Mächtigkeit einer Menge (Kardinalzahlen)

Def.
Seien A, B Mengen. Existiert dann eine Bijektion von A auf B, so heißen A und B gleichmächtig, in Zeichen $A \sim B$.

Bspe: 1) $\{0,1,2,3\} \sim \{0,5,10,15\}$, denn

$0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 15$ liefert eine Bij.

2) Seien $\mathbb{G}$ (Menge der ganzen geraden Zahlen) und $\mathbb{U}$ (" " " ungeraden ").

Es gilt: $\mathbb{G} \sim \mathbb{U}$ (da $x \mapsto x+1$ Bij.)

Bem.

Jeder Menge A lässt sich eine Mächtigkeit (Kardinalzahl), die wir mit $\operatorname{card}(A)$, $\aleph(A)$ oder auch $|A|$ (Kardinalzahl von A) bezeichnen, derart zuordnen, dass gilt:

$$|A| = |B| \iff A \sim B$$

(Also: Zwei Mengen haben genau dann die gleiche Mächtigkeit, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt.)

Def.

Sei M eine Menge, $M \neq \emptyset$.

a) M heißt endlich, falls gilt:

$$\exists n \in \mathbb{N}: \ M \sim \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\} =: \mathbb{N}_n .$$

b) M heißt abzählbar unendlich, falls gilt:

$$M \sim \mathbb{N}$$

c) M heißt überabzählbar, falls M weder endlich noch abzählbar unendlich ist.

Schreibweisen:

a) $|M| = n$

b) $|M| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ (Aleph Null)

c) $|M| > \aleph_0$

<u>Satz</u>:

$\boxed{\mathbb{Z} \text{ ist abzählbar.}}$

Beweis-Skizze:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

zz. f bijektiv.

<u>Satz</u>:

$\boxed{\mathbb{Q} \text{ ist abzählbar.}}$

Beweis: (<u>1. Cantorsches Diagonalverfahren</u>)

Idee: Man schreibe $\mathbb{Q}$ als quadratisches Schema, z.B.

„Nenner = 1":	0	1	-1	2	-2	3	$\dots$
„Nenner = 2"	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\dots$
„Nenner = 3"	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

(Jedes Element wird nur einmal notiert.)

Durch dieses Schema kann, z.B. wie durch den eingezeichneten Abzählungsvorschlag, $\mathbb{Q}$ bijektiv auf $\mathbb{N}$ abgebildet werden.

Satz:

$\boxed{\mathbb{R} \text{ ist überabzählbar.}}$

Beweis: (2. Cantorsches Diagonalverfahren)

Wir zeigen, dass es keine surjektive Abb. von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ gibt (und damit keine bijektive).

Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben.

Mit $a_{nn} \in \{0, \dots, 9\}$ bezeichnen wir die n-te Ziffer nach dem Komma in der Dezimalzahlentwicklung von $f(n)$.

[Bsp. Bei $f(3) = 412{,}1241$ gilt $a_3 = 4$;

bei $f(7) = 97$ gilt $a_7 = 0$.]

$$f(1) = 0{,}\boxed{a_{11}}\, a_{21}\, a_{31}\, a_{41} \dots$$

$$f(2) = 0{,}\, a_{12}\boxed{a_{22}}\, a_{32}\, a_{42} \dots$$

$$f(3) = 0{,}\, a_{13}\, a_{23}\boxed{a_{33}}\, a_{43} \dots$$

$$\vdots$$

Definiert man für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

so ist $b := 0{,}b_1 b_2 b_3 \dots$ ein Element aus $\mathbb{R}$, das von allen $f(n)$ verschieden ist

b und $f(n)$ unterscheiden sich (mind.) an der n-ten Stelle

Wir haben somit eine Zahl gefunden, die auch zwischen 0 und 1 liegt, aber nicht unter den aufgezählten $f(i)$ vorhanden ist.

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, man könne alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 auflisten.
Es waren also doch nicht alle!

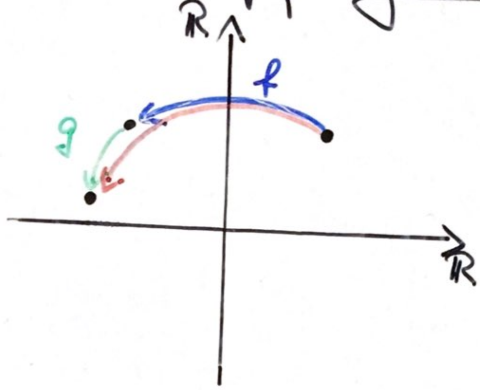
Wenn man nicht alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 auflisten kann, dann kann man dies schon gar nicht mit allen reellen Zahlen tun.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar!

$\mathbb{R}$ ist somit überabzählbar.

