Zu 2.5

Sachfragen

S1: Was bedeutet in der Sprache der Reihenrechnung, dass man Zahlen als Dezimalzahlen schreiben kann.

S2: Wie sind die Räume s, ℓ^∞, c, c_0, c_{00} definiert?

Methodenfragen

M1: Begriffe der (Linearen) Algebra an konkreten analytischen Situationen (z.B. an Folgenräumen) untersuchen können.

Zum Beispiel:

1. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist zweidimensional.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei e_n die Folge $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (1 an der n-ten Stelle). Dann gilt: Die Menge $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig in s. Was ist die lineare Hülle von $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

M2: Resultate der Analysis – falls dafür geeignet – im Rahmen der (Linearen) Algebra interpretieren können.

Zum Beispiel:

1. Finden Sie eine algebraische Interpretation für Satz 2.4.2(i) und (ii).
2. Analog für Satz 2.3.2(ii) und (iv).
3. Was ist nachzuweisen, wenn behauptet wird:

$$\ell^2 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in s \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \text{ konvergiert} \right\}$$

ist ein Unterraum von s?

2.7 Übungsaufgaben

Zu Abschnitt 2.1

2.1.1 Man zeige: Jede Teilfolge einer Umordnung einer Folge kann als Umordnung einer Teilfolge geschrieben werden. Geht das auch umgekehrt?

Zu Abschnitt 2.2

2.2.1 Für welche reellen Zahlen x gelten folgende Ungleichungen?

(a) $|x - 5| > 0.4$,

(b) $|x + 3| \leq |x - 2|$,

(c) $|2x + 1| > |x - 2|$.

2.2.2 Zeigen Sie, dass Umordnungen konvergenter Folgen ebenfalls konvergent sind. Muss der Grenzwert der Umordnung mit dem Grenzwert der Ausgangsfolge übereinstimmen?

2.2.3 Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

(b) $b_n = \dfrac{r_0 + r_1 n + \ldots + r_k n^k}{s_0 + s_1 n + \ldots + s_k n^k}$ für gegebene r_i und s_i, $0 \le i \le k$, $s_k \ne 0$.
Dabei sei der Nenner für alle $n \in \mathbb{N}$ von 0 verschieden.

(c) $c_n = (-5)^n$.

(d) $d_n = \dfrac{2 + 1/\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 5^{-n}}$.

2.2.4 Was passiert, wenn man in der Nullfolgendefinition ε durch $1/\varepsilon$ ersetzt: Welche Folgen (a_n) sind durch

„Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass $|a_n| \le 1/\varepsilon$ für alle $n \ge n_0$ gilt.“

charakterisiert?

2.2.5 Man beweise folgende Aussagen über Teilfolgen:

(a) Aus $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Besitzt jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) eine Teilfolge (genauer: Teilteilfolge) $(a_{n_{k_l}})$, die gegen a konvergiert, so konvergiert (a_n) selbst gegen a.

2.2.6 Es sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und

$$a_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

die Folge der Mittelwerte.

(a) Zeigen Sie, dass die Mittelwerte (a_n) konvergieren, falls die (x_n) konvergieren. (Wogegen nämlich?)

(b) Die Umkehrung gilt nicht: Es gibt eine Folge (x_n), so dass (a_n) konvergiert, (x_n) jedoch nicht.

(c) Folgt aus der Konvergenz der (a_n), dass die Folge der (x_n) beschränkt ist?

Zu Abschnitt 2.3

2.3.1 Für $M \subset \mathbb{R}$ versteht man unter rM, $r \in \mathbb{R}$, die Menge $\{rx \in \mathbb{R} \mid x \in M\}$; weiter sei $-M$ die Menge $(-1)M$.

Man beweise oder widerlege:

(a) $\sup(-A) = -\inf(A)$, $\inf(-A) = -\sup(A)$, falls $A \ne \emptyset$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

(b) Es seien a_{ij} für $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\sup_{1\le i\le m} \inf_{1\le j\le n} (a_{ij}) = \inf_{1\le j\le n} \sup_{1\le i\le m} (a_{ij}).$$

(c) Die a_{ij} seien wie in (b). Dann gilt

$$\sup_{1\leq i\leq m}\ \sup_{1\leq j\leq n}(a_{ij}) = \sup_{1\leq j\leq n}\ \sup_{1\leq i\leq m}(a_{ij}).$$

(d) Ist $a_i \leq b_i$ für alle i in einer Indexmenge M, so ist $\sup a_i \leq \sup b_i$.

