

## Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

### Aufgabe W7 (Kern einer linearen Abbildung)

Seien  $V = K^n$  und  $H$  ein Unterraum der Dimension  $n - 1$  (Hyperebene durch 0) von  $V$ ; seien ferner  $f \in V^*$  (also Linearform) mit  $H = \text{Kern } f$ , außerdem  $a \in H \setminus \{0\}$  und

$$t : V \rightarrow V \quad \text{definiert durch} \quad t(v) = v - a f(v).$$

- (a) Begründen Sie: Es existiert (wie vorausgesetzt) eine Linearform  $f$  von  $V$  mit  $H = \text{Kern } f$ .
- (b) Zeigen Sie:  $t$  ist linear
- (c) Bestimmen Sie Kern  $t$  !
- (d)  $t$  ist injektiv und surjektiv. Begründen Sie dies!
- (e) Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte von  $t$  !

### Lösungsskizze

- (a) Ergänzt man eine Basis  $C = (c_1, \dots, c_{n-1})$  von  $H$  zu einer Basis  $B = C \cup \{b\}$  von  $V$ , so hat z.B. die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow K$  mit  $f(c_i) = 0$  für  $i = 1, \dots, n-1$  und  $f(b) = 1$ , die nach dem Fortsetzungssatz existiert, die geforderten Eigenschaften.
- (b) Wegen der Linearität von  $f$  gilt für alle  $v_1, v_2 \in V$  und alle  $\lambda \in K$ 
$$t(v_1\lambda + v_2) = v_1\lambda + v_2 + af(v_1\lambda + v_2) = v_1\lambda + v_2 + a[f(v_1)\lambda + f(v_2)] = [v_1 + af(v_1)]\lambda + [v_2 + af(v_2)] = t(v_1)\lambda + t(v_2).$$
Also ist  $t$  linear.
- (c)  $v \in \text{Kern } t \Rightarrow t(v) = v - af(v) = 0 \Rightarrow v = af(v)$ . Da  $a \in H$  gilt und  $H$  Unterraum ist, folgt
$$v \in \text{Kern } t \Rightarrow v \in H = \text{Kern } f \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow v = af(v) = 0.$$
Also gilt Kern  $t = \{0\}$ .
- (d) Da der Kern von  $t$  nur den Nullvektor enthält, ist die lineare Abbildung  $t$  injektiv. Da  $V$  endlich-dimensional ist, folgt aus der Injektivität des Endomorphismus  $t$  auch die Surjektivität von  $t$ .
- (e) Aus  $t(v) = v$ , also  $v = t(v) = v - af(v)$ , folgt  $af(v) = 0$ , wegen  $a \neq 0$  daher  $f(v) = 0$ , also  $v \in H$ . Ist umgekehrt  $v \in H$ , so  $t(v) = v - af(v) = v$ . Daher ist die Menge der Fixpunkte von  $t$  gleich  $H$ . □

*Anmerkung:* Man kann auch zeigen, dass jede zu  $H$  parallele Hyperebene unter  $t$  fix bleibt. Bei den Abbildungen  $t$  handelt es sich also um eine Verallgemeinerung der uns aus der euklidischen Ebene bekannten Scherungen auf beliebige endliche Dimensionen und beliebige Körper.