Klausur Lineare Algebra I

Aufgabe 1. Sei $a := 17^{35} \in \mathbb{F}_{37}$. Diese Restklasse entspricht dann gerade $1/17$. Nach dem kleinen Fermat gilt nämlich $17^{36} = 1$ in $\mathbb{F}_{37}$.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $U, V \subset \mathbb{K}^5$ zwei Unterräume der Dimension drei. Welche Dimensionen sind dann für $U \cap V$ möglich?
Man erinnere sich an $\dim U + \dim V = \dim(U + V) - \dim(U \cap V)$. Damit kann der Schnitt ein-, zwei- oder dreidimensional sein, was natürlich nicht von der Charakteristik des Körpers $\mathbb{K}$ abhängt. Obige Formel besagt gleichzeitig, dass die Dimension von $U + V$ durch die Dimension des Schnitts bestimmt ist.

Aufgabe 3. Sei A eine (2×3)-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Welche Werte sind für $\operatorname{rank} A$ möglich?
Der Rang ist durch zwei nach oben beschränkt, und alle Fälle von null bis zwei können auftreten.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $C_1 := \{(1,2),(3,2)\} \subset \mathbb{K}^2$.
Dann kann die Menge linear abhängig (über $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$) oder linear unabhängig (über $\mathbb{K}$ mit $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$) sein. Entscheidend ist hier also die Charakteristik des Körpers. Die Menge $C_2 := \{(1,1),(2,0),(0,2)\}$ dagegen ist immer linear abhängig, da die Linearkombination $2\,(1,1) - (0,2) - (2,0) = (0,0)$ bei beliebiger Reduktion erhalten bleibt.

Aufgabe 5. Sei $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Dann ist U komplementär zu $V_1 = \operatorname{span}\{(1,1,1,1)\}, V_2 = \operatorname{span}\{(1,1,2,2)\}$ und zu $V_3 = \operatorname{span}\{(1,1,1,1),(2,2,2,2)\}$. Es gilt $\dim U = 3$, woraus wir $\dim V = 1$ schließen. Damit fallen i), ii) und vii) als komlementäre Unterräume aus Dimensionsgründen weg. Ferner sieht man, dass der Unterraum $V = \operatorname{span}\{(1,1,-1,-1)\}$ selbst eine Teilmenge von U ist. Die drei übrigen Unterräume dagegen sind alle komplementär zu U, wie man durch Einsetzen in obige Gleichung feststellt.

Aufgabe 6. Welche Werte kann das Signum einer beliebigen Permutation $\sigma \in S_n$, wobei auch $n \geq 2$ frei gewählt werden darf, annehmen?

Lösung Da $\operatorname{sgn} : S_n \to \mathbb{Z}_2$ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma^2) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) = 1^2 = (-1)^2 = 1\,.$$

Aufgabe 7. Wie viele Elemente hat ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum?

Lösung $\mathbb{F}_3$ besitzt genau drei Elemente. Damit gibt es für jede der vier Koordinaten drei Möglichkeiten der Belegung, was insgesamt für $3^4 = 81$ Vektoren spricht.

Aufgabe 8. Unter welchen Bedingungen besitzt ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V einen Unterraum $U \subset V$ mit $\dim U = \dim V/U$?

Lösung Es gelte $\dim U = \dim V/U = \dim V - \dim U \Rightarrow \dim V = 2 \cdot \dim U$. Der Vektorraum V muss also eine gerade Dimension haben.

Aufgabe 9. a) Man finde eine nicht-triviale $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
b) Man gebe eine nicht-triviale $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{Q}^3/((1,2,3) \cdot \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ an.
c) Was ist $\dim \ker \psi$?

Lösung Man beachte, dass hier nach einer linearen Abbildung zwischen $\mathbb{Z}$-Moduln gefragt ist. Für a) setze man die Abbildung $\phi : 1 \mapsto 5$ $\mathbb{Z}$-linear fort. Für b) wähle man zum Beispiel die lineare Abbildung

$$\psi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q},\ (x, y, z) \mapsto x + y - z\,.$$

Der Kern dieser Abbildung umfasst auf jeden Fall $(1, 2, 3) \cdot \mathbb{Q}$. Gleichzeitig ist diese Abbildung nichttrivial, wie man am Bild von $(1, 0, 0)$ sehen kann. c) Es gilt offenbar $\dim \mathbb{Q}^3/((1, 2, 3) \cdot \mathbb{Q}) = 2$ und somit $\dim \ker \psi = 1$, da die Abbildung nicht-trivial sein soll.

Aufgabe 10. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v, w \in V$ zwei *verschiedene* Vektoren. Man zeige, dass es dann ein $f \in V^*$ gibt mit $f(v) \neq f(w)$. Ferner zeige man an einem Beispiel, dass die entsprechende Aussage für Moduln über einem beliebigen Ring nicht mehr gelten muss.