Verknüpfung von Abbildungen

Bsp.



f sei Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn mit Ursprung als Zentrum

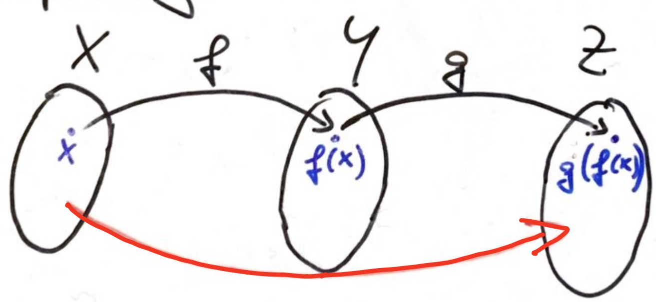
g sei eine ebensolche Drehung, nur um 30°.

Die Hintereinanderausführung von f und g ist eine ebensolche Drehung, nur um 120°.

Produkt (Komposition) von Abbildungen

Voraussetzung: Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abb.

Behauptung:



$x \longmapsto g(f(x))$ ist Zuordnungsvorschrift einer Abbildung von X in Z.

Definition:

Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen.
Die Abbildung

$$g \circ f \begin{cases} X \to Z \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

heißt Produkt
(Hintereinanderausführung, Verkettung, Verknüpfung, Komposition)
der Abbildungen f und g.

Anmerkungen:

1) Für $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist $f \circ g$ zu unterscheiden von $f \cdot g$ (mit $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$).

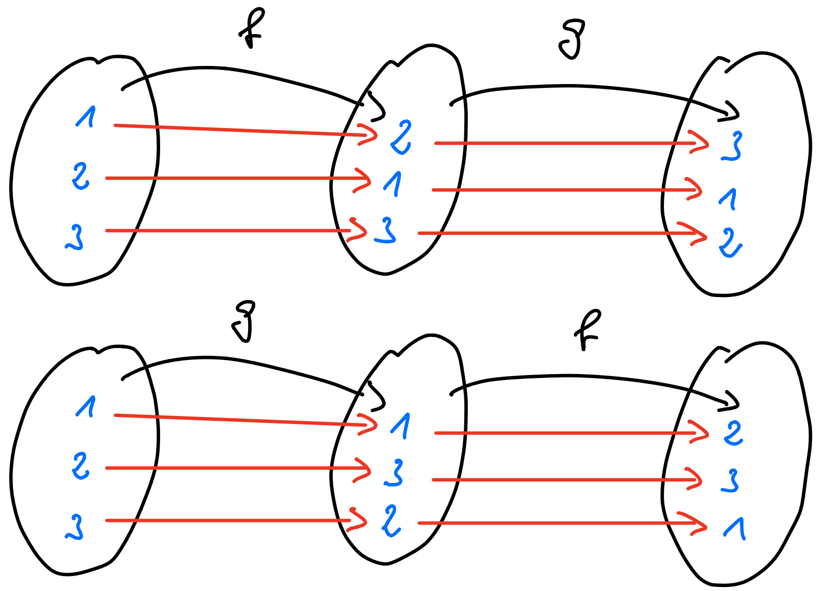
2) Man beachte das „Passen" des Def.bereichs von g und des Wertebereichs von f.

3) Eine analoge Definition ist auch für $g: Y' \to Z$ mit $Y \subseteq Y'$ möglich.

4) Im Allg. gilt $f \circ g = g \circ f$ nicht!
(nicht kommutativ)

Frage: Ist $g \circ f$ kommutativ, falls g und f Bijektionen sind?

Bsp.



$$\left.\begin{aligned} g(f(1)) &= g(2) = 3 \\ f(g(1)) &= f(1) = 2 \end{aligned}\right] \neq$$

Wir haben ein Beispiel gefunden, bei dem zwei bij. Abb. hintereinander ausgeführt werden und je nach Reihenfolge der Ausführung erhalten wir unterschiedliche Ergebnisse.

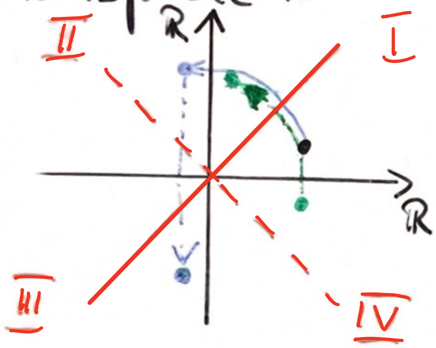
Die Antwort auf obige Frage lautet also:

Nein, da ein Gegenbeispiel existiert.

Beispiele:

1) Seien g Drehung um Ursprung um $90°$ gegen Uhrzeigers.

f Spiegelung an der x-Achse



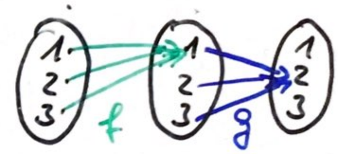
$g \circ f$: Spiegelung an der Winkelhalb. des 1. u. 3. Quadr.

