

\*\*\*\*\*

# Höhere Mathematik für Physiker

## Teil II

F. Krause

### Kapitel 8

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

\*\*\*\*\*

Copyright F.Krause

## • 8.1 Grundlagen

- 8.1.1 Die Beschreibung deterministischen Verhaltens
  - \* 8.1.1a Daten und Zustände
  - \* 8.1.1 b Die determinierende Abbildung
  - \* 8.1.1c Der Schluß vom Datenzustand auf den Systemzustand
- 8.1.2 Gewöhnliche deterministische Systeme
  - \* 8.1.2a Der Zustandsraum
  - \* 8.1.2b Das Anfangswertproblem
  - \* 8.1.2c Die Regel über die Zahl der Parameter in der allgemeinen Lösung
- 8.1.3 Die drei Erscheinungsformen eines gewöhnlichen deterministischen Systems
  - \* 8.1.3a Das Feld eines gewöhnlichen glatten deterministischen Systems
  - \* 8.1.3b Die Differentialgleichung eines gewöhnlichen deterministischen Systems
  - \* 8.1.3c Das "Formblatt" der drei Erscheinungsformen eines deterministischen Systems
- 8.1.4 Beispiele
  - \* 8.1.4a Das Separationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen mit  $N=1$ )
  - \* 8.1.4b Weitere Beispiele
  - \* 8.1.4c Die Orthogonaltrajektorien einer Kurvenschar.
  - \* 8.1.4d Höhere Dimension
- 8.1.5 Ausbau des Begriffssystems: Autonome und explizite Differentialgleichungen
  - \* 8.1.5a Autonome Differentialgleichungen
  - \* 8.1.5b Autonomisierung und Dynamische Systeme
  - \* 8.1.5c Explizite Differentialgleichungen
  - \* 1.8.5d Die Feldlinien eines statischen Feldes

## • 8.2 Methoden zur Lösung und Analyse von Differentialgleichungen

- 8.2.1 Substitutionen
  - \* 8.2.1a Substitutionen, die zwischen physikalischen und mathematischen Variablen vermitteln
  - \* 8.2.1b Die Besselsche Differentialgleichung
  - \* 8.2.1c Differentialgleichungen vom Bernoullityp
- 8.2.2 Symmetrieeigenschaften von Differentialgleichungen
- 8.2.3 Umwandlung einer partiellen Differentialgleichung in eine gewöhnliche - Separation bei partiellen Differentialgleichungen
- 8.2.5 Potenzreihenansätze für lineare nicht autonome Differentialgleichungen
- 8.2.6 Qualitative Methoden

## • 8.3: Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen

- 8.3.0 Vorbemerkung
- 8.3.1 Der Fixpunktsatz
- 8.3.2 Anwendung des Fixpunktsatzes auf die Differentialgleichungen

- 8.4 Anwendungen des Fixpunktsatzes auf Probleme der Analysis

- 8.4.1 Der Satz über die inverse Abbildung
- 7.4.2 Das Theorem über die lokale Existenz implizit definierter Funktionen.

# Kap.8: Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 8.1 Grundlagen

### 8.1.1 Die Beschreibung deterministischen Verhaltens

Weshalb sind Differentialgleichungen so wichtig? Wir greifen diese bereits zu Beginn von Kapitel 7 gestellte Frage auf und ergänzen sie durch einen wichtigen Gesichtspunkt, geben also einen weiteren Antwortversuch.

Zuvor sollte man allerdings nicht verschweigen, dass im Rahmen der Ausbildung die Behandlung dieser Frage üblicherweise eher umgangen wird, dass sie nicht gestellt, sondern durch einen *paradigmatischen Zugang* angegangen wird, der folgendermassen aussieht:

Beispiele von Differentialgleichungen und deren Anwendungen werden gerechnet und gelernt. Ist das geschehen, so entsteht das Empfinden, die Frage nach dem Grund für die Wichtigkeit der Differentialgleichungen sei geklärt. Teilweise hat sich so tatsächlich ein tieferes Verständnis entwickelt.

(1.1.1) Zunächst erinnern wir an die Resultate aus Kapitel 7: Versucht man eine rein formale Präzisierung dessen, was eine Differentialgleichung **leistet**, so folgt zunächst:

◆1) Differentialgleichungen sind ein bestimmter Typ von **Bestimmungsgleichungen für Kurven**.

(1.1.2) Das läßt sich in typisch mathematischer Manier präzisieren, wodurch man über die Lokalitätsbedingung zum zweiten Antwortversuch gelangt:

◆2) Die zur Differentialgleichung gehörige Bedingung bezieht sich auf die **Änderung von Größen**. Diese Bedingung wird lokal (*an derselben Stelle*) durch den Wert der Größe festgelegt.

Durchdenkt man diese Formulierung, so erhebt sich die Frage: *Änderung worunter?* Bei Änderung des unabhängigen Parameters der Kurve aus dem ersten Antwortversuch. Aber welche Bedeutung hat dieser Parameter bei den Anwendungen? Was wählt man jeweils als unabhängig?

Fragt man in vertrauten Beispielen präzisierend weiter, was sich jeweils ändert und unter welchen Umständen, so kommen wir zu unserem jetzt zu besprechenden Antwortversuch, der den dritten Versuch aus Kapitel 7 mit erfaßt, wie wir sehen werden.

◆3) Differentialgleichungen liefern ein mathematisches Modell für einen wichtigen Typ **deterministischen Verhaltens**.

(1.1.4) Zunächst eine Bemerkung zur Wortwahl. Ursprünglich interessierte eher *kausales Verhalten*, aufgebaut aus Ursache-Wirkungsketten. Und das wieder war orientiert an Beispielketten, die mit einem Willensakt eines Individuums begannen.

X hat Lust einen Stein zu werfen. Die Realisierung dieses Wunsches bewirkt eine Armbewegung, diese eine bestimmte Flugbahn des Steines und einen Aufschlag im Teich. Der Aufschlag verursacht kreisförmige Wellen, die sich aufs Ufer zubewegen. Die höchste erfaßt den kleinen Käfer am Grashalm und läßt ihn ins Wasser stürzen.....

Also: X-ens Lust als *Ursache des Käferbades*.

Unzählige Versuche, die Welt in ihrer Gesamtheit als auf einander folgende Ursachen und deren Wirkungen zu verstehen und zu erklären, waren nicht besonders erfolgreich. Insbesondere ein damit verbundener philosophietypischer Drang, alles auf einmal schaffen zu wollen, führte zu viel Unfug und vergeblichen Mühen. Was sich jedoch durchaus bestätigte, war, dass es einzelne Bereiche, einzelne Glieder solcher Ketten gibt, bei denen innerhalb einer bestimmten Beobachtungsgenauigkeit Eines das Andere eindeutig bestimmt und

festlegt. Fällt der Stein in einer bestimmten Weise in das Wasser, so entstehen immer ganz bestimmte Wellen. Gibt man dem Massenpunkt bestimmte Anfangswerte, so ist seine Bewegung unter dem Einfluß eines gegebenen Kraftfeldes vollkommen festgelegt. Aber schon hier wird die Frage problematisch, was genau die *Ursache* der Bewegung sei. Sind es die Anfangswerte? Oder ist es das Kraftfeld? Oder beides? Die Antwort wird fallspezifisch ausfallen, nicht universal.

Noch krasser: Der Stein entlang seiner Flugbahn. Zu jedem Zeitpunkt hat er eine bestimmte kinetische Energie. Über den Energiesatz wird dadurch auch seine potentielle Energie festgelegt. Aber man wird nicht sagen: Die kinetische Energie ist die Ursache der potentiellen. Denn genauso gut könnte man hier die Rollen vertauschen und sagen, die potentielle Energie bestimme die kinetische. Bei unserem Eingangsbeispiel dagegen wirkt ein solcher Rollentausch unsinnig bzw. produziert einen völlig anderen Sinn:

*Der Flug des Steines bewirkte in X den Wunsch...*

(1.15) Wenn wir hier - in diesem Text - von deterministischem Verhalten sprechen, dann ist das gemeint, was beiden Typen von Phänomenen gemeinsam ist: **Dass in bestimmten Situationen das Eine das Andere vorhersagbar bestimmt oder festlegt**. Nicht jedoch, dass man das eine unbedingt als erklärende Ursache des anderen ansehen muß.

- Durchdenken Sie weitere Beispiele aus der Physik. Wir geben Paare von Objekten. Überlegen sie, wann welche Komponente welche bestimmt, eventuell auch als Ursache interpretiert werden kann. Eventuell muss man noch wichtige äußere Parameter mit angeben: (Wärmemenge, Temperaturänderung), (elektrische Ladung, elektrisches Feld), (Gasdruck, Gasvolumen), (Planetenbahn, Umlaufzeit),.....

### 8.1.1a Daten und Zustände

Etwas genauer: Im Rahmen unserer Weltwahrnehmung treffen wir auf vier zentrale Eigenschaften der uns umgebenden beobachtbaren Dinge:

<i>Raumstruktur</i>	<i>Zeitstruktur</i>	Idealisierbarkeit vielfach in Form von <i>Quantifizierbarkeit</i>	Gesetzmäßige <i>deterministisches</i> Verhalten
---------------------	---------------------	-------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------

Der bisherige Kurs hat bereits gezeigt, wie man die ersten drei dieser dieser Eigenschaften mathematisch fassen und beschreiben kann.

(1.1.6) Aber wie steht es mit der vierten? **Wie stellt sich deterministisches Verhalten mathematisch dar?** Und auch: Wie stellt es sich im Zusammenhang, in Verbindung mit den drei anderen Eigenschaften dar?

(1.1.7) Idealisiert man reale physikalische Systeme, die deterministisches Verhalten zeigen und betrachtet man die üblichen Idealisierungen hinsichtlich dieser Fragen, so erweisen sich eine Reihe von Merkmalen der Beschreibung als wichtig bis unverzichtbar, die wir zunächst aufführen und anschließend ausführlich kommentieren wollen:

Reale Systeme mit determinist. Verhalten	<i>Idealisierung</i> →	Raum d. Zustände oder Systemmodi $\mathfrak{Z}$ Datenraum mit Faktorisierung $\mathfrak{D}=\mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ Determinierende Abbildung $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$
------------------------------------------------	---------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Erläuterung** der angegebenen Begriffe:

(1.1.8) Das System soll quantitativ- durch Zahlangaben oder andersartig - beschrieben werden. Hierzu kann man im Prinzip immer eine unüberschaubare Vielzahl von beobachtbaren Größen heranziehen. Von diesen sind die meisten irrelevant für das bei der Idealisierung interessierende Problem. (Bei der Beschreibung einer Flugbahn etwa Farbe, Alter oder Preis des fliegenden Körpers.) Von den Eigenschaften, die relevant sind, erweisen sich manche als durch die restlichen definitionsgemäß oder trivial ausdrückbar. So folgt die kinetische Energie aus Masse und Geschwindigkeit. **Schließlich bleibt ein Satz relevanter und für den jeweiligen Zweck unverzichtbarer Beobachtungsgrößen**. Unverzichtbar im Sinne der Systembeschreibung. Deren denkbare Werte erzeugen den (*einen*) Datenraum unseres Systems. Vielfach ist das mathematisch ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , der meist sogar endlichdimensional ist, eventuell um Faktoren

$\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{N}$  erweitert. Es kann aber auch eine anders geartete Menge vorliegen. *Erzeugen* bedeutet, dass alle denkbaren Kombinationen der Beobachtungsgrößen gemeint sind, nicht etwa nur tatsächlich vorgefundene.

Ist  $\mathfrak{D}$  Vektorraum, so sollte dieser bei etwas Sorgfalt des Vorgehens bis auf Isomorphie eindeutig sein, insbesondere sollte seine Dimension durch das System festgelegt sein. Die Elemente von  $\mathfrak{D}$  nennen wir auch selbsterklärend Datentupel des Systems.

Im Falle des Flugparabelsystems ist  $\mathfrak{D} = \mathbb{R}^7 = \mathbb{R}_t^1 \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$ . Jedes Datentupel enthält die Angaben *Zeit, Ort und Geschwindigkeit*, als die für die Beschreibung der Bewegung relevanten Daten. Weitere Größen wie kinetische Energie oder Beschleunigung folgen rechnerisch aus diesen Daten.

(1.1.9) Fallspezifisch, vielfach nicht kanonisch, hat man eine Produktaufspaltung  $\mathfrak{D} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ . Die Größen aus  $\mathfrak{K}$  übernehmen die Rolle der unabhängigen Größen. Das können *Entwicklungsgrößen* wie die Zeit oder *Kontrollgrößen* wie ein frei vorgegebener Winkel sein. Wir nennen  $\mathfrak{K}$  den Raum der Entwicklungs- und Kontrollgrößen. Ist eine traditionell kausale Interpretation möglich oder angestrebt, so erfasst  $\mathfrak{K}$  die Ursachen. Vielfach ist  $\mathfrak{K}$  der Konfigurationsraum des Systems. Im Beispiel der mechanischen Energie liegt es in der Entscheidung des Beobachters, ob er die kinetische oder die potentielle Energie als Kontrollgröße wählt.

(1.1.10) Die Elemente des zweiten Faktors  $\mathfrak{B}$  übernehmen die Rolle der abhängigen Größen, die über die Systemgesetze von den Größen aus  $\mathfrak{K}$  beeinflusst, wenn nicht festgelegt werden. Wir nennen diese Größen die *Beobachtungsgrößen*, weil man ihr Verhalten (abhängig vom Wert der Kontrollgrößen) beobachten kann und vorhersagen möchte! Das ist die Ergebnisraumrolle von Kap.1.1. Im Falle der Flugparabel ist  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}_t$  und  $\mathfrak{B} = \mathbb{R}^6$ .

(1.1.11) Die formale Beschreibung deterministischen Systemverhaltens geschieht dann mit Hilfe geeigneter Abbildungen  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$ . Im Falle des Flugparabelsystems sind das gerade die Flugparabeln. Jedem Kontrollwert  $t$  wird ein bestimmter durch ihn determinierter Beobachtungswert  $(\vec{r}(t), \vec{v}(t))$  zugeordnet. (Vgl. Kap. 1.2.13).

(1.1.12) Vielfach (und das sind gerade die hier - Differentialgleichungen! - interessierenden Fälle) gehört zu einem System nun nicht nur eine einzige derartige Zustandsabbildung  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$ . So gibt es bei fester Beschleunigung sehr viele unterschiedliche Flugparabeln. Um das zu fassen, führen wir den Zustands- oder Modenraum  $\mathfrak{Z}$  des Systems ein! Er besteht aus allen vom System tatsächlich realisierten Abbildungen  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$ . Also aus allen Systemmoden, die festgelegtes Verhalten zeigen.  $\mathfrak{Z}$  ist mithin eine Teilmenge von  $\mathfrak{F}(\mathfrak{K}, \mathfrak{B})$ . Besser noch ist es,  $\mathfrak{Z}$  als Parametermenge einer Parametrisierung  $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{K}, \mathfrak{B})$  dieser Abbildungsmenge zu interpretieren. Die Elemente von  $\mathfrak{Z}$  geben also den Systemzuständen geeignete Namen. Im Falle der Flugparabel besteht  $\mathfrak{Z}$  aus allen Flugparabelabbildungen mit  $\vec{g}$  fest. Erfasst werden die *tatsächlichen*, die physikalisch möglichen Zustände, nicht die denkbaren.

Die Bedeutung von  $\mathfrak{Z}$  müssen wir noch weiter erläutern:

(1.1.13) Objekte des Systems werden einerseits ihre Identität bewahren, obwohl sich andererseits ihre beobachtbaren Eigenschaften ändern können. Ein Massenpunkt bleibt Massenpunkt, auch wenn sich seine Lage und Geschwindigkeit ändern. Man sollte zwei Arten von Eigenschaftsänderungen unterscheiden (vgl. die Besprechung des Arbeitsbegriffes in Kap. 1.2.13a sowie Kap. 3.3 über die Gruppenoperationen):

- autonome Änderungen, d.h. solche, die durch die innere Gesetzmäßigkeit des Systems bestimmt sind und
- äußere, von außen vorgegebene Änderungen, d.h. solche, die infolge eines äußeren Eingriffs in das System erfolgen, ohne dass die Identität des Systems zerstört wird.

(1.1.14) Ein Stein auf seiner Flugbahn ändert ständig seine beobachtbaren Eigenschaften wie Ort und Zeit. Nochmals: Wir rechnen hier die Zeit als Datengröße. Trifft der Stein etwa eine bestimmte Fläche, so beschreiben wir dies Ereignis durch eine Orts- und Zeitangabe. Eine solche Änderung ist eine autonome Änderung. Versetzt man dem Stein jedoch zwischendurch einen Schlag, so ändern sich die Beobachtungsgrößen auch, aber jetzt nicht mehr autonom. Nach dem Schlag befindet der Stein sich auf einer anderen Flugparabel in einem anderen Systemzustand. Äußere Änderungen sind vielfach gewollt, mit einem Willenssakt eines Eingreifenden, eines Experimentators verbunden. Umgangssprachlich ist man dagegen geneigt, alle Änderungen einfach als Zustandsänderungen zu bezeichnen. So würde man durchaus sagen: Durch den Schlag wird der Stein in einen anderen Flugzustand versetzt. Wir müssen den umgangssprachlichen Gebrauch von Zustand präzisieren.

(1.1.15) Zu diesem Zweck wollen wir zwischen *Systemzustand oder Systemmodus* und *Beobachtungs- oder Datenzustand* unterscheiden. Verändern sich die Eigenschaften des Systems nur infolge innerer Entwicklungen oder Gesetze, also autonom, so sagen wir, das System bleibe in demselben Systemzustand. Der Beobachtungszustand kann sich dabei natürlich ändern. Zu ein und demselben Systemzustand können viele Beobachtungszustände gehören. Welche das sind, wird gerade durch die in (1.1.11-12) genannte zugehörige Abbildung  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$  festgelegt.

(1.1.16) Beispiel: Unser System sei ein harmonisch schwingender Körper. Lage und Geschwindigkeit ("Beobachtungszustand") ändern sich ständig, aber sein Bewegungszustand (=Systemzustand) bleibt derselbe. Führt man von außen irgendwie Energie zu, so gelangt der Oszillator in einen veränderten Systemzustand. Oder auch: Der Oszillator kommt durch die Energiezufuhr in einen anderen Modus.

(1.1.17) Beispiel: Wir betrachten die Menge der Parallelogramme in der Ebene. Das sind deterministische Objekte in dem Sinn, dass z.B. Seitenlänge und Winkel die Form - nicht die Lage - jedes Parallelogramms vollständig bestimmen (=determinieren). Seitenlängen und ein Winkel können als Kontrollvariable genommen werden. Als Beobachtungsgrößen wählen wir den Flächeninhalt und die Länge der dem Winkel gegenüber liegenden Diagonale. Aus den bekannten Formeln

$$F(\alpha, a, b) = ab \sin \alpha \quad d(\alpha, a, b) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}$$

folgt die determinierende Abbildung folgt die determinierende Abbildung folgt die determinierende Abbildung  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$ . Hier gibt es nur eine Abbildung. Also ist der Zustandsraum  $\mathfrak{D}$  für diese Idealisierung einelementig.

(1.1.18) Wir können uns aber auch vorstellen, dass bei unseren Parallelogrammen der Winkel leichter veränderbar sei als die Längen. Dass feste Seiten beweglich miteinander verbunden seien und man so den Winkel bei jedem Parallelogramm kontrolliert verändern kann. Dann wird man  $\alpha$  als Kontrollvariable wählen und die Seitenlängen  $a$  und  $b$  als äußere Parameter. Dieses System *Parallelogramm mit veränderlichem Winkel* hat jetzt viele Systemzustände, für jede Wahl von  $(a, b)$  einen. Mithin ist  $\mathfrak{Z} = [0, \infty[ \times [0, \infty[$  wählbar und zu jedem so bestimmten Zustand gehört eine eigene determinierende Abbildung. Auch diese Abbildungen werden durch obige Formeln (mit anderer Rollenverteilung) festgelegt. Hier ist ein äußerer Eingriff typischerweise das Ersetzen eines Parallelogrammsystems durch ein zweites mit anderen Seitenlängen.

(1.1.20) Die Begriffe Systemzustand oder Systemmodus erfassen also weniger das Ding allein - hier das Parallelogramm - sondern auch das, was man jeweils mit diesem Ding tun möchte bzw. was mit ihm geschehen kann. Und das geschieht über die Wahl der Kontrollparameter, wodurch festgelegt wird, was die autonomen Systemänderungen sein sollen. Beim Parallelogramm können das reine Winkeländerungen sein oder der Übergang von einem Parallelogramm zu irgendeinem anderen. Die Aufteilung des Datenraumes in Kontroll- und Beobachtungsgrößen stellt eine situationsspezifische Rollenzuweisung dar.

- Betrachten Sie einen getriebenen Oszillator mit sinusförmiger Kraft. Welche Rolle erhält die Außenfrequenz  $\Omega$ ? Analysieren sie an diesem Beispiel die Frage der situationsspezifischen Rollenzuweisung.
- Betrachten sie eine feste Menge eines idealen Gases. Gibt es verschiedene Systemzustände? Wodurch kann man sie charakterisieren? Welche determinierenden Abbildungen bieten sich an?
- Betrachten sie den *Schluss von der Rechnung auf die Geometrie* aus Kap. 6.3 unter der Aspekt der Determiniertheit.
- Es sei  $\star : G \times M \rightarrow M$  eine Gruppenoperation. Das läßt sich als deterministisches System interpretieren! Dabei übernimmt  $G$  die Rolle der Kontrollgröße  $\mathfrak{K}$ . Wie sehen die anderen Größen aus? Achtung die Bahnen allein sind noch nicht die Systemzustände! Betrachten Sie insbesondere die Fälle  $G = \mathbb{Z}$  und  $G = \mathbb{R}$ .

## 8.1.1 b Die determinierende Abbildung

(1.1.21) Wie wir gesehen haben, gehört zu jedem Systemzustand aus  $\mathfrak{Z}$  eine eigene Abbildung  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$ . Wir nennen diese Abbildung die determinierende Abbildung des Zustandes. Diese Abbildungen müssen wir alle zusammenfassen, um das zu bekommen, was insgesamt in unserem System bestimmt ist. Wir müssen also *die determinierende Abbildung des Systems*  $\mathfrak{D} : \mathfrak{Z} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$  bilden. Die determinierende Abbildung eines Zustands  $z \in \mathfrak{Z}$ , die die autonomen Änderungen bestimmt, erhält man einfach durch Restriktion  $(\mathfrak{K}, k \mapsto \mathfrak{D}(z, k), \mathfrak{B})$ . **Will man ein deterministisches System formal beherrschen, so ist die Abbildung  $\mathfrak{D}$  das Traumziel.**

(1.1.22) Betrachten wir das am Beispiel der Flugparabel. Die übliche Formel für die Flugparabel liefert uns tatsächlich  $\mathfrak{D}$  für das Flugparabelsystem. Die Systemzustände werden hier ja durch einen Datensatz

$(t_0, \vec{x}_0, \vec{v}_0)$  festlegt. Kontrollvariable ist  $t$  und  $\vec{v}$  und  $\vec{r}$  sind Beobachtungsvariable. Also

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= (\mathfrak{Z} \times \mathbb{R}_t, (t_0, \vec{x}_0, \vec{v}_0, t) \mapsto (\vec{r}(t), \vec{v}(t)), \mathfrak{B}) \\ \text{mit } \vec{r}(t) &= \frac{1}{2} \vec{g}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0 \quad \text{und} \quad \vec{v}(t) = \vec{g}(t - t_0) + \vec{v}_0. \end{aligned}$$

**Zustand und Zeit zusammen bestimmen - determinieren - die Beobachtungsgrößen.** Und diese Formeln sind das, was man formal im Zusammenhang mit Flugparabeln benötigt.

□ Überlegen Sie sich die determinierende Abbildung für die beiden Parallelgrammsysteme.

(1.1.23) Damit schließen wir die Erläuterung der formalen Bestandteile der deterministischen Systeme ab. Fassen wir noch einmal alle Größen zusammen:

- ◆ Den Datenraum  $\mathfrak{D}$  des Systems,
- ◆ die Aufspaltung in Kontroll- und Beobachtungsvariable  $\mathfrak{D} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ ,
- ◆ den Zustandsraum und die Unterscheidung von autonomen und äußeren Änderungen,
- ◆ die determinierende Abbildung eines Zustandes  $\mathfrak{d}_z : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$ ,
- ◆ die determinierende Abbildung des Systems  $\mathfrak{d} : \mathfrak{Z} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$ .

Beachten Sie: Hat man  $\mathfrak{d}$  als mathematisches Objekt (Abbildungstriple) vorgegeben, so kann man daraus alle übrigen Größen rekonstruieren.

(1.1.24) Jetzt erproben wir unseren Begriffsapparat kurz an einem Beispiel aus der Mathematik, bei dem offensichtlich strenger Determinismus vorliegt: Der Dimension von Vektorräumen. Sei  $\mathcal{V}$  eine Menge von Vektorräumen.  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Wir setzen  $\mathfrak{D} = \mathcal{V} \times \overline{\mathbb{N}}$ . Jedes Datentupel besteht daher aus einem Vektorraum und einer (für ihn denkbaren) Dimension.  $\mathfrak{K} = \mathcal{V}$ . Determinierende Abbildung ist

$$\mathfrak{d} = \dim = (\mathcal{V}, V \mapsto \dim V, \overline{\mathbb{N}})$$

Es gibt nur diese eine Abbildung, also auch nur einen Systemzustand,  $\mathfrak{Z}$  ist einelementig, was besagt, dass es hier nur eine Art von Dimension gibt.

(1.1.25) Ein ähnliches Beispiel.  $A_{ab}\vec{x} = \vec{0}$  sei ein lineares Gleichungssystem mit äußeren Parametern  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Weiter sei  $\mathbb{L}_{ab}$  der zugehörige Lösungsraum. Wir nehmen an, dass über die Aufgabenstellung  $b$  stärker fixiert ist als  $a$ , so wie bei der Flugparabel  $\vec{g}$  stärker fixiert ist als etwa  $\vec{x}_0$ .

Wir setzen  $\mathfrak{D} = \mathbb{R}_a \times (\mathbb{R}_b \times \overline{\mathbb{N}})$ . Also  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}_a$ . Für jedes  $b \in \mathbb{R}_b$  haben wir die determinierende Abbildung des Zustands  $(\mathfrak{K}, a \mapsto \dim(\mathbb{L}_{ab}), \overline{\mathbb{N}})$ , die festlegt, wie sich die Dimension des Lösungsraumes bei festem  $b$  ändert, wenn man den Kontrollparameter  $a$  ändert. Jedes  $b$  liefert einen Systemzustand, so dass man  $\mathfrak{Z}$  mit  $\mathbb{R}_b$  identifizieren kann. Dann ist

$$\mathfrak{d} = (\mathbb{R}_b \times \mathbb{R}_a, (b, a) \mapsto \dim(\mathbb{L}_{ab}), \overline{\mathbb{N}})$$

determinierende Abbildung des Systems.

Der zweite Teil des Beispiels enthält bei genauem Hinsehen ein Problem: Der gewählte Datenraum ist unvollständig. Eigentlich sollte die gesamte Lösungsmenge genommen werden, um den Systemzustand zu beschreiben, nicht nur deren Dimension. Wir haben es hier mit einem immer wieder fallspezifisch zu behandelndem Problem zu tun.

(1.1.26) Deterministische Systeme mit einelementigem  $\mathfrak{Z}$  sind im Zusammenhang mit Differentialgleichungen nicht interessant. Sie kommen wie obige Beispiele zeigen, aber durchaus vor. Ja, sie bilden das einfachste Modell von deterministischem Verhalten, das man sich denken kann: Eine einzige Abbildung  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{B}$ , die beschreibt, wie die Kontrollgrößen die Beobachtungsgrößen in eindeutiger Weise festlegen, determinieren. Und sonst nichts.

□ Die Dezimalstellen der Zahl  $\pi$  sind vollständig bestimmt. Der Zustandsraum ist einelementig. Geben Sie die anderen Größen dieses Systems an.

Für die modellhafte Beschreibung realer Systeme durch mathematische Strukturen sind mehrelementige Zustandsräume nützlich, weil man damit verschiedene reale Gebilde, die sich einerseits unterscheiden, andererseits aber eine gemeinsame Gesetzmäßigkeit haben, in ein und derselben Struktur unterbringen kann. Die zu unterscheidenden Systemzustände manifestieren sich üblicherweise in Form äußerer Parameter, die Gemeinsamkeiten dagegen in der determinierenden Abbildung.



## 8.1.1c Der Schluß vom Datenzustand auf den Systemzustand

(1.1.27) Neben dem beschriebenen Hauptproblem für deterministische Systeme, also der Frage *Wie erhält man die determinierende Abbildung  $\mathfrak{d}$  des Systems?*, ist eine zweite Frage von Bedeutung: **Wie kann man mit Hilfe von Datentupeln den Systemzustandsraum beschreiben?** Oder auch: Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Räumen  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{D}$ ? Das ist natürlich nur dann relevant, wenn  $\mathfrak{Z}$  nicht einelementig ist.

Wir werden sehen, dass die gesuchte Beziehung für Systeme, die zu gewöhnlichen Differentialgleichungen gehören, besonders einfach ist: Hier sind  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{D}$  lokal isomorph, so dass man im Idealfall **von einem Beobachtungszustand unmittelbar auf den Systemzustand zurückschließen kann!**

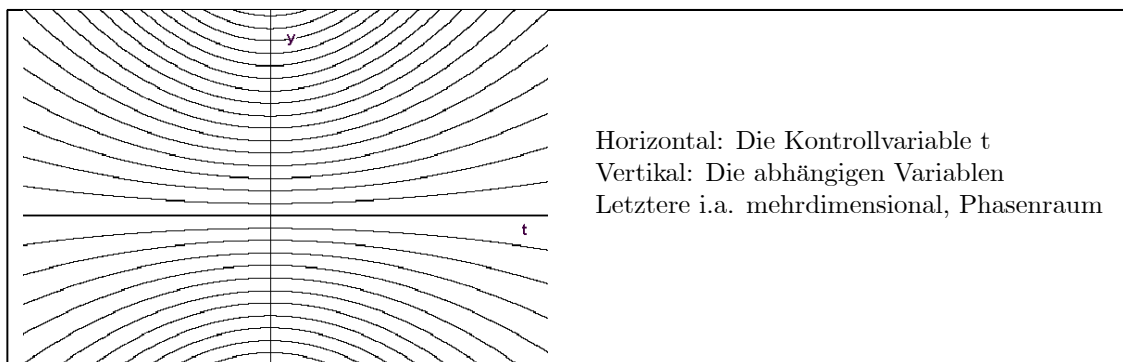
In anderen Fällen kann diese Beziehung sehr viel komplexer sein. Dann hat die Frage *Wie kann man aus Beobachtungsdaten auf den zugehörigen Systemzustand schließen?* keine so einfache Antwort.

(1.1.28) Was bedeutet es, wenn man (irgendwie) vom Beobachtungszustand auf den Systemzustand schließen kann? Dann ist die Relation für Datentupel

$$(k, b) \text{ und } (l, c) \text{ aus } \mathfrak{D} \text{ gehören zu demselben Element aus } \mathfrak{Z}$$

definiert und gibt - eventuell mit einigen technischen Zusatzannahmen - eine Äquivalenzrelation auf  $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{B}$ . Die entstehenden Klassen sind gerade die Graphen der determinierenden Zustandsabbildungen  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{B}$ . **Und die Klassenmenge kann mit dem Zustandsraum identifiziert werden!** Man hat also eine Partition von  $\mathfrak{D}$  durch die Graphen der determinierenden Abbildungen.

Nochmals: Auf  $\mathfrak{D}$  ist ein Partition durch Graphen von Abbildungen  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{B}$  gegeben. Jeder Graph erfaßt einerseits einen möglichen Systemzustand und die zugehörige Abbildung beschreibt andererseits, wie für diesen Zustand die Kontrollvariablen die Beobachtungsgrößen determinieren!



Die Figur faßt diesen Sachverhalt anschaulich zusammen. Man sollte sie immer wieder zur Orientierung heranziehen.

(1.1.29) Selbstverständlich kann und muss man noch gewisse technische Verfeinerungen anbringen. Wichtig ist der Fall, bei dem die Partition nur auf einem Gebiet  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{D}$  erklärt ist. Dann besitzen die determinierenden Abbildungen u.U. je nach Zustand unterschiedliche Definitionsbereiche. Was gefordert werden muß ist, dass der typische Datensatz auch tatsächlich vom System realisiert werden kann, dass zu ihm ein möglicher, denkbarer Systemzustand gehört - eventuell nach Idealisierung.

(1.1.30) Fassen wir unsere bisherige Argumentation zusammen

- ◆ Wir möchten deterministisches Verhalten idealisieren und durch eine geeignete mathematische Struktur beschreiben.
- Die realen Systeme weisen dann gewisse gemeinsame Merkmale auf:
  - ◇ Sie können in bestimmten Systemzuständen auftreten ( $\mathfrak{Z}$ ).
  - ◇ Ihre relevanten Datengrößen ( $\mathfrak{D}$ ) zerfallen in abhängige und unabhängige ( $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{B}$ ).
  - ◇ Die determinierende Abbildung  $\mathfrak{d} = \mathfrak{Z} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{B}$  beschreibt, was dann jeweils determiniert ist und was bei autonomer Änderung geschieht.
- ◆ Fordert man jetzt, dass man vom Datensatz aus  $\mathfrak{D}$  auf den zugehörigen Systemzustand aus  $\mathfrak{Z}$  schließen kann, dann liegt eine Partition durch Abbildungsgraphen vor, so wie oben beschrieben.

## 8.1.2 Gewöhnliche deterministische Systeme

(1.2.1) Nun sollen unsere Systeme neben der Determiniertheit auch noch die anderen grundlegenden Elemente unserer Erfahrung wiedergeben: Raum-Zeitstruktur und Quantifizierbarkeit. Wir erreichen das, indem wir  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{B}$  spezialisieren.