2.3.2 Es sei K der Körper $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ (vgl. Übung 1.4.3) mit der gewöhnlichen von $\mathbb{R}$ geerbten Ordnung. Zeigen Sie, dass nicht jede Cauchyfolge in K konvergiert.

2.3.3 Sei $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

Tipp: Man zeige zunächst, dass a_{n+2} für $n \in \mathbb{N}$ stets zwischen a_n und a_{n+1} liegt, und dann, dass $|a_n - a_{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$. (Warum ist (a_n) dann eine Cauchyfolge?)

(b) Zeigen Sie, dass (a_n) gegen die positive Lösung der Gleichung $x^2 + x = 1$ konvergiert.

Bemerkung: Man berechnet damit den Wert der so genannten Kettenbruchentwicklung für den goldenen Schnitt:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}.$$

2.3.4 Für die geordnete Menge $(M, \prec)$ und die Teilmenge A bestimme man $\sup(A)$ und $\inf(A)$, falls diese existieren:

(a) $A = \{4, 8, 10\}$, wobei $M = \mathbb{N}$, $a \prec b \;:\Leftrightarrow\; a|b$.

(b) $A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$, $(M, \prec)$ wie in (a).

(c) $A = \{x \mid x^2 < 2\}$, wobei $M = \mathbb{R}$, $a \prec b \;:\Leftrightarrow\; a \leq b$.

(d) $A = \{]\,x, y\,[\mid -1 < x \leq -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < y \leq 2\}$, wobei $M = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $a \prec b \;:\Leftrightarrow\; a \subset b$.

2.3.5 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |a_n - a_{n+1}| \leq q^n;$$

dabei ist $0 \leq q < 1$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

2.3.6 Sei M eine Menge. Man beweise, dass im geordneten Raum $(\mathcal{P}(M), \subset)$ für $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(M)$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ gilt:

$$\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}, \quad \inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}.$$

Zu Abschnitt 2.4

2.4.1 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, für welche divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$?

2.4.2 Sei (a_n) eine Folge positiver Zahlen, die monoton fällt und gegen Null konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann existiert, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ existiert.

Tipp: Erinnern Sie sich daran, wie die Divergenz der harmonischen Reihe gezeigt wurde.

(b) Man nutze Teil (a), um zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s > 1$ konvergent ist[35)].

2.4.3 Die Summe der alternierend harmonischen Reihe sei mit a bezeichnet (d. h. $a := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k$). Man zeige

(a) $a \geq 1/2$

und beweise folgendes Konvergenzverhalten zweier spezieller Umordnungen:

(b) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - - + + \ldots = a.$

(c) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + + - + + - \cdots = \frac{3}{2}a.$

Hinweis: $\frac{3}{2}a = a + \frac{1}{2}a.$

Lässt sich allgemein etwas über die Umordnungen aussagen, bei denen auf p (bzw. $2p$) positive Summanden immer p negative folgen?

2.4.4 Hier soll gezeigt werden, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dazu wird die Annahme, die Menge der Primzahlen sei $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ (wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$) für ein $r \in \mathbb{N}$ wie folgt zum Widerspruch geführt:

(a) Man zeigt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{0 \leq k_1, k_2, \ldots, k_r < \infty} \frac{1}{p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}}.$$

Hierbei darf ausgenutzt werden, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat.

(b) Dann wird bewiesen, dass

$$\sum_{0 \leq k_1, k_2, \cdots, k_r < \infty} \frac{1}{p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}} = \prod_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k}.$$

(c) Nun ist noch ein Widerspruch aus (a) und (b) abzuleiten.

Bem.: „$\sum_{0 \leq k_1, k_2, \ldots, k_r < \infty}$“ steht für „$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty}$“.

Zu Abschnitt 2.5

2.5.1 Man zeige, dass die Abbildung $\varphi : \ell^{\infty} \to c_0$, $(a_n) \mapsto (a_n/n)$ eine injektive lineare Abbildung ist. Ist sie surjektiv?

2.5.3 Man zeige:

- Die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ bildet unter der gliedweisen Addition einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
- Der Teilraum der konvergenten Folgen ist ein echter Unterraum.

---

35) Wir verwenden hier die allgemeine Potenz im Vorgriff.