$f \circ g$: ——— " ——— 2. u. 4 " .

2) Seien $X = Y = Z := \{1, 2, 3\}$.

Für $f: \begin{cases} X \to X \\ i \mapsto 1 \end{cases}$ und $g: \begin{cases} X \to X \\ j \mapsto 2 \end{cases}$ gilt:

$$g \circ f = g \neq f = f \circ g$$



3) Seien $X = Y = Z := \mathbb{R}$.

Für $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$ und $g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x^3 \end{cases}$ gilt:

$(f \circ g)(x) = 3x^3 + 1$ und

$(g \circ f)(x) = 3(x+1)^3$ (für $x \in \mathbb{R}$)

„innere Funktion"

„äußere Funktion"

Die Begriffe „innere" und „äußere Funktion" werden in der Schule insbesondere in Bezug auf das Differenzieren (Ableitung bilden) von verketteten Funktionen verwendet.

Die „Kettenregel" ist eine der „höheren Ableitungsregeln", die in der Oberstufe behandelt werden müssen.

Um die Kettenregel anwenden zu können, muss man wissen, um was es sich bei inneren und äußeren Funktionen handelt.

Beispiele:

	innere Fkt. $g(x)$	äußere Fkt. $f(z)$
1) $k(x) = f(g(x)) = \sin(3x^2 - 1)$		
2) $k(x) = f(g(x)) = 4 \cdot (x^3 - 5x + 1)^5$		
3) $k(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x^2 + 2x}$		
4) $k(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x+1}$		

Hilfssatz:

a) $(f \text{ injektiv} \wedge g \text{ injektiv}) \Rightarrow g \circ f \text{ injektiv}$

b) $(f \text{ surjektiv} \wedge g \text{ surjektiv}) \Rightarrow g \circ f \text{ surjektiv}$

c) $g \circ f \text{ injektiv} \Rightarrow f \text{ injektiv}$

d) $g \circ f \text{ surjektiv} \Rightarrow g \text{ surjektiv}$

Folgerung:

Voraussetzung: $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ Abb.

a) $$\boxed{(g \circ f = id_X \wedge f \circ g = id_Y) \Leftrightarrow (f \text{ Bijektion} \wedge g = f^{-1})}$$

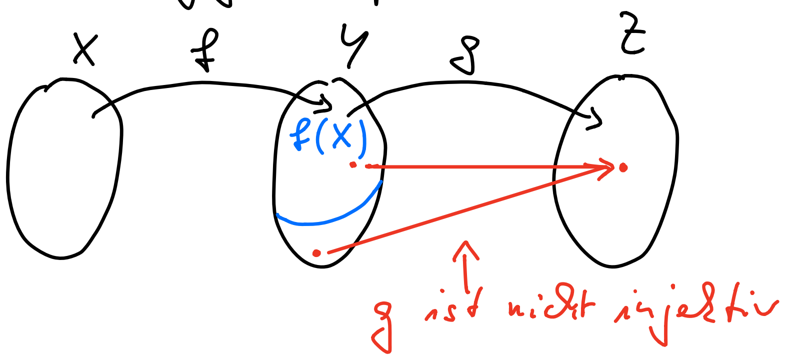
b) Sind f und g Bijektionen, so ist $g \circ f$ Bijektion und es gilt

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Frage: Gilt auch

$g \circ f$ inj. $\Rightarrow$ g injektiv ?

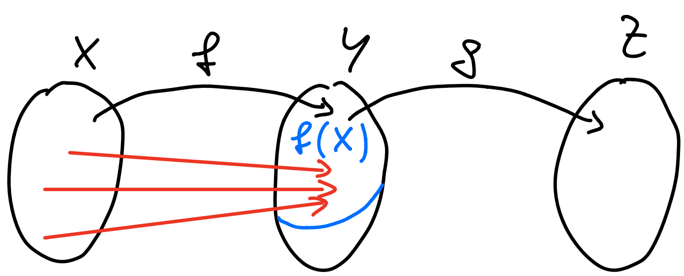
Nein! Gegenbeispiel:



Frage: Gilt auch

$g \circ f$ surj. $\Rightarrow$ f surjektiv ?

Nein! Gegenbeispiel:



f ist nicht surjektiv.

5) Für jede Abb. $f : X \to Y$ gilt:

$$\boxed{f \circ id_X = f = id_Y \circ f}$$

6) Sind $f : X \to Y$ Abb. und $A \subseteq X$, dann ist

$$\boxed{f|_A = f \circ j_{A \to X}}$$

Satz: <u>Assoziativgesetz für Abbildungen</u>

Seien X, Y, Z, W Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Abbildungen.

Dann gilt:
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Beweis: (i) Es gilt $(h \circ g) \circ f : X \to W$ und $h \circ (g \circ f) : X \to W$, also stimmen Definitions- und Wertebereich überein.

(ii) $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$
$= h(g \circ f(x)) = [h \circ (g \circ f)](x)$