobjekte bereits den gesamten Platz beanspruchen. Die Anzahl der Quadrate der Kantenobjekte hat sich also in  $(d - 1)$  Richtungen verdoppelt, es folgt ein Faktor von  $2^{d-1}$ .

Selbiges Prinzip beobachten wir in der nächsten Iterationsstufe. Die hier benötigten Faktoren ergeben sich durch  $3^d$  für die Anzahl der Quadrate der Eckenobjekte und durch  $3^{d-1}$  für die Anzahl der Quadrate der Kantenobjekte.

Die Gesamtzahl aller Objekte, die sich in der späteren Volumenformel im Nenner wiederfindet, berechnet sich durch die  $d$ . Potenz der Anzahl der Objekte pro Dimensionsrichtung.

Zusätzlich kennen wir aus Korollar 3.6 bereits die Anzahl der Eckenobjekte  $|E_d|$  sowie die Anzahl der Kantenobjekte  $|K_d|$ . Sie entsprechen der Anzahl der Ecken beziehungsweise der Anzahl der Kanten des Würfels und es gilt  $|E_d| = 2^d$  und  $|K_d| = 2^{d-1}$ . Daraus ergibt sich bereits die Formel für das Volumen des  $d$ -dimensionalen modifizierten Menger-Schwamms  $M_d$ :

$$\begin{aligned} M_d &= \frac{|E_d| + |K_d|}{3^d} \cdot \frac{2^d \cdot |E_d| + 2^{d-1} \cdot |K_d|}{5^d} \cdot \frac{3^d \cdot |E_d| + 3^{d-1} \cdot |K_d|}{7^d} \dots \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^d \cdot |E_d| + n^{d-1} \cdot |K_d|}{(2n+1)^d} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^d + d \cdot (2n)^{d-1}}{(2n+1)^d} \end{aligned}$$

Wir können damit den folgenden Satz formulieren, den wir mit den obigen Überlegungen bereits hergeleitet haben:

**Satz 4.1.** *Das Volumen des modifizierten Menger-Schwamms.*

Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Für das Volumen des in Definition 3.7 festgelegten modifizierten Menger-Schwamms  $M_d$  gilt:

$$M_d = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^d + d \cdot (2n)^{d-1}}{(2n+1)^d}$$

Wir kennen nun das Volumen des modifizierten Menger-Schwamms und haben eine gute Grundlage für das folgende Unterkapitel:

## 4.2 Der Beweis der Volumengleichheit

Wie der Name des Unterkapitels schon vermuten lässt, wird es nun das Ziel sein, die Gleichheit der Volumina des höherdimensionalen modifizierten Menger-Schwamms und der höherdimensionalen Kugel zu zeigen und damit die Kernfrage dieser Bachelorarbeit zu beantworten. Konkretes Ziel ist also der Beweis des folgenden Satzes:

**Satz 4.2.** *Die Volumengleichheit*

Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Weiter bezeichne  $V_d(1)$  das in Satz 2.2 eingeführte Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel und  $M_d$  das aus Satz 4.1 bekannte Volumen des  $d$ -dimensionalen modifizierten MENGER-Schwamms.

Dann ist ein Vielfaches von  $V_d(1)$  identisch mit  $M_d$  und es gilt:

$$2^d \cdot M_d = V_d(1).$$

Zum Beweis dieses Satzes wollen wir zunächst zwei Lemmata aufstellen und anschließend beweisen, die uns den späteren Beweis von Satz 4.2 erleichtern sollen.