Lösung Wir setzen $b := v - w$ zu einer Basis von V fort und definieren $f \in V^*$ dadurch, dass $f(b) = 1$ und $f(b') = 0$ gelte für $b' \neq b$. Dann folgt $1 = f(b) = f(v - w) = f(v) - f(w)$. Als Gegenbeispiel wählen wir den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}_2$. Wir wissen, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0$ gilt. Somit lassen sich 0 und 1 nicht voneinander trennen.

Aufgabe 11. Sei $f : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ der Vektorraum -Endomorphismus $x^i \to x^{i+1}$, $(i \in \mathbb{N})$. Sei $\phi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ die Funktion, die jedem Polynom $g(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j x^j$ die Zahl $\phi(g) := 3a_5 - a_0$ zuordnet. Man zeige, dass $\phi \in \mathbb{K}[x]^*$ und berechne $f^*(\phi)$.

Lösung Als Basis des $\mathbb{K}[x]$ wollen wir hier natürlich $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ verstehen. ϕ ist als Linearikombination zweier Funktionale, Auslesung der 0-ten und 5-ten Koordinate, wieder linear. Weiterhin ist für ein Polynom $p \in \mathbb{K}[x]$ $f^*(\phi)(p) = \phi(f(p))$. Damit ergibt sich für

$$p = (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto f(p) = (0, a_0, a_1, \dots)\,,$$

und somit $\phi(f(p)) = 3a_4$.

Aufgabe 12. Seien $(\mathbb{B}_1, W_1), (\mathbb{B}_2, W_2) \subset (\mathbb{A}, V)$ zwei affine Unterräume, so dass die zugehörigen linearen Unterräume $W_i \subset V$ komplementär zueinander sind, d.h. es gilt $W_1 \oplus W_2 = V$. Man zeige, dass sich $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ in genau einem Punkt schneiden.

Lösung Schnitten sich die beiden affinen Unterräume in zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2, so läge der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ in beiden Unterräumen W_1 und W_2. Damit wäre aber die direkte Summenzerlegung nicht mehr gewährleistet. Wäre ihr Schnitt leer, so könnte man einen beliebigen Punkt P_i aus jedem der beiden Unterräume $\mathbb{B}_i$ wählen. Dann läge der Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ oBdA in W_1. Es folgt $P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 \in \mathbb{B}_1$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Aufgabe 13. Sei $V := \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2; weiter sei $\psi : V \to \mathbb{K}^2$ die Abbildung $p(x) \mapsto (p(1), p'(1))$.
a) Für die geordneten Basen $B := \{1, x-1, (x-1)^2\}$ und $K := \{(1,0),(0,1)\}$ von V bzw. $\mathbb{K}^2$ berechne man die Matrix $M_{KB}(\psi)$.
b) Für $C := \{1, x+1, (x+1)^2\} \subset V$ berechne man die Basiswechselmatrix M_{BC}. Man errechne daraus dann $M_{KC}(\psi)$.

Lösung $p(1)$ meint die Auswertung des Polynoms p an der Stelle $x = 1$, während $p'(1)$ die Auswertung der Ableitung des Polynoms p an der Stelle $x = 1$ darstellt. Die erste Zeile der Matrix entspricht also gerade dem Vektor $(1, 0, 0)$, und die zweite Zeile ist von der Gestalt $(0, 1, 0)$, wie man durch Ermitteln der Ableitungen und Einsetzen des Wertes $x = 1$ berechnet. Insgesamt ist

$$M_{KB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Basiswechselmatrix

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man aus folgenden Überlegungen.

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \cdot 1 \\ x+1 & = & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (x-1) \\ (x+1)^2 & = & 4 \cdot 1 + 4 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2 \end{array}$$

Nun folgt

$$M_{KC} = M_{KB} \cdot M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14. Seien $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^4 \,|\, x_1 = x_2 = x_3\}$ und $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^4 \,|\, -x_2 = x_3 = x_4\}$. Man zeige, dass $\mathbb{Q}^4 = U \oplus V$ und zerlege so den Vektor $v = (2, 4, 6, 8) \in \mathbb{Q}^4$ in seine U- und V- Komponente. Alternativ gebe man eine allgemeine Zerlegungsformel für einen Vektor (x, a, b, y) an.

Lösung Eine Basis von U ist $B = \{(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$. Für V finden wir die Basis $C = \{(0,-1,1,1),(1,-1,1,1)\}$. Ihr Schnitt besteht nur aus dem Nullvektor und ihre Summe ist der ganze Raum $\mathbb{Q}^4$, da die Matrix

$$M = (B|C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist mit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $M^{-1}v = (-2, 7, 4, -3)$, d. h.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein wird der Vektor (x, a, b, y) zerlegt in

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ a \\ b \\ y \end{pmatrix} &= (b-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y + \tfrac{a-b}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ (b-x)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - \tfrac{a+b}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$