◆	Für $\mathfrak{K}$ , wählen wir $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}^1$ oder $\mathbb{R}^k$ mit $k > 1$ . D.h. wir nehmen an, dass die Kontrollgröße durch Zahlangaben parametrisierbar sei. Damit erfassen wir sicherlich alle üblicherweise interessanten Urbildmengen: Die für <b>Folgen, Kurven und Felder</b> .
◆	Für $\mathfrak{B}$ wählen wir einen geeigneten Banachraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ .

(1.2.2) Je nach Wahl von  $\mathfrak{K}$  erhalten wir einen anderen Typ von Zustandsabbildung. Wählen wir  $\mathbb{N}$ , so ergeben sich Folgen, deren Glieder beispielsweise durch eine rekursive Formel festgelegt sein können. Etwa  $a_{n+1} = a_n + n$ . Hat man dann noch einen Anfangswert, etwa den Wert des Folgengliedes  $a_0$ , dann ist die gesamte Folge festgelegt. Dieser Fall erweist sich als weitgehend analog zum Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Insbesondere werden die Zustände dann durch den Beobachtungsdatensatz  $(0, a)$  festgelegt. Hat man Rekursionen wie  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ , so kann man diese per **Reduktionstrick** in Vektorfolgen umzuwandeln, deren Glieder jeweils voll durch den Vorgänger bestimmt sind.

(1.2.3) Der Fall  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  ist der, den wir hier besprechen wollen. Er führt auf Zustandsabbildungen vom Kurventyp und **zugehörige gewöhnliche Differentialgleichungen**.

Bleibt  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}^k$  mit  $k > 1$ . Die Zustandsabbildungen sind hier vom Feldtyp. Die zugehörigen Gleichungen sind die *partiellen Differentialgleichungen*. Partiiell, da man hier nach mehreren Variablen unabhängig differenzieren kann. Die Verhältnisse bei den partiellen Differentialgleichungen sind weitaus komplizierter als die bei den gewöhnlichen. Ein Beispiel geben wir in Kap.8.2.3.

(1.2.4) Damit können wir uns dem hier eigentlich interessierenden Thema zuwenden, **den gewöhnlichen Differentialgleichungen und der zugehörigen mathematischen Struktur**. Es geht also um Systeme mit deterministischem Verhalten, bei denen die Kontrollvariable eindimensional ist oder einen kontinuierlichen Freiheitsgrad hat, die Beobachtungsgröße in einem Banachraum liegt und bei denen man aus einem Datentupel auf den Systemzustand schließen kann.

Überdies werden wir für die determinierende Abbildung noch gewisse Glattheitseigenschaften benötigen.

Von all diesen Vorbedingungen ist die Forderung, dass man vom Datentupel auf den zugehörigen Zustand schließen kann, die wichtigste. Aber sie ist andererseits infolge ihrer Allgemeinheit auch noch relativ unklar. Vieles von der nachfolgenden Analyse kann als Klärung dieses Punktes verstanden werden.

(1.2.5) Entsprechend der üblichen mathematischen Vorgehensweise abstrahieren und axiomatisieren wir unser Begriffssystem und versuchen, möglichst viele nichttriviale Folgerungen mathematisch herzuleiten. Später kann man diese Resultate unabhängig von jeder Interpretation verwenden, insbesondere, wenn man deterministische Vorgänge modellmäßig erfassen möchte.

Definition	<b>Sei</b> $V$ Banachraum und $\mathfrak{D} = \mathbb{R} \times V$ Weiter sei $\mathcal{G} \subset \mathfrak{D}$ Gebiet und $\mathfrak{Z}$ eine Menge.
Dann	verstehen wir unter einem <b>gewöhnlichen deterministischen System</b> eine Partition $\{G_c   c \in \mathfrak{Z}\}$ von $\mathcal{G}$ , für die gilt: <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ <math>c \mapsto G_c</math> ist bijektiv</li> <li>◆ Für jedes <math>c \in \mathfrak{Z}</math> ist <math>G_c</math> der Graph einer Abbildung <math>f_c : I_c \rightarrow V</math> wobei <math>I_c</math> <b>offenes</b> (ev. <math>c</math>-abhängiges) Intervall.</li> <li>◆ Für jedes <math>c \in \mathfrak{Z}</math> ist <math>f_c</math> stetig differenzierbar.</li> </ul>

(1.2.6) Zunächst noch etwas zu den Bezeichnungen.

- $\mathfrak{B} = V$  nennen wir auch den **Phasenraum des Systems**. Unter Umständen kann der Phasenraum den eigentlichen geometrischen Konfigurationsraum als Teilraum enthalten (Reduktionstrick! Kap.7.1.7). Beachten Sie: Der Konfigurationsraumzustand reicht i. a. nicht, um den Systemzustand zu bestimmen. Daher wird der Phasenraum eingeführt und übernimmt im Abbildungssinne die Rolle des Konfigurationsraumes.
- $\mathfrak{D} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$  oder auch  $\mathcal{G} \subset \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$  wird dann **erweiterter Phasenraum** genannt. Er ist der Graphenraum der Kurven und zugleich der Raum der Datentupel des Systems.

kurz: Das Attribut *erweitert* schließt die unabhängige Kontrollvariable mit ein. Ohne dies Attribut werden nur die abhängigen Variablen betrachtet.

(1.2.7) Die Forderung, dass alle Definitionsintervalle **offen** sein sollen, ist wichtig. Andernfalls könnte man die Zustandszahl einfach dadurch vermehren, dass man einzelne Graphen disjunkt weiter zerlegte. Das soll aber in der Regel nicht zulässig sein. Andererseits kann man aber auch nicht verlangen, dass zu allen Graphen ein und derselbe Definitionsbereich gehört. Daher  $I_c$  und nicht  $I$ .

Zur Funktion  $(\mathbb{R} - \{0\}, x \mapsto \frac{1}{x}, \mathbb{R})$  würden in einer solchen Partition zwei Zustände gehören, weil der Graph aus zwei unzusammenhängenden Teilen besteht mit eigenen offenen Teilintervallen.

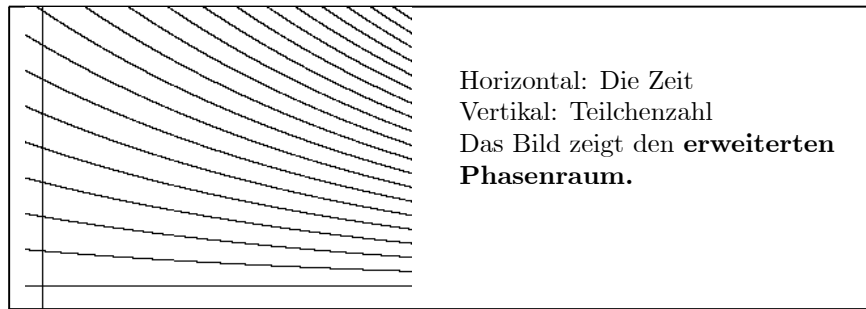
(1.2.8) Beispiel: Das idealisierte System *Radioaktiver Zerfall*.

Kontrollgröße ist die Zeit:  $I=\mathbb{R}$ . Wir beobachten die Zahl  $n$  der zur Zeit  $t$  vorhandenen Atome in kontinuierlicher Interpolation,  $n \geq 0$ . Das bestimmt  $\mathcal{G}$ , den zugänglichen (nicht offenen!) Bereich. Die Systemidealisierung verlangt, dass keine Materie durch die Behälterwände gehen soll, d.h. Anzahländerung erfolgt ausschließlich durch Zerfall nach dem interpolierenden Gesetz

$$n(t) = n_0 e^{-\alpha t}$$

wobei  $n_0 = c$  wie üblich die Zahl der Atome zur Zeit  $t=0$  ist.

Eigentlich sollte man  $n_{n_0}$  schreiben.



Das liefert die in der Figur gegebene Partition des erweiterten Phasenraumes  $\mathcal{G}$ , die die Determiniertheit des Systems wiedergibt. (Man soll zu  $\mathcal{G}$  noch dem System nicht zugängliche negative Halbebene hinzufügen, damit  $\mathcal{G}$  offen wird.) Fügt man irgendwann weitere Atome von außen hinzu, so ist das ein äußerer Eingriff, der den Zustand des Systems abändert.

Der Wert von  $n_0$  mit  $n(t_0) = n_0$  parametrisiert die Zustände bijektiv. Die zugehörige *Anfangswertparametrisierung* lautet:  $n(t) = n_0 e^{-\alpha(t-t_0)}$ .

(1.2.9) Die allgemeine Lösung einer **linearen Differentialgleichung** liefert ein weiteres gutes Beispiel unserer Struktur. Die Lösungen werden ja durch die Formel

$$\vec{y}(t) = e^{M(t-t_0)} \vec{y}_0$$

festgelegt. Hier hat jeder Graph ganz  $\mathbb{R}$  als Definitionsintervall. Jede Kurve ist global definiert. Allgemein ist das nicht so.

Fixiert man  $t_0$ , dann entsprechen sich Zustände und Werte  $\vec{y}_0$  des Phasenraumes bijektiv. Man kann den Zustandsraum (nicht kanonisch, da  $t_0$  zu wählen ist) mit dem Phasenraum identifizieren. Bei den in Kap. 7.1.3 wiedergegebenen Phasenraumbildern gehört bei festem  $t_0$  zu jedem Punkt genau ein Zustand.

## 8.1.2a Der Zustandsraum

(1.2.9) Allgemein ist der Zustandsraum zunächst immer nur qualitativ gegeben. Seine Elemente sind namenlos, anonym, was für den rechnerischen Umgang nicht günstig ist.

Wir treffen die Vereinbarung: Ist  $c \mapsto z(c)$  eine Parametrisierung des Zustandsraumes, dann bezeichnen wir die zugehörige Lösungskurve mit  $f_z$  anstelle von  $f_{z(c)}$ . Zumindest dann, wenn aus dem Kontext klar ist, um welche Parametrisierung es sich handelt. Im linearen Fall schreiben wir also  $\vec{Y}_{t_0, \vec{y}_0}(t)$  oder sogar  $\vec{Y}_{\vec{y}_0}(t)$ , wenn  $t_0$  aus dem Zusammenhang feststeht.

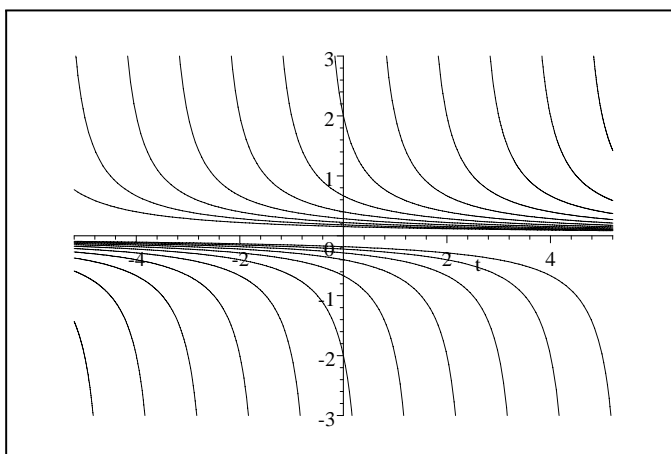
## 8.1.2b Das Anfangswertproblem

(1.2.10) Die Definition (1.2.5) des gewöhnlichen deterministischen Systems ist so gewählt, dass eine weitere Eigenschaft des linearen Falles unmittelbar übernommen werden kann: **Die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems.** Die Forderung *Graphenpartition von  $\mathcal{G}$*  besagt das ja gerade! Jeder Punkt  $(t_0, \vec{y}_0)$  des erweiterten Phasenraumes bestimmt einen Systemzustand. Die so entstehende Parametrisierung von  $\mathcal{G}$  nennen wir die *Anfangswertparametrisierung*. **Sie ist nicht injektiv.** Eine bijektive Parametrisierung der Lösungskurven  $f$  bzw. der Partition von  $\mathcal{G}$  werden wir **allgemeine Lösung oder Scharparametrisierung** der Lösungsmenge nennen.

(1.2.11) Im linearen Fall erhielt man eine bijektive Parametrisierung, indem man  $t_0$  fixierte. Das ist allgemein nicht mehr zu erwarten und auch nicht der Fall. D.h. man kann Phasenraum und Zustandsraum nicht immer voll miteinander identifizieren.

(1.2.12) Beispiel:  $N=1$ . Wir wählen folgende Kurvenschar

$t \mapsto f_c(t) = \frac{1}{t-c}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .  
 Ausserhalb der Achse  
 geht durch jeden Punkt eine  
 Kurve. In der Nähe der  
 Achse nicht gezeichnet.



Es ist klar, dass eine Graphenpartition der gesamten Ebene (ohne die  $t$ -Achse) entsteht. Aber jeder Graph zerfällt wegen des Poles bei  $c$  in zwei Teile! Wir dürfen daher den Zustandsraum nicht mit der Parametermenge  $\mathbb{R} = \{c\}$  identifizieren. Möglich ist dagegen  $\mathfrak{Z} = \mathbb{R} \times \{+, -\}$ , wobei das Vorzeichen angibt, ob man sich rechts oder links vom Pol befindet. (Links sind die Funktionswerte negativ!)

Die Anfangswertparametrisierung dieser Schar hat die Form

$$((t_0, y_0), t) \mapsto f_{t_0, y_0}(t) = \frac{y_0}{y_0(t - t_0) + 1} \quad y_0 \neq 0.$$

Fixiert man  $t_0$ , so bleibt ein freier Parameter  $y_0$ , der den Zustand eindeutig festlegt.

## 8.1.2c Die Regel über die Zahl der Parameter in der allgemeinen Lösung

(1.2.13) Aber Folgendes gilt: **Hat man eine bijektive Parametrisierung des Zustandsraumes, dann ist die Zahl der zugehörigen reellen Parameter (ohne zusätzliche diskrete) gleich der Dimension des Phasenraumes.** Nun wird man das deterministische System meist und besonders gerne durch eine **Berechnungsformel** für die determinierenden Kurven  $f_c$  angeben, als allgemeine Lösung (vgl. (1.2.9-10)):

$$(\vec{c}, t) \mapsto \vec{y} = \vec{f}_{\vec{c}}(t) \quad t \text{ unabh. Variable, } \vec{c} \text{ äußerer Parameter.}$$

Falls die zugehörige Parametrisierung des Zustandsraumes bijektiv ist, sollte der Parameter  $\vec{c}$  gerade  $N = \dim V$  Komponenten enthalten! Verkürzt:

Die allgemeine Lösung muß  $N = \dim(\text{Phasenraum})$  freie Parameter enthalten!

Das ist ebenso wie im linearen Fall. Allerdings baut sich die allgemeine Lösung nicht wie im linearen Fall einfach als Linearkombination auf. Die einzelnen Parameter gehen in mehr oder weniger komplizierter Form in den Rechenausdruck von  $\vec{f}_{\vec{c}}(t)$  ein. Oder auch: Selbst wenn man N unabhängige Lösungen gefunden hat, weiß man noch längst nicht, wie man daraus die restlichen erhält.

**Fassen wir zusammen:**

- In einem gewöhnlichen deterministischen System hat jedes Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung, die aber eventuell nur in einer Umgebung des Ausgangspunktes - also *lokal* - definiert ist.
- Die allgemeine Lösung  $t \mapsto \vec{f}_{\vec{c}}(t)$  wird durch Vektorparameter  $\vec{c}$  mit N Freiheitsgraden festgelegt. Hierbei ist  $N = \text{Dimension des Phasenraumes}$

## 8.1.3 Die drei Erscheinungsformen eines gewöhnlichen deterministischen Systems

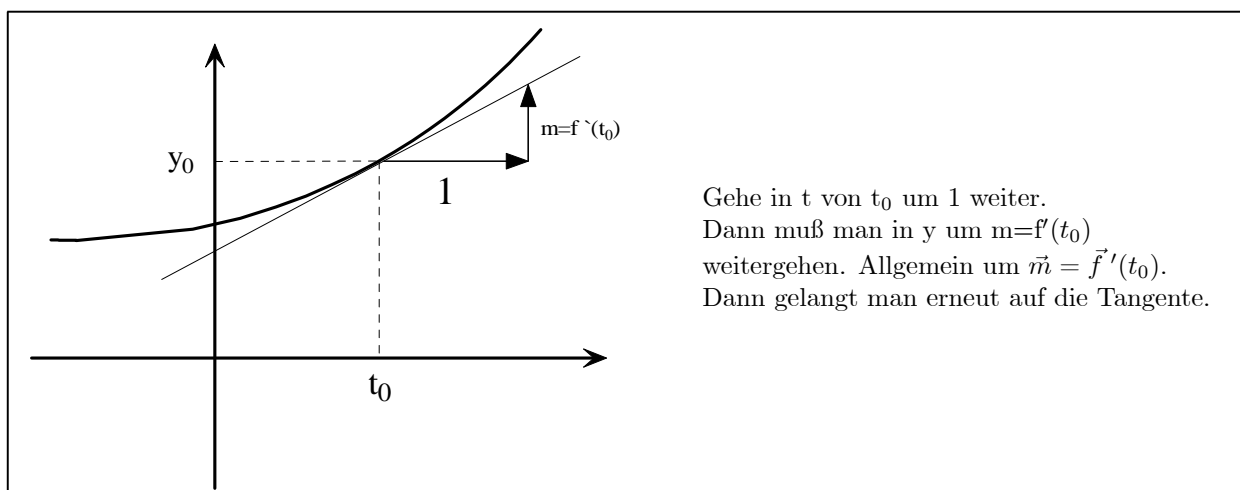
(1.3.1) Der große praktische Nutzen der gewöhnlichen deterministischen Systeme beruht darauf, dass sie sich in zwei weiteren, mathematisch fast gleichwertigen, aber formal völlig anders aussehenden Formen darstellen lassen! Dabei geht die Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Kurven, die wir in der Definition (1.2.5) getroffen haben, entscheidend ein.

Die meisten Anwendungen sehen so aus, dass die Fragestellung die eine Erscheinungsform liefert und dass man dann die Antworten durch Übergang zu einer anderen - meist der Partitionsform - gewinnt. Häufig wird man intuitiv arbeiten und sich um das *fast* nicht kümmern.

Mathematisch erhebt sich die Frage der Präzisierung des oben eingestreuten *fast*. Man benötigt Sätze darüber, unter welchen Bedingungen der Übergang tatsächlich möglich ist, wann also das intuitive Vorgehen gerechtfertigt ist. Dazu werden wir im weiteren Laufe des Kapitels einige Resultate herleiten. Wir besprechen jetzt zunächst die beiden anderen Erscheinungsformen. In Kap.7.3 werden wir sogar eine vierte Erscheinungsform kennenlernen.

### 8.1.3a Das Feld eines gewöhnlichen glatten deterministischen Systems

(1.3.2) Wir haben gesehen, dass es zu jedem Punkt  $(t_0, \vec{y}_0) \in \mathcal{G}$  genau einen Graphen gibt, der durch diesen Punkt geht. Da dieser Punkt glatt ist, gehört dazu eine Tangente, deren Richtung wir durch den Richtungsvektor  $\vec{t}(t_0, \vec{y}_0) = (1, \vec{f}'_{\vec{c}}(t_0))$  im erweiterten Phasenraum bestimmen können.  $\vec{c} = \vec{c}(t_0, \vec{y}_0)$  ist der zugehörige Systemzustand.



(1.3.3) Die erste Komponente 1 dieses Vektors  $\vec{t}$  ist vornehmlich für die zeichnerische Veranschaulichung wichtig: "Wenn man in der unabhängigen Variablen um eine Einheit weiter geht,...." Für die mathematische

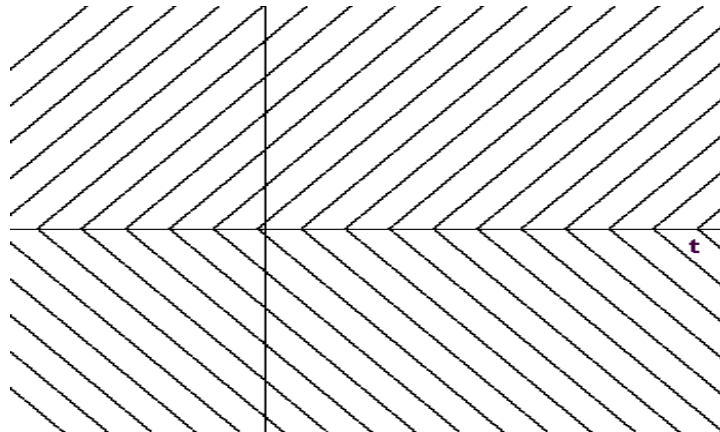
Arbeit lassen wir diese triviale Komponente fort und führen das *Vektorfeld des Systems* wie folgt ein:

$\vec{F} = (\mathcal{G}, (t, \vec{y}) \mapsto \vec{F}(t, \vec{y}), V)$ mit $\vec{F}(t, \vec{y}) = \vec{f}'_{\vec{c}}(t)$ und $\vec{y} = \vec{f}_{\vec{c}}(t)$	Vektorfeld des Systems
$\vec{t} = ((\mathcal{G}, (t, \vec{y}) \mapsto (1, \vec{F}(t, \vec{y})), \mathbb{R} \times V)$	Steigungsfeld des Systems

- Geht man im erweiterten Phasenraum um  $\Delta t=1$  weiter, so ändert sich die Phasenraumkomponente um  $\vec{F}(t, \vec{y})$ .
- Oder auch: Der Feldvektor im Punkte  $(t, \vec{y}) \in \mathcal{G}$  ist gleich dem Geschwindigkeitsvektor derjenigen Kurve  $t \mapsto \vec{f}_{\vec{c}}(t)$ , die zur Zeit  $t$  durch diesen Punkt  $\vec{y}$  geht, eben an dieser Stelle. Die Werte des Feldes liegen im Phasenraum, wogegen die Werte des Steigungsfeldes  $\vec{t}$  im erweiterten Phasenraum liegen.  $\vec{y}$  bezeichnet hier keine Kurve, sondern Elemente aus  $V$ .
- Obige Definition präzisiert den Antwortversuch aus Kap.7 (1.2.10) auf die Frage *Was ist eine Differentialgleichung?*. Über die differentielle Beziehung  $d\vec{y} = dt\vec{F}(t, \vec{y}(t))$  legt das Feld ja fest, wie sich die Beobachtungsgröße  $\vec{y}$  ändert, wenn sich die Kontrollgröße etwas um  $\Delta t$  ändert. In Kap. 7 entstand das Feld durch Anwenden eines linearen Operators. Also  $\vec{F}(t, \vec{y}) = M \cdot \vec{y}$ . Jetzt sind allgemeinere Felder zugelassen. Beachten Sie: **Ein** Feld für **alle** Zustände des Systems.

(1.3.4) Klar ist: Die Konstruktion aus (1.3.3) liefert zu einem gewöhnlichen deterministischen System tatsächlich ein Feld  $\vec{F} : \mathcal{G} \rightarrow V$ . Und daraus folgt bei Bedarf auch das Steigungsfeld.

(1.3.5) Beispiel: Wähle  $\mathfrak{Z} = \{(t, \varepsilon) \mid T \in \mathbb{R}, \varepsilon = +1, -1\} \cup \{0\}$ . Kontrollvariable sei  $t$  und abhängige Beobachtungsvariable  $y$ . Weiter sei  $\mathcal{G}_{(T, \varepsilon)} = \{(t - T, \varepsilon t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  und  $G_0 = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Das gibt offenbar eine Partition der gesuchten Art für  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}_t$  und  $\mathfrak{B} = \mathbb{R}_y$ . Man kann sich dazu einen idealen Berggrat vorstellen und einen Körper, der mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  den Berg hinab rutscht.



Jeder mögliche Bewegungszustand beschreibt einen Systemzustand. Die labile Ruhelage auf dem Grat selbst gehört zu  $c=0$ . Die anderen Parameter  $(c, \varepsilon)$  gehören zu Bewegungen auf einer der beiden Wände.

□ Interpretieren sie das Beispiel aus (1.2.12) analog.

Das zugehörige Feld läßt sich leicht bilden. **Aber es ist für  $y=0$  unstetig!** Genauer:

$\vec{F}(t, y) = v_0$ für $y > 0$	$\vec{F}(t, 0) = 0$	$\vec{F}(t, y) = -v_0$ für $y < 0$ .
-----------------------------------	---------------------	--------------------------------------

(1.3.6) Das Feld eines deterministischen Systems ist zunächst nur geometrisch festgelegt. **Wie erhält man die zugehörige Berechnungsformel**, wenn man die für  $\vec{f}'_{\vec{c}}(t)$  kennt? Wir geben ein allgemeines Schema, das in vielen Fällen rechnerisch funktioniert, danach ein Beispiel.

**Schema zur Lösung des Anfangswertproblems und zur Bestimmung des Feldes bei**

**günstig parametrisierter Kurvenschar.**

Gegeben die Kurvenschar  $t \mapsto \vec{f}_{\vec{c}}(t)$   
eines gewöhnlichen deterministischen Systems.

- a) Löse die Gleichung  $\vec{y} = \vec{f}_{\vec{c}}(t)$  für  $(t, \vec{y}) \in \mathcal{G}$  nach  $\vec{c}$  auf:  
 $\vec{c} = \vec{g}(t, \vec{y})$
- b) Bilde damit  $\vec{c}_0 = \vec{g}(t_0, \vec{y}_0)$  und setze  $\vec{c}_0$  in  $\vec{f}_{\vec{c}}$  ein.  
Das gibt die Lösung der AWA zu  $(t_0, \vec{y}_0)$
- c) Bilde die Ableitung  $\vec{f}_{\vec{c}}'(t)$  von  $t \mapsto \vec{f}_{\vec{c}}(t)$ .
- d1) Setze  $\vec{c}_0$  aus b) in  $\vec{f}_{\vec{c}}'(t)$  ein und setze **dann**  $t=t_0$ .  
Das gibt den Feldwert  $\vec{F}(t_0, \vec{y}_0) = \vec{f}'_{\vec{g}(t_0, \vec{y}_0)}(t_0)$
- d2) Hat man bereits  $\vec{f}_{\vec{c}_0}$  aus b), so kann man auch ableiten und **dann**  $(t_0, \vec{y}_0)$  für  $(t, \vec{y})$  einsetzen.

$$\begin{array}{c}
 f_c(t) \\
 \swarrow \quad \downarrow \\
 f'_c(t) \quad c_0 = g(t_0, y_0) \\
 \downarrow \quad \swarrow \quad \downarrow \\
 f'_{c_0}(t) \quad f_{c_0}(t) \quad \text{AWA Einstieg} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \underline{F(t_0, y_0) = f'_{c_0}(t_0)}
 \end{array}$$

(1.3.7) Damit Schritt a) ausführbar ist, muss die Parametrisierung der Kurven natürlich injektiv sein. Ob die Auflösung über einen expliziten Formelausdruck gelingt, hängt vom individuellen Fall ab. Teilweise gelingt es stattdessen, aus den beiden Gleichungen  $y=f_c(t)$  und  $y'=f'_c(t)$  die Größe  $c$  zu eliminieren. Auf die dann entstehenden Probleme gehen wir in 7.1.5c und 7.4.4 ein.

(1.3.8) Wir bringen ein **Beispiel** mit  $V=\mathbb{R}$ , das wir häufiger zur Illustration der allgemeinen Überlegungen verwenden wollen. Es ist nicht ganz trivial, läßt sich aber gut rechnen.

Das System wird in der Scharform gegeben, als allgemeine Lösung. Dazu eine Skizze der Graphen, also die Partitionsform.

Die Kurvenschar sei:  $f_c(t) = \frac{c \exp(t^2) - 1}{c \exp(t^2) + 1}$  mit  $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .  
 Die Interpretation von  $f_\infty$  ist naheliegend. Zu jedem  $c$  mit  $c < 1$  gehören 3 Zustände, da die Funktion dann 2 Pole hat. Zu  $c = -1$  gehören 2 Zustände. Wir unterdrücken zugehörige diskrete Parameter.

Zum Zeichnen wurde  $c = \varepsilon \exp(\alpha)$  gesetzt und  $\alpha$  äquidistant geändert.  
 Die Kurven mit  $-1 < y < +1$  gehören zu  $\varepsilon = -1$ .

(1.3.9) Jetzt führen wir das Schema (1.3.6) für unser Beispiel aus.

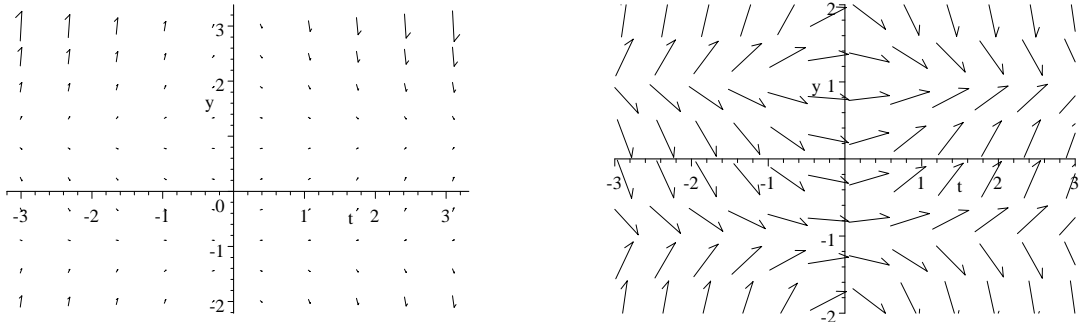
- Schritt a:  $y=f_c(t)$  ist nach  $c$  aufzulösen. das gibt  $c=\exp(-t^2)\frac{1+y}{1-y}$ . Für  $y=+1$  ist das als  $c=\infty$  zugelassen. Die Auflösbarkeit zeigt übrigens, das die Schar wirkliche eine Graphenpartition liefert.
- Schritt b: Das verlangte Einsetzen gibt  $f_{t_0,y_0}(t) = \frac{(1+y_0)\exp(t^2)-(1-y_0)\exp(t_0^2)}{(1+y_0)\exp(t^2)+(1-y_0)\exp(t_0^2)}$ . Das ist die Anfangswertparametrisierung der Schar. Sie ist nicht injektiv.
- Schritt c: Ableiten gibt:  $f'_c(t) = \frac{4ct \exp(t^2)}{(c \exp(t^2)+1)^2}$ . Statt  $(t_0, y_0)$  schreiben wir jetzt gleich  $(t,y)$ . Denn von jetzt ab wird nicht mehr differenziert!
- Schritt d: Einsetzen von  $c=\exp(-t^2)\frac{1+y}{1-y}$  aus Schritt a gibt

$$(t,y) \mapsto F(t,y) = t(1-y^2).$$

Das ist der Rechenausdruck für das Feld in unserem Beispielfall!

Der Weg d2) ist hier aufwendiger.

(1.3.10) Das Ergebnis definiert ein überall glattes Skalarfeld auf  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$ . Damit bildet man leicht das Steigungsfeld  $(t, y) \mapsto (1, t(1-y^2))$ . Das ist das Feld, das man im Falle eines eindimensionalen Phasenraumes üblicherweise diskutiert. Die Skizze zeigt dieses Feld für unser Beispiel. Dabei kommt es auf die Länge der Vektoren nicht an. Wichtiger ist die Richtung. Daher zeichnen wir in den Skizzen meist alle Pfeile gleichlang, nicht aber mit gleicher  $t$ -Komponente. Die beiden Figuren zeigen den Unterschied.



Zur raschen Erstellung einer derartigen Skizze zeichnet man meist zuerst die Steigungen entlang der Achsen und anderer relevanter Kurven, etwa entlang des Einheitskreises. Weiter fragt man nach wichtigen Niveaulinien, etwa denen mit Steigung 0 oder Steigung 1 ("Isoklinen") usw. Kurz man läßt  $t$  den in Kap. 6.1 beschriebenen Apparat zur Verhaltensanalyse auf den betrachteten Fall los.

□ Bestimmen Sie für die Schar  $y=ce^{-\alpha t}$  das Feld und skizzieren Sie es. Dasselbe für ...

(1.3.11) Und jetzt zur geometrischen Bedeutung des Feldes:

Da jeder Feldvektor tangential zum Graphen gerichtet ist, bestimmt  $(1, \vec{F}(t, \vec{y}))$  gerade in Tangentenapproximation die Änderung der Beobachtungsgröße  $\vec{y}$  unter Änderung der Kontrollvariablen  $t$ .  
Als Formel für das totale Differential:

$$d\vec{y} = dt \vec{F}(t, \vec{y}) \quad (dt, d\vec{y}) = dt(1, \vec{F}(t, \vec{y}))$$

(1.3.12) Damit sind wir wieder zu unserem früher unternommenen Antwortversuch zurückgekehrt, der besagte, eine Differentialgleichung gehöre zu einer **Bedingung für die Änderung einer Größe**. Die Vorgabe des Feldes legt die zugehörige Änderung fest. Genauer: Das Feld gibt an, wie sich die Beobachtungsgrößen in Tangentenapproximation ändern, wenn man die Kontrollgröße ändert. Das geschieht in Form einer **lokalen Bedingung**. Kennt man den Punkt  $(t, \vec{y}) \in \mathcal{G}$ , so kann man mit Hilfe der Feldabbildung die gewünschte Steigung (Änderung) berechnen! **Das Datentupel  $(t, \vec{y}) \in G$  legt den Wert der Änderung**



**der Beobachtungsgröße fest.** Weitere Information braucht man nicht. Will man dagegen die Steigung durch Differenzieren gewinnen, so benötigt man für die Grenzwertprozedur unendlich viele Funktionswerte!

Wir haben auch bereits in Kap 7.4 gesehen, wie man mit Hilfe obiger Formeln für die Werteänderung die Differentialgleichungen numerisch lösen kann.

- Haben Sie den Inhalt von (1.3.12) erfaßt? Er ist von zentraler Bedeutung für das Verständnis der Differentialgleichungen. Wieso ist  $y'(y(x)) = xy(x)$  keine Differentialgleichung?

### 8.1.3b Die Differentialgleichung eines gewöhnlichen deterministischen Systems

(1.3.13) Hat man das Feld, also die Feldform des deterministischen Systems, dann kann man daraus ein nicht ganz eindeutiges Differentialgleichungsproblem gewinnen. Wir nehmen jetzt zusätzlich als Normalfall an, dass  $\vec{F}$  stetig sei.