**Lemma 4.3.** *Die Faktorisierung des Produktes.*

Seien  $d, n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\frac{(2n)^d + d \cdot (2n)^{d-1}}{(2n+1)^d} = \left( \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \right)^{\frac{d}{2}} \cdot \left( \frac{n^{\frac{d}{2}-1} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right)}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \right)$$

**Beweis** von Lemma 4.3.

Seien dazu  $d, n \in \mathbb{N}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \left( \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \right)^{\frac{d}{2}} \cdot \left( \frac{n^{\frac{d}{2}-1} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right)}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \right) &= \frac{((2n)^2 + 2 \cdot 2n)^{\frac{d}{2}} \cdot \left(n^{\frac{d}{2}} + \frac{d}{2} \cdot n^{\frac{d}{2}-1}\right)}{(2n+1)^d \cdot (n+1)^{\frac{d}{2}}} \\ &= \frac{(n+1)^{d/2} \cdot \left((2n)^d + d \cdot (2n)^{d-1}\right)}{(2n+1)^d \cdot (n+1)^{\frac{d}{2}}} \\ &= \frac{(2n)^d + d \cdot (2n)^{d-1}}{(2n+1)^d} \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.4.** *Die Konvergenz des zweiten Faktors.*

Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{d}{2}-1} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right)}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!}$$

**Bemerkung:** Insbesondere für ungerade  $d \in \mathbb{N}$  gilt hier wie auch im weiteren Verlauf

$$\left(\frac{d}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right),$$

wobei wir zur Vereinfachung im Folgenden an der Fakultät-Schreibweise festhalten wollen.

**Beweis** von Lemma 4.4.

Sei dazu  $d \in \mathbb{N}$ . Dabei berechnen wir das unendliche Produkt als Grenzwert des endlichen Produktes. Es gilt:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right) \right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[ \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{2^{\frac{d}{2}-1}}{3^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(2 + \frac{d}{2}\right) \cdots \frac{N^{\frac{d}{2}-1}}{(N+1)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(N + \frac{d}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Nun können wir geschickt kürzen, um das Produkt zu vereinfachen: Es kürzen sich der Zähler eines Bruches jeweils vollständig mit dem Nenner eines vorhergehenden Bruches, welcher anschließend anschließend seinen Exponenten verliert. Übrig bleiben die folgenden Faktoren, sodass wir schreiben können:

$$\begin{aligned} &\prod_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 + \frac{d}{2}\right) \cdots \frac{1}{(N+1)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(N + \frac{d}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wir betrachten nun die zu beweisende Identität in zwei disjunkten Fällen, nämlich für gerade und für ungerade  $d$ .

i) **Für gerade  $d$  betrachten wir folgende Überlegungen:**

Wir wollen uns zu Nutze machen, dass  $d$  gerade ist, indem wir  $d/2$  als ganze Zahl betrachten. Das erlaubt mit Umformen von (4.1) die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right) \right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left(N + \frac{d}{2}\right)!}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \cdot \frac{1}{N! \cdot (N+1)^{\frac{d}{2}}} \right] \\ &= \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(N + \frac{d}{2}\right)!}{N! \cdot (N+1)^{\frac{d}{2}}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N+1)(N+2) \cdots \left(N + \frac{d}{2}\right)}{(N+1)^{\frac{d}{2}}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \cdot \underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{N}\right) \left(1 + \frac{2}{N}\right) \cdots \left(1 + \frac{d}{2N}\right)}{\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\frac{d}{2}}}}_{=1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \end{aligned}$$

ii) **Für ungerade  $d$  betrachten wir folgende Überlegungen:**

Da wir die im Bruch vorhandenen Fakultäten für ungerade  $d$  nicht einfach kürzen können, ist dieser Teil des Beweises etwas komplexer. Wir benötigen außerdem das in Satz 1.3 betrachtete WALLIS-Produkt und wollen basierend darauf folgende Größe betrachten:

$$q_N := \sqrt{w_N},$$

woraus direkt

$$q_\infty = \sqrt{w_\infty} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

folgt.

Damit gilt für  $q_N$ :

$$\begin{aligned} q_N = \sqrt{w_N} &= \sqrt{\prod_{n=1}^N \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2N) \cdot (2N)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N-1) \cdot (2N+1)}} \\ &= \left( \frac{2 \cdot 4 \cdots (2N)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \right) \end{aligned}$$

Da wir im Folgenden das Reziproke von  $q_\infty$  benötigen, wollen wir die bisherigen Überlegungen wie folgt zusammenfassen:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{q_\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2N)} \cdot \sqrt{2N+1} \right) \quad (4.2)$$

Im nächsten Schritt wollen wir an Gleichung 4.1 anknüpfen und aufgrund der Ähnlichkeit zum Reziproken von  $q_\infty$  dieses aus jenen Faktoren faktorisieren. Anschließend soll uns dies das Umformen zum gewünschten Ergebnis ermöglichen:

$$\begin{aligned} &\prod_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left( n + \frac{d}{2} \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{d}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left( 2 + \frac{d}{2} \right) \cdots \frac{1}{(N+1)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left( N + \frac{d}{2} \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2+d)(4+d) \cdots (2N+d)}{2 \cdot 4 \cdots 2N} \cdot \frac{1}{(N+1)^{\frac{d}{2}}} \right] \\ &\stackrel{N \geq d}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{q_N} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (d-2) \cdot d} \cdot \frac{(2N+1)(2N+3) \cdots (2N+d)}{\sqrt{2N+1}} \cdot \frac{1}{(N+1)^{\frac{d}{2}}} \right] \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (d-2) \cdot d} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2N+1) \cdot (2N+3) \cdots (2N+d)}{\sqrt{2N+1} \cdot (N+1)^{\frac{d}{2}}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (d-2) \cdot d} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left( 2 + \frac{1}{N} \right) \cdot \left( 2 + \frac{3}{N} \right) \cdots \left( 2 + \frac{d}{N} \right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{N}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{N} \right)^{\frac{d}{2}}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (d-2) \cdot d} \cdot \frac{2^{\frac{d+1}{2}}}{\sqrt{2} \cdot 1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{\frac{d+1}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (d-2) \cdot d} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{d-2}{2} \cdot \frac{d}{2}} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!}
\end{aligned}$$

Mit den beiden betrachteten Fällen ist die Behauptung bewiesen. □

Wir können nun den Beweis von Satz 4.2 führen, dazu wollen wir die folgende Gleichheit zeigen:

$$2^d \cdot M_d = 2^d \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^d + d \cdot (2n)^{d-1}}{(2n+1)^d} = \frac{\sqrt{\pi}^d}{\left(\frac{d}{2}\right)!} = V_d(1)$$

**Beweis** von Satz 4.2.

Seien dazu  $d, n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
2^d \cdot M_d &= 2^d \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^d + d \cdot (2n)^{d-1}}{(2n+1)^d} \\
&= 2^d \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \right)^{\frac{d}{2}} \cdot \left( \frac{n^{\frac{d}{2}-1} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right)}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \right) \right], \quad \text{nach Lemma 4.3} \\
&= 2^d \cdot \left( \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \right)^{\frac{d}{2}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^{\frac{d}{2}-1} \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right)}{(n+1)^{\frac{d}{2}}} \right) \\
&= 2^d \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot w_{\infty} \right)^{\frac{d}{2}} \cdot \left( \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \right), \quad \text{nach Gleichung 1.5 (WALLIS-Produkt) sowie Lemma 4.4} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}^d}{\left(\frac{d}{2}\right)!}, \quad \text{da } w_{\infty} = \frac{\pi}{4} \text{ nach Gleichung 1.5} \\
&= V_d(1)
\end{aligned}$$

□

Damit ist es uns gelungen zu zeigen, dass in jeder Dimension Vielfache des Volumens des von uns festgelegten modifizierten Menger-Schwamms dem Kugelvolumen gleichen.

Wir können weiter unsere Erkenntnisse aus dem Zwei- und Dreidimensionalen auch auf das Höherdimensionale übertragen und uns überlegen, dass alle  $2^d$  modifizierten Menger-Schwämme entsprechend neben- und aufeinander platziert einen „durchbohrten“ Würfel ergeben, dessen Kantenlänge identisch mit dem Durchmesser der Einheitskugel selbiger

Dimension ist. Weiter besitzen dieser „durchbohrte“ Würfel und die Einheitskugel für jede Dimension das gleiche Volumen.

### 4.3 Die Anschaulichkeit im Höherdimensionalen

Spannend ist an dieser Stelle noch die Frage nach der Form des höherdimensionalen modifizierten MENGER-Schwamms: Wie kann man sich diesen oder gar den viel simpler aufgebauten Würfel in höheren Dimensionen überhaupt vorstellen? Am Ende von Unterkapitel 3.3 haben wir bereits versucht, die Durchbohrung zu veranschaulichen, indem wir uns überlegt haben, dass alle Seitenelemente mit Dimension zwei oder höher durchbohrt werden – sonderlich gut kann man sich das aber noch immer nicht vorstellen. Besonders schwierig ist diese Vorstellung auch gerade deshalb, weil unsere Vorstellungen höherdimensionaler Würfel oder Schwämme immer Projektionen in die dritte – auf diesem Blatt Papier ja sogar in die zweite – Dimension sind. Schon der Tesseract, also der vierdimensionale Würfel, ist im Zweidimensionalen nur schwer darstellbar, das Einzeichnen von Durchbohrungen also noch komplexer.

Einen visuellen Zugang für den vierdimensionalen Würfel gibt es aber doch: Das dreidimensionale Netz des Würfels. Das kennen wir bereits vom dreidimensionalen Würfel. Schneiden wir diesen entlang seiner Kanten auf und falten seine Flächen in der Ebene aus, so erhalten wir Diagramme, wie sie in Abbildung 4.2 (links) dargestellt sind. Gehen wir analog mit einem modifizierten MENGER-Schwamm dritter Dimension vor, so erhalten wir exemplarisch das in 4.2 (rechts) dargestellte Netz: Jedes einzelne der sechs Quadrate stellt dabei den um eine Dimension verringerten modifizierten MENGER-Schwamm dar, im dreidimensionalen Fall handelt es sich um den uns bereits bekannten modifizierten SIERPINSKI-Teppich.

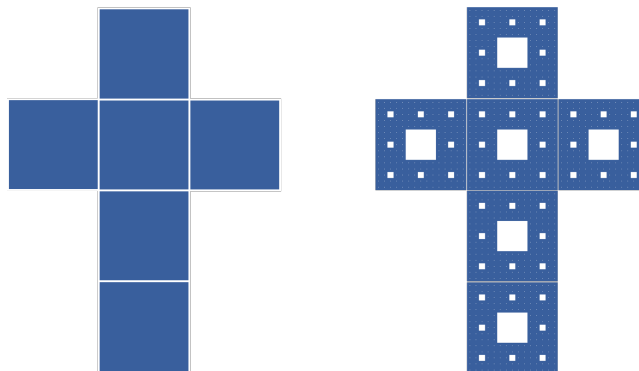


Abbildung 4.2: Das Netz des dreidimensionalen Würfels (links) und des modifizierten MENGER-Schwamms nach zwei Iterationen (rechts).

Ähnlich können wir uns das Auffalten des modifizierten MENGER-Schwamms der vierten Dimension vorstellen. Das Würfelnetz des Tesseracts ist in Abbildung 4.3 dargestellt: Es enthält alle acht Seitenvolumen in Form dreidimensionaler Würfel. Das Netz des vierdimensionalen modifizierten MENGER-Schwamms besteht analog aus acht dreidimensionalen modifizierten MENGER-Schwämmen, wie wir sie bereits in Abbildung 1.3 ganz zu Beginn

dieser Arbeit gesehen haben. Mit dieser visuellen Reduktion müssen wir uns an dieser Stelle aber begnügen - anschaulichere Visualisierungen sind nur schwer vorstellbar.

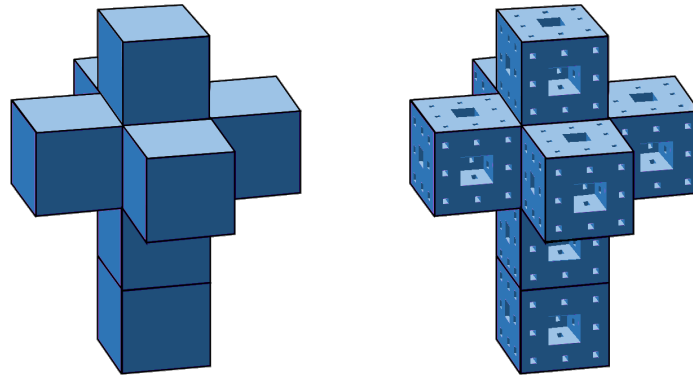


Abbildung 4.3: Das Netz des Tesseraktes (links) und des vierdimensionalen modifizierten MENGER-Schwamms nach drei Iterationen (rechts).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Links: Entnommen aus [Com13], veränderte Farbgebung.

## 5 Fazit und Ausblick

Ausgehend von einer vermeintlich einfachen mathematischen Frage, die sich auf die Fläche des SIERPINSKI-Teppichs beziehungsweise das Volumen des MENGER-Schwamms bezieht, haben wir durch eine kleine Modifikation eine Fragestellung aufgeworfen, die nicht bloß mathematischen Tiefgang vorzuweisen hat, sondern auch in ihrer Beantwortung faszinierende Ergebnisse mit sich bringt.

So haben wir nicht nur zeigen können, dass in jeder Dimension  $d \geq 2$  eine Durchbohrung existiert, sodass Vielfache des Volumens des MENGER-Schwammes dem Volumen der Einheitskugel entsprechen, sondern diese Art der Durchbohrung, die diese Gleichheit der Volumina ermöglicht, sogar angeben können.

Dennoch haben wir die Thematik an dieser Stelle noch längst nicht vollends ausgeschöpft – im Gegenteil: Zu entdecken gibt es noch immer einiges, die neu erlangten Erkenntnisse haben zudem gänzlich neue Fragen aufwerfen können. So weist der Zähler des in Satz 4.1 angegebenen Volumens des modifizierten MENGER-Schwamms eine typische Struktur auf. Es sind die ersten beiden Summanden der Summe  $\sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (2n)^{d-k}$ , die nach binomischem Lehrsatz dem Nenner  $(2n+1)^d$  entspricht, wonach gilt:

$$M_d = \prod_{d=1}^{\infty} \frac{(2n)^d + d \cdot (2n)^{d-1}}{(2n+1)^d} = \prod_{d=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^d - \sum_{k=2}^d \binom{d}{k} (2n)^{d-k}}{(2n+1)^d}$$

Demnach ist absolut denkbar – und die obige Umformung legt die folgende Überlegung sehr nahe –, dass wir nicht die einzige sinnvolle Durchbohrung des Einheitswürfels betrachtet haben, sondern vielmehr nur eine von vielen präzise unter die Lupe genommen haben. Möglicherweise führt das Betrachten von weiteren oder anderen Summanden der oben genannten Summe zu weiteren Erkenntnissen über Zusammenhänge zwischen Volumen anderweitig modifizierter MENGER-Schwämme und anderen geometrischen Figuren. Weiter drängt sich eine noch viel signifikantere Frage auf: Wenn die Gleichheit der Volumina beider geometrischen Figuren für jede Dimension gezeigt werden kann, besteht der Verdacht, dass sich eine Zerlegung des modifizierten MENGER-Schwamms in viele Einzelteile finden lässt, die, wenn man sie auf eine andere Art und Weise wieder zusammensetzt, schließlich die höherdimensionale Kugel ergibt. Aufgrund der Fraktalseigenschaft des modifizierten MENGER-Schwamms und der Entstehung der höherdimensionalen Kugel als Grenzprozess, müsste diese Zerlegung in unendlich viele Teile erfolgen.

Abschließend lässt sich sagen, dass unsere Untersuchungen am modifizierten MENGER-

---

Schwamm erstaunliche und zugleich faszinierende Erkenntnisse mit sich brachten und durch die erfolgreiche Beantwortung der Kernfrage zu einem äußerst zufriedenstellenden Ergebnis führten. Der MENGER-Schwamm ist – ob in seiner klassischen oder in seiner modifizierten Version – ein Paradebeispiel für den Forschungscharakter der Strukturwissenschaft Mathematik. Begonnen mit anschaulichen Beobachtungen im Zwei- und Dreidimensionalen konnten wir diese abstrahieren und eine Vorstellung vom Verhalten in höheren Dimensionen gewinnen. Schlussendlich sehen wir auch in diesem Beispiel ganz deutlich die so oft Hinterfragte „Schönheit der Mathematik“ und gleichzeitig wiederum die Faszination in den Phänomenen, die die Unendlichkeit aufwerfen kann.

# Literaturverzeichnis

- [Com13] COMMONS, Wikimedia: *Tesseract2.svg*. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tesseract2.svg>. Version: Dezember 2013. – zuletzt abgerufen am 14. September 2018.
- [For16] FORSTER, Otto: *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. 12., verbesserte Auflage. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016 (Grundkurs Mathematik). – S. 246–249. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-658-11545-6>. ISBN 9783658115449
- [Koe02] KOENIGSBERGER, Konrad: *Analysis 2*. 4., überarb. Aufl. Berlin : Springer, 2002 (Springer-Lehrbuch). – S. 300 f. – ISBN 3540435808
- [Koe04] KOENIGSBERGER, Konrad: *Analysis 1: Mit 250 Aufgaben samt ausgearbeiteten Lösungen*. 6., durchges. Aufl. Berlin : Springer, 2004 (Springer-Lehrbuch). – S. 206–207. – ISBN 354040371X
- [Par16] PARKER, Matt: *The Fractal Menger Sponge and Pi*. [https://www.youtube.com/watch?v=8pj8\\_zjelDo&t=1s](https://www.youtube.com/watch?v=8pj8_zjelDo&t=1s). Version: April 2016. – zuletzt abgerufen am 06. September 2018
- [Par18] PARKER, Matt: *StandUpMaths*. <http://standupmaths.com/>. Version: 2018. – zuletzt abgerufen am 05. September 2018
- [Peg16] PEGG, Ed: *Squeezing Pi from a Menger Sponge*. <http://community.wolfram.com/groups/-/m/t/822984>. Version: 2016. – zuletzt abgerufen am 05. September 2018
- [Tem14] TEMMEL, Alois: *Das Volumen und die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel*. <http://www.temmel-mathe.de/mathe/sonstiges/Eigene%20Artikel/kugel.pdf>. Version: Februar 2014. – zuletzt abgerufen am 12. September 2018

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Iterationsstufen des SIERPINSKI-Teppichs . . . . .	2
1.2	Iterationsstufen des MENGER-Schwamms . . . . .	2
1.3	Modifizierter SIERPINSKI-Teppich und MENGER-Schwamm . . . . .	4
2.1	Ein- und zweidimensionale Kugel im Koordinatensystem . . . . .	12
3.1	Drahtgitter-Darstellungen von Würfeln . . . . .	19
3.2	Drahtgitter-Darstellung des dreidimensionalen Würfels . . . . .	22
3.3	Zweidimensionaler Würfel mit eingezeichneten Intervallen $A$ , $T$ und $B$ . . . . .	23
4.1	Verhalten der Ecken und Kantenobjekte nach zwei Iterationen . . . . .	26
4.2	Netz des Würfels und des modifizierten MENGER-Schwamms . . . . .	32
4.3	Netz des Tesseraktes und des modifizierten MENGER-Schwamms . . . . .	33

Die Quellen sind jeweils an den entsprechenden Abbildungen vermerkt. Abbildungen ohne solchen Vermerk stammen aus eigener Darstellung.

# Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die allgemeinen Prinzipien wissenschaftlicher Arbeit und Veröffentlichung, wie sie in den Leitlinien guter wissenschaftlicher Praxis der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg festgelegt sind, befolgt habe.

Oldenburg, den 28. Oktober 2018

---

*Ort, Datum*

*Unterschrift*