(1.3.14) Das zugehörige Differentialgleichungsproblem sieht so aus:

Sei  $\mathcal{F}$  der Raum aller  $C^1$ -Kurven  $I_0 \rightarrow V$ , deren Graph ganz in  $\mathcal{G}$  liegt.  
 Und sei  $\mathcal{F}'$  der Raum aller  $C^0$ -Kurven  $I_0 \rightarrow V$  wobei  $I_0$  Intervall ist.  
 Dann ist per Definition  $D_F = (\mathcal{F}, \vec{f} \mapsto D_F[\vec{f}], \mathcal{F}')$  mit  $D_F[\vec{f}](t) = \vec{f}'(t) - \vec{F}(t, \vec{f}(t))$   
 ein Differentialoperator. Und die Bestimmungsgleichung  $D_F[\vec{f}] = 0$ , also  
 $\vec{f}'(t) = \vec{F}(t, \vec{f}(t))$  ist eine zum Feld  $F: \mathcal{G} \rightarrow V$  gehörige  
**gewöhnliche Differentialgleichung.**

Die Bedingungen stellen sicher, dass eine sinnvolle Operatorkonstruktion vorliegt. Für  $\mathcal{G} = I \times V$  vereinfacht sich einiges. Beachten Sie:  $f$  ist  $C^1$ . Dann ist  $f'$  stetig. Da auch  $F$  dies sein soll, ist  $D[f]$  tatsächlich  $C^0$  wie gefordert.

(1.3.15) Entsteht das Feld  $F$  über die Konstruktion (1.3.9) aus einer Funktionsschar  $f_c$ , dann ist jede Kurve unserer ursprünglichen Schar  $f_c$  eine Lösung der Gleichung. Denn das Feld  $F$  war ja gerade so konstruiert, dass es dies leistet.

(1.3.16) Beachten Sie den folgenden Punkt, der aus der Konstruktion des Differentialoperators folgt: Ist  $f: I \rightarrow V$  eine Lösung der Differentialgleichung und ist  $I_0 \subset I$  ein Teilintervall, so ist auch die Restriktion von  $f$  auf  $I_0$ , eine Lösung. Für **physikalische Anwendungen** interessieren häufig gerade derartige Restriktionen. **Mathematisch** dagegen interessiert mehr die Erweiterung auf ein größtmögliches Intervall. Wichtig ist dann, inwieweit man solche Erweiterungen tatsächlich wird finden können.

(1.3.17) Noch eine Bemerkung zur Eindeutigkeit der Differentialgleichung. Durch Wahl anderer Funktionsräume kann man weitere Differentialgleichungen zu demselben  $F$  konstruieren. Das ist eine Freiheit, die manchmal nützlich ist. Z.B. kann man verlangen, dass  $\mathcal{F}$  nur  $C^\infty$ -Funktionen enthält.

(1.3.18) Was tut man, wenn das Feld nicht stetig ist? Dann sind die Wertekurven nicht mehr notwendig stetig. Wählen wir  $\mathcal{F}'$  als Raum **aller** Kurven. Für  $\mathcal{F}$  bietet sich entweder obiger Raum an oder aber auch der Raum der **stückweise glatten stetigen Kurven**. Bei Unstetigkeiten der Ableitung soll die Differentialgleichung im Sinne der beiden einseitigen Grenzwerte erfüllt sein.

Für das Beispiel (1.3.5) bekommt man für die erste Wahl  $\mathcal{F} = C^1$  über die Suche nach Lösungen mit maximalem Definitionsintervall wieder die Ausgangspartition. Die zweite Wahl dagegen liefert weitere Lösungen. Nämlich:

$$f_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq A \\ \varepsilon(t - A) & \text{für } t \geq A \end{cases}$$

Für jedes  $A \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon = \pm 1$  ist das eine stetige und stückweise glatte Lösung von  $y'(t) = F(t, y(t))$ . **Aber:** Die Graphen dieser Lösungen erzeugen keine Partitionsstruktur mehr, da sie nicht disjunkt sind. Die Punkte auf dem Grat ( $y=0$ ) gehören zu einem labilen Gleichgewicht des Systems und entsprechend ist das zugehörige zukünftige Verhalten nicht determiniert. Damit ist eines unserer Hauptziele in diesem Fall nicht erfüllt. Dafür sind diese Lösungen global definiert.

(1.3.19) Zurück zum Idealfall einer Funktionsschar mit Partitionsstruktur der Graphen. Die Differentialgleichung sei formuliert. Die Schar der Ausgangskurven sind nach Konstruktion Lösungen. Zwei wichtige Fragen stellen sich generell:

1. Kann es noch **weitere Lösungen** geben, die nicht einfach Restriktionen der Ausgangskurven sind ?
2. Was ist, wenn man **das Feld irgendwie vorgibt**, es also nicht als Richtungsfeld eines deterministischen Systems konstruiert ist?

Die hochgradig nichttriviale Antwort auf diese Fragen wird sein: Bei milden Annahmen über das Feld  $\vec{F}$  gibt es keine weiteren Lösungen. Vielmehr bildet die Lösungsmenge die Kurvenschar eines deterministischen Systems, dessen Richtungsfeld gleich dem Feld  $\vec{F}$  ist.

**Kurz: Kurvenschar, Feld und Differentialgleichung sind unterschiedliche Erscheinungsformen derselben Struktur, der des gewöhnlichen deterministischen Systems.**

(1.3.20) Der volle Beweis dieser Aussagen wird einigen Platz und Aufwand in Kap.8.3 erfordern. Insbesondere müssen Bedingungen an das Feld  $\vec{F}$  herausgearbeitet werden, die diese Äquivalenz sicherstellen. Sind sie nicht erfüllt, kann es zu Abweichungen kommen, wie obiges Beispiel (1.3.18) bereits zeigte.

Für das Beispiel (1.3.8) dagegen folgt erwartungsgemäß, dass die Differentialgleichung  $y'(t) = t(1 - y^2(t))$  genau die gegebene Kurvenschar als Lösung hat. Das werden wir bald direkt beweisen.

- Wie sehen die Fragen und Antworten aus (1.3.19) für den Fall einer linearen Differentialgleichung  $\dot{\vec{y}}(t) = M \cdot \vec{y}(t)$  aus? Mit welcher Kurvenschar müssen Sie beginnen?

(1.3.21) Für alle **linearen Differentialgleichungen** mit konstanten Koeffizienten sind obige Behauptungen offenbar korrekt: In diesem Fall kommt noch hinzu, dass für sie  $I = \mathbb{R}$  wählbar ist und alle Lösungskurven mit maximalem Definitionsbereich global auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind. Zusammenfassung der Antwort (auf die Frage):

◆ Man beginnt mit der Kurvenschar  $t \mapsto e^{(t-t_0)M} \cdot \vec{y}_0$  mit  $\vec{y}_0$  frei aus dem Phasenraum  $V$ . Diese Schar hat Partitionsstruktur.

◆ Elimination von  $\vec{y}_0$  ergibt das zugehörige Feld zu  $\vec{y} \mapsto \vec{F}(t, \vec{y}) = M \cdot \vec{y}$

◆ Die entstehende Differentialgleichung  $\dot{\vec{y}} = M \cdot \vec{y}$  hat genau die Kurven der Schar als Lösungen wie in Kap.7 bewiesen.

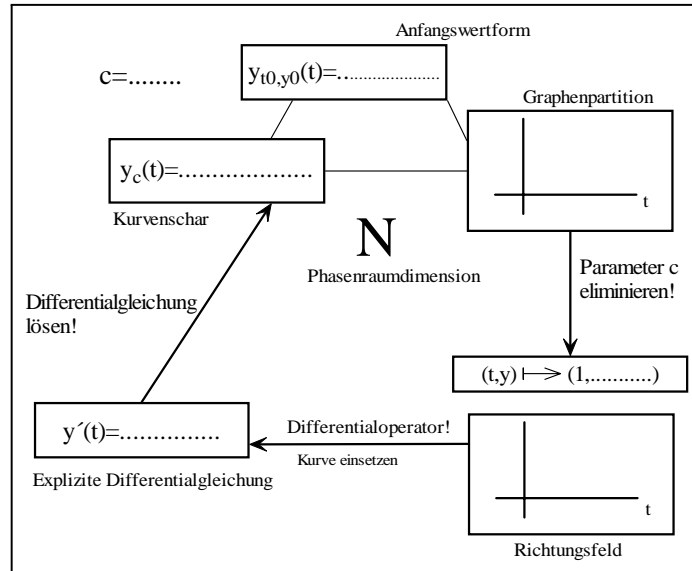
(11.3.22) Jetzt können wir auch erneut unmittelbar sehen, wieso man Gleichungen wie  $y'(t) = y(y(t))$  vereinbarungsgemäß **nicht** als Differentialgleichung anzusehen hat, obwohl ihr Rechenausdruck doch elementarer Weise aus  $y'$  und  $y$  aufgebaut ist. Denn die rechte Seite gehört nicht zu einem Feld. Ist  $(t, y)$  gegeben, so ist daraus die rechte Seite nicht berechenbar. Man benötigt noch zusätzlich  $y = y(y_1)$  mit  $y_1 = y(t)$ . D.h. den Funktionswert an einer ganz anderen Stelle. Oder: Um die Änderung von  $y$  in  $(t, y)$  zu berechnen, genügt das Datentupel  $(t, y)$  nicht. (Das zur Frage nach (1.3.12).)

Oder auch: Eine Differentialgleichung ist nicht eine Gleichung, in deren Rechenausdruck die Ableitung der unbekannteten Funktion vorkommt, **sondern der Rechenausdruck muß ein glattes Feld auf dem Datenraum (erweiterten Phasenraum) bestimmen.**

### 8.1.3c Das "Formblatt" der drei Erscheinungsformen eines deterministischen Systems

(1.3.23) Da das beschriebene Resultat für das Verständnis der Differentialgleichungen extrem nützlich ist und man es sich angewöhnen sollte, es immer zur Strukturierung auch ganz konkreter Beispiele heranzuziehen, werden wir es jetzt schematisieren und dieses Schema zur Diskussion der Beispiele verwenden. Im Idealfall ergeben sich daraus jeweils die drei Erscheinungsformen. Andernfalls sind gerade die **Abweichungen** vom Idealzustand von Interesse und über das Schema herauszuarbeiten. Wie bereits gesagt, interessieren wir uns überdies besonders für Bedingungen, die den Idealfall sicherstellen.

(1.3.24) Das Schema, das "Formblatt für brave Beamte", sieht so aus:



(1.3.24) Ist die Kurvenschar glatt, so kommen wir durch Elimination der Parameter  $\vec{c}$  zum Feld. Durch Zusammensetzen des Feldes mit der Kurvenabbildung kommen wir zur Differentialgleichung. Lösen derselben - und das ist der schwierige Teil! - bringt uns zur Kurvenschar zurück. Die Kurvenschar können wir entweder über die Zustände aus  $\mathfrak{Z}$  bijektiv parametrisieren oder nicht injektiv über die Anfangswerte. Oder wir stellen die Graphen als Partition des erweiterten Phasenraums dar.  $N$  bezeichnet die Dimension des Phasenraumes. Diese Zahl ist ein wesentliches Charakteristikum unserer Systeme. Fast immer steht die Kenntnis von  $N$  ganz am Anfang des geistigen Eindringens in eine derartige Struktur. Viele Beispiele werden  $N=1$  haben. Dann läßt sich der erweiterte Phasenraum in der Ebene zeichnen. Die dabei gewonnene Erfahrung und Vorstellungsfähigkeit läßt sich mit etwas Vorsicht durchaus auf die höherdimensionale Fälle übertragen.

(1.3.25) Nochmals: Sehr wichtig ist gerade, wahrzunehmen, ob Abweichungen vom dargestellten Idealverhalten auftreten.

- Füllen Sie das Formblatt für den trivialen Fall der folgenden Differentialgleichung aus:  $y'(x) = f(x)$ . Dabei sei  $f$  gegeben mit Stammfunktion  $F$ .

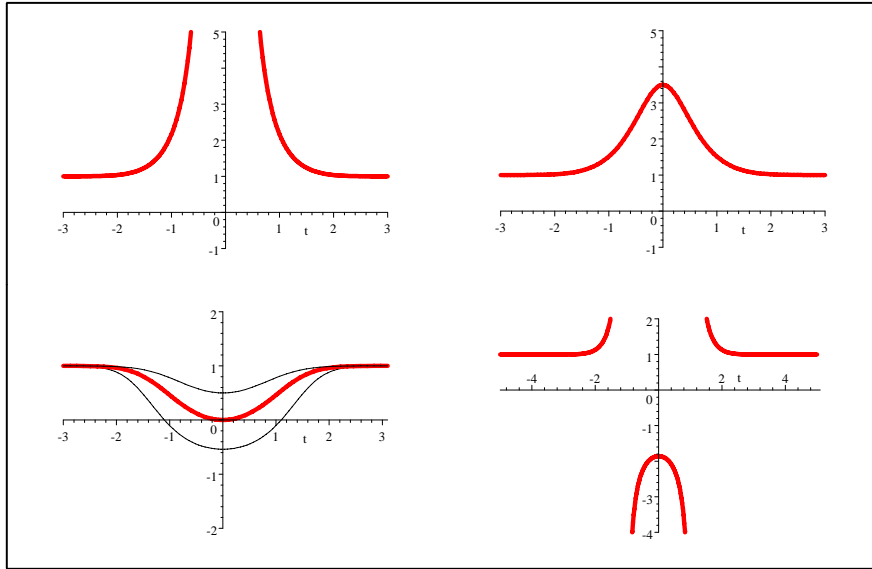
## 8.1.4 Beispiele

(1.4.1) Wir beginnen mit der Kurvenschar aus (1.3.8), die zu einer Graphenpartition der Ebene gehört. Also  $N=1$ . Wir haben das zugehörige Feld in (1.3.9) bereits bestimmt, ebenso wie die zugehörige Differentialgleichung. Für diese entwickeln wir nachfolgend ein verallgemeinerungsfähiges **Lösungsverfahren** und gelangen damit zur Kurvenschar zurück, von der wir ausgegangen sind.

Die Diskussion dieses Beispiels wird etwas ausführlicher sein, so dass wir viele Dinge formulieren, von denen wir sonst erwarten, dass sie über Inspektion unmittelbar erkannt werden. Auch haben wir den ersten Teil bereits oben in (1.3.9) ausgeführt.

(1.4.2) Als Schar hatten wir  $f_c(t) = \frac{c \exp(t^2) - 1}{c \exp(t^2) + 1}$  mit  $c \in \mathfrak{Z} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Offensichtlich ist  $f_\infty(t) = 1$  gemeint. Weiter ist  $f_0(t) = -1$ . Für  $c < -1$  entstehen je zwei Pole.

Die Funktionen sind als Funktionen von  $t^2$  gerade Funktionen. Für  $c=-1$  erhält man einen Pol bei  $t=0$ . Diese Funktion ergibt eine Grenzkurve (erste Figur,  $c=-1$ ). Alle Kurven über dem zugehörigen Graphen haben zwei Pole. Die zweite Figur hat  $c=1.8$  und die dritte  $c=3,1$  und  $0.3$ . In der vierten Figur schließlich ist  $c=-0.3$ . Hier hat der Graph zwei Pole.



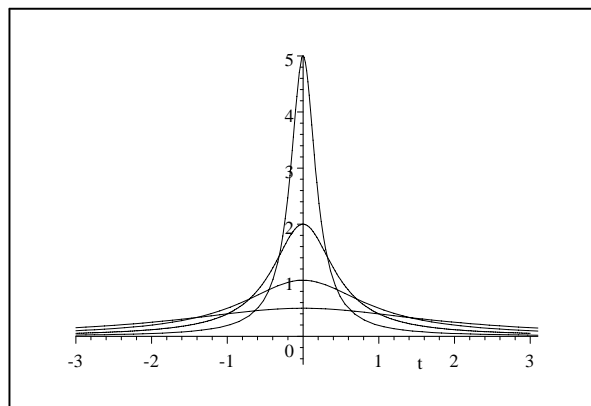
Die Partitionstruktur der Graphen spiegelt sich in der Auflösbarkeit nach  $c$  wider und der eindeutigen Lösbarkeit des zugehörigen Anfangswertproblems. Wir geben die beiden zugehörigen Formeln nochmals an. Durch den Punkt  $(t_0, y_0)$  geht die Kurve mit dem nach der ersten Formel berechneten  $t$ -Wert. Die zweite Formel gibt dann diese eindeutig bestimmte Kurve der Schar wieder. Dabei ist  $c = \infty$  für  $y_0 = -1$  zugelassen.

$$c = e^{-t_0^2} \frac{1-y_0}{1+y_0} \quad f_{t_0, y_0}(t) = \frac{(1+y_0) \exp(t^2) - (1-y_0) \exp(t_0^2)}{(1+y_0) \exp(t^2) + (1-y_0) \exp(t_0^2)}$$

(1.4.3) An dieser Stelle sollte man darauf hinweisen, dass eine einparametrische Funktionsschar keineswegs zu einer Graphenpartition führen muß. Durch ein und denselben Punkt können durchaus mehrere Funktionen laufen. Dann klappt das Umstellen nach  $c$  nicht. Als Beispiel wählen wir  $g_c(t) = \frac{c}{c^2 + t^2} \quad c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Auflösen gibt  $c=0$  für  $y=0$  und ansonsten

$$c = \frac{1}{2y} \pm \sqrt{\frac{1}{4y^2} - t^2}.$$

Es gibt also Punkte im  $(t, y)$ -Raum mit keinem, einem und zwei  $c$ -Werten. Die Partitionsstruktur ist nicht vorhanden! Oder auch: **Kurvenschar heißt nicht automatisch (Determinismus beschreibende) Graphenpartition.** Die Figur verdeutlicht das.



□ Was ist bei  $t=0$  los? Wie groß sind etwa die  $c$ -Werte der Graphen der Figur?

(1.4.4) Zurück zum Hauptbeispiel (1.4.2) und der Formblattdiskussion. Nach der Partition kam das **Steigungsfeld** auf dem erweiterten Phasenraum. Und das haben wir bereits in (1.3.10) bestimmt und skizziert.

$$\vec{t} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (t, y) \mapsto (1, \vec{F}(t, y)) = (1, t(1 - y^2)), \mathbb{R}^2$$

Auch eine solche Feldformel sollte man auf leicht zugängliche Information hin inspizieren: Steigung Null für  $y=\pm 1$  ist unmittelbar zu erkennen. Und damit sieht man zugleich, daß  $y(t)=+1$  und  $y(t)=-1$  zwei Lösungskurven der zugehörigen Differentialgleichung sind. Ebenso sieht man die Feldsymmetrie bezüglich der  $y$ -Achse. Für  $y=\text{const}$  ist die Steigung proportional zu  $t$ . Für  $t=\text{const}$  ist sie für große  $t$  etwa  $-ty^2$  usw..

(1.4.5) Der nächste Punkt im Formblatt ist die **Differentialgleichung**. Sie folgt, wenn man im Feld  $y$  durch  $y(t)$  ersetzt zu

$$y'(t) = t(1 - y^2(t)).$$

Um den letzten Teil des Formblattes auszuführen, müssen wir die Lösungen dieser Gleichung bestimmen.

Hierzu führen wir ein Verfahren ein, das *Separation der Variablen* genannt wird. Es ist im Falle  $N=1$  häufig anwendbar und stellt das wichtigste Verfahren zur Bestimmung der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen dar. Nur  $N=1$ ! Machen Sie sich bewußt, dass die Suche nach expliziten Lösungen einer Differentialgleichungen ebenso wie die Auswertung von Integralen schwierig und interessant ist. Nur selten kann man rein schematisch vorgehen. Wenn das aber möglich ist, sollte man auch effizient rechnen.

### 8.1.4a Das Separationsverfahren (für gewöhnliche Differentialgleichungen mit $N=1$ )

(1.4.6) Wir gehen so vor, dass wir das allgemeine Schema parallel zu unserem Beispiel formulieren. Wiederholen Sie u.U. die Integrationsmethode *Umkehrung der Kettenregel* aus dem Vorkurs. Die Details der Rechnung des Beispiels müssen Sie natürlich selbst ausführen. Achten Sie darauf, dass es stets darum geht, einen Schritt des allgemeinen Schemas zu realisieren, das Sie sich über die Nacharbeit einprägen müssen.

$y'(t)=t(1-y^2(t))$	Ausgangsgleichung	$y'(t)=F(t,y(t))$	
↓ ja! (Vorsicht $y(t)=\pm 1$ )	Verfahren anwendbar?	↓ Ja, umformen Vorsicht beim Dividieren	↘ nein
$\frac{y'(t)}{1-y^2(t)} = t$	<i>Separationsform</i>	$y'(t)g(y(t))=h(t)$	Ende =====
$\frac{y'(s)}{1-y^2(s)} = s$	Idee: $\int_{t_0}^t ds\dots$	$y'(s)g(y(s))=h(s)$	←Integrieren
$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}(t^2-t_0^2)$	Umkehrung Kettenregel anwenden! $y_0 = y(t_0)$	$\int_{y_0}^{y(t)} du g(u) = \int_{t_0}^t ds h(s)$	$y_0$ und $t_0$ möglichst hier einsetzen
↓	Stammfunktionen $G$ und $H$ zu $g$ und $h$ suchen	↓	
$\ln \left  \frac{1+y(t)}{1-y(t)} \right $ $= \ln \left  \frac{1+y_0}{1-y_0} \right  + (t^2 - t_0^2)$	<b>Integrieren</b>	$G(y(t))=G(y_0)+H(t)-H(t_0)$	
↓ Nach $y(t)$ auflösen	<b>G invertieren!</b>	↓ $G^{-1} \dots\dots$	
$y(t) = \frac{(1+y_0)e^{t^2} - (1-y_0)e^{t_0^2}}{(1+y_0)e^{t^2} + (1-y_0)e^{t_0^2}}$	← <u>Anfangswertform</u> →	$y(t) =$ $G^{-1}(G(y_0)-H(t_0)+H(t))$	
↓ $c = \dots$	<b><u>Scharform</u></b>	↓ $c = G(y_0) - H(t_0)$ einführen	
$y_c(t) = \frac{ce^{t^2}-1}{ce^{t^2}+1}$		$y_c(t) = G^{-1}(H(t) + c)$	
$y(t) = \pm 1$		↑ Eventuell verlorene Einzellösungen hinzufügen	

Für das Beispiel haben wir unser Ziel erreicht: Wir sind im Formblatt, also dem Systemdiagramm, einmal **vollständig herumgelaufen!** Dabei leistete die Separationsmethode den schwierigen und interessanten Teil: **Von der Differentialgleichung zur Kurvenschar mit Partitionsstruktur der Graphen.**

(1.4.7) Die allgemeine Anwendbarkeit des Separationsverfahrens hängt davon ab, ob sich die Differentialgleichung in eine ganz bestimmte Form bringen läßt. Diese Form läßt sich gut merken, wenn man sie mit Hilfe von Differentialen schreibt:  $\boxed{g(y)dy=h(t)dt}$ . Diese Form erklärt zugleich den Namen des Verfahrens: Beobachtungs- und Kontrollvariable sind zu trennen, zu *separieren*.

Ein typisches Beispiel einer Gleichung, die sich **nicht** separieren läßt, ist  $y'(t) = t - y^2(t)$ . Hier ist es auf keine Weise möglich,  $t$  und  $y$  **multiplikativ** zu trennen.  $y'(t) + y^2(t) = t$  ist in unserem Sinne keine Trennung. Hier hätte man die folgende nicht zulässige differentielle Form:  $dy + dt y^2(t) = t dt$ . Auf diese harmlos wirkende Differentialgleichung werden wir noch zurückkommen.

□ Bringen Sie  $y'(t) = 2t + 3ty^2(t)$  in Separationsform.

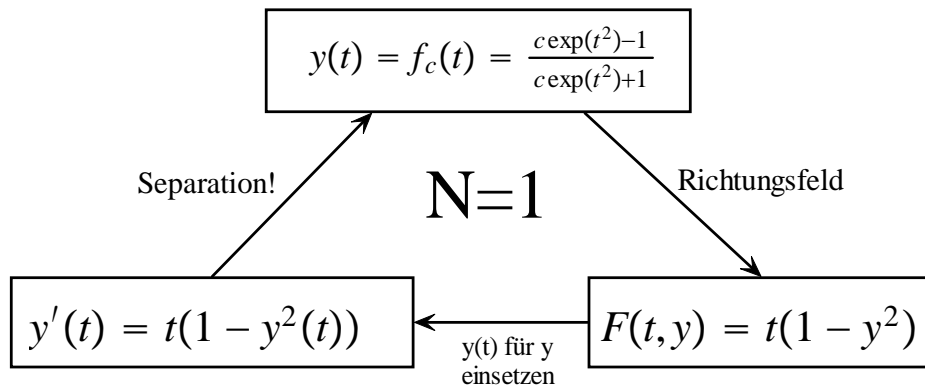
(1.4.8) Noch einige **Kommentare zum Separationsschema**:

- In der Regel erfordert es kaum zusätzlichen Aufwand, die Anfangswertform der Lösung zu bestimmen. Die Scharform folgt daraus dann leicht. Anders ist es, wenn man die Scharform hat und damit die Anfangswertform bestimmen möchte. Das verlangt meist unnötigen Mehraufwand, der in keinem Vergleich zum Gewinn steht, den man durch bequemlichkeitsbedingtes Fortlassen der Integrationsgrenzen erzielt. Überdies hat man die Möglichkeit einer einfachen Probe, indem man  $t=t_0$  setzt. Entsprechend kann und sollte man die Scharform zur Probe differenzieren.
- Sofern man eine konkrete Anfangswertaufgabe zu lösen hat, ist es im Regelfall empfehlenswert, **sofort** die konkreten Grenzen einzusetzen, weil sich die Integrale für die speziellen Grenzen - etwa  $y_0 = 0$  - vereinfachen können.

(1.4.9) Falls man die Integrale oder eine der Umkehrfunktionen nicht geschlossen angeben kann, gilt die Differentialgleichung in der Regel doch als gelöst. Man muss dann versuchen, die benötigte Information über die Lösungen aus der impliziten Form zu gewinnen.

(1.4.10) Für viele Gleichungen ist es möglich, die Lösungsprozedur von unten nach oben zu lesen und auf diese Weise zu zeigen, dass man alle Lösungen gefunden hat. Auch hier sollte man von der Anfangswertform ausgehen und sorgfältig auf **divisionsbedingte Verzweigungen** achten.

(1.4.11) Stellen wir abschließend das gesamte System des Beispiels nach der Art des Formblattes zusammen:

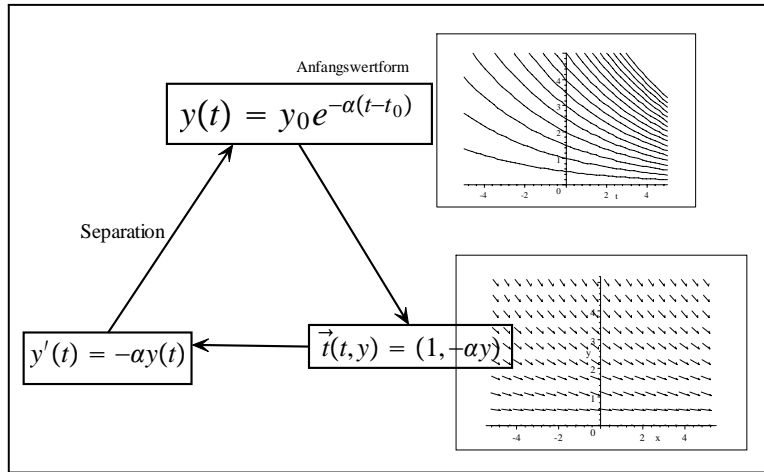


Beachten Sie, dass jede dieser drei Formen per Inspektion Aussagen über die beiden anderen Formen erlaubt.

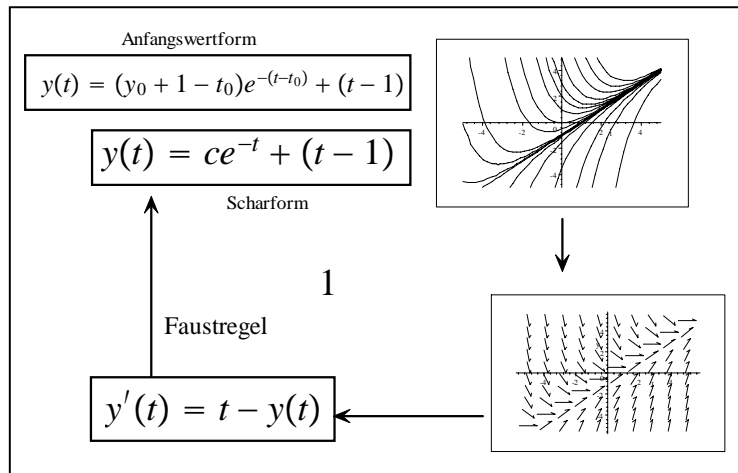
## 8.1.4b Weitere Beispiele

Zur Verdeutlichung füllen wir das Systemformblatt für einige weitere einfache Systeme aus. Sie haben alle  $N=1$ . Ein vollständiges Beispiel für  $N=2$  ist uns bereits vertraut. Es ist der harmonische Oszillator. Überlegen Sie sich die Details bitte selbst.

(1.4.12) **Radioaktiver Zerfall.** Der radioaktive Zerfall bildet ein einfaches, aber wichtiges System. Der **Einstieg** erfolgt in der Regel über die Differentialgleichung, die als totales Differential formuliert wird: Die Änderung der Beobachtungsgröße ist proportional zum Wert der Größe. Also  $\boxed{dy(t) = -\alpha y(t) dt}$ . Der Feldwert bestimmt so die Ableitung.  $\alpha > 0$  ist ein äußere Parameter, der weitere Spezifika des Systems, etwa in Form von Materialeigenschaften erfaßt. Beim radioaktiven Zerfall ist es die stoffabhängige Zerfallskonstante. Bei einem Wachstumsprozess ist  $\alpha$  negativ. Dann sollte man das Minuszeichen mit in den Parameter hineinziehen, also mit  $dy(t) = \beta y(t) dt$  und  $\beta > 0$  beginnen.

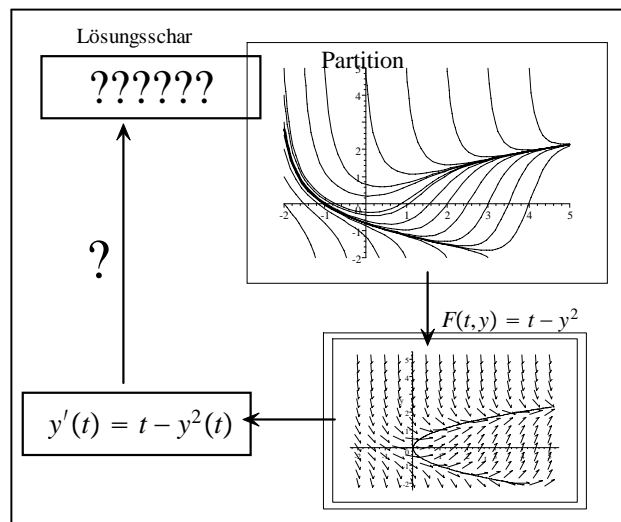


(1.4.13) Ein linear inhomogener Fall



Für  $t$  nach  $+\infty$  nähern sich hier alle Lösungen asymptotisch der mit Hilfe der Faustregel gefundenen Lösung  $y(t)=t-1$ . Die allgemeine Lösung finden wir problemlos mit den entwickelten Methoden. Man erkennt in der Partitionsdarstellung gut die Auswirkungen des zusätzlichen  $t$  in der Differentialgleichung auf die beiden anderen Erscheinungsformen.

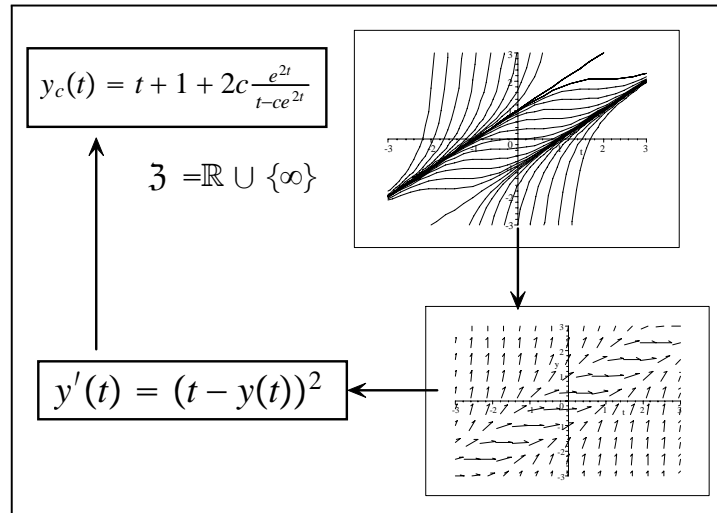
(1.4.14) Nichtlinear und Separation nicht möglich



Für  $t=y^2$  ist das Feld horizontal - Steigung Null. Eine explizite Lösungsformel können wir mit den bisherigen Methoden nicht finden, und man hat gezeigt, dass die Lösungen nicht zu den elementar konstruierbaren Funktionen gehören.

Natürlich stellt sich die Frage: Wie steht es mit dem fehlenden Systemteil? Die Lösungen kann man entweder numerisch finden oder aber - wie wir später sehen werden - indirekt über Potenzreihenentwicklungen. Und es stellt sich die Frage: Können wir sicher sein, dass die Lösungen eine Partitionstruktur der Graphen aufweisen, ohne dass wir diese Lösungen kennen? Das motiviert uns zur Suche nach einem mathematischen Satz, dessen Bedingungen die Idealstruktur sichern.

(1.4.15) Jetzt ändern wir die erste Differentialgleichung  $y' = t(1 - y^2)$  erneut ab. Es entsteht eine nichtlineare Gleichung, die zwar mit Separation nicht lösbar ist, für die es aber einen anderen Trick zur Bestimmung der Lösung gibt, den wir später unter dem Stichwort *Substitution* beschreiben.



Beachten Sie auch hier, wieviel Sie über die Graphen der Lösungen durch reine Inspektion des Feldes herausbekommen können, insbesondere findet man sofort die beiden speziellen Lösungen  $y(t)=t+1$  und  $y(t)=t-1$ , die den erweiterten Phasenraum in drei disjunkte Bereiche teilen, welche ganz unterschiedlichen Formen der Lösungen entsprechen. Wegen der Partitionsstruktur dürfen sich die Lösungen im erweiterten Phasenraum nie kreuzen. Verifizieren Sie über das Schema (1.3.6), dass die angegebenen Funktionen die Differentialgleichung erfüllen.

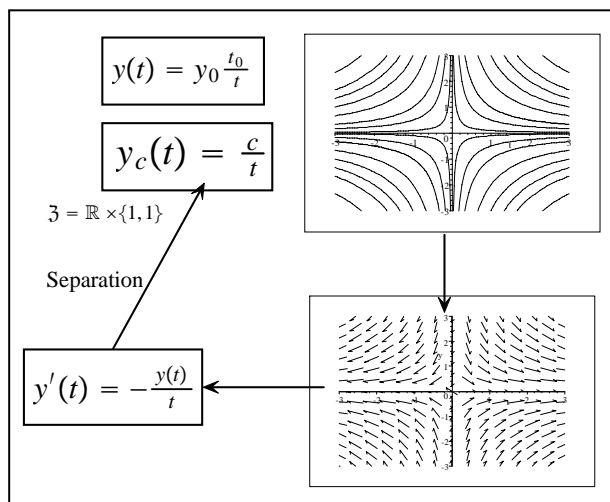
- Bestimmen Sie die Anfangswertform der allgemeinen Lösung.

(1.4.16) Bisher war das Richtungsfeld immer auf dem gesamten erweiterten Phasenraum definiert, was aber nicht notwendig zu global definierten Lösungen führen mußte. Jetzt betrachten wir Felder, die **nicht überall** definiert sind. Wie ändert sich unser System dann? Hierzu folgen einige einfache und leicht zu lösende Beispiele. Das erste besprechen wir ausführlicher.

(1.4.17) Offenbar ist  $F(t,y)=\frac{t}{y}$  auf der gesamten  $t$ -Achse ( $y=0$ ) des erweiterten Phasenraumes nicht erklärt.



Besonders problematisch ist der Ursprung. Füllen wir das Formblatt für diese Beispiel aus:



Wir sehen: Der Definitionsbereich des Feldes ist eingeschränkt auf  $G = \{(t, y) | y \neq 0\}$ . Das hat jedoch keineswegs zur Folge, dass man die Lösungskurven nicht in die verbotenen Punkte hinein fortsetzen bzw. verfolgen kann. Aber die Partitionsstruktur geht verloren. Von jedem Punkt der  $t$ -Achse mit  $t \neq 0$  gehen zwei Graphen aus mit unendlicher Anfangssteigung, so wie es die Differentialgleichung verlangt! Und diese Graphen sind beide auch lokal nur in **einer** Richtung des Kontrollparameters  $t$  vorhanden. Auch durch den Ursprung gehen zwei Lösungen. Diese sind jedoch global definiert. **Nimmt man die  $t$ -Achse heraus, so ist auf dem offenen Rest wieder eine Graphenpartition vorhanden.**

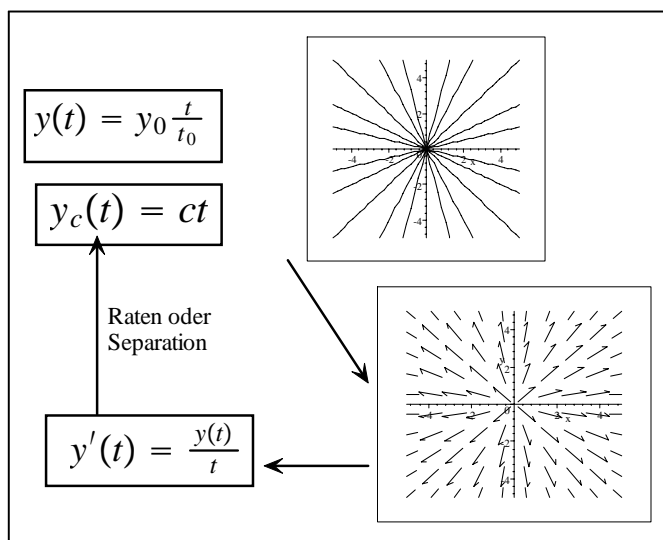
- Noch eine andere Möglichkeit: Unsere Gleichung hat das Steigungsfeld  $\vec{t}(t, y) = (1, \frac{t}{y})$ . Betrachten Sie stattdessen das Feld  $\vec{F}(t, x) = \frac{(y, t)}{\sqrt{y^2 + t^2}}$  und die zugehörige Differentialgleichung ( $N=2!$ )

$$t'(u) = \frac{y(u)}{\sqrt{t^2(u) + y^2(u)}} \quad y'(u) = \frac{t(u)}{\sqrt{t^2(u) + y^2(u)}}$$

Was ist zu erwarten?

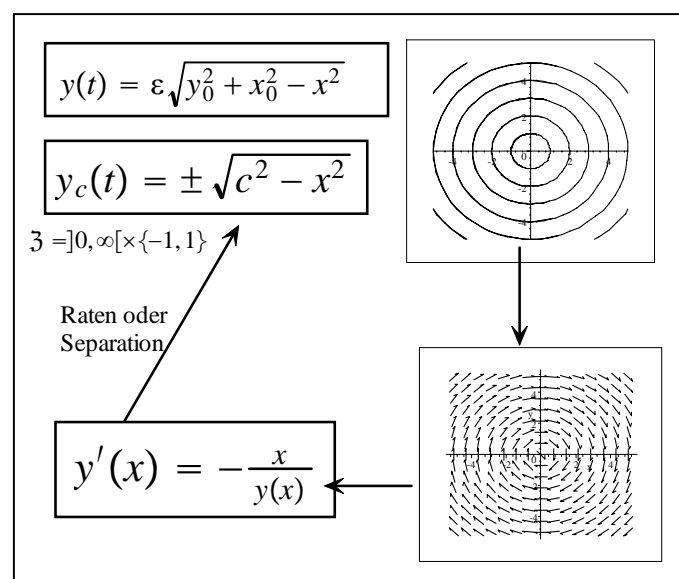
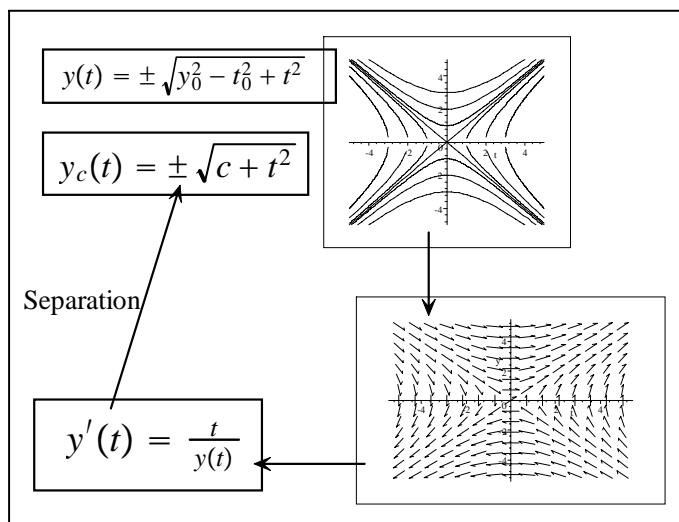
(1.4.18) Zur weiteren Verdeutlichung der Phänomene bei nicht überall definiertem  $G$  geben wir noch drei ähnliche Beispiele, die sich alle leicht mit Separation lösen lassen. Dabei sollten Sie die Inspektion möglichst immer mit dem Feld beginnen.

(1.4.19)



In diesem Beispiel gehen **alle** Lösungen durch den Ursprung.

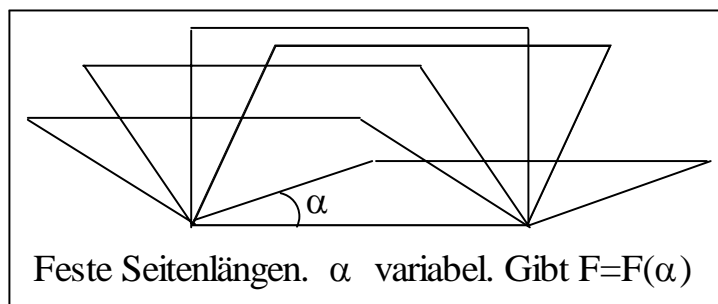
(1.4.20) Jetzt ändern wir im Feld das Vorzeichen und gehen im zweiten Beispiel zum Reziproken über.



(1.4.22) Es folgt ein Beispiel mit **inhaltlicher Interpretation**. Und zwar eines, bei dem die unabhängige Variable einmal nicht die Zeit ist.

Wir betrachten Parallelegramme in der Ebene und stellen uns vor, der Winkel zwischen den Seiten sei leichter veränderlich als die Seitenlänge. Die Seiten seien etwa über bewegliche Gelenke miteinander verbunden. Dann interpretieren wir den Winkel  $\alpha$  als Kontrollvariable. Als Beobachtungsgröße wählen wir den Flächeninhalt. Zu jeder Winkeleinstellung eines Parallelegramms gehört ein eindeutig bestimmter Flächeninhalt.

Jeder Systemzustand entspricht einer Vorgabe der Seitenlängen.



Man hat  $F(\alpha) = \text{absin}(\alpha) = F_0 \sin(\alpha)$ . Das ist die Scharform unseres deterministischen Systems. Differenzieren gibt sofort  $F'(\alpha) = F_0 \cos(\alpha)$  und damit folgen Differentialgleichung und Feld:  $F'(\alpha) = \cot(\alpha)F(\alpha)$  und  $(\alpha, F) \mapsto (1, \cot(\alpha)F)$ .

$F_0$  ist der zu eliminierende Parameter (sonst  $c$ ). Also  $\mathfrak{J} = \{F_0\} = ]0, \infty[$ . Erneut ist das Feld für  $\alpha=0$  problematisch. Und in diesem Fall verstehen wir den inhaltlichen Grund:  $\alpha=0$  bedeutet für alle Paralleleogramme  $F=0$ . D.h. mit Hilfe eines Datentupels welches  $\alpha=0$  enthält, ist es nicht möglich, vom Beobachtungszustand auf den Systemzustand, also auf  $F_0$  zu schließen.  $F_0$  ist der größtmögliche Flächeninhalt, den man mit den gegebenen Seiten erzeugen kann. Für diesen Beobachtungszustand ist das System in unserem Sinne nicht deterministisch! Für  $0 < \alpha < \infty$  dagegen ist es deterministisch. Die Zusammenfassung im Formblatt zeigt übrigens, dass hier ein Fall vorliegt, bei dem die Differentialgleichung nicht einfacher aussieht, als die Gleichung für die Funktionsschar.

(1.4.23) An welcher Stelle des Formblattes man in das System einsteigt, hängt vom jeweiligen Problem ab. In den typisch physikalischen Beispielen beginnt man in der Regel mit der Differentialgleichung, wenn diese in Form eines allgemeinen Gesetzes vorliegt.

Wir geben jetzt ein Beispiel mit Einstieg an einer andern Stelle.

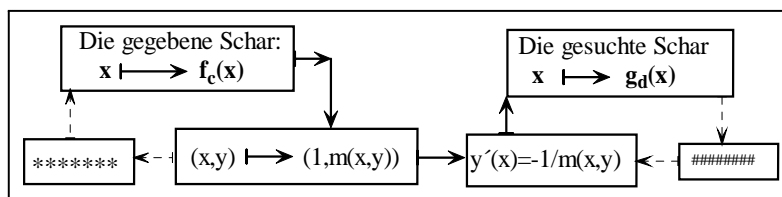
### 8.1.4c Die Orthogonaltrajektorien einer Kurvenschar

(1.4.24) Wir betrachten eine Kurvenschar  $x \mapsto f_c(x)$ , die eine Graphenpartition der Ebene oder eines Teiles derselben liefert. Die Funktionen sollen alle glatt sein. Zu jedem Punkt gehört also eine Tangente. Nun suchen wir nach einer zweiten Schar, die auf der ersten überall senkrecht stehen soll. D.h. sie soll auch glatt sein und die Tangenten an die Kurven dieser Schar sollen stets auf den entsprechenden Tangenten der ersten Schar senkrecht stehen. Die Funktionen der zweiten Schar nennen wir *Orthogonaltrajektorien* der gegebenen Schar. Kritisch sind Punkte, in denen die Funktion die Steigung Null hat. Dann sollte die Orthogonaltrajektorie unendliche Steigung haben.

Konkrete Beispiele überlegt man sich leicht: Wählt man alle Ursprungsgeraden, so sind die Orthogonaltrajektorien Kreise um den Ursprung. Ein inhaltliches Modell bekommt man, wenn man für eine Fläche über der Ebene die Höhenlinien betrachtet. Die zugehörigen Orthogonaltrajektorien sind dann die Falllinien. Allgemeiner kann man die Niveaulinien eines Skalarfeldes betrachten. Die zugehörigen Orthogonaltrajektorien sind die Kurven stärkster Feldänderung. Der Gradient hat die Richtung der Tangenten an die Orthogonaltrajektorien.

(1.4.25) Unser Problem: **Wie findet man zu vorgegebener Kurvenschar  $f$  die zugehörigen Orthogonaltrajektorien ?**

(1.4.26) Mit dem entwickelten Begriffsapparat ist die Antwort leicht zu finden. Wir haben es offenbar mit zwei gewöhnlichen deterministischen Systemen zu tun. Für das erste kennen wir die Kurvenschar, können daraus also das Feld bestimmen. Ist das Feld bestimmt, können wir das Feld der zweiten Schar bestimmen, denn es soll ja auf dem der ersten überall senkrecht stehen (Steigung  $m' = -1/m$ ). Die Vorzeichenfreiheit können wir bei Bedarf noch ausnutzen. Dann bestimmen wir die Differentialgleichung der zweiten Schar und lösen diese. Fertig.

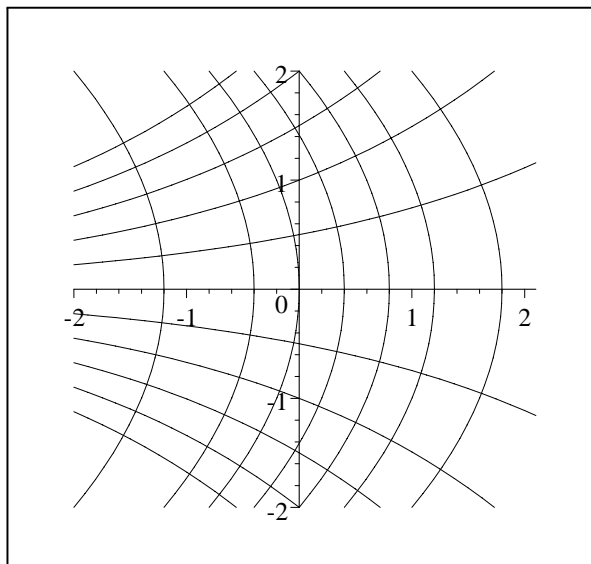


Das Ganze ist so offensichtlich, dass zugehörige Beispiele im Prinzip nicht nötig sind. Überdies haben wir bereits einige Beispiele: Inspizieren Sie die vier zu  $y' = \frac{t}{y}$ ,  $y' = -\frac{y}{t}$ ,  $y' = \frac{y}{t}$  und  $y' = -\frac{t}{y}$  gehörigen Systeme, die in (1.4.17-21) behandelt wurden.

(1.4.27) Jetzt doch noch ein Beispiel:

Als Eingabeschar wählen wir  $f_c(x) = ce^{\alpha x}$ . Die ungefähre Form der zugehörigen Orthogonaltrajektorien ist durch Inspektion unmittelbar vorstellbar: Man erwartet einen Verlauf vom Typ einer Wurzelfunktion. Sei  $\alpha \neq 0$ . Das Feld der Schar ist - wie wir wissen -  $(x,y) \mapsto (1, \alpha y)$ . Damit folgt für die Orthogonaltrajektorien die Differentialgleichung  $y'(x) = \frac{1}{\alpha y}$ . Diese Gleichung ist mit Separation lösbar und gibt:  $y_d(x) = \sqrt{d - \frac{2x}{\alpha}}$ , was

voll der Erwartung entspricht. Die Ausnahmepunkte des Feldes, also die y-Achse, wird man hier natürlich mit hinzunehmen.



- Naheliegende Anschluß fragen: Nehme statt *senkrecht* einen festen Winkel  $\alpha$  behandeln Sie den Fall  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Allgemeines Lösungsschema und ein Beispiel, etwa  $f_c(x) = c \exp(x)$ . ( Das Problem löst man analog unter Verwendung des Additionstheorems für den Tangens).
- Wie verallgemeinert sich das Problem auf höhere Dimension? Was sollten da die Orthogonaltrajektorien sein? Welche physikalische Interpretation liegt nahe? (Gefragt ist nach dem Problem, **nicht** nach dessen Lösung!)

### 8.1.4c Höhere Dimension

(1.4.28) Unsere Beispiele für das Formblatt hatten alle  $N=1$ . Für  $N>1$  tritt das Problem der zeichnerischen Darstellung auf. Man muß sich stärker auf die Vorstellungskraft und die Inspektion der Rechenausdrücke verlassen. Ein Beispiel haben wir früher in Kap. 7 bereits ausführlich diskutiert, den harmonischen Oszillator. Jetzt betrachten wir zwei weitere Beispiele.

(1.4.29) Zunächst betrachten wir erneut unser Parallelogrammsystem aus (1.4.22). In diesem System wird der Systemzustand eigentlich besser durch 2 Parameter festgelegt, etwa durch die Kantenlängen  $a$  und  $b$  der Parallelogramme. Wir haben daraus über  $F_0 = ab$  einen einzigen Parameter gemacht und so ein System mit  $N=1$  erhalten. Um ein System mit  $N=2$  zu bekommen, benötigen wir eine zweite Beobachtungsgröße. Wir können beispielsweise die Länge  $d$  der dem Winkel gegenüberliegenden Diagonalen wählen. Elementargeometrische Überlegungen ergeben  $d(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)}$  Als zweiten Parameter neben  $F_0$  wählen wir  $D_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

- Überlegen Sie sich selbst eine zugehörige inhaltliche Interpretation.

Dann wird unser System durch folgende Kurve beschrieben:

$$\alpha \mapsto \begin{pmatrix} F(\alpha) \\ d(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \sin \alpha \\ \sqrt{D_0^2 - 2F_0 \cos \alpha} \end{pmatrix}.$$

Durch Ableiten und Eliminieren von  $F_0$  und  $D_0$  erhalten wir das Feld und daraus die Differentialgleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} F'(\alpha) &= \cot \alpha \cdot F(\alpha) \\ d'(\alpha) &= -\frac{F(\alpha)}{d(\alpha)} \end{aligned}}$$

Erneut sind die Rechenausdrücke des Feldes im Vergleich zu denen der Kurve einfach. An der Differentialgleichung ist bemerkenswert, dass sie entkoppelt ist in dem Sinn, dass man zunächst mit der ersten Gleichung  $F$  bestimmt und mit dem Resultat eine Gleichung für  $d$  alleine erhält. Für  $\alpha=0$  ist das System nicht deterministisch. Für  $0 < \alpha < \pi$  jedoch bestimmt jeder Beobachtungszustand das Parallelogramm einschließlich des

Systemzustands vollständig. Es liegt nahe, den Systemzustand in diesem Beispiel statt durch  $(F_0, d)$  durch die Seitenlängen  $a$  und  $b$  des Parallelogrammes festzulegen. Aber die kann man aus  $F_0$  und  $d$  berechnen.

(1.4.30) Als zweites Beispiel betrachten wir die folgende Kurvenschar mit 2 freien Parametern:

$$x_{cd}(t) = t + ct^2 + dt^3.$$

Die Schar sollte zu einem zweidimensionalen Phasenraum gehören. Für  $t=0$  können wir sicher nicht vom Beobachtungszustand auf den Systemzustand (also den Wert von  $c$  und  $d$ ) schließen. Der Konfigurationsraum - Variable  $x$  - ist eindimensional. Also eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

Wie sieht das zugehörige Feld aus? Wir bilden  $\dot{x}_{cd}(t) = 1 + 2ct + 3dt^2$ . Damit folgt sofort:  $dt^3 = t - 2x + t\dot{x}$  und  $ct^2 = -2t + 3x - t\dot{x}$ . Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen können wir die Parameter  $c$  und  $d$  aus  $\ddot{x}(t) = 2ct + 6dt^2$  hinauswerfen. Das Ergebnis ist die gesuchte Differentialgleichung (2. Ordnung):

$$t^2 \ddot{x}(t) = 4t\dot{x}(t) - 6x(t) + 2t$$

Beachten Sie: Die beiden Gleichungen für  $c$  und  $d$ , die wir gefunden haben, bestimmen für jeden Punkt  $(t_0, x_0, v_0)$  des erweiterten Phasenraumes mit  $t_0 \neq 0$  eindeutig  $c$  und  $d$ . D.h. durch jeden dieser Punkte geht genau eine Kurve, so dass für  $t_0 \neq 0$  ein deterministisches System vorliegt.

Wir reduzieren auf ein System 1. Ordnung ( $y_1(t)=x(t)$ ,  $y_2(t)=\dot{x}(t)$ ):

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ t^2 \dot{y}_2(t) = -6y_1(t) + 4ty_2(t) + 2t \end{array} \quad t^2 \ddot{x}(t) = 4t\dot{x}(t) - 6x(t) + 2t$$

Es liegt also eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten vor.

Die Partition des dreidimensionalen erweiterten Phasentraumes und das Steigungsfeld sehen wie folgt aus:

$$t \mapsto (t, t + ct^2 + dt^3, 1 + 2ct + 3dt^2) \quad (t, y_1, y_2) \mapsto (1, y_2, -6\frac{y_1}{t^2} + 4\frac{y_2}{t} + \frac{2}{t})$$

Alle Graphen treffen sich im Punkte  $(0,0,1)$  des erweiterten Phasenraumes.

Beachten Sie: Im erweiterten Konfigurationsraum gehen durch jeden typischen Punkt unendlich viele Kurven der Schar, so dass ein Veranschaulichung schwierig ist. Erst die Kenntnis von Ort und Steigung erlauben den Rückschluss auf den Systemzustand, also auf die Parameter  $c$  und  $d$ .

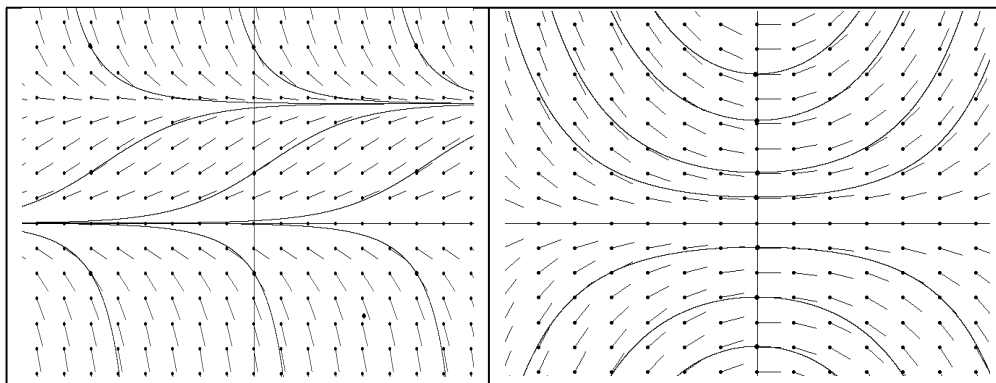
## 8.1.5 Ausbau des Begriffssystems: Autonome und explizite Differentialgleichungen

Wir wollen unser Begriffssystem um zwei wichtige Eigenschaften erweitern, die gewöhnliche Differentialgleichungen besitzen können oder auch nicht. Neben *linear* sind das die wichtigsten Eigenschaften, auf die man bei einer ersten Inspektion achten sollte.

### 8.1.5a Autonome Differentialgleichungen

(1.5.1) Die erste dieser Eigenschaften liegt vor, wenn das Feld  $(t, y) \mapsto F(t, y)$  nicht explizit von der Zeit abhängt. Wenn also eine Feldform  $(t, y) \mapsto F(t, y) = f(y)$  vorliegt. Oder für das Steigungsfeld  $\vec{t}(t, y) = (1, f(y))$ . Dabei ist  $f$  ein reines Phasenraumfeld. Dann ist geometrisch gesehen die Feldkonfiguration translationsinvariant parallel zur  $t$ -Achse. In der Darstellung können wir eine Dimension einsparen. Es genügt, das Feld in der Form  $y \mapsto f(y)$  im Phasenraum darzustellen. Ein derartiges Feld kann günstig als Geschwindigkeitsfeld

einer stationären Strömung veranschaulicht werden (Vgl. Kap 6.1)



Sei  $G_0 \subset V$  der Bereich des Phasenraumes, in dem  $\vec{f}$  definiert ist. Dann darf man im erweiterten Phasenraum  $G = \mathbb{R} \times G_0$  wählen. Geometrisch ist das ein Zylinder, dessen Achse parallel zur  $t$ -Achse verläuft. Oder auch: Die partielle Feldableitung nach  $t$  verschwindet:  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \vec{0}$ .

(1.5.2) Die Differentialgleichung hat jetzt die Form  $\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t))$ . Man sagt, in der Gleichung komme die unabhängige Variable *nicht explizit* vor. Man nennt Gleichungen dieses Typs *autonome Differentialgleichungen*. Das zugehörige deterministische System nennen man ein autonomes System.

(1.5.3) Was bedeutet Autonomie für die zugehörige Kurvenschar? Ein Resultat folgt sofort:

**Satz:** Sei  $t \mapsto \vec{r}(t)$  Lösungskurve einer autonomen Differentialgleichung.  
 Dann ist auch  $t \mapsto \vec{s}(t) = \vec{r}(t - t_0)$  für  $t_0 \in \mathbb{R}$  Lösungskurve.

D.h. man kann den Graphen einer Lösungskurve parallel zur  $t$ -Achse verschieben und erhält erneut den Graphen einer Lösungskurve. Ist der Definitionsbereich von  $\vec{r}$  dabei nicht ganz  $\mathbb{R}$ , so ist der Definitionsbereich der neuen Kurve entsprechend zu modifizieren.

(1.5.4) Schematisch heißt das: **Ersetzt man in einer Lösungsformel  $t$  durch  $t - t_0$ , so bekommt man erneut eine Lösung.**

Dies Phänomen kennen wir von der Flugparabel, vom radioaktiven Zerfall und allgemeiner von der linearen Differentialgleichung  $\vec{y}'(t) = M \cdot \vec{y}(t)$ . Alle zugehörigen Differentialgleichungen sind autonom.

(1.5.5) Der Beweis des Satzes ist elementar, da nach der Kettenregel  $\vec{s}'(t) = \vec{r}'(t - t_0)$  gilt.

Auch geometrisch ist das Resultat klar: Verschiebung des Graphen führt zu Punkten mit gleichen Steigungsvektoren. Aber auch die Steigung der Tangente bleibt bei der Verschiebung dieselbe.

(1.5.6) Eine wichtige Eigenschaft autonomer Differentialgleichungen ist, dass man nicht nur das Feld, sondern auch die Lösungskurven weitgehend im Phasenraum darstellen kann. Oder auch: Anstelle von  $\text{Graph}(\vec{r})$  kann man zur Veranschaulichung  $\text{Bild}\vec{r}$  heranziehen und so eine Dimension sparen. Das haben wir für den linearen Fall und  $N=2$  bereits ausführlich in Kapitel 7 besprochen. (7.1.3 und 7.1.6)

**Satz:** Sei  $\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t))$  eine autonome Differentialgleichung mit Lösungsschar  $t \mapsto \vec{r}_{\vec{c}}(t)$ . Dann bildet  $\{\text{Bild}\vec{r}_{\vec{c}} \mid \vec{c} \in \mathbb{R}^n\}$  eine Partition des Phasenraumes  $G_0$ .

Die Graphenpartition des gewöhnlichen deterministischen Systems zerlegt dagegen generell den **erweiterten** Phasenraum! (Vgl 71.6).

(1.5.7) Beweis: in  $G = \mathbb{R} \times G_0$  liegt nach Voraussetzung ein Graphenpartition vor. Liefern die Projektionen dieser Graphen auf  $V$  eine Partition von  $G_0$ ? Das einzige Problem ist die Disjunktheit der Klassen. Seien  $\vec{y}_0 \in G_0$  sowie  $\vec{r}$  und  $\vec{s}$  zwei Lösungen mit  $\vec{r}(t_1) = \vec{s}(t_2) = \vec{y}_0$ . Ist dann  $\text{Bild}\vec{r} = \text{Bild}\vec{s}$ ? Mit  $t \mapsto \vec{r}(t)$  ist nun aber auch  $t \mapsto \vec{S}(t) = \vec{r}(t - t_2 + t_1)$  eine Lösung. Sie erfüllt dann das Anfangswertproblem zu  $(t_2, \vec{y}_0)$ , von dem wir wissen, dass es eine eindeutige Lösung hat, nämlich  $\vec{s}$ . Also ist  $\vec{S} = \vec{s}$  und somit  $\text{Bild}\vec{r} = \text{Bild}\vec{S} = \text{Bild}\vec{s}$  wie gewünscht.

(1.5.8) Als Beispiel steht uns sofort der harmonische Oszillator zur Verfügung. Die Ellipsen konstanter Energie liefern dort die Klassen der Partition des Phasenraumes. Insbesondere bildet der Ursprung eine

einelementige Klasse. Allgemeiner gilt das für alle linearen Differentialgleichungen  $\dot{y}'(t)=M \cdot \bar{y}(t)$ . Vgl. die Bilder in Kap 7.1.3.

(1.5.9) Hat man für ein autonomes System diese Phasenraumpartition und gibt man irgendein  $(t, \bar{y}_0)$  vor, so gibt es eine zugehörige Lösungskurve. Deren **Bild** ist dann bekannt. Dabei man weiß nicht, wann genau diese Lösung die anderen Punkte des Bildes erreicht. Und man darf auch nicht schließen, dass dieser Punkt nur einmal durchlaufen wird, da die Klassen ja keine Graphen sein müssen.

- Begründen Sie, dass die beiden Felder  $\vec{F}(\vec{x})$  und  $\vec{G}(\vec{x}) = s(\vec{x})\vec{F}(\vec{x})$  zu derselben Phasenraumpartition führen, wenn  $s$  ein nullstellenfreies Skalarfeld ist. Insbesondere führen  $\vec{F}(\vec{x})$  und  $\frac{\vec{F}(\vec{x})}{\|\vec{F}(\vec{x})\|}$  zu denselben Trajektorien. Wozu ist das im Zusammenhang mit Computeranimationen nützlich?

(1510) Der Veranschaulichungsgewinn durch die eine fortlassbare Dimension wird daher mit dem Verlust von einiger Information erkaufte. Für  $N=1$  ist die Phasenraumveranschaulichung fast immer wenig wert. Wieso? Für  $N=2,3$  ist die Veranschaulichung dagegen recht nützlich.

Zur Unterstützung der Anschauung sollte man sich das Feld  $\vec{F}$  auch als stationäres Geschwindigkeitsfeld im Phasenraum vorstellen. Die Lösungskurven der Differentialgleichung beschreiben dann die Bahnen von Teilchen gemäß diesem Geschwindigkeitsfeld. Und die Bilder dieser Bahnen sind die Trajektorien, die die Partition des Phasenraumes ausmachen. Man nennt diese gedachte Strömungsbewegung den *Phasenraumfluss*.

(1.5.11) Achten Sie immer auf gewisse Typen spezieller Phasenraumtrajektorien:

1. Jeder **Nullstelle des Feldes** entspricht eine stationäre Kurve mit einelementiger Trajektorie. Der Punkt bleibt *stationär* an derselben Stelle.
2. Periodische Bahnen mit  $\vec{r}(t+T)=\vec{r}(t)$ . Diese gehören zu geschlossenen Trajektorien. Die Periode  $T$  ist minimal und  $>0$  zu wählen.
3. Scheinbares Überkreuzen von Trajektorien bedeutet, dass der Schnittpunkt eine eigene Klasse bildet (stationärer Punkt). Die davon ausgehenden offenen Halbkurven entsprechen Bewegungen, bei denen der Randpunkt (=Schnittpunkt) erst bei  $t=\infty$  bzw. bei  $t=-\infty$  erreicht wird. Die gesamte Figur (aus 5 oder noch mehr Trajektorien) heißt auch Separatrix. Vgl. die Bilder in 7.1.3. 8.1.5b

Gsnerell liefert autonom unmittelbar eine Vielzahl an allgemeiner Information über das Verhalten des Systems, so dass man stets darauf achten sollte, ob diese Eigenschaft vorliegt oder nicht.

## 8.1.5b Autonomisierung und Dynamische Systeme

(1.5.12) So wie wir früher mit Hilfe des Reduktionstricks höhere Ableitungen beseitigt haben kann man auch eine **nicht autonomen** Differentialgleichung in eine **autonome** umwandeln. Auch hier zahlt man den Preis in Form einer Erhöhung der Phasenraumdimension, allerdings nur um eine Einheit.

Die Idee besteht darin, die Graphen im erweiterten Phasenraum kanonisch zu parametrisieren.

(1.5.13) **Der Autonomisierungstrick:** Gegeben sei die Differentialgleichung  $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t))$ . Definiere  $\vec{y}=(t, \vec{x})$  als Element des neuen Phasenraumes und  $\tau$  als neuen Kontrollparameter. Die neue Differentialgleichung sei  $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{F}(\vec{y}(t))$  und  $\dot{t}(\tau) = 1$  als zusätzliche Komponente. Dieses System ist offensichtlich autonom.

(1.5.14) Man löst jetzt die letzte Gleichung  $\dot{t}(\tau) = 1$  mit der Anfangsbedingung  $t(0)=0$ , also  $t(\tau)=\tau$ . Dann geht die restliche Gleichung in die ursprüngliche nicht autonome über. Zu jeder Lösung der nicht autonomen gehören unendlich viele der autonomen Ersatzgleichung. die aber alle durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen.

Rein mathamatisch genügt es daher, nur autonome Differentialgleichungen zu behandeln. In der Theorie der *dynamischen Systeme* tut man das üblicherweise auch. Will man jedoch Anwendungsbezüge zu deterministischen Systemen herstellen und die zugehörigen Strukturen stärker betonen, erscheint es durchaus sinnvoll, den nicht autonomen Fsl gesondert zu betrachten, ja hervorzuheben.

- Betrachten sie jetzt die beiden Fragen zu (1.4.17) und (1.5.9) erneut. Wie ist jetzt insbesondere das Vorgehen in der Frage zu (1.4.17) zu verstehen? Behandeln Sie die auf auf (1.4.17) folgenden Beispiele analog.

### 8.1.5c Explizite Differentialgleichungen

(1.5.16) Der zweite Begriff, den wir einführen wollen, ist *explizit*. Er bezieht sich darauf, ob die Differentialgleichung nach der **höchsten Ableitung** aufgelöst ist oder nicht. Bisher haben wir das immer stillschweigend angenommen, d.h. wir haben angenommen, dass die Differentialgleichung die Form  $\vec{Y}'(t) = \vec{F}(t, \vec{Y}(t))$  hat. Aber der Differentialoperator kann natürlich auch eine andere Form haben. Einige Beispiele:

$$(\vec{a} \cdot \vec{x}(t)) = 0 \quad (1+t^2)\ddot{y}(t) + y^2(t) = 1 \quad xy'(x) + \sin(xy(x)) = 0 \quad y(x)y'(x) = \sin(xy(x))$$

(1.5.17) In all diesen Fällen ist nicht nach der höchsten Ableitung aufgelöst, was ja für unsere Feldinterpretation der Differentialgleichung wichtig war. Sprechweisen zur Erfassung dieser Phänomene:

- ◆ Eine Differentialgleichung hat *explizite Form*, wenn sie nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist.
- ◆ Eine Differentialgleichung heißt *explizit*, wenn es möglich ist, sie in eine äquivalente explizite Form zu bringen.
- ◆ Eine Differentialgleichung heißt *explizit für alle  $t \in J$* , wenn es möglich ist, sie für alle  $t \in J$  nach der höchsten Ableitung aufzulösen.

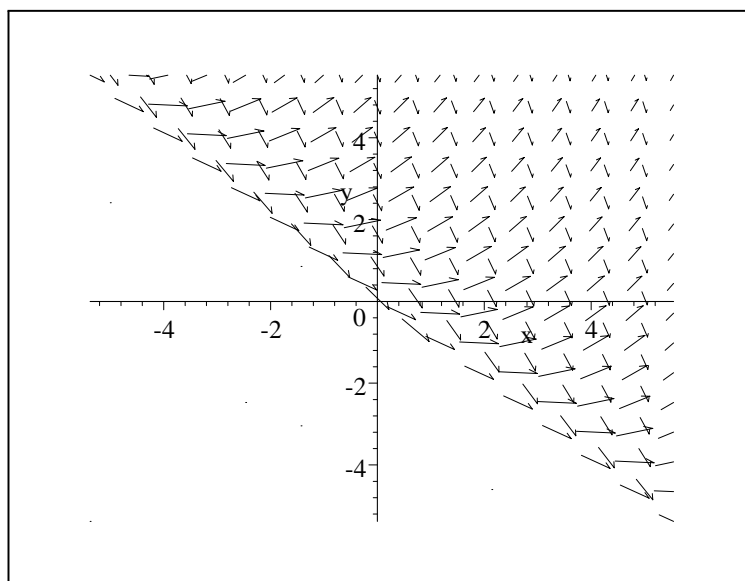
$\ddot{x}(t) = ax(t)$  ist explizit und in expliziter Form. Dagegen ist  $t\ddot{x}(t) + ax(t)$  nur für  $t \neq 0$  explizit und noch nicht in expliziter Form.  $\ddot{x}(t) = -\frac{a}{t}x(t)$  ist für  $t \neq 0$  die zugehörige explizite Form. Bei  $t=0$  hat das Feld (auf dem erweiterten Phasenraum) einen Pol.

(1.5.18) Jetzt ein Beispiel, das verdeutlicht, was konkret im Falle einer nicht expliziten Gleichung geschehen kann. Dazu wählen wir  $N=1$ . Unsere Differentialgleichung sei

$$\boxed{(y'(x) + 1)^2 = x + y(x) \quad | \quad y'(x) = -1 \pm \sqrt{x + y(x)}}$$

Rechts der Versuch, die Gleichung nach der höchsten Ableitung aufzulösen. Man sieht: Aus der einen nicht expliziten Ausgangsgleichung werden zwei explizite Gleichungen. Und überdies ist das zugehörige Feld nur im Bereich  $y \geq -x$  definiert.

Skizzieren wir beide zugehörige Richtungsfelder einmal in einem gemeinsamen Bild:

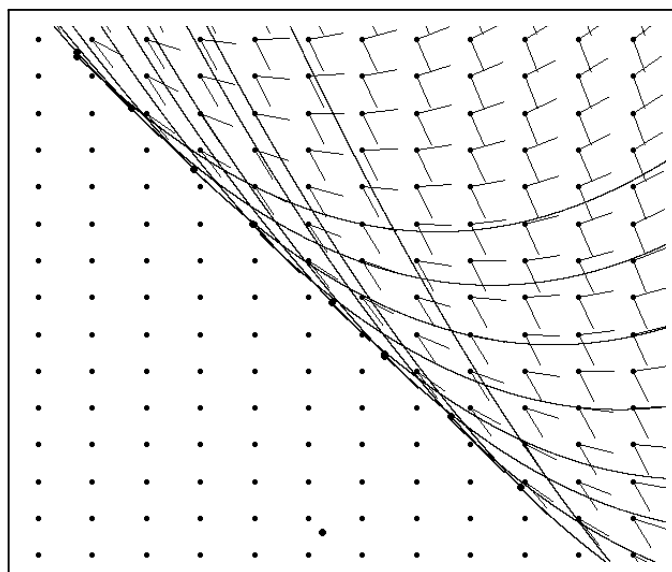
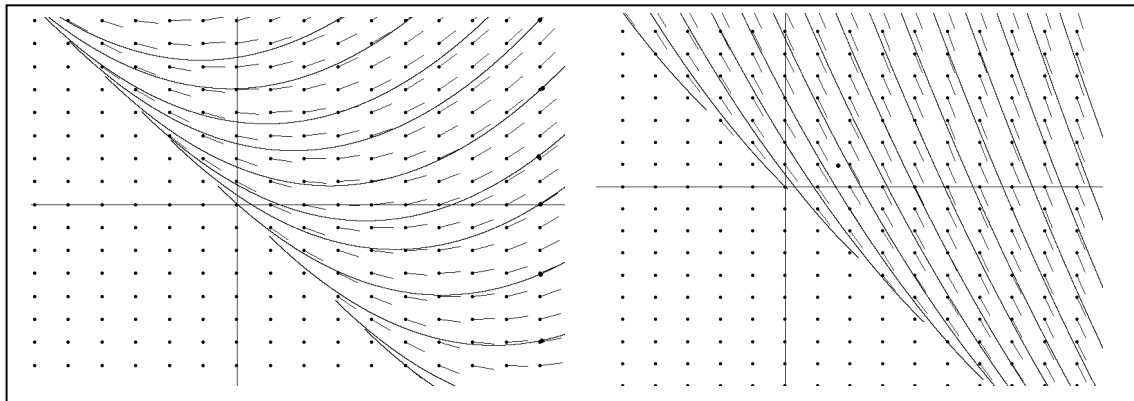


Die Skizze zeigt zunächst, dass  $y=-x$  eine spezielle Lösung ist. Separation ist nicht möglich. Aber wir können versuchen, Lösungen zu raten. Versuchen wir es mit der Ausgangsgleichung und mit Polynomen. Die Skizze legt eine Parabel mit Scheitel auf  $y+x=1$  als Ansatz nahe. Für  $y+x=1$  hat man ja  $y' = 0$ , wie es im Scheitel sein muss! Also

$$y(c) = 1 + c + \alpha(x + c)^2.$$



Einsetzen gibt nach kurzer Rechnung  $\alpha=1/4$ . Die Konstante  $c$  dagegen ist frei wählbar. Damit haben wir eine einparametrische Lösungsschar der Ausgangsgleichung gefunden. Eine Skizze zeigt, dass durch jeden Punkt mit  $y+x>0$  genau 2 Lösungen gehen. Eine davon erfüllt die explizite Gleichung mit dem  $+$ , die andere die mit dem  $-$ . Für alle Parabeln liefert die zuerst gefundene Lösung  $y+x=0$  eine Tangente und im zugehörigen Berührungspunkt wechselt das Vorzeichen, d.h. wechselt die Differentialgleichung!



Jetzt betrachten wir die beiden expliziten Felder einzeln samt ihren Differentialgleichungen. Dann münden alle Lösungen in die Tangente  $y+x=0$  ein Man erhält gestückelte Lösungen, etwa

$$y_c(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x \leq c-2 \\ 1-c + \frac{(x-c)^2}{4} & \text{für } x \geq c-2 \end{cases} .$$

Für jedes  $c$  ist das eine  $C^1$ -Lösung unseres Problems. **Durch jeden Punkt der Grenzgeraden gehen daher unendlich viele Lösungen.** Das Ideal deterministischen Verhaltens wird verletzt. Die zweite Ableitung springt an der Stückelungsstelle. In der nicht expliziten Ausgangsgleichung fällt der Vorzeichensprung der ersten Ableitung heraus.

(1.5.19) Wir folgern, dass man bei nicht expliziten Differentialgleichungen vorsichtig sein muss, weil vom Idealfall abweichendes Lösungsverhalten auftreten kann. Daher ist ein allgemeiner Satz, der Aussagen macht, wann eine Differentialgleichung, die nicht in expliziter Form ist, explizit ist, sehr wichtig. Wir werden darauf zurückkommen.

- Der Phasenraum sei  $V_0^3$  und  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Wir betrachten dazu die Differentialgleichung  $(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{x}}(t)) = 0$ . Sie ist linear, aber nicht explizit. Zeigen Sie, dass der Lösungsraum unendlichdimensional sein muss.

## 1.8.5d Die Feldlinien eines statischen Feldes

Statische Felder  $\vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$  werden in der Physik gerne durch Feldlinien beschrieben. Das sind nichts anderes als die Phasenraumtrajektorien der expliziten und autonomen Differentialgleichung  $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{F}(\vec{y}(t))$ , die zum betrachteten Gebiet gehört. Man sollte dabei auch an die Interpretation solcher Felder als Geschwindigkeitsfelder von Stömungen denken. Vgl. Kap. 6.1.

- Unterschiedliche Felder können dieselben Feldlinien haben. Diskutieren sie das am Beispiel  $\vec{F}(\vec{x}) = f(|\vec{x}|)\vec{x}$ .
- Wie paßt der Coulombfall in unser Schema? Zeigen Sie: Entweder hat man eine im Ursprung nicht explizite Differentialgleichung oder das Feld ist dort nicht erklärt.

## 8.2 Methoden zur Lösung und Analyse von Differentialgleichungen

### 8.2.1 Substitutionen

(2.1.11) Es gibt kein allgemeines Verfahren, das die Lösungen für eine beliebige Differentialgleichung liefert. Wie bereits erwähnt, gibt es stattdessen umgekehrt Beweise, dass die Lösungen gewisser einfachst gebauter Differentialgleichungen nicht zu den elementar konstruierbaren Funktionen gehören. Man muss sich daher entweder mit numerischen Methoden begnügen oder fallspezifisch vorgehen. Das ist analog zum Integrieren, das sich ja als Spezialfall des Lösens von Differentialgleichungen interpretieren läßt. Sucht man in Nicht-Routine-Fällen nach Lösungen, muß man sich etwas einfallen lassen. Aber natürlich gibt es auch hier allgemeine Methoden, die in vielen Fällen helfen.

(2.1.2) Ein besonders wichtiges Hilfsmittel beim Integrieren ist die *Substitution*. Das gilt allgemeiner auch für die Behandlung von Differentialgleichungen. Die Idee ist einfach:

Wir transformieren den erweiterten Phasenraum geeignet. Dann geht die Graphenschar eines deterministischen Systems in eine andere Schar über und das Feld in ein anderes Feld. Zu dem neuen Feld gehört eine neue Differentialgleichung. Diese gilt es mit Hilfe des Transformationsgesetzes herzuleiten. U.U. ist die neue - durch die Transformation gewonnene Differentialgleichung - leichter zu lösen als die Ausgangsgleichung. Gelingt die Lösung, so transformiert man die Lösungen zurück und erhält Lösungen der Ausgangsgleichung.

(2.1.3) Insbesondere gibt es eine Reihe von elementaren Transformationen mit einfacher geometrischer Interpretation (Verschiebung des Ursprungs, Streckung der Achsen, usw.) Alle Differentialgleichungen, die durch eine derartige Transformation auseinander hervorgehen, sollte man weitgehend identifizieren und nur jeweils einen Vertreter genauer behandeln (*Normalform*). In der Regel liegen die Bahnen einer geeigneten Gruppenoperation vor.

Wir besprechen hier nur Transformationen, bei denen die t-Achse des erweiterten Phasenraumes in sich übergeht ( Bitte nicht verwechseln: "Die Zeitachse geht als Menge in sich über" und "Die Punkte der Zeitachse bleiben einzeln fest". Gemeint ist der erste Fall.) Der Phasenraum dagegen darf t-abhängigen Transformationen unterworfen werden.

(2.1.4) Zunächst die **Methode** in Form eines Kochrezeptes. Dann rechnen wir einige **Beispiele** und geben endlich die genauere **geometrische Interpretation**.

**Kochrezept zur Substitution:**

◆ Gegeben sei die Differentialgleichung  $\vec{y}'(t) = \vec{F}(t, \vec{y}(t))$ . Sie soll umgewandelt werden in eine äquivalente Gleichung für  $\tau \mapsto \vec{u}(\tau)$ .

◆ (a) Der neue Kontrollparameter wird eingeführt vermittelt  $\tau = f(t)$ . Die Abbildung f muss bijektiv sein. f und  $f^{-1}$  seien  $C^1$ .

◆ (b) Den alten Phasenraumpunkt  $\vec{y}$  durch den neuen mit  $\vec{u}$  bezeichneten ausdrücken. Die Formel darf von  $\tau$  abhängen, also  $\vec{y} = \vec{g}(\tau, \vec{u})$  und  $\vec{u} = \vec{h}(\tau, \vec{y})$ . Sie muß also für festes  $\tau$  nach  $\vec{u}$  auflösbar sein.  $\vec{g}$  sei erneut  $C^1$ .

◆ (c) Zwischen den alten Kurven  $t \mapsto \vec{y}(t)$  und den neuen  $\tau \mapsto \vec{g}(\tau, \vec{u}(\tau))$  besteht definitionsgemäß die folgende Beziehung

$$\boxed{\vec{y}(t) = \vec{g}(\tau, \vec{u}(\tau))}$$

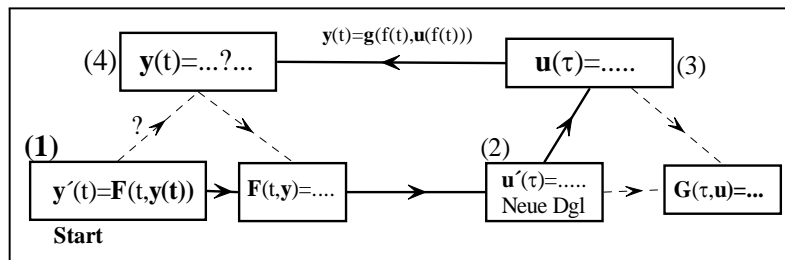
Beachten Sie, hat man  $\vec{u}(\tau)$  kann man mit den beschriebenen Größen sofort  $\vec{y}$  bestimmen:  $\vec{y}(t) = \vec{g}(f(t), \vec{u}(f(t)))$ .

◆ (d) Differenziere  $\vec{y}(t) = \vec{g}(f(t), \vec{u}(f(t)))$  nach t. Setze das Resultat in die Differentialgleichung ein und drücke alle t durch  $\tau$  aus. Das Ergebnis ist die gewünschte Differentialgleichung für  $\vec{u}$ . In der Regel ist sie noch nicht in expliziter Form, manchmal sogar nicht explizit. Aber: Ist die neue Gleichung explizit und löst  $\vec{u}$  diese Gleichung, so löst das zugehörige  $\vec{y}$  die Ausgangsgleichung.

Praktisch geht man meist so vor. daß man a) realisiert. Beachten sie die Reihenfolge: von t nach  $\tau$ . Dann führt man b) und c) vielfach in einem Schritt aus. Kurz, man schreibt die Gleichungen  $\tau = f(t)$  und  $\vec{y}(t) = \vec{g}(\tau, \vec{u}(\tau))$  fallspezifisch aus. Anschließend differenziert man, das ist d). In die alte Differentialgleichung einsetzen und verbliebenes t eliminieren. Das ergibt die neue Gleichung.

(2.1.5) Hat man eine Differentialgleichung höherer Ordnung und will man den Reduktionstrick vermeiden, so sind in d) entsprechend die benötigten höheren Ableitungen zu bestimmen.

(2.1.6) Stellen wir die Zusammenhänge einmal im Systemdiagramm dar. Wir haben es jetzt natürlich mit zwei deterministischen Systemen zu tun.



Man startet mit der Ausgangsgleichung (1), leitet gemäß Schema die neue Differentialgleichung her (2), versucht diese zu lösen und drückt die Lösungen wieder im alten System aus (4). Alle horizontalen Schritte sind durch das Substitutionsschema festgelegt. Der jeweilige Erfolg hängt davon ab, ob es gelingt, von (2) nach (3) zu gelangen. Das Problem ist, eine Substitution zu finden, die das erlaubt.

(2.1.7) **Beispiel:** Die Differentialgleichung sei  $t^2\ddot{y}(t) - 2t\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$ .

Inspektion zeigt: **Linear, aber nicht autonom.** Und für  $t=0$  nicht explizit.  $N=2$ . Wir wollen ohne Reduktionstrick arbeiten und die Substitution  $t=e^\tau$  versuchen. Gehen wir die Punkte des Kochrezeptes durch.  $\tau = f(t) = \ln(t)$  für  $t>0$ . Die Beobachtungsgröße transformieren wir nicht, also  $y(t)=u(\tau) = u(\ln(t))$ . Das ist zweimal zu differenzieren:  $\dot{y}(t) = u'(\tau)\frac{1}{t}$ . Und  $\ddot{y}(t) = u''(\tau)\frac{1}{t^2} - u'(\tau)\frac{1}{t^2}$ . Beachten sie, dass man  $t^2\ddot{y}(t)$  und  $t\dot{y}(t)$  braucht. Einsetzen gibt

$$u''(\tau) - 3u'(\tau) + 2u(\tau) = 0.$$

Das ist die vertraute Gleichung eines Oszillators mit reellen Eigenwerten!  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 1$ . Also ist  $u(\tau)=\alpha e^{2\tau} + \beta e^\tau$  die allgemeine Lösung! Rückeinsetzen gibt

$$y(t) = u(\ln(t)) = \alpha t^2 + \beta t.$$

**Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist der zweidimensionale Vektorraum aller Polynome  $t \mapsto \alpha t^2 + \beta t$ .**

Das verifiziert man sofort bzw. hätte man auch raten können. Beachten Sie: Alle Lösungen gehen durch die Gerade  $y=0, t=0$  im erweiterten Phasenraum der  $(t-y-v)$ -Punkte. Ein Anfangswert mit  $y(0) \neq 0$  ist **nicht** zu erfüllen. Die Partitionsstruktur ist daher für  $t=0$  nicht erfüllt, aber dort war die Gleichung ja auch nicht explizit!

- Lösen Sie die Differentialgleichung  $y'(t) = (y(t) - t)^2$  aus (1.4.15) mit Hilfe der Substitution  $y(t)=t+u(t)$ . Das Feld legt das nahe.

## 8.2.1a Substitutionen, die zwischen physikalischen und mathematischen Variablen vermitteln

(2.1.8) Das erste Beispiel behandelte eine fallspezifische Substitution. Wie aber bereits gesagt, gibt es einfache Substitutionen, die für alle Differentialgleichungen nützlich sind, weil sie überzählige Parameter eliminieren indem sie dimensionslose Parameter einführen. Damit werden Differentialgleichungen gleichen Typs zusammengefaßt und Normalformen von Gleichungen eingeführt. Die nächsten beiden Beispiele erläutern das.

(2.1.9) Beispiel: Wir skalieren die Kontrollvariable um, setzen also  $\tau=f(t)=\omega t$ . Das entspricht zahlreichen Anwendungssituationen, in denen die Kontrollvariable eine Maßeinheit besitzt. Dann wird die einheitenbehaftete Größe  $t$  nicht als Argument mathematischer Funktionen auftreten. Stattdessen  $\tau=\omega t$ , wobei  $\omega$  eine Konstante mit zu  $t$  reziproker Einheit ist.

Die Funktionen der mathematischen Texte haben in der Regel einheitenfreie unabhängige Variable. Das Schema (2.1.4) gibt

$$\bar{y}(t) = \bar{u}(\tau) = \bar{u}(\omega t). \quad \text{Also } \dot{\bar{y}}(t) = \omega \bar{u}'(\tau) \quad \ddot{\bar{y}}(t) = \omega^2 \bar{u}''(\tau) \quad \text{usw.}$$

Diese Formeln kann man sich gut in der differentiellen Form  $d\tau = d(\omega t) = \omega dt$  merken. Durch geeignete Wahl des Wertes von  $\omega$  kann man jetzt auch den konstante Faktor vor einer Ableitung normieren.

□  $d^2(\omega t) = ? \quad \frac{d}{d(\omega t)} = ?$

(2.1.10) Beispiel:  $\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$  ergibt eine Schar von Differentialgleichungen mit zwei äußeren Parametern.  $x(t)=u(\omega t)$  liefert die neue Gleichung  $\omega^2\ddot{u}(\tau) + 2\rho\omega\dot{u}(\tau) + Ku(\tau) = 0$ . Dividiert man durch  $\omega^2$  und wählt man  $\omega = \sqrt{|K|}$ , so erhält man eine Schar mit einem kontinuierlichen Parameter

$$\ddot{u}(\tau) + 2\alpha\dot{u}(\tau) + \varepsilon u(\tau) = 0 \quad \text{wo } \varepsilon = \pm 1 = \text{Vorzeichen von } K \text{ oder } \varepsilon = 0.$$

Man erhält eine beträchtliche Reduktion an zu diskutierenden Fällen. In der Det-Spur-Ebene sind nur noch drei Geraden anstatt der gesamten Ebene zu behandeln.

**Merke:** Bei einheitenbehafteten Variablen, aber auch sonst, ist es sinnvoll mit der Substitution  $\bar{y}(t) = \alpha\bar{u}(\tau) = \alpha\bar{u}(\omega t)$  herumzuspielen!

Dabei entstehen häufig nützliche Vereinfachungen, wenn man die Werte von  $\alpha$  und  $\omega$  geeignet wählt.

(2.1.11) Beispiel: Die in Kap.7.0 hergeleitete, weder lineare noch autonome Differentialgleichung eines getriebenen Pendels lautete

$$\ddot{\theta}(t) + a \sin(\theta(t) - \omega t) + b \cos(\theta(t)) \quad \text{mit} \quad a = \frac{R\omega^2}{L} \quad b = \frac{g}{L}.$$

Es sieht so aus, als müsse man die Abhängigkeit von 3 Parametern ( $a, b, \omega$ ) diskutieren. Führt man über  $\theta(t) = x(\tau) = x(\omega t)$  eine einheitenfreie Zeitgröße ein, so folgt für die neue Differentialgleichung:

$$\ddot{x}(\tau) + P \sin(x(\tau) - \tau) + Q \cos(x(\tau)) = 0 \quad \text{mit} \quad P = \frac{R}{L} \quad \text{und} \quad Q = \frac{g}{\omega^2 L}.$$

Alle Größen  $x, \tau, P$  und  $Q$  sind einheitenfrei. Man hat nur noch die Abhängigkeit von den zwei Parametern  $P$  und  $Q$  zu diskutieren.

□ Überlegen Sie sich eine geometrisch-physikalische Bedeutung von  $P$  und  $Q$ .

(2.1.12) **Beispiel:**  $\boxed{y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.}$

Die Gleichung ist linear, homogen, aber nicht autonom.  $p$  und  $q$  seien irgendwelche vorgegebene glatte Funktionen. Vielfach kann man die Form einer gegebenen Differentialgleichung gezielt durch eine Substitution abändern. Das kann recht nützlich sein, weil man einerseits allgemeine Aussagen nur für bestimmte Formen beweisen muß und man andererseits besser Vergleiche ziehen kann. Unsere Gleichung sieht aus, wie

eine nicht autonome Form des Oszillators. Wir wissen, dass ein Oszillator ohne Reibung vielfach einfacher zu behandeln ist als mit. Können wir durch eine Substitution den "Reibungsterm" zum Verschwinden bringen?

(2.1.13) Dazu verwenden wir die Substitution  $y(x)=\mu(x)u(x)$ . D.h.  $x=\tau$ , so dass Schritt a) entfällt. In Schritt d) benötigen wir die Ableitungen, die wir bilanzierbar notieren:

$$\begin{array}{l|l} \text{q} \cdot | & y(x) = \mu u \\ \text{p} \cdot | & y'(x) = \mu' u + \mu u' \\ \text{1} \cdot | & y''(x) = \mu'' u + 2\mu' u' + \mu u'' \end{array}$$

Das ergibt die folgende neue Gleichung:

$$\mu(x)u'' + \{p(x)\mu(x) + 2\mu'(x)\}u'(x) + \{q(x)\mu(x) + p(x)\mu'(x) + \mu''(x)\}u(x) = 0.$$

Das sieht zunächst komplizierter aus. Aber wir müssen daran denken, dass der Faktor  $\mu$  bisher noch beliebig ist. Wir können ihn so wählen, dass er eine bestimmte Bedingung erfüllt. Und da bietet sich an, den Faktor vor  $u'(x)$  zu Null zu machen. Das gibt eine einfache separierbare Differentialgleichung für  $\mu$ , nämlich

$2\mu'(x) + p(x)\mu(x) = 0$ . Wählt man ein  $\mu \neq 0$ , das diese Gleichung erfüllt, so erhält man ein Differentialgleichung von viel einfacherer Form als die Ausgangsgleichung, nämlich

$$u''(x) + A(x)u(x) = 0.$$

Der "Reibungs"-Term mit der ersten Ableitung ist verschwunden. Um zu dieser Form zu gelangen, mußte allerdings einmal durch  $\mu(x)$  dividiert werden. Man überzeugt sich sofort, dass keine Nullstellen vorkommen.

(2.1.14) Auch die früher besprochene Methode *Variation der Konstanten* ist ein Beispiel für eine Substitution dieser Art, wie  $\vec{y}(t) = e^{tM} \cdot \vec{u}(t)$  zeigt. Ebenso haben wir in Kapitel 7 mit der Substitution  $u(t)=e^{-\rho t}x(t)$  den Oszillator mit Reibung auf den ohne zurückgeführt.

## 8.2.1b Die Besselsche Differentialgleichung

(2.1.17) Die Besselsche Differentialgleichung haben wir bereits in Kap.7.2.0 als Beispiel einer Modifikation der Oszillatorgleichung angeführt. Diesen Sachverhalt wollen wir aufgreifen und mit Hilfe der Substitutionsmethode genauer analysieren. Die in 8.1.3 zu besprechende Separationsmethode führt viele für die Physik wichtige partielle Differentialgleichungen auf Besselsche Differentialgleichungen zurück, was die enorme Bedeutung der Besselfunktionen verständlich macht.

(2.1.18) Die Differentialgleichung selbst ist bei  $t=0$  nicht explizit. Sie ist nicht autonom, aber linear. Man kann sie in den folgenden beiden Formen vorgeben, von denen man sich eine gut merken sollte:

Die Besselsche Differentialgleichung	$\nu \in \mathbb{R}$ äußerer Parameter
$t^2 \ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) + (t^2 - \nu^2)x(t) = 0$	$\ddot{x}(t) + \frac{1}{t}\dot{x}(t) + (1 - \frac{\nu^2}{t^2})x(t) = 0$

Die Phasenraumdimension ist 2. Wegen der Linearität benötigt man jeweils zwei unabhängige Lösungen. In der Nähe von  $t=0$  erwarten wir vom Vergleich mit dem Oszillator keinen Nutzen. Für große  $t$  dagegen erwarten wir Ähnlichkeit mit einem ungedämpften Oszillator mit Kreisfrequenz  $\omega_0=1$ . Aber was bewirkt der Reibungsterm, der offenbar mit  $t$  immer kleiner wird?

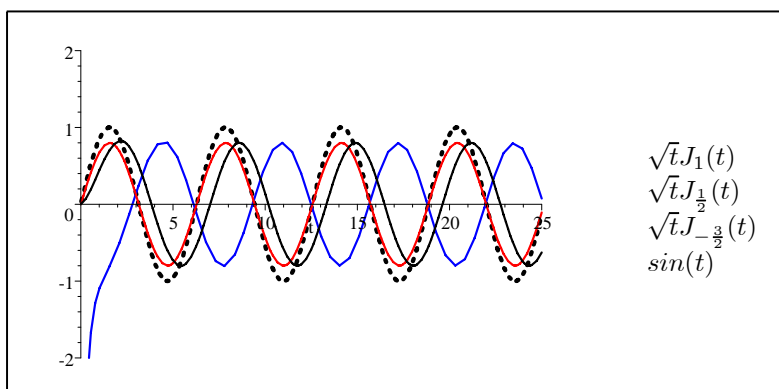
Naiv ergibt sich ein konstanter Faktor  $\exp(\frac{-t}{2t})$ , d.h. keinerlei Dämpfung, jedenfalls keine exponentielle! Andererseits nimmt die Frequenz leicht zu, also  $T$  ab, was doch eine Amplitudenverkleinerung bewirken könnte.

(2.1.19) Wir vermuten zumindest, dass die Amplitude deutlich weniger als exponentiell abnimmt. Wir gehen das Problem mit Hilfe der in (2.1.15) besprochenen Substitutionsmethode an, die den Reibungsterm ja vollständig beseitigt.

Die dort hergeleitete Differentialgleichung  $2\mu'(t) = -p(t)\mu(t)$  für den Multiplikator  $\mu$  hat für  $p(t)=\frac{1}{t}$  die Lösung  $\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ . D.h. die Substitution ist  $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t)$ . Und für die neue Funktion  $u$  ergibt sich die Differentialgleichung

$$u''(t) + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}\right)u(t) = 0$$

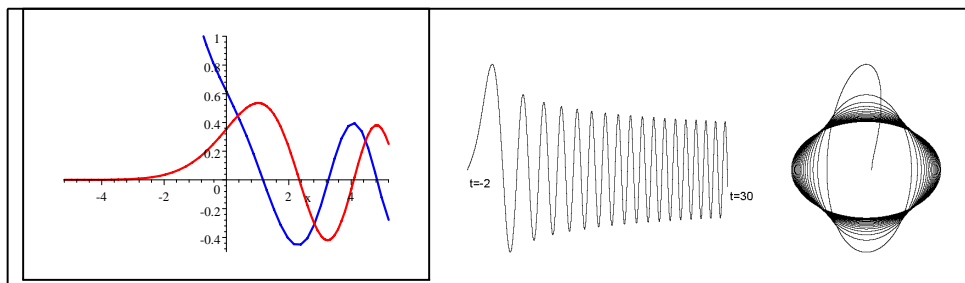
Somit erwarten wir für ausreichend große positive  $t$ , dass  $u$  sich wie  $a \sin(1 \cdot t + \varphi)$  verhält! Die Amplitude ist unabhängig von  $\nu$ . Anders wird es mit der Phasenverschiebung  $\varphi$  sein. Und das ist tatsächlich der Fall! In der nachfolgenden Figur sind drei Besselfunktionen (je eine für  $\nu = 1, \frac{1}{2}$  und  $-\frac{3}{2}$ ) mit  $\sqrt{t}$  multipliziert aufgetragen.



- Überzeugen Sie sich mit Hilfe eines Computeralgebraprogrammes für weitere Beispiele von diesem Sachverhalt, indem Sie  $\sqrt{t} \times Bessel(t)$  zeichnen lassen. Beachten Sie, für wie kleine  $t$  das bereits zu keiner Abweichung auf dem Bildschirm führt. Allerdings müssen Sie darauf achten, Besselfunktionen vom oszillatorischem Typ zu wählen.
- Sei  $t \mapsto x(t)$  Lösung der Besselschen Differentialgleichung. Ist dann auch  $u$  eine Lösung mit  $x(t)=u(-t)$ ? Welche Konsequenzen hat das? Nehmen Sie etwa an, Sie hätten eine Lösung für  $t > 0$ .

(2.1.21) Die **Airysche Differentialgleichung**  $y''(x) + \varepsilon xy(x) = 0 \quad \varepsilon = \pm 1$

Inspektion zeigt: Die Gleichung ist linear, explizit, aber nicht autonom. Dagegen erscheint sie von besonders einfacher Gestalt. Für kleinere  $x$ -Bereiche, die vom Ursprung weiter entfernt sind, können wir mit der Oszillatorgleichung vergleichen. Auf der Halbgeraden  $\varepsilon x > 0$  erwarten wir oszillatorisches Verhalten mit Schwingungsdauer  $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{x}}$ . Auf der entgegengesetzten Halbgeraden entsprechendes exponentielles Verhalten. Obwohl die Gleichung recht einfach aussieht, kommen wir mit den bisherigen Methoden an ihre Lösung nicht heran. Der Einschub zeigt das Lösungsverhalten für  $\varepsilon=1$ , das den soeben entwickelten Erwartungen durchaus entspricht. Die beiden im linken Bild dargestellten Funktionen bilden eine Basis des Lösungsraumes.



Rechts ist eine andere Konfigurationsraumkurve und daneben die zugehörige Phasenraumtrajektorie gezeichnet. Links vom Ursprung ( $t=-2$ ) ist noch starkes Wachstum erkennbar (Fall  $\varepsilon=-1$ !). Rechts hat man gedämpfte Oszillationen. Zwei Schwingungen liegen beispielsweise zwischen 16.9 und 13.7, also  $T \approx 1.6$ . Unsere Schätzung gibt:  $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{15}} \approx 1.62$ . Die Phasenraumdarstellung zeigt: Infolge der Verminderung der Schwingungsdauer mit zunehmendem  $x$  wächst die maximale Geschwindigkeit. Die Amplitudenverminderung kommt dagegen nicht an.

(2.122) Wir geben jetzt eine Substitution, die die Gleichung in eine Besselsche Differentialgleichung umwandelt. Dazu skalieren wir beide Achsen nicht nur linear wie bisher, sondern mit einer allgemeinen Potenz. Wir setzen:

$$y(x) = x^\alpha z(Ax^\beta) \quad \alpha, \beta, A \text{ geeignet.} \quad t = Ax^\beta \quad x = \left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad t > 0.$$

Zunächst benötigen wir die Differentialgleichung für die neue Funktion  $t \mapsto z(t)$ . Zweifaches Ableiten gibt:

$$y''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}z(t) + A\beta(2\alpha + \beta - 1)x^{\beta+\alpha-2}z'(t) + A^2\beta^2x^{2\beta+\alpha-2}z''(t)$$

Damit wird die alte Differentialgleichung zu

$$(A\beta)^2 x^{2\beta} z''(t) + A\beta(2\alpha + \beta - 1)x^\beta z'(t) + [\alpha(\alpha - 1) + \varepsilon x^3] z(t) = 0$$

Ein gemeinsamer Faktor  $x^{\alpha-2}$  ist herausdividiert. Unser Ziel ist die Besselsche Differentialgleichung, die wie folgt aussieht:  $t^2 z''(t) + tz'(t) + (t^2 - \nu^2)z(t) = 0$ . Damit im Faktor [...] das benötigte  $t^2$  entsteht, muss  $x^3 \sim t^2$  gelten. Also  $\beta = \frac{3}{2}$ .

Alle  $x$  in der Gleichung müssen durch  $t$  ersetzt werden:  $x = \left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{2}{3}}$  und  $x^\beta = \frac{t}{A}$ . Das ergibt

$$(A\beta)^2 \left(\frac{t}{A}\right)^2 z''(t) + A\beta(2\alpha + \frac{1}{2})\frac{t}{A}z'(t) + \left[\alpha(\alpha - 1) + \varepsilon \left(\frac{t}{A}\right)^2\right] z(t) = 0.$$

Wir dividieren durch  $\beta^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ . Dann hat der erster Term bereits die gewünschte Form:

$$t^2 z''(t) + \frac{1}{\beta}(2\alpha + \frac{1}{2})tz'(t) + \left[\frac{4}{9}\alpha(\alpha - 1) + \varepsilon \frac{t^2}{(A\beta)^2}\right] z(t) = 0$$

Für  $\varepsilon = 1$  ist  $A = \frac{1}{\beta} = \frac{2}{3}$  und für  $\varepsilon = -1$  ist  $A = \frac{2i}{3}$  zu wählen. Weiter muß  $\frac{1}{\beta}(2\alpha + \frac{1}{2}) = 1$  gelten daher  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Und das gibt für den letzten Term  $\frac{4}{9}\alpha(\alpha - 1) = -\frac{1}{9}$ . Also  $\nu = \frac{1}{3}$  für den Parameter der Besselfunktion.

Sei jetzt  $Z_{\frac{1}{3}}$  eine beliebige Lösung der Besselschen Differentialgleichung mit  $\nu = \frac{1}{3}$ . Dann ist (für  $\varepsilon = 1$ )

$$y(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$$

Lösung unserer Ausgangsgleichung. Damit haben wir die Ausgangsgleichung auf die Besselsche Differentialgleichung zurückgeführt. Hat man insbesondere ein Basis für die Besselsche Gleichung, dann hat man eine ebensolche für unsere Gleichung. Ist  $\varepsilon = -1$ , so arbeitet man mit imaginärem Argument von  $Z_{\frac{1}{3}}$ , was zulässig ist und dem Übergang von  $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  zu  $\cos(ix) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  entspricht.

- Was bringt uns die Substitution  $x(t) = u(-t)$  im Fall der Airyschen Gleichung?
- Wir wissen, dass  $\sqrt{x} \cdot Bessel$  für große  $x$  eine konstante Amplitude hat. Wieso scheint dann nach dem Bild die Amplitude von  $y$  immer kleiner zu werden? Was läßt sich darüber genauer sagen?

(2.1.23) Was haben wir gewonnen? Die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung dürfen wir als bekannt voraussetzen. Ihre Eigenschaften sind genau untersucht und können bei Bedarf der Literatur entnommen werden. Über die von uns angegebene Transformation kann man damit die Lösungseigenschaften der Ausgangsgleichung erschließen.

Später in (2.5.4-6) werden wir sehen, dass sich die Lösungen auch über einen Potenzreihenansatz direkt bestimmen lassen.

(2.1.24) Damit ist es an der Zeit, auf die Frage " .. aber wie findet man denn die **richtige** Substitution?" einzugehen. Nochmals ist zu sagen: Eine eindeutige Antwort auf diese Frage gibt es nicht. Man kann gewisse Regeln aufstellen und Beispiele analysieren, welche Substitutionen erfolgversprechend sein könnten. Man kann sich auch einen Fundus an erfahrungsgemäß nützlichen Substitutionen aneignen und verstehen, was diese leisten. Und als Trost für alle die, die solche, die Kreativität herausfordernden Situationen nicht als schön und interessant ansehen: Die meisten Substitutionen, denen man während der Ausbildung begegnet, werden vorgegeben, so dass es nur darauf ankommt, unser Kochrezept (2.1.4) korrekt anwenden zu können.

## 8.2.1c Differentialgleichungen vom Bernoullityp

(2.1.25) Gegeben sei  $y'(t) + p(t)y(t) = r(t)y^n(t)$  p,r glatt.

$N=1$ . Die linke Seite ist linear, aber nicht autonom. Die rechte Seite ist (für  $n \neq 0, 1$ ) nicht linear, so dass die Lösungsmenge keine Vektorraumstruktur hat. Für  $n > 0$  ist  $y(t) = 0$  eine (triviale) Lösung.

Wir versuchen die Substitution  $y(t) = (z(t))^{\frac{1}{k}}$  k geeignet

Differenzieren gibt:

$$y'(t) = \frac{1}{k} (z(t))^{\frac{1}{k}-1} z'(t).$$

Einsetzen gibt:

$$z'(t) + kp(t)z(t) = kr(t) (z(t))^{\frac{n+k-1}{k}}$$

Bemerkenswert ist zunächst, dass die linke Seite abgesehen von dem Faktor k ihre Form behält. Nun kann man k so wählen, dass die rechte Seite günstig wird. Wir wählen  $k=1-n$ . Dann fällt rechts die z-Abhängigkeit heraus. Aus einer zunächst nichtlinearen Gleichung wird durch die Substitution eine lineare inhomogene Gleichung. Nämlich:

$$z'(t) + (1-n)p(t)z(t) = (1-n)r(t)$$

Die neue Gleichung ist jedenfalls deutlich einfacher zu behandeln als die alte. Die zugeordnete homogene Gleichung ist durch Separation lösbar. Also benötigt man immer nur eine Lösung der inhomogenen. Wir rechnen einen speziellen Fall konkret weiter. Und zwar wählen wir:

$$y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = t^2y^2(t). \quad \text{Das wird zu:} \quad z'(t) - \frac{1}{t}z(t) = -t^2$$

(2.1.26) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung findet man über Separation oder durch Raten:

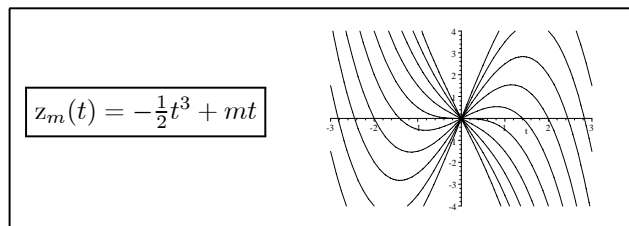
$$z(t) = mt \quad m \in \mathbb{R}.$$

Nun die spezielle Lösung der Gleichung selbst. Die Faustregel versagt. Man muß erst mit t multiplizieren.

Tut man das, findet man sofort die Lösung  $z_S(t) = -\frac{1}{2}t^3$ .

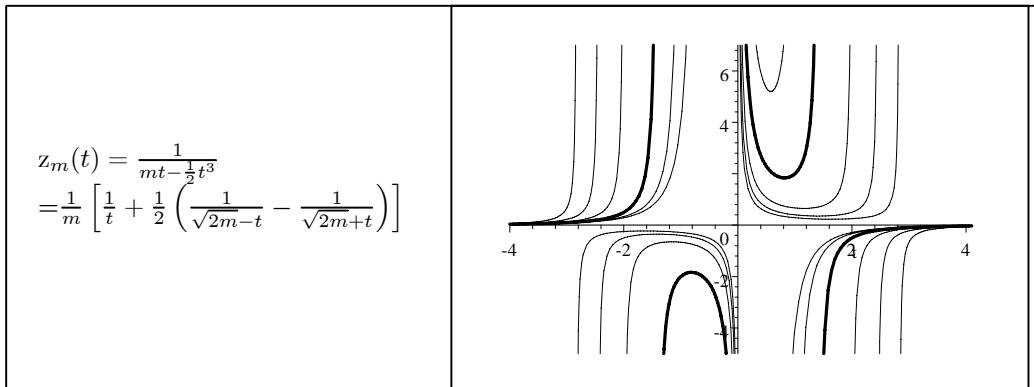
□ Inspizieren Sie, wieso die Faustregel bei naiver Anwendung versagt.

Damit haben wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung gefunden:



Das ist eine einfache Kurvenschar mit leicht fassbarem Verhalten.

Jetzt kehren wir zu der Ausgangsfunktion zurück. Wir haben  $n=2$ , also  $k=1$ . Oder  $y(t) = \frac{1}{z(t)}$ . Das gibt:



Zur Erleichterung der Inspektion der Kurvenschar haben wir die Partialbruchentwicklung mit angegeben.

Beachten Sie, dass bei  $t=0$  ein fester Pol auftritt. Ihm entspricht, dass das Feld der Differentialgleichung für  $t=0$  nicht definiert ist. Die beiden anderen Pole dagegen lassen sich in der Differentialgleichung nicht erkennen. Sie wandern mit dem Lösungssparameter m. Nach unseren Konventionen hört die Lösung an einer solchen Polstelle auf. Die Fortsetzung auf der anderen Seite des Poles ist vereinbarungsgemäß eine weitere Lösung. In diesem Sinne parametrisiert m die Lösungsmenge  $\mathfrak{Z}$  noch nicht vollständig. Man benötigt einen zusätzlichen diskreten vierelementigen Parameter.



Betrachten Sie zum Vergleich  $y'(t)=y^2(t)$ . Diese Gleichung ist leicht über Separation lösbar. Die Differentialgleichung deutet auf keinerlei problematischen t-Wert hin. Die Lösungen  $y_c(t)=\frac{1}{c-t}$  entwickeln jedoch alle einen derartigen wandernden Pol. Die Gleichung beschreibt Wachstumsprozesse, bei denen die Änderung dem Quadrat der Populationszahl proportional ist. D.h. jede kombinatorisch überhaupt mögliche Paarbildung erzeugt mit gewisser Wahrscheinlichkeit Nachwuchs, eine Änderung der Populationszahl. Das Vorhandensein des Poles zeigt, dass derartige Systeme in endlichen Zeiten instabil werden.

## 8.2.2 Symmetrieeigenschaften von Differentialgleichungen

(2.2.1) Es kann vorkommen, dass man bei einer Substitution  $\vec{y} \mapsto \vec{u}$  einer Differentialgleichung für das neue  $\vec{u}$  die alte Gleichung erhält. Entgegen dem ersten Augenschein ist das ein nützliches Resultat!

(2.2.2) Hat man nämlich eine spezielle Lösung der Gleichung - nennen wir sie  $\vec{u}$  -, dann ist die transformierte Kurve  $\vec{y}$  mit  $\vec{y}(t) = g(f(t), \vec{u}(f(t)))$  eine Lösung derselben Gleichung. Und zwar in der Regel eine andere. Hüten Sie sich vor einem Trugschluß des Typs "dieselbe Gleichung - dieselbe Lösung"! D.h man kann aus einer gefundenen speziellen Lösung weitere konstruieren. Vom linearen Fall her ist uns das bekannt und erscheint vielleicht etwas banal. Im nichtlinearen Fall ist ein solches Resultat jedoch vielfach ausgesprochen nichttrivial und nützlich, weil man aus einer speziellen, vielleicht geratenen, Lösung weitere erhält.

(2.2.3) **Beispiel:** Die lineare Differentialgleichung  $\vec{y}'(t) = M \cdot \vec{y}(t)$  geht unter der Substitution  $\vec{y} = \alpha \vec{u}$  über in  $\alpha \vec{u}'(t) = \alpha M \cdot \vec{u}(t)$ . Für  $\alpha \neq 0$  ist das die alte Gleichung. Und damit ist  $\vec{y}(t) = \alpha \vec{u}(t)$  erneut eine Lösung der Gleichung, wie wir aus der linearen Algebra wissen.

**Beispiel:** Auch unser Resultat über autonome Differentialgleichungen können wir unter dem Symmetriepunkt interpretieren. Wir setzen  $\vec{y}(t)=\vec{u}(t-s)$ . Aus  $\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t))$  wird  $\vec{u}'(t) = \vec{f}(\vec{u}(t))$ . Also darf man die Lösungen parallel zur t-Achse verschieben!

(2.2.4) **Beispiel:** Wir nehmen  $y''(x)+\alpha y(x) = 0$  und die Substitution  $y(x)=u(-x)$  für u ergibt sich dieselbe Differentialgleichung. Beachten Sie: Bei einem zusätzlichen Term  $\beta y'(x)$  wäre das nicht der Fall; die innere Ableitung produziert einen Vorzeichenwechsel dieses Termes!

Nun darf man nicht etwa schließen, dass die Lösungen gerade Funktionen sein müssen. Sie können es sein, müssen es aber nicht! Ist  $\alpha > 0$ , so ist  $\cos(x\sqrt{\alpha})$  eine Lösung. Und die ist gerade. Aber auch die ungerade Funktion  $\sin(x\sqrt{\alpha})$  ist Lösung. Da die Differentialgleichung linear ist, kennen wir die entstehende Lösung -sin bereits. Ist  $\alpha < 0$ , so ist  $y(x)=e^{x\sqrt{\alpha}}$  eine Lösung. Also ist  $u(x)=\exp(-x\sqrt{\alpha})$  eine weitere. Und in diesem Fall ist das gerade die zweite unabhängige Lösung, die uns durch die Eigenwerttheorie geliefert wird.

Eine Substitution, unter der sich die Differentialgleichung nicht ändert, nennen wir eine *Symmetrietransformation der Differentialgleichung*. Auch hier haben wir kein allgemeines Schema, um etwa alle Symmetrietransformationen einer Differentialgleichung zu finden.

□ Zeigen Sie: Die Menge aller Symmetrietransformationen einer Differentialgleichung bildet eine Gruppe.

(2.2.5) Jetzt ein weniger triviales Beispiel. Wir betrachten erneut die Differentialgleichung  $y'(x) = x(1 - y^2(x))$ , die uns als Musterbeispiel gewöhnlicher deterministischer Systeme diene. Können wir hierfür Symmetrietransformationen finden?  $x=-t$  ist eine, wie man sofort sieht. In diesem Fall sind alle Lösungen gerade, wie die allgemeine Lösungsformel zeigt.

Inspektion der Graphen der Lösungen zeigt, dass alle Lösungen +1 oder -1 als Asymptote für  $x \rightarrow \pm\infty$  haben. Diesen Sachverhalt kann man übrigens auch direkt aus der Differentialgleichung ablesen. Wieso? Die beiden Geraden müssen also bei der Transformation erhalten bleiben. Man weiß, dass die gebrochen rationalen Funktionen  $y = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$  zwei Punkte festlassen. Wann sind das gerade +1 und -1? Man findet:

$$y = \frac{u - a}{-au + 1} \quad \text{oder mit Variabler} \quad \boxed{y(x) = \frac{u(x) - a}{-au(x) + 1} \quad a \in \mathbb{R}}$$

Das benutzen wir als Substitution! Unser Schema ergibt (jeweils mit etwas Zwischenrechnung):

$$y'(x) = \dots = u'(x) \frac{1 - a^2}{(-au^2(x) - 1)^2} \quad 1 - y^2(x) = \dots = (1 - u^2(x)) \frac{1 - a^2}{(-au^2(x) - 1)^2}.$$

D.h. für  $a^2 - 1 \neq 0$  geht die Differentialgleichung in sich über, es liegt eine Symmetrietransformation vor!

Was tut diese Transformation mit den Lösungen? Wir starten mit der Lösung  $y(t) = \frac{e^{t^2} - 1}{e^{t^2} + 1}$  aus unserer Schar und lösen  $y(t) = \frac{u(t) - a}{-au(t) + 1}$  nach u auf. Das gibt nach Zwischenrechnungen:

$$u(t) = \frac{ce^{t^2} - 1}{ce^{t^2} + 1} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1 + a}{1 - a}.$$

Nimmt man die beiden Grenzfälle  $a=-1$  und  $a=1$  noch mit hinzu, so erhält man alle Lösungen aus der einen vorgegebenen.

- Gegeben eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit zweidimensionalem Lösungsraum für die mit  $x(t)$  auch  $u(t)=x(-t)$  Lösung ist. Zeigen Sie, dass es dann immer eine gerade und eine ungerade Lösung gibt.

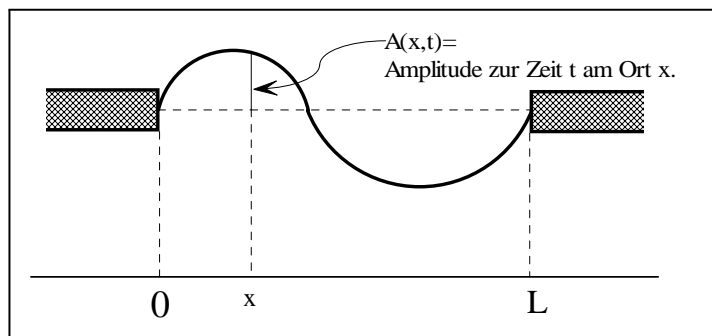
## 8.2.3 Umwandlung einer partiellen Differentialgleichung in eine gewöhnliche Separation bei partiellen Differentialgleichungen.

(2.3.1) Liegt ein deterministisches System vor, bei dem die Kontrollgröße mehr als einen Freiheitsgrad besitzt, so ist eine partielle Differentialgleichung zu erwarten, keine gewöhnliche. Solch mehrdimensionale Kontrollgrößen sind natürlich die Regel. Einige Beispiele: Elektrische Ladungen erzeugen ein statisches elektrisches Feld. Dann ist an jedem Raumpunkt (=Kontrollgröße) die zugehörige Feldstärke (=Beobachtungsgröße) determiniert Oder wir beobachten Wellen auf einer Wasseroberfläche. Dann bilden der zweidimensionale Ort und die Zeit die Kontrollgröße. Die Wellenamplitude ist die zugehörige Beobachtungsgröße.

(2.3.2) In derartigen Fällen erhält man über physikalische Theorien typischerweise zunächst eine partielle Differentialgleichung als Bedingung an die zugehörige Feldfunktion. Häufig kann man jedoch Methoden entwickeln, die es erlauben, das Problem auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen. Eine sehr wichtige Methode, die das leistet, läuft erneut unter dem Stichwort "Separation".

(2.3.3) Wir wollen diesen Sachverhalt - Rückführung einer partiellen Differentialgleichung auf eine gewöhnliche - an einem einfachen, aber wichtigen Beispiel illustrieren. Dabei werden wir feststellen, dass wir nicht auf ein Anfangswertproblem stoßen, so wie es uns bisher immer betrachtet haben, sondern auf einen anderen Problemtyp, ein *Randwertproblem*. Solche Probleme sind typischerweise schwieriger zu behandeln als die Anfangswertprobleme. Das Beispiel begründet so auch die mathematische Bedeutung dieses Problemtyps.

(2.3.5) Wir betrachten (als physikalisches System) eine schwingende Saite. Der Einfachheit halber möge sie nur in einer Ebene schwingen. Die Skizze zeigt die Geometrie zu einem festen Zeitpunkt, zeigt eine möglich Auslenkung als Momentaufnahme.



Die x-Achse parametrisiert die Lage der einzelnen Saitenpunkte für x-Werte zwischen 0 und L. Die Auslenkung erfolgt in Richtung der A-Achse. Daher gibt  $A(x,t)$  den Wert der Auslenkung des zu x gehörigen Saitenpunktes zur Zeit t. Man benötigt die Abbildung  $A:([0,L] \times \mathbb{R}, (x,t) \mapsto A(x,t), \mathbb{R})$  vom Typ eines Skalarfeldes. A ist dabei die Beobachtungsgröße.  $W=\mathbb{R}^1$ . Sie gibt an, wie stark die Saite zu jedem Zeitpunkt ausgelenkt ist. Wir können zwei Restriktionen bilden:

(2.3.4) Einmal fixieren wir t. Dann gibt  $([0,L], x \mapsto A(x,t), \mathbb{R})$  die Form der Auslenkung zur Zeit t. Der Graph entspricht einer Momentaufnahme der Saitenauslenkung zu diesem Zeitpunkt. Oder wir fixieren  $x \in [0,L]$ . Dann gibt  $(\mathbb{R}, t \mapsto A(x,t), \mathbb{R})$  das zeitliche Auslenkungsverhalten des betrachteten Saitenpunktes. Wir erwarten, dass das System deterministisch ist, d.h., dass zu einem gegebenen Systemzustand die Beobachtungsgröße A durch x und t bestimmt wird.

(2.3.5) Unser Ziel ist es, einerseits A zu bestimmen und zum anderen, den zugehörigen Zustandsraum  $\mathfrak{Z}$  - den Raum der physikalisch möglichen Zustände - festzulegen. Oder auch: Auf welche Weisen kann die Saite (in einer Ebene) überhaupt schwingen? Zu jedem Zustand gehört natürlich eine eigene Abbildung A, so wie zu jedem Bewegungszustand eine Flugparabel gehört.

(2.3.6) Die physikalische Analyse des Problems zeigt, dass zunächst die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sein müssen:

- 1) Geometrische Randbedingungen:  $A(0,t)=A(L,t)=0$  für alle  $t$ .  
 2)  $A$  muss die *Wellengleichung* erfüllen:  $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x,t)$

Die erste Bedingung folgt unmittelbar aus der Geometrie unseres Problems: Die Saite ist an beiden Endpunkten fixiert. Die Wellengleichung dagegen ist letztlich die Newtonsche Bewegungsgleichung für die entlang der Saite kontinuierlich verteilte Masse. Auf die Herleitung dieser Gleichung gehen wir hier nicht ein. Natürlich sind noch eine Reihe von Zusatzannahmen erforderlich: Reibungseffekte werden vernachlässigt, man betrachtet nur kleine Auslenkungen und diese sollen in einer festen Ebene liegen. Die Herleitung findet sich in den üblichen Physiklehrbüchern. Das Ergebnis ist jedenfalls die angegebene zu erfüllende partielle Differentialgleichung für  $A$ . Die Systemkonstante  $c$ , die in der Gleichung auftritt, erweist sich als Schallgeschwindigkeit in der Saite. Sie hängt damit vom Material und der Dicke der Saite ab, von der Saitenspannung und ähnlichen Systemeigenschaften. Kurz:  $c$  ist ein äußerer Parameter des Systems.

□ Testen Sie, dass  $c$  die Einheit einer Geschwindigkeit hat. Wie wird die Gleichung aussehen, wenn man kleine räumliche Auslenkungen zulässt?

(2.3.7) Die Wellengleichung ist offensichtlich **linear** und homogen (in  $A$ ), so dass die Lösungsmenge erneut einen Vektorraum bildet. Allerdings erweist sich dessen Dimension als unendlich. Das ist ein erster, enormer Unterschied zum Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(2.3.8) Können wir **Lösungen der Wellengleichung** finden? Ja, sogar problemlos sehr viele. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  irgendeine  $C^1$ -Funktion. Dann folgt mit Hilfe der Kettenregel, dass  $A(x,t)=f(x-\varepsilon ct)$  Lösung der Wellengleichung ist. Wie üblich steht  $\varepsilon$  für  $\varepsilon = \pm 1$ . (Damit haben wir bereits einen unendlichdimensionalen Lösungsraum!)

(2.3.9) Wie veranschaulicht man sich derartige Feldabbildungen? Wir können und sollten dazu den Graphenstandpunkt wählen. Dann beschreibt  $(x,t) \mapsto (x,t,A(x,t))$  eine Fläche im Raum. Der Graph gibt das gesamte Raum-Zeit-Verhalten der Saite wieder. Fixiert man  $t$ , so erhält man eine Momentaufnahme des Seitenzustandes (zur Zeit  $t$ ). Variiert man dann  $t$ , so entsteht eine filmische Darstellung der Saitenbewegung. Fixiert man  $x$ , so erhält man die zeitliche Auslenkungsfunktion für diese Stelle der Saite.

(2.3.10) Für die in (2.3.8) gefundenen Lösungen ergibt das folgende Interpretation: Die durch den Graphen von  $f$  gegebene Auslenkung bewegt sich für  $\varepsilon = 1$  mit unveränderter Form und der Geschwindigkeit  $c$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse. Für  $\varepsilon = -1$  entsprechend in Richtung der negativen  $x$ -Achse. Der gesamte Graph von  $f$  wird ja einfach um  $\varepsilon ct$  translatiert! Es liegt eine *laufende* Welle vor für eine unendlich ausgedehnte Saite. Die beiden Randbedingungen sind so nie erfüllbar. Ürigens folgt hieraus die Interpretation von  $c$  als zugehörige Schallgeschwindigkeit. Denn (transversale) Schallwellen in der Saite sind derartige laufende Wellen.

(2.3.11) Das Problem ist, dass wir Lösungen suchen, die auch die beiden Randbedingungen erfüllen. Auf diese Forderung können wir nicht verzichten. Die folgende wichtige und tragfähige Idee hilft weiter:

Die **Separationsidee**: Versuche einen Ansatz der folgenden Form:  
 $A(x,t) = f(x) \cdot g(t)$   
 Die Kontrollgrößen werden *multiplikativ getrennt - separiert*.

(2.3.12) Für  $f$  verlangen wir  $f(0)=f(L)=0$ . **Dann ist die Randbedingung 1) automatisch erfüllt!** Fixiert man  $x$ , ist  $t \mapsto g(t)$  proportional zur am Ort  $x$  beobachteten zeitlichen Auslenkung. Wir vermuten für die zeitliche Änderung oszillatorisches Verhalten und machen den Ansatz  $g(t)=\sin(\omega t + \varphi)$ .

(2.3.13) Mit diesem Ansatz gehen wir in die Wellengleichung ein. **Jede partielle Ableitung wirkt jetzt als gewöhnliche Ableitung nur auf den zugehörigen Faktor.**

(2.3.14)  $\sin(\omega t + \varphi)$  und damit die Zeitabhängigkeit fällt als multiplikativer Faktor aus der Gleichung heraus, weil zweifache Zeitableitung von  $\sin(\omega t + \varphi)$  diesen Faktor reproduziert.  $\omega$  ist noch beliebig. Es verbleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $f$ . Genauer ist das:

$$g''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} g(x)$$

(2.3.15) Das ist aber eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Oszillatortyp, deren allgemeine Lösung wir hinschreiben können. Zusätzlich sind noch die beiden Randbedingungen  $f(0)=f(L)=0$  zu erfüllen. Die erste gibt  $f(x)=A_0 \sin(\alpha x)$  mit  $\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ .

(2.3.16) Die zweite Bedingung können wir nur für ganz bestimmte Werte von  $\alpha$  erfüllen. Genauer muss  $\alpha L = \pi n$  mit  $n=1,2,3$  gelten. Da  $c$  eine Systemkonstante ist, können wir das nur über die Wahl von  $\omega$  erreichen, der für alle  $x$  gemeinsamen Kreisfrequenz der zeitlichen Bewegung. (Diese Gemeinsamkeit ist eine Folge des Separationsansatzes: Alle Punkte der Saite schwingen mit derselben Frequenz  $\omega$ ). Es folgt  $\omega = \frac{n\pi c}{L}$ . **Nur für diese Frequenzen** ist die zweite Randbedingung  $A(t,L)=0$  erfüllt.

(2.3.17) Aber insgesamt haben wir wirklich Lösungen gefunden, die **alle Forderungen** erfüllen. Fassen wir zusammen wie diese über den Separationsansatz gefundenen Lösungen aussehen und wie die gestellten Bedingungen erfüllt werden:

$A(x,t) = A_0 \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \sin(\omega_n t + \varphi)$ mit $\omega_n = n\omega_0$ und $\omega_0 = \frac{\pi c}{L}$ $n=1,2,3,\dots$ , $A_0$ und $\varphi$ frei, sind Lösungen der gesuchten Art, weil:
1.) $g(t) = \sin(\omega_n t + \varphi)$ die Gleichung $g''(t) = -\omega_n^2 g(t)$ erfüllt, 2.) $f(x) = \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)$ die Gleichung $f''(x) = -\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 f(x)$ erfüllt, 3.) $A = fg$ wegen 1) und 2) die Wellengleichung erfüllt, 4.) die Wahl von $\omega_n$ und $f$ die Randbedingungen sichert.

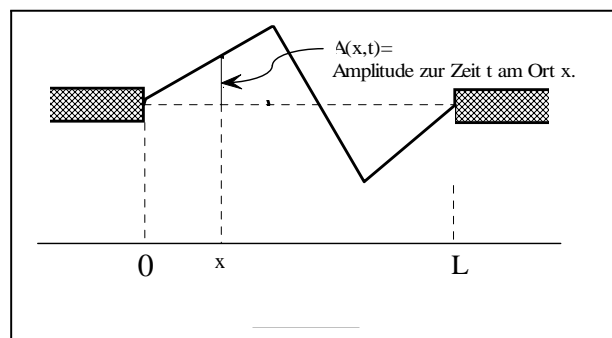
Die Zusammenstellung zeigt: **Der Separationsansatz macht aus der einen partiellen Differentialgleichung für jeden Faktor eine gewöhnliche Differentialgleichung.** Die Kopplung der Kontrollgrößen - hier  $x$  und  $t$  - erfolgt über  $\omega$ . Dieser Parameter tritt in **beiden** Faktoren auf. Damit die beiden Randbedingungen erfüllt sind, ist die Kreisfrequenz  $\omega$  auf ganz bestimmte, diskrete Werte einzuschränken.

(2.3.18) Vergleichen wir einmal eine typische Randwertaufgabe und eine Anfangswertaufgabe für eine Differentialgleichung 2. Ordnung:

- $g$  sei Lösung der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung ( $N=2$ ).
- Bei einer Anfangswertaufgabe ist zusätzlich  $g(a)=x_0$  und  $g'(a)=v_0$  zu erfüllen.
- Bei einer Randwertaufgabe ist zusätzlich  $g(a)=x_0$  und  $g(b)=x_1$  zu erfüllen.

(2.3.19) Physikalisch sind die gefundenen Phänomene durchaus sinnvoll: Die Saite besitzt eine gewisse systembedingte Grundfrequenz  $\omega_0$  sowie zugehörige Oberfrequenzen in Form ganzzahliger Vielfacher von  $\omega_0$ , mit denen sie ebenso schwingen kann. Für  $\omega = n\omega_0$  hat  $\sin(\omega x)$  im Seitenbereich genau  $n+1$  Nullstellen. Überdies legt das Resultat folgende experimentelle Prüfung nahe:  $\omega_0 = \frac{\pi c}{L}$  wird ja durch die Geometrie der Saite und durch die zugehörige Schallgeschwindigkeit der frei verlängerten Saite festgelegt und kann somit auf unabhängige Weise bestimmt werden. Daneben kann man  $\omega_0$  über die Schwingungsfrequenz bestimmen.

(2.3.20) Mathematisch stellt sich die Anschlußfrage: Haben wir schon alle Lösungen, die die Randbedingungen erfüllen? Und diese Frage erhält sofort Unterstützung aus der Physik: In der Eingangsskizze haben wir eine Saitenkonfiguration für einen festen Zeitpunkt gezeichnet. Man stelle sich vor, die Saite werde irgendwie ausgelenkt und dann zu einem festen Zeitpunkt losgelassen. Dann entwickelt sich ihr Zustand autonom weiter. Das sollte einen möglichen Systemzustand, also ein mögliches  $A$  festlegen. Man könnte die Saite etwa an zwei Stellen zupfen und dann loslassen. Wird das durch unsere gefundenen Lösungen gewährleistet?



(2.3.21) Mathematisch argumentieren wir wie üblich: Die Differentialgleichung ist **linear**. Wir bilden (zunächst endliche) Linearkombinationen der Lösungen. Das ergibt erneut Lösungen, die auch beiden Randbedingungen erfüllen.

(2.3.22) Jede solche Linearkombination hat die Form eines trigonometrischen Polynoms und ist somit glatt. Wir haben zwar einen unendlichdimensionalen Raum von Lösungen, aber die gezupften Ecken sind darin sicher noch nicht enthalten. An den Ecken ist die Funktion ja nur stetig, nicht differenzierbar.

(2.3.23) Wir verfügen noch über ein weiteres mathematisches Werkzeug: Wir können zu (absolut konvergenten) unendlichen Summen (Reihen) übergehen. Dann folgt zunächst mit routinemäßigen Grenzwertüberlegungen, dass geeignet gebildete Grenzwerte erneut Lösungen des Ausgangsproblems sind. Und wir wissen: Glattheitseigenschaften müssen bei der Grenzprozedur keineswegs bewahrt bleiben! Es besteht eine Chance, dass unsere Lösungen die gezupfte Saite einschließen.

(2.3.24) Damit können wir auch das Problem der möglichen Systemzustände angehen. Dazu argumentieren wir wie folgt: Die unterschiedlichen Systemzustände erhalten wir durch äußere Eingriffe in das System. Hier, indem wir wie bereits angedeutet, die Saite in eine bestimmte Auslenkungslage bringen und sie dann zu einem bestimmten Zeitpunkt loslassen. Von da ab soll sich das System ungestört autonom fortentwickeln. Motiviert durch die Punktmechanik werden wir auch noch die momentane Auslenkungsgeschwindigkeit der einzelnen Seitenpunkte zum Zeitpunkt  $t_0$  vorgeben. Zusammen sollte das eigentlich den Systemzustand festlegen.

(2.3.25) Also: Ist ein solcher Systemzustand unter unseren Lösungen? Zunächst müssen wir unsere Forderungen an die Feldfunktion  $A$  ergänzen. Dabei wählen wir der Einfachheit halber  $t_0 = 0$ . Also: Zusätzlich zu (2.3.6) fordern wir:

3)	$A(x,0)=F(x)$ für $0 \leq x \leq L$ mit $F(0)=F(L)=0$ . $F$ stetig und stückweise glatt.
4)	$\frac{\partial A}{\partial t}(x,0) = V(x)$ für $0 \leq x \leq L$ mit $V(0)=V(L)=0$ . $V$ stetig und stückweise glatt.

Durch Vorgabe von  $F$  und  $V$  sollten eigentlich die möglichen Systemzustände - also der Zustandsraum  $\mathfrak{Z}$  - festgelegt sein. Können wir diese Bedingungen mit einer von uns konstruierten Lösung erfüllen?

Wir bilden eine unendliche Linearkombination unserer Lösungen:

$$A(x, t) = \sum_n A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) \quad \text{mit } A_n \text{ und } \varphi_n \text{ unbestimmt.}$$

Was fordern unsere Zusatzbedingungen?

$$A(x, 0) = \sum_n A_n \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) = F(x)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}(0, x) = \sum_n A_n \omega_n \cos(\varphi_n) \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) = V(x)$$

(2.3.28) Damit sind wir bei einem definierten mathematischen Problem angekommen: Können wir zu gegebenem  $V$  und  $F$  die beiden Zahlfolgen  $n \mapsto A_n$  und  $n \mapsto \varphi_n$  so bestimmen, dass die beiden gegebenen Gleichungen als Grenzwertbeziehungen gelten? In Kapitel 10 werden wir hierauf unter dem Stichwort *Fourieranalyse* zurückkommen, die Frage positiv beantworten und sogar ein Verfahren zur Bestimmung der beiden Zahlfolgen entwickeln.

□ Wir betrachten die partielle Differentialgleichung  $\Delta V = 0$ , die sog. Laplacegleichung, in Zylinderkoordinaten. Hierfür ergibt sich

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V^Z(r, \varphi, z) = 0.$$

Machen Sie den Separationsansatz  $V^Z(r, \varphi, z) = f(r)e^{im\varphi}e^{ikz}$ . Dabei sollte  $m$  ganzzahlig sein. Wieso?

- Wie sieht die entstehende Differentialgleichung für  $f$  aus?
- Welche Beziehung besteht zur Besselschen Differentialgleichung? Wie erhält man mit Hilfe der Besselfunktionen die Lösungen der vorliegenden Gleichung?
- Informieren Sie sich in einem Physikbuch über die physikalische Bedeutung der Laplacegleichung.

## 8.2.5 Potenzreihenansätze für lineare nicht autonome Differentialgleichungen

(2.5.1) Vielfach ist es günstig, die Lösungen einer Differentialgleichung in Form einer Potenzreihe anzusetzen. Das war der Weg, auf dem wir in Kapitel 7 die linearen autonomen Differentialgleichungen gelöst haben.

Besonders für **lineare nicht autonome** Gleichungen kann ein Potenzreihenansatz nützlich und erfolgreich sein. Ja es ist teilweise sogar möglich, isolierte Punkte mit einzubeziehen, in denen die Gleichung nicht explizit ist! Die Wahl des Aufpunktes wird meist durch die Form der Gleichung nahegelegt. Üblicherweise wird man  $t=0$ , also den Ursprung des Kontrollparameters als Aufpunkt wählen.

(2.5.2) Ein Potenzreihenansatz erfordert immer die erfolgreiche Behandlung von drei Fragen:

1. Die Bestimmung der Koeffizienten der Potenzreihe. Das geschieht in der Regel über Rekursionsformeln, die bei linearen Differentialgleichungen erneut linear sind.
  - (a) Der Start der Rekursion muss gewährleistet sein! Das ergibt manchmal Probleme. U.U. ist der Ansatz zunächst mit Hilfe einer Substitution zu modifizieren.
  - (b) Man muss darauf achten, dass man beim Auflösen der Rekursion nicht für irgendeinen Indexwert durch Null teilt.
2. Die Lösung enthält am Ende gewisse freie Parameter. Stimmt deren Anzahl mit der Dimension des Phasenraumes überein oder gibt es weitere Lösungen, die sich nicht als Potenzreihe darstellen lassen?
3. Sind die entstandenen Reihen konvergent? Genauer: Wie groß ist der Konvergenzradius?

(2.5.3) Natürlich kann es geschehen, dass man für die Koeffizienten unerfüllbare Bedingungen erhält, so dass die eventuellen Lösungen keine Potenzreihendarstellung um den gewählten Aufpunkt besitzen.

Zur Illustration rechnen wir einige Beispiele durch. Das erste Beispiel weist die in la) und lb) sowie 2) angesprochenen Komplikationen nicht auf. Im zweiten Beispiel treten sie auf und wir besprechen einige der entstehenden Probleme. Auf den dritten Punkt gehen wir jeweils kurz ein.

(2.5.4) **Beispiel:**

$$y''(x) = \varepsilon xy(x) \quad \varepsilon = +1, -1$$

Wir haben bereits in (2.1.22) gezeigt, dass diese Gleichung durch eine Substitution auf die Besselsche Differentialgleichung zurückgeführt werden kann. Die Besselsche Differentialgleichung wiederum kann dann analog zum nachfolgenden Beispiel der hypergeometrischen Funktion behandelt werden. Die alternative Lösungsform, die wir jetzt über einen Reihenansatz direkt herleiten werden, ist über die Besselfunktion nicht ohne weiteres zu finden.

(2.5.5) **Jetzt also das gerechnete Beispiel für den Potenzreihenansatz:**

Inspektion der Differentialgleichung zeigt sofort, dass jede Lösung beliebig oft differenzierbar sein muss. Als Aufpunkt wählen wir  $x=0$ . Die Differentialgleichung ist in diesem Punkte explizit. Wir setzen an:

$$y(x) = \sum_k a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad a_k \text{ gesucht.}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} xy(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} &= 0 &+ a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\ y''(x) &= \sum_k k(k-1) a_k x^{k-2} &= 2a_2 &+ 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

Inspizieren Sie die gegebenen Reihendarstellungen genau: Die erste entsteht durch naives Rechnen, ist jedoch für den Koeffizientenvergleich wenig brauchbar. Daher sollte man die ersten Terme ausschreiben und dabei den zu  $x^n$  gehörigen Beitrag identifizieren. Das gibt die dritte Darstellung mit eventuell **neuen Grenzen**. Sie ist für den Koeffizientenvergleich angemessen. Beachten Sie auch, dass wir nicht die Reihe für  $y(x)$  hingeschrieben haben, sondern die für  $xy(x)$ . Das ist die Funktion, die in der Differentialgleichung auftritt.

Jetzt setzen wir in die Differentialgleichung ein

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon a_{n-1} x^n$$

und führen den Koeffizientenvergleich durch. Die ersten Gleichungen sollte man gesondert aufschreiben:

$$2a_2 = 0, \dots, 6a_3 = \varepsilon a_0, \quad 12a_4 = \varepsilon a_1, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = \varepsilon a_{n-1}$$

Nochmals: Achten Sie unbedingt auf die unteren Fälle. In unserem Fall gibt die erste Gleichung  $a_2=0$  als notwendige Bedingung. Die höheren Gleichungen können wir jetzt nach  $a_{n+2}$  auflösen, da  $(n+2)(n+1)$  für kein betrachtetes  $n$  Null wird. Ergebnis:

$$a_{n+2} = \frac{\varepsilon}{(n+2)(n+1)} a_{n-1} \quad n=1,2,3,\dots$$

Die Rekursion lösen wir, indem wir die untersten Terme ausrechnen und das Resultat induktiv verallgemeinern

1)	$a_2 = a_5 = a_8 = \dots = 0$ , da $a_2 = 0$ ist.
2)	$a_0$ und $a_1$ sind frei wählbar. Keine einschränkende Bedingung.
3)	$a_3 = \frac{\varepsilon a_0}{2 \cdot 3}$ , $a_6 = \frac{\varepsilon a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$ , $a_9 = \frac{\varepsilon a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$ ,
4)	$a_4 = \frac{\varepsilon a_1}{3 \cdot 4}$ , $a_7 = \frac{\varepsilon a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$ , $\dots$

In den Nennern fehlen systematisch gewisse Faktoren der zugehörigen Fakultät. Mit diesen erweitern wir. Man sollte sich nicht scheuen, für auftretende Ausdrücke geeignete Bezeichnungen einzuführen. Wir definieren

$$3!!! = 3, \quad 4!!! = 4 \cdot 1, \quad 5!!! = 5 \cdot 2, \quad 6!!! = 6 \cdot 3, \quad 7!!! = 7 \cdot 4 \cdot 1 \quad \text{usw.}$$

$$(-2)!!! = (-1)!!! = 0!!! = 1.$$

(2.5.6) Damit folgt:  $a_{3k} = \varepsilon^k \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!}$  und  $a_{3k+1} = \varepsilon^k \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!}$  Also:

$$y_{a_0 a_1}(t) = a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!} \varepsilon^k t^{3k} \right\} + a_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} \varepsilon^k t^{3k+1} \right\}.$$

$a_0$  und  $a_1$  sind freie Parameter.

Die beiden Potenzreihen sind überall konvergent. Es handelt sich um die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung, wie die Herleitung zeigt. Die Lösungsmenge bildet erwartungsgemäß einen zweidimensionalen Vektorraum.

- Weisen Sie nach, dass die beiden Potenzreihen den Konvergenzradius unendlich haben. Nutzen Sie die Rekursionsformel und ein Vergleichskriterium.
- Behandeln Sie die Differentialgleichung  $y''(x) = \varepsilon x^2 y(x)$  entsprechend. Vergleichen Sie die Resultate. Zeigen Sie, dass es eine (naheliegende) Lösungsbasis aus einer geraden und einer ungeraden Lösung gibt. Was ist einfacher als im behandelten Fall?

(2.5.7) **Beispiel:**

$$\text{Die Differentialgleichung } t\ddot{x}(t) + (a-t)\dot{x}(t) - bx(t) = 0 \text{ der konfluenten hypergeometrischen Funktionen.}$$

**Inspektion** zeigt eine lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten - nicht autonom. Es ist  $N=2$ . Wir erwarten einen zweidimensionalen Vektorraum als Lösungsraum. Bei  $t=0$  ist die Gleichung nicht explizit. Schreibt man sie als Bewegungsgleichung  $\ddot{x}(t) = F(t, x(t))$ , so divergiert die Kraft für  $t \rightarrow 0$ , es sei denn man hätte  $a\dot{x}(0) = bx(0)$ , d.h. eine ganz spezielle Lage im Phasenraum. Ebenso wie bei der Besselschen Differentialgleichung hat der Vorzeichensprung von  $\frac{1}{t}$  beim Nulldurchgang große Auswirkungen.

**Vergleich mit der Oszillatorgleichung:** Division durch  $t \neq 0$  gibt eine Oszillatorgleichung mit zeitabhängigen Konstanten. Genauer mit

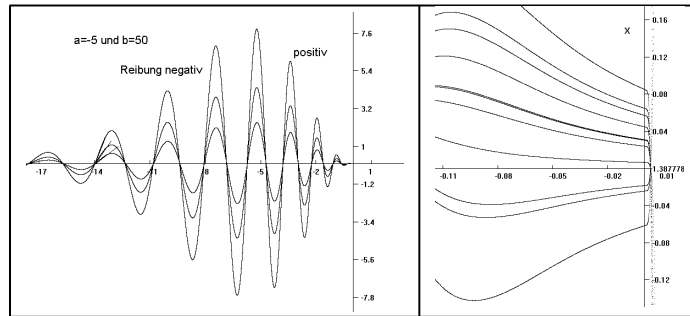
$$\rho(t) = \frac{a-t}{2t} \quad \omega_0^2(t) = -\frac{b}{t}.$$

Betrachtet man hinreichend kleine  $t$ -Intervalle, die ausreichend weit vom Nullpunkt entfernt sind, dann liegt näherungsweise eine Oszillatorgleichung vor und die Lösungen unserer Gleichungen dürften denen dieser effektiven Vergleichsgleichung ähneln. Das Beispiel soll verdeutlichen, wie eine solche Ähnlichkeit aussieht und wie stark sie sein kann.

Dazu wählen wir ein konkretes Beispiel. Sagen wir  $a=-5$  und  $b=50$ . Wir betrachten unsere Gleichung dann für  $t < 0$ . Wir haben  $\rho(t) > 0$  für  $t < -5$  und  $\rho(t) < 0$  für  $-5 < t < 0$ . Untersucht man das Vorzeichen von

$\omega_0^2(t) - \rho(t)$ , so erwarten wir für  $-210 < t < -0.12$  oszillatorischen Verhalten, bis  $-5$  wachsend und anschließend gedämpft. Für negatives  $t$  erhalten wir zwei effektive reelle Eigenwerte über  $\lambda_{\pm} = -\rho(t) \pm \sqrt{\rho(t) - \omega_0^2(t)}$ . Im Grenzfall  $t \rightarrow 0^-$  finden wir  $\lambda_-(0^-) = -\infty$  für  $a < 0$  und  $\lambda_+(0^-) = \frac{b}{a}$ . Also sollte die Lösung zum Eigenwert  $\lambda_+$  dominieren und sich näherungsweise wie  $\exp(\lambda_+ t) = \exp(\frac{b}{a} t)$  verhalten! Das ergibt aber gerade die oben gefundene Randbedingung  $av(0) = bx(0)$ , für die die Kraft endlich bleibt.

Nähert man sich also der Null (im Falle  $a < 0$ ) von links, so sollte dieser spezielle Lösungsanteil herausgefiltert werden. Die numerische Analyse bestätigt diese Überlegungen voll.



Bis  $t = -5$  ist  $\rho(t) < 0$ . D.h. die Schwingung wächst. Bei  $t = -5$  ist  $T$  ziemlich genau 2,

Anschließend ist  $\rho(t) > 0$ , d.h. es liegt Dämpfung vor. Ab  $t = -0.12$  hat man den Dämpfungsfall, also exponentielles Verhalten. Das rechte Bild zeigt das. Insbesondere sieht man deutlich, dass die Steigung beim Nulldurchgang mit  $x$  wächst wie es die Bedingung  $v = \frac{b}{a}x$  verlangt. Für  $x > 0$  ist die numerische Lösung instabil, man kann vom Bild nicht auf das Verhalten schließen.

□ Was ist für  $t \rightarrow 0^+$  zu erwarten?

(2.5.8) **Herleitung einer speziellen Lösung über einen Reihenansatz.**

Wir versuchen einen Potenzreihenansatz. Die Funktion  $\exp(\frac{b}{a}t)$  legt einen solchen um den Aufpunkt  $t_0 = 0$  nahe. Wir erhalten teilweise mit Indexumbenennung:

$$\boxed{x(t) = \sum a_n t^n \quad \implies \quad \dot{x}(t) = \sum (n+1)a_{n+1} t^n \quad t\ddot{x}(t) = \sum n a_n t^n \quad t\dot{x}(t) = \sum n(n+1)a_{n+1} t^n}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich ergibt die folgende Rekursionsformel ohne zusätzliche Bedingung für den Startwert  $n=0$ :

$$(n+1)(n+a)a_{n+1} = (n+b)a_n \quad n=0,1,2,\dots$$

$a_0$  darf dann frei gewählt werden. Es folgt  $a_1 = a_0 \frac{b}{a \cdot 1}$  und  $a_2 = a_0 \frac{b(b+1)}{a \cdot (a+1) \cdot 1 \cdot 2}$  usw. Der Nenner sollte nie Null werden, also  $a \neq 0, -1, -2, \dots$ . Insgesamt:

$$\boxed{a_n = \frac{a_0}{n!} \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{a(a+1)\dots(a+n-1)} \quad n=0,1,2,\dots \quad a \neq 0,-1,-2,\dots}$$

Bildet man den Quotienten  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ , so sieht man sofort, dass dieser nach Null geht für  $n \rightarrow \infty$ . Nach dem Quotientenkriterium ist die erhaltene Potenzreihe also überall konvergent!

Insbesondere darf man  $a_0$  ausklammern und erhält so einen eindimensionalen Lösungsraum wie erwartet. Es genügt daher, den Fall  $a_0 = 1$  zu betrachten. Alle diese Lösungen erfüllen, wie man durch Differenzieren sofort nachrechnet, unsere intuitiv gefundene Bedingung  $bx(0) = a\dot{x}(0)$ .

Die gefundene Funktion heißt *konfluente hypergeometrische Funktion*. Zu ihrer Beschreibung führt man gerne noch ein sog. (aufsteigendes) Pochhammersymbol ein, nämlich:

$$(\alpha)_0 = 1 \quad (\alpha)_1 = \alpha \quad (\alpha)_2 = \alpha(\alpha+1), \quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1).$$

Also:  $n$  Faktoren, der erste gleich  $\alpha$  und dann jeweils ansteigend um 1 größer. Und wie üblich ist das leere Produkt gleich 1. Damit erhalten wir das folgende Resultat:

Die Gleichung  $t\ddot{x}(t) + (a-t)\dot{x}(t) - bx(t) = 0$  hat eine Lösung, die durch die folgende überall konvergente Potenzreihe gegeben wird:

$$t \mapsto {}_1F_1(t; b, a) = 1 + \frac{b}{a}t + \frac{b(b+1)}{a(a+1)} \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{(a)_n} \frac{t^n}{n!} \quad a \neq 0,-1,-2,\dots$$

Das ist eine spezielle Lösung unserer Differentialgleichung.



Sie erfüllt  $av(0)=bx(0)$  und  $x(0)=1$ . Bitte beachten Sie in  ${}_1F_1$  die Reihenfolge der Parameter:  ${}_1F_1(t; b, a)$ , nicht  $a, b$  wie in der Gleichung.  $x(0)=1$  gilt.

Was ist mit den Ausnahmefällen? Nehmen wir unser Beispiel  $a=-5$ . Die Bedingungen bleiben dieselben, man hat nur den Wert von  $a$  einzusetzen. Problematisch ist die Bedingung für  $n=5$ . Sie lautet:  $(5+1)(5-5)a_6 = (5+b)a_5$  und läßt sich nicht zur Bestimmung von  $a_6$  verwenden! Ist  $b \neq -5$ , so muß auch  $a_5 = 0$  gelten. Und reisverschlussartig folgt nun  $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ . Dagegen ist  $a_6$  jetzt frei wählbar und alle weiteren  $a_n$  folgen wieder eindeutig. Rechnet man diese Koeffizienten aus, so erhält man die folgende Lösungsfunktion:

Fall $a=-5$	$G(t)=t^6 {}_1F_1(t; b+6, 7)$	Die Lösung beginnt mit $t^6$ und erfüllt aber die Bedingung $ax'(0)=bx(0)$ für $t=0$ <b>nicht!</b>
-------------	-------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------

(2.5.9) **Die Konstruktion der restlichen Lösungen für nicht ganzes  $a$ .** Die weiteren Lösungen sollten sich bei  $t=0$  nicht in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Wie kann das möglich sein? Etwa durch einen Faktor, der derartiges Verhalten erzwingt. Wir versuchen die folgende Substitution mit freiem Parameter  $\alpha$ :

$$\boxed{x(t) = t^\alpha u(t)} \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha t^{\alpha-1} u(t) + t^\alpha u'(t) \\ \ddot{x}(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} u(t) + 2\alpha t^{\alpha-1} u'(t) + t^\alpha u''(t) \end{cases}$$

Einsetzen und Zusammenfassen gibt:

$$t^{\alpha+1} u''(t) + [2\alpha + a - t] t^\alpha u'(t) + \{\alpha(\alpha-1) + \alpha a\} t^{\alpha-1} u(t) - (\alpha + b) t^\alpha u(t) = 0.$$

Der unterstrichene Beitrag stört! Wäre er nicht, könnte man einen Faktor  $t^\alpha$  kürzen und erhielte wieder die Form der ursprünglichen Gleichung. Durch die Wahl  $\alpha = a - 1$  können wir den Beitrag zum Verschwinden bringen. **Resultat ist die alte Gleichung mit neuen Parameterwerten:**

$$\boxed{t u''(t) + (2-a-t) u'(t) - (1-a+b) u(t) = 0} \quad \alpha = 1 - a \text{ gewählt}$$

Nach unserem ersten Resultat ist  $t \mapsto {}_1F_1(t; 1-a+b, 2-a)$  eine Lösung dieser Differentialgleichung. (Dabei ist  $a=2,3,\dots$  verboten.) Kehren wir zu  $x$  zurück, so finden wir die gesuchte weitere Lösung der Ausgangsgleichung, nämlich  $t \mapsto t^{-a+1} {}_1F_1(t; 1-a+b, 2-a)$ . Für  $t < 0$  ist diese Lösung zunächst einmal komplex. Aber durch Realteilbildung können wir daraus erneut eine reelle Lösung gewinnen. Hierzu sollte man immer  $t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$  schreiben.

Solange  $a$  nicht ganz ist, haben wir jetzt wegen des unterschiedlichen Verhaltens bei  $t=0$  zwei unabhängige Lösungen. Und falls unsere Vermutung, dass der Lösungsraum erneut zweidimensional ist, korrekt ist, sind wir fertig und können die allgemeine Lösung angeben. Darauf verzichten wir jedoch.

Für den oben betrachteten Sonderfall  $a=-5$  sehen wir sofort, dass die neue Lösung gleich der alten, also  $G(t)$  ist. Wir müssen daher noch nach anderen Vorfaktoren suchen, die die Potenzreihenentwicklung um  $t=0$  verhindern. Der Logarithmus ist nach der Potenz der naheliegende Kandidat.

Auch für  $a=1$  stimmen beide Lösungen überein, wie man sofort sieht. D.h., dass uns für alle ganzzahligen  $a$  immer noch die zweite Lösung fehlt!

(2.5.10) **Konstruktion einer weiteren Lösung für  $a=-5$ .**

Wir besprechen jetzt einen Ansatz, der im Falle von ganzem  $a$ , speziell  $a=-5$ , weiterführt. Er tut das übrigens auch bei vielen weiteren Differentialgleichungen mit analogem Problem! Dabei versuchen wir zu zeigen, wieso dieser Ansatz funktioniert. Das ist ziemlich raffiniert, jedenfalls raffinierter als das, was uns sonst begegnet. Beachten Sie: Wir diskutieren nicht, wie man auf den Ansatz kommt.

Der Ansatz lautet:

$$\boxed{H(t) = c \ln(|t|) G(t) + r(t)} \quad r(t) = \sum b_n t^n \quad c, b_n \text{ frei} \quad G \text{ aus (2.5.8)}$$

Der Logarithmus ist erneut über das Komplexe zu interpretieren, worauf wir hier nicht weiter eingehen. Am Ende ist daher der Realteil zu bilden. Der Ansatz hat demnach die Gestalt:

$$\text{Gefundene Lösung} \times \text{Logarithmus} + \text{neue Potenzreihe.}$$

Einsetzen zeigt, wie dieser Ansatz funktioniert. wendet man den Differentialoperator  $(t \frac{d^2}{dt^2} + (-5-t) \frac{d}{dt} - b)$  auf  $H$  an, so entstehen Summanden von dreierlei Typ:

1. Terme, bei denen ein Logarithmus als Faktor verbleibt. Alle Ableitungen müssen dann über die Produktregel ausschließlich auf G wirken.
2. Summanden, die von r herrühren.
3. Summanden, bei denen der Logarithmus wenigstens einmal differenziert ist. Da dessen Ableitung  $\frac{1}{t}$  ist, läßt sich jeder dieser Summanden als Potenzreihe schreiben.

Fassen wir alle Beiträge in der beschriebenen Weise zusammen, so ergibt sich:

$$c \ln(|t|) \{tG''(t) + (-5-t)G'(t) - bG(t)\} + \{tr''(t) + (-5-t)r'(t) - br'(t)\} \\ + c \left\{ 2G'(t) - \frac{1}{t}G(t) - (5+t)\frac{1}{t}G(t) \right\}$$

Nur der dritte Beitrag ist nachzurechnen. Wieso?

Die erste Summe mit dem Vorfaktor  $\ln(t)$  verschwindet, weil G Lösung unserer Differentialgleichung ist. Der zweite Beitrag liefert für die gesuchten Koeffizienten  $b_n$  von r die alten Bedingungen **einschließlich des Problems bei n=5**.

Der dritte Term liefert für die Rekursion **Zusatzbeiträge**, die aber erst ab n=5 auftreten: G beginnt ja erst mit  $t^6$ . Durch Ableiten bzw. Multiplikation mit  $\frac{1}{t}$  wird daraus  $t^5$ . Sei  $c\alpha_n$  der entstehende Zusatzterm zu  $t^n$ . Insbesondere ist  $\alpha_5 = \frac{6(b+6)_6}{(7)_6 6!} \neq 0$  wie man leicht nachrechnet.

Jetzt überlegen wir: Der Koeffizient  $b_5$  aus der Entwicklung von r wird aus der Gleichung für n=4 eindeutig durch die Vorgänger festgelegt. n=5 ergibt dann die kritische Gleichung. Mit dem Zusatzterm sieht sie wie folgt aus:

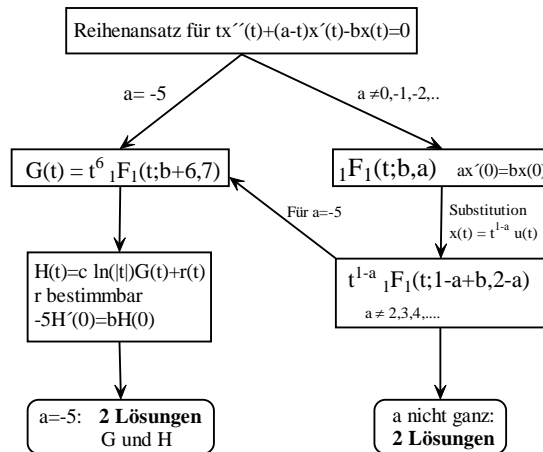
$$(5+1)(5-5)b_6 - (5+b)b_5 + c\alpha_5 = 0$$

Diese Gleichung muß erfüllt sein, damit unser Ansatz eine Lösung ergibt. Um das zu erreichen, wählen wir c, den noch offenen Faktor vor dem ln gerade so, dass die Gleichung erfüllt ist.  $b_6$  darf beliebig gewählt werden, etwa Null. Die höheren Terme liegen dann alle wieder eindeutig fest. Die Rekursion verlangt jedoch wegen der zusätzlichen Beiträge  $c\alpha_n$  einigen Aufwand. Insgesamt sind alle Bedingungen erfüllt, so dass wir eine Lösung erhalten. Diese beginnt mit den vorhergesagten ersten Termen, erfüllt also die Anfangsbedingung  $-5v(0)=bx(0)$ . Die logarithmische Abweichung von den reinen Potenzen beginnt erst mit einem Faktor  $t^5 \ln t$ . Die Konvergenzfrage und die Berechnung der  $b_n$  lassen wir hier offen. Beachten sie: c und r sind aneinander gekoppelt, obwohl sie zu verschiedenen Summanden gehören. D.h. es sind keineswegs beliebige Linearkombinationen der beiden Summanden zulässig, wie wir es sonst gewohnt sind. Die eingangs gegebenen Bilder gehören zu  $a=-5$ .

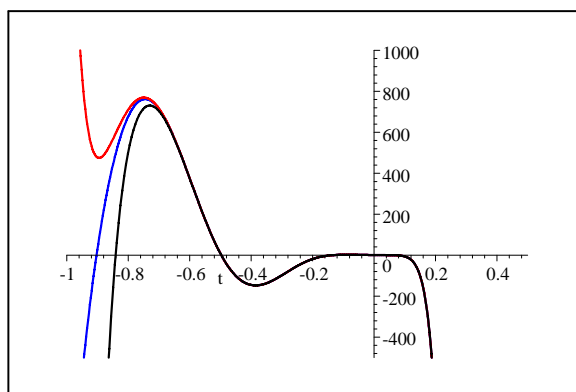
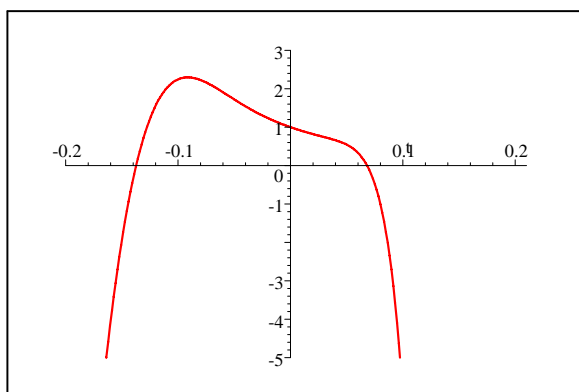
Damit haben wir auch für diesen Fall - also für negatives ganzzahliges a - eine Methode aufgezeigt, eine zweite unabhängiger Lösung zu finden. Und das Beispiel sollte verdeutlichen, wieso der gemachte Ansatz vielfach die benötigte zweite Lösung liefert.

- Wieso sind gerade - auch bei anderen Gleichungen - ganzzahlige Werte der Parameter kritisch? Analysieren sie die Ursache? Wie entsteht der Faktor Null, der ja den Ärger verursacht?

(2.5.11) Wir geben nach eine zusammenfassende Übersicht über die verschiedenen von uns betrachteten Fälle



- Behandeln Sie die Besselsche Differentialgleichung  $\left(t^2 \frac{d^2}{dt^2} + t \frac{d}{dt} + (t^2 - \nu^2)\right) x(t) = 0$  analog. Bestimmen sie zunächst eine Reihenlösung für  $\nu = 0$ . Machen Sie dann den Ansatz  $x(t)=t^\lambda u(t)$  und bestimmen Sie  $\lambda$  so, dass  $u$  eine Potenzreihenentwicklung zuläßt. Zeigen Sie: Für nicht ganzes  $\nu$  gibt das zwei unabhängige Lösungen, für ganzzahliges  $\nu$  dagegen nur eine. Wie ist dann der Ansatz zu modifizieren? Inspizieren Sie die vielen in den Formelsammlungen gegebenen Lösungen hinsichtlich ihrer Struktur. Die sollte Ihnen jetzt verständlich sein!
- Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der  ${}_1F_1$ -Funktion mit einem Computeralgebrasystem. Wählen Sie  $a=-4.9$  und  $b=50$  um Vergleichbarkeit mit dem diskutierten Fall zu erhalten. Was geschieht beim (für  $a=-5$ ) kritischen  $n$ -Wert? Die Figur zeigt die Partialsummen für  $n=20$ ,  $n=21$  und  $n=22$ . Man sieht jetzt das von der Differentialgleichung vorhergesagte Verhalten!



## 8.2.6 Qualitative Methoden

### (2.5.12) Die Van der Polse Gleichung.

Es handelt sich um ein Beispiel einer **nichtlinearen** Gleichung, mit dessen Hilfe wir einige wichtige Eigenschaften illustrieren wollen, die Lösungen von Differentialgleichungen aufweisen können. Im linearen Fall ist von diesen Eigenschaften nur wenig zu bemerken. D.h. wir lernen eine Reihe neuartiger Phänomene kennen.

Als Einstieg ist es erneut günstig, die Gleichung hinsichtlich ihrer Abweichung von der Oszillatorgleichung zu interpretieren. Die Gleichung lautet:

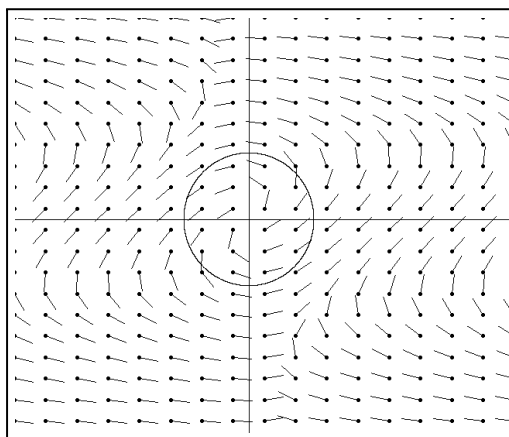
$$\ddot{x}(t) + (x^2(t) - P) \dot{x}(t) + qx(t) = 0$$

$P, Q$  äußere Parameter

Wichtig ist offensichtlich der Reibungsterm. Zunächst erzeugt er über  $x^2v$  die Nichtlinearität der Gleichung. Andererseits ist die Gleichung autonom und explizit, so dass man das Phasenraumtrajektorienbild verwenden kann. Für kleine Werte von  $x$  dominiert der  $-Pv$ -Term. Wir nehmen  $P > 0$  an. Das bedeutet, dass in diesem Bereich des Phasenraumes ein Oszillator mit negativer Dämpfung (Expansion!) vorliegt. Wir erwarten Trajektorien näherungsweise nach außen gerichtete Spiralen. Ist  $x$  dagegen sehr groß  $|x| > \sqrt{P}$ , so haben wir einen gedämpften Oszillator mit nach innen gerichteter Bewegung. Problematisch ist der Bereich  $x$  klein,  $v$  groß. Es zeigt sich jedoch, dass die Trajektorien sich in diesen Bereichen nicht stark vom Ursprung entfernen, wogegen sie sich bei  $x$  groß,  $v$  klein und negativ auf den Ursprung zubewegen. Da sich die Trajektorien nie kreuzen dürfen, erwarten wir eine **Grenzkurve**, die die nach innen und die nach außen gerichteten Trajektorien trennt. Ihr typischer Durchmesser sollte die Größenordnung  $x = \sqrt{P}$  haben. Die Grenzkurve sollte geschlossen sein. Und das bedeutet- wieder wegen der Autonomie- dass eine periodische Lösung vorliegen sollte.

- Prüfen sie nach, dass das Feld der Gleichung **nur** im Ursprung eine Nullstelle hat. Wieso ist dieser Sachverhalt zur Absicherung der soeben gegebenen Diskussion erforderlich? Was könnte sein, wenn es weitere stationäre Feldpunkte gäbe?

Das nachfolgende Bild des (normierten) Phasenraumfeldes (vertikal  $x$ , horizontal  $v$ ) verdeutlicht die gegebene Diskussion.



Die Gleichung enthält zwei Parameter. Es liegt nahe, zu fragen, ob sich das nicht über eine geeignete Substitution vereinfachen läßt. Wir machen den Ansatz  $x(t) = au(\alpha t)$ . Damit erhält man folgende Differentialgleichungen für  $u$ :

$$\boxed{u''(\tau) + (u^2(\tau) - R)u'(\tau) + u(\tau) = 0} \quad \text{mit } R = \frac{P}{\sqrt{Q}} \quad a = \sqrt[4]{Q} \quad \alpha = \sqrt{Q}$$

Oder alternativ die in der Literatur gebräuchliche Form

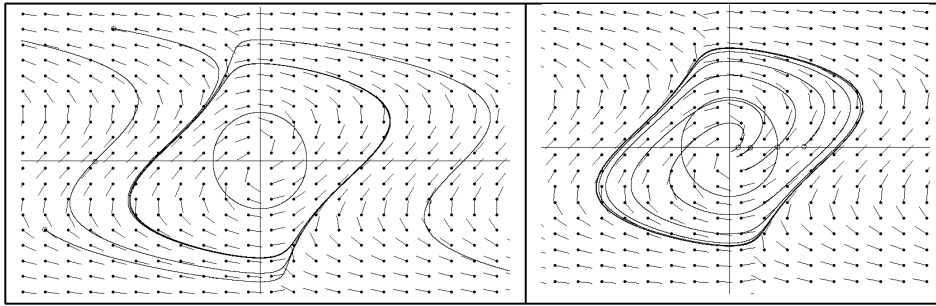
$$\boxed{u''(\tau) + \varepsilon(u^2(\tau) - 1)u'(\tau) + u(\tau) = 0} \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{P}{\sqrt{Q}} \quad a = \sqrt{P} \quad \alpha = \sqrt{Q}$$

D.h., die Differentialgleichung hängt in nicht trivialer Weise nur von einem Parameter ab. Wie kann man das nutzen? Angenommen die Gleichung hat eine periodische Lösung mit  $x_{PQ}$  mit Periode  $T = T_{PQ}$ , also  $x_{PQ}(t + T) = x_{PQ}(t)$ . Dann gilt mit der ersten Substitution  $x_{PQ}(t + T) = \sqrt[4]{Q} u_{\frac{P}{\sqrt{Q}}}(\sqrt{Q}(t + T))$  und analog  $x_{PQ}(t) = \sqrt[4]{Q} u_{\frac{P}{\sqrt{Q}}}(\sqrt{Q}t)$ . Also ist  $U = \sqrt{Q}T$  die Periode für  $u_{\frac{P}{\sqrt{Q}}}$ . Trägt man daher die Größe  $\sqrt{Q}T_{PQ}$  gegen  $R = \frac{P}{\sqrt{Q}}$  auf, so müssen alle Punkte auf einer Kurve liegen, obwohl mit  $P$  und  $Q$  zwei äußere Parameter vorgebar sind.

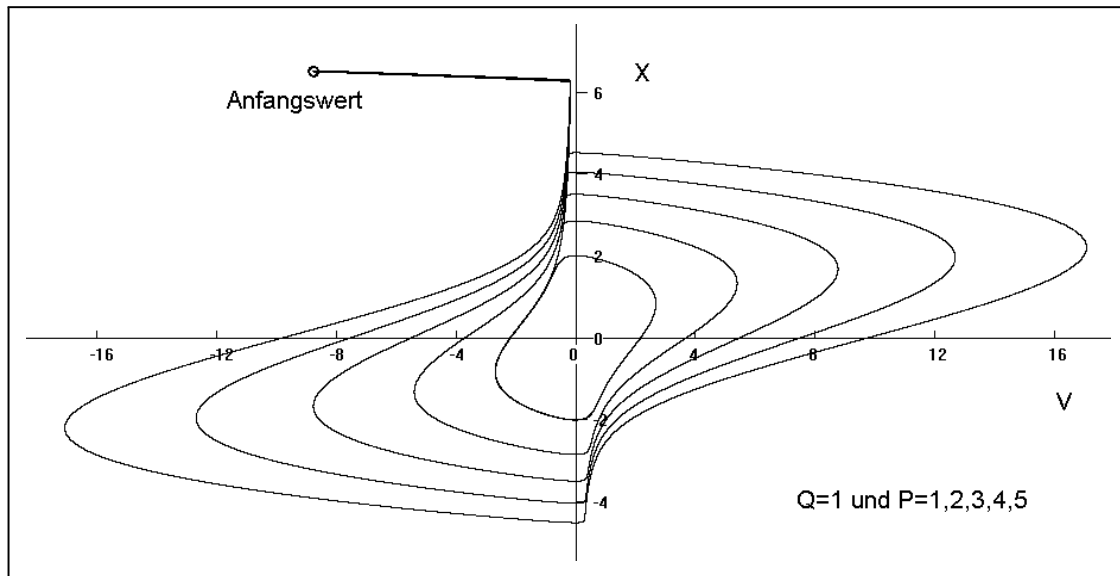
Die erste Substitution zeigt, dass es genügt, die Abhängigkeit von einem äußeren Parameter  $R$  (oder  $Q=1$ ) zu studieren.

Jetzt zeigen wir einige Phasenraumtrajektorien und den dabei entstehenden "Grenzzzyklus". Im ersten Bild liegt der Anfangswert jeweils im Aussenbereich, im zweiten im Innenbereich. Dabei ist  $P=Q=1$  gewählt. Im Aussenbereich sieht man: Im ersten und dritten Quadranten wächst  $x$  an, aber im zweiten und vierten gibt es den dominierenden Drang nach Innen. Und denken Sie daran: Zwei verschiedenen Trajektorien können

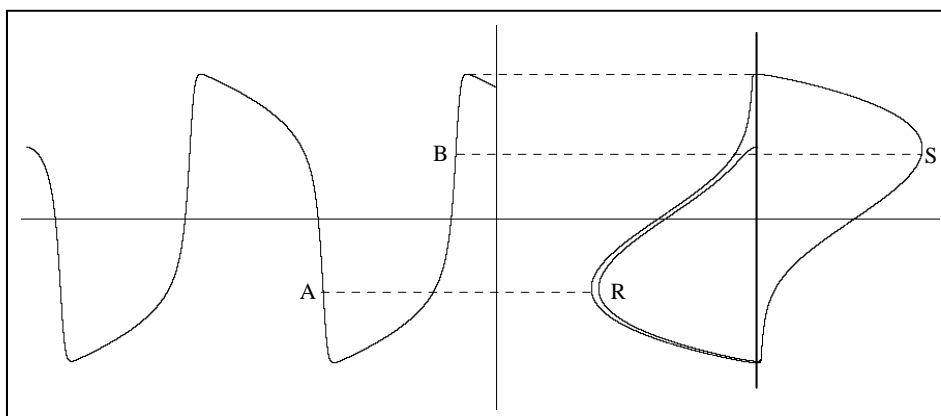
sich nie schneiden, auch wenn das durch die Darstellung so aussieht. Getrennt werden die beiden Bereiche tatsächlich durch eine periodische Lösung, gegen die die anderen Lösungen auf den Bildern rasch konvergieren.



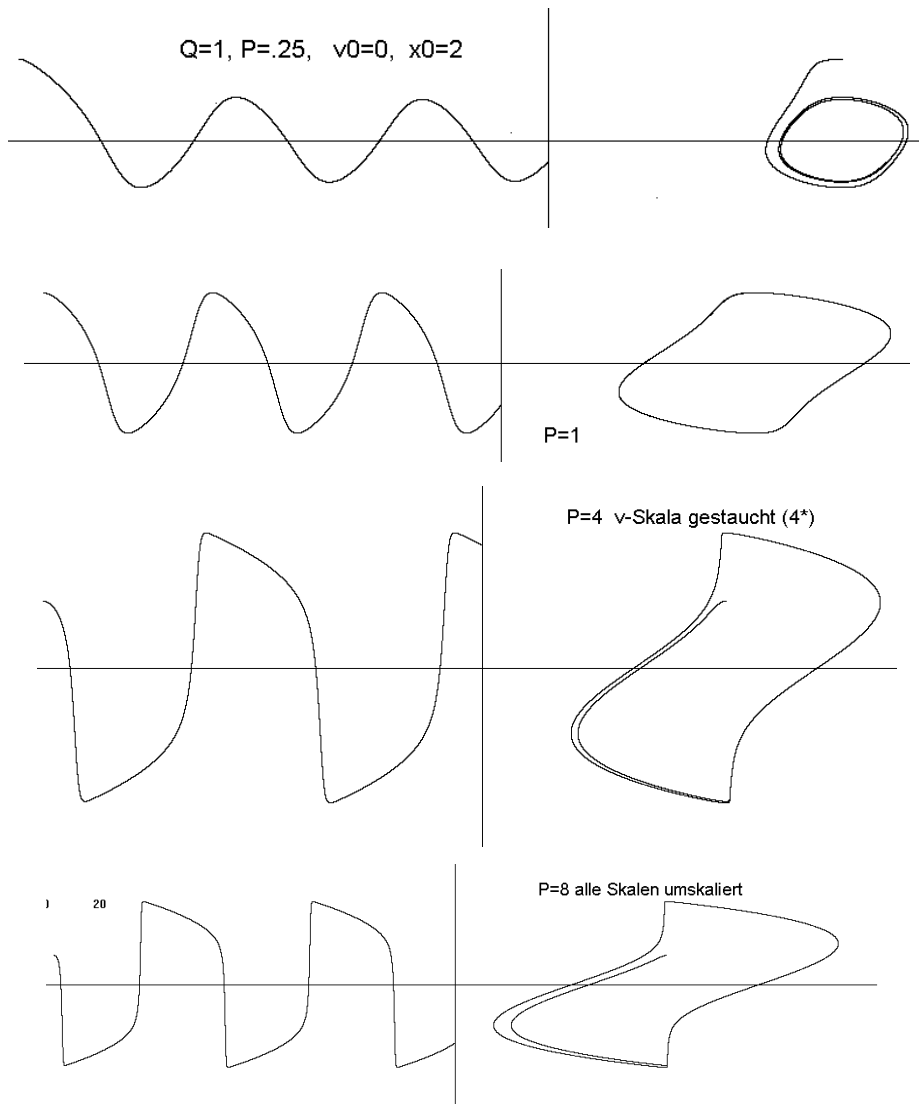
Jetzt ändern wir einmal  $P$  ab ( $Q=1$ ). Interessant ist der jeweilige Grenzzykel, der ja unabhängig vom Anfangswert ist. Wir wählen daher einen festen Anfangswert.



Wie sehen die zugehörigen Konfigurationsraumkurven aus? Links tragen wir  $x(t)$  gegen  $t$  auf,  $t$  horizontal. Rechts die entsprechende Phasenraumkurve. Auch hier ist  $x$  vertikal. Zum Punkt  $A$  gehört eine Höhe  $x$  und eine Zeit  $t$ . Letztere wird vergessen. Stattdessen wird die Steigung  $v=\dot{x}(t)$  genommen und rechts als horizontale Koordinate von  $R$  aufgetragen. Die Steigung ist hier sehr negativ. In den Extrempunkten ist sie Null. Die zugehörigen Phasenraumpunkte liegen daher auf der  $x$ -Achse-



Jetzt der Einfluss unterschiedlicher P-Werte auf beide Kurven:



Man kann die Phasenraumbene in einzelne Bereiche unterteilen und dort jeweils versuchen, die Differentialgleichung mit Dominanzargumenten zu behandeln. Als erstes Beispiel wollen wir den Term  $Qx$  vernachlässigen. Das sollte in einem Streifen um die horizontale  $x$ -Achse günstig sein. Die genäherte Differentialgleichung  $\dot{v}(t) + (x^2(t) - P)v(t) = 0$  läßt sich in eine Differentialgleichung für die Trajektorie  $x \mapsto v(x)$  umwandeln, mit der Kettenregel folgt ja

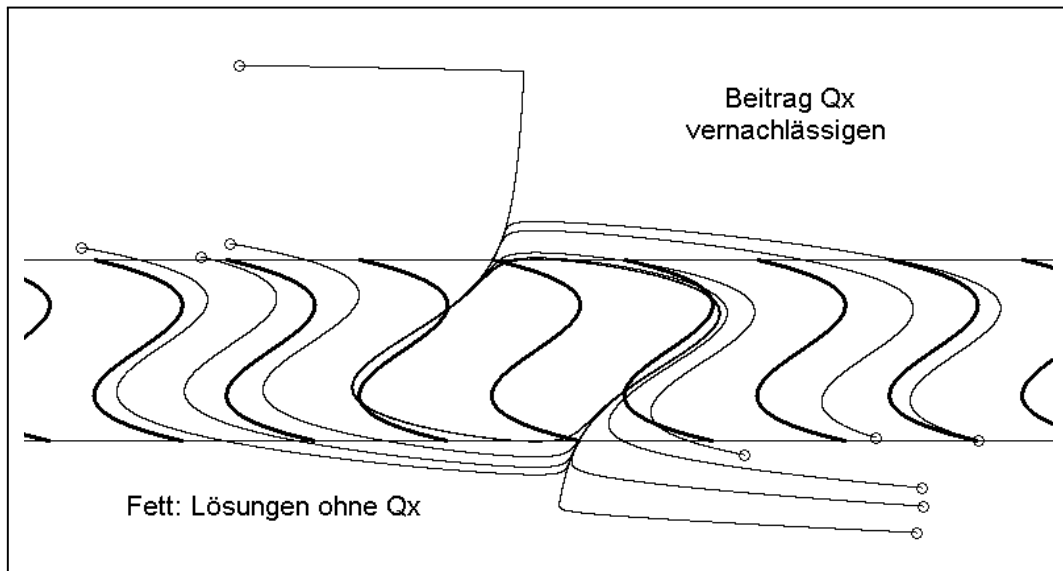
$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{v} = P - x^2$$

Damit ergibt sich

$$x \mapsto v(x) = -\frac{1}{3}x^3 + Px + C$$

Das Bild vergleicht diese Näherungen mit den tatsächliche Trajektorien. Die zumindest qualitative überein-

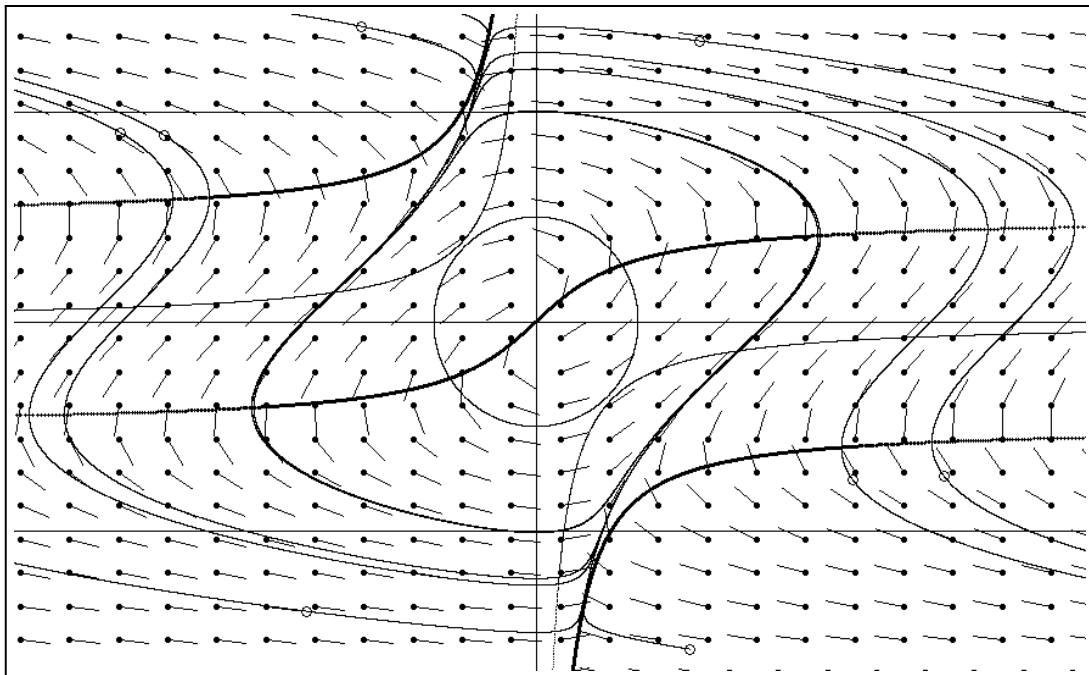
stimmung ist gut, selbst für große  $x$ -Werte. Schlecht ist sie aus verständlichen Gründen für kleine  $v$ !



Eine andere leicht zu erhaltende Kurve wird durch die Bedingung  $\ddot{x} = 0$  gegeben, also Punkte ohne Beschleunigung. Oder auch:  $v'(x) = \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = 0$ . Das sind Punkte, in denen  $x \mapsto v(x)$  eine horizontale Steigung besitzt. (In der Figur vertikal!) Es folgt

$$v(x) = \frac{Qx}{P - x^2}$$

Das Bild zeigt diese Kurve zusammen mit einigen Trajektorien.



- Was leistet das Beispiel? Es zeigt, wie man für eine autonome Dgl. eine Differentialgleichung für die Trajektorien erhält. Formulieren Sie das genauer als mathematischen Satz.

# Kapitel 8.3: Der Existenz- und Eindeigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen.

## 8.3.0 Vorbemerkung

Im Falle der linearen autonomen Differentialgleichung  $\ddot{y}(t) = M \cdot \dot{y}(t)$  haben wir sämtliche Lösungen bestimmt. Wir wissen wieviele es gibt und wie man sie festlegen kann. In den danach behandelten Fällen hat uns dieses Resultat als eine Art Richtschnur gedient. In einer Reihe von Fällen - etwa wenn die Separationsmethode anwendbar war - konnten wir die Erwartungen erneut exakt bestätigen. Diese Vermutungen haben wir im *Formblatt* für die unterschiedlichen Erscheinungsformen eines gewöhnlicher deterministischen Systems fixiert. Aber wir haben auch schon Hinweise auf abweichendes Verhalten gefunden, etwa bei nicht expliziten Gleichungen. **Jetzt streben wir ein mathematisches Resultat an, das Bedingungen liefert, unter denen unsere Idealvorstellung "durch jeden zulässigen Punkt im erweiterten Phasenraum verläuft genau eine Lösung" mit Sicherheit korrekt ist.** Auch dann, wenn wir die Lösung nicht bestimmen können und wenn zugehörige numerische Experimente Zweifel lassen.

Ein derart allgemeines mathematisches Resultat erfordert einigen Aufwand. Und man sollte bewundern und würdigen, dass es existiert und gefunden wurde! Es nicht möglich, das Ergebnis, das wir vom Fall der linearen Gleichung mit konstanten Koeffizienten kennen, vollständig zu verallgemeinern. Der Satz, den wir erhalten werden, liefert nur ein lokales Resultat, d.h. die Existenz und Eindeutigkeit für eine nicht kontrollierbare -also nicht vorgebbare - kleine Umgebung. Geometrisch beinhaltet der Satz die Partitionsstruktur im erweiterten Phasenraum für diese Umgebung des Ausgangspunktes. Im autonomen Fall folgt daraus die Partitionsstruktur der Trajektorien im Phasenraum.

(3.1.1) Wir benötigen zunächst ein weitergehendes Resultat mit dessen Hilfe wir sowohl unser Differentialgleichungsproblem angehen als auch zwei weitere wichtige Resultate zur Analysis beweisen können.

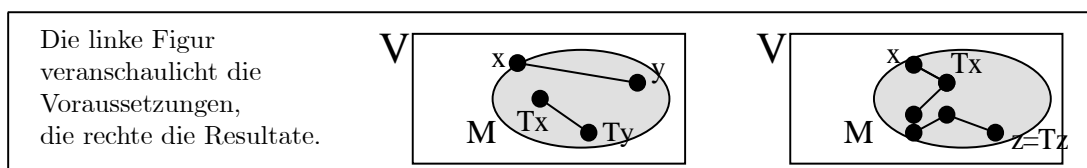
## 8.3.1 Der Fixpunktsatz

Der Banachsche Fixpunktsatz

**Sei**  $V$  ein Banachraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . (Also vollständig).  
 $M \subset V$  eine abgeschlossene (also auch vollständige) Teilmenge.  
 $T: M \rightarrow M$ , der *Operator*. Wir schreiben  $Tx$  statt  $T(x)$ .  
 $T$  erfülle die nachfolgende Bedingung (K)  
 ♦Es gibt eine Zahl  $0 < K < 1$ , derart, dass  $\|Tx - Ty\| \leq K \|x - y\|$  für alle  $x, y \in V$ . Man sagt,  $T$  sei kontrahierende Abbildung.

**Dann** besitzt  $T$  einen eindeutig bestimmten *Fixpunkt*  $z$  in  $M$ . D.h. es gibt genau ein  $z \in M$  mit  $Tz = z$ . Überdies gilt  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$  für alle  $x \in M$ . Dabei ist  $T^n x = T(T^{n-1}x)$ .

Man kann sich den Inhalt graphisch veranschaulichen:



Im Vektorraum  $V$  ist die Teilmenge  $M$  enthalten. In ihr sind zwei Punkte  $x$  und  $y$  gewählt. Die Bildpunkte haben notwendig einen geringeren Abstand. In  $M$  gibt es den ausgezeichneten Fixpunkt  $z$ . Wählt man  $x \in M$  und bildet man  $Tx$ ,  $T(Tx) = T^2x$  usw., dann konvergiert diese Punktfolge gegen  $z$ . Oder auch:  $z$  ist in  $M$  eine Art universaler Anziehungspunkt für den Operator  $T$ .

(3.1.2) Erläuternde Beispiele:



1. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion. Dann ist jeder Schnittpunkt des Graphen von  $f$  mit der Geraden  $y=x$  ein Fixpunkt. Die zugehörige Fixpunktgleichung ist  $f(x)=x$ , eine Bestimmungsgleichung für  $x$ . So hat etwa  $\cos(x)=x$  einen Fixpunkt  $x_F \approx 0.739085$ .  
 Probieren Sie das aus! Finden sie diesen Fixpunkt mit dem Taschenrechner durch Iterieren von  $\cos$ , wie es der Satz behauptet.
2. Es sei  $\varphi: V \rightarrow V$  ein Vektorraumhomomorphismus. Dann ist der Nullvektor ein Fixpunkt für  $\varphi$ . Aber er ist i.a. nicht attraktiv.
3. Es sei  $R: V^3 \rightarrow V^3$  eine Drehung. Dann ist jeder Punkt der Drehachse ein Fixpunkt.
4. In Kapitel 1.3. haben wir die sonderbare Cantormenge  $c$  eingeführt. Dazu die Mengenoperation  $v$ , die jedes endliche Intervall drittelt und den Mittelteil fortnahm. Dann gilt  $v(c)=c$ . D.h. die Cantormenge ist ein Fixpunkt dieser geometrischen Konstruktion.

- Wann wird man von *stabilen*, wann von *labilen* Fixpunkten sprechen?  
  $V$  endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Wann ist ein linearer Operator  $\varphi: V \rightarrow V$  (sicher) kontrahierend?

(3.1.3) Beweis des Satzes:

a) **Eindeutig**. Seien  $z_1$  und  $z_2$  beides Fixpunkte. Es folgt

$$\|z_1 - z_2\| = \|Tz_1 - Tz_2\| \leq K \|z_1 - z_2\|$$

Wegen  $K < 1$  ist das nur für  $\|z_1 - z_2\| = 0$  möglich. Also ist  $z_1 = z_2$ .

b) **Existenz des Grenzwertes**. Wähle  $x \in M$ . Bilde  $n \rightarrow T^n x$ . Zu zeigen: Das ist eine Cauchyfolge in  $V$ . Wähle  $n \leq m$ . Mit (K) und dem Teleskoptrick folgt:

$$\begin{aligned} \|T^n x - T^m x\| &\leq K^n \|x - T^{m-n} x\| = K^n \|(x - Tx) + (Tx - T^2 x) + \dots + (T^{m-n-1} x - T^{m-n} x)\| \\ &\leq K^n \{ \|x - Tx\| + \|Tx - T^2 x\| + \dots + \|T^{m-n-1} x - T^{m-n} x\| \} \\ &\leq K^n \{ 1 + K + \dots + K^{m-n-1} \} \|x - Tx\| = K^n \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} \|x - Tx\|. \end{aligned}$$

Natürlich ist  $K \neq 1$ . Für  $K < 1$  geht das gegen Null für  $n \rightarrow \infty$ . Also liegt eine Cauchyfolge vor. Da  $V$  vollständig ist, hat diese einen Grenzwert  $z = z(x)$ . Da  $M$  abgeschlossen ist, liegt dieser in  $M$  selbst.

c) Zusatzbetrachtung: **T ist** (als Folge von (K)) **stetig**. Als Strategiefunktion wählen wir  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ . Dann folgt  $\|Tx - Ty\| \leq K \|x - y\| \leq K \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ , da  $K < 1$ .

d) **z ist Fixpunkt von T**. Laut Definition von  $z$  ist  $Tz = T(\lim T^n x)$ . Da  $T$  stetig ist, folgt  $T(\lim T^n x) = \lim T^{n+1} x = z$ . Also  $Tz = z$ .

- Was folgt aus der in b) hergeleiteten Ungleichung für  $\|T^n x - z\|$ ? Welche Bedeutung, welchen praktischen Nutzen hat dieses Resultat?

## 8.3.2 Anwendung des Fixpunktsatzes auf die Differentialgleichungen

(3.2.1) Um im Bereich der Differentialgleichungen zum angestrebten Resultat zu gelangen, benötigen wir zusätzliche Ideen. Unsere Differentialgleichung sei  $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{F}(t, \vec{y}(t))$ . D.h. wir setzen hier stets eine **explizite Form** voraus. Die erste Idee besteht nun darin, **diese Gleichung bezüglich  $t$  zu integrieren**. Das ergibt als vierte Erscheinungsform unseres deterministischen Systems:

$\dot{\vec{y}}(t) = \vec{F}(t, \vec{y}(t))$	Wird durch Integration zu:	$\vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \int_{t_0}^t ds \vec{F}(s, \vec{y}(s))$
---------------------------------------------	-------------------------------	----------------------------------------------------------------------

Diese Gleichung können wir als Bestimmungsgleichung für die Kurve  $t \mapsto \vec{y}(t)$  auffassen. Die Form legt als Bezeichnung den Namen **Integralgleichung** nahe. Setzt man rechts irgendeine ausreichend glatte Kurve ein, so kommt entweder die Ausgangskurve oder aber eine andere Kurve heraus. Im ersten, sicher seltenen Fall hätten wir eine Lösung der Gleichung.

Falls dieselbe Kurve herauskommt, kann man die entstehende gültige Gleichung differenzieren und sieht, dass eine Lösung der Differentialgleichung vorliegt. Überdies erfüllt diese Lösung die Anfangswertbedingung  $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ . Hat man umgekehrt eine Lösung des Anfangswertproblems und integriert man sie, so erhält man eine Lösung der Integralgleichung. Da das lokale Vorliegen des Idealfalles gleichwertig mit der lokalen eindeutigen Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe ist, besteht unser Problem darin, zu untersuchen, wann obige Integralgleichung lokal eindeutig lösbar ist. Jetzt liefert erneute Inspektion der Gleichung die 2. Idee: **Ihrer Struktur nach ist die Gleichung eine Fixpunktgleichung**, d. h. wir müssen versuchen, das Problem so zu präzisieren, dass der Fixpunktsatz anwendbar ist.

(3.2.2) Machen wir uns zunächst einmal mit der Funktionsweise des Integraloperators vertraut, der zur rechten Seite der Integralgleichung gehört. Es sei  $\mathfrak{F}$  ein Raum geeigneter glatter Kurven. Dann definiert die rechte Seite den Operator

$$\mathfrak{J} = (\mathfrak{F}, f = (I, t \mapsto \vec{f}(t), V) \mapsto g = (I, t \mapsto \vec{g}(t), V), \mathfrak{F})$$

mit  $\vec{g}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t ds \vec{F}(s, \vec{f}(s)) = \mathfrak{J}[f](t)$

Konkretisieren wir das für  $y'(t) = t - y^2(t)$ , also  $\vec{F}(t, y) = t - y^2$ . Sei  $f = h_n$ , also  $f(t) = t^n$ . Dann ergibt sich für die Bildkurve:

$$h_n \mapsto g \quad \text{mit} \quad g(t) = y_0 + \int_{t_0}^t ds (s - s^{2n}) = y_0 + \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - \frac{1}{2n+1}(t^{2n+1} - t_0^{2n+1})$$

Natürlich ist das entstandene  $t \mapsto g(t)$  nicht die Ausgangskurve, also keine Lösung unserer Bedingungsgleichung  $f = \mathfrak{J}[f]$ . Aber wir sehen, wie der Integraloperator aus Kurven neue Kurven macht. (Rechnen Sie alternativ  $y'(x) = y(x)$  und  $f(x) = \exp(x)$  durch!)

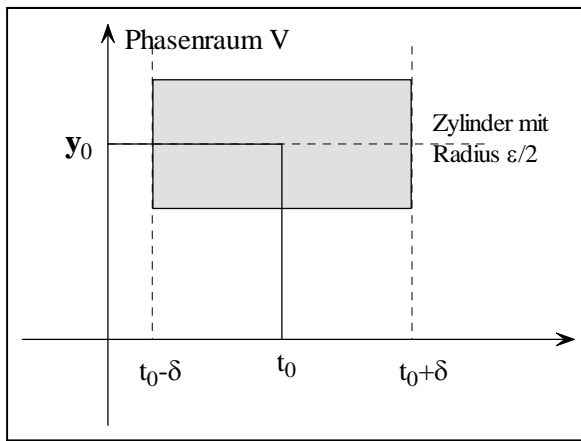
(3.2.3) Vier Bemerkungen oder Beobachtungen sind wichtig. Sie erläutern alle, wieso die Integralgleichung für unsere Fragestellung nützlicher als die Differentialgleichung ist:

1. In die Integralgleichung ist das Anfangswertproblem bereits mit eingebaut. Bei der Differentialgleichung selbst ist das nicht so.
2. Die im Zusammenhang mit den partiellen Differentialgleichungen auftauchenden Randwertprobleme lassen sich in die Integralgleichung offenbar relativ leicht einbauen.
3. Integrieren macht die Kurven im Gegensatz zum Differenzieren glatter. Besteht  $\mathfrak{F}$  etwa aus stetig differenzierbaren Kurven, so müssen die Ableitungen das nicht mehr sein. Die Integrale sind es erneut, zumindest dann, wenn  $F$  stetig ist, was wir voraussetzen. Bei einem Differentialoperator hat man daher meist Urbild- und Werteraum **unterschiedlich** zu wählen. Beim Integraloperator nicht.
4. Die Bestimmungsgleichung hat die Form einer Fixpunktgleichung. Nämlich  $f = \mathfrak{J}[f]$ . Für diesen Problemtyp gibt es eine Reihe allgemeiner mathematischer Resultate. Wir benutzen den eingangs bewiesenen Fixpunktsatz.

(3.2.4) Wir müssen versuchen, die Definition unseres Integraloperators  $\mathfrak{J}$  derart zu präzisieren, dass alle Voraussetzungen für  $T$ , die der Fixpunktsatz verlangt, erfüllt sind. Insbesondere kommt es auf die genaue Wahl des Funktionsraums  $\mathfrak{F}$  an, der die Rolle von  $V$  (in den Voraussetzungen) übernehmen soll.

Unser Urbildintervall sei  $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  wobei wir  $\delta > 0$  noch nicht festlegen. Dann bestehe  $\mathfrak{F}$  aus allen

stetigen Kurven  $I \rightarrow \text{Phasenraum}$ . Als Norm wählen wir die Supremumsnorm. Das ergibt einen Banachraum.



Die Kurven aus M sind dadurch bestimmt, dass ihre Graphen ganz im skizzierten Zylinder liegen!

Die Teilmenge  $M \subset \mathfrak{F}$  ist so zu bestimmen, dass für sie die Kontraktionsbedingung gilt. Dazu geben wir ein zunächst noch freies  $\epsilon > 0$  vor und betrachten nur Funktionen mit  $\|\vec{y}(t) - \vec{y}_0\| \leq \frac{\epsilon}{2}$  für  $t \in I$ . Das ist eine abgeschlossene Teilmenge unseres Funktionsraumes von zylindrischer Form.

Die Skizze sollte man sich gut einprägen. Natürlich wissen wir noch nicht, ob der Integraloperator  $\mathcal{J}$  eine Abbildung  $M \rightarrow M$  erklärt, geschweige denn, ob sie sogar kontrahierend ist. In der Regel wird das nicht der Fall sein. Den in der Skizze abgegrenzten Zylinder im erweiterten Phasenraum nennen wir  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\epsilon, \delta)$ .

Wir brauchen jetzt eine Bedingung an die Feldabbildung  $\vec{F}$  aus der Differentialgleichung, mit deren Hilfe wir die benötigten Eigenschaften von  $T = \mathcal{J}$  sichern können. Man verlangt, dass  $\vec{F}$  Lipschitz-stetig ist. D.h., dass es für jeden Punkt  $(t_0, \vec{y}_0)$  von  $M \subset V$  des erweiterten Phasenraums drei Zahlen  $L, \epsilon, \delta_0 > 0$  gibt, die folgendes erfüllen:

Für alle $(t, \vec{y}) \in \mathcal{Z} = M$ und $(t, \vec{z}) \in \mathcal{Z}$ d.h. $ t - t_0  \leq \delta$ sowie $\ \vec{y} - \vec{y}_0\  \leq \frac{\epsilon}{2}$ und $\ \vec{z} - \vec{y}_0\  \leq \frac{\epsilon}{2}$ gilt $\ \vec{F}(t, \vec{y}) - \vec{F}(t, \vec{z})\  \leq L \ \vec{y} - \vec{z}\ $ ( $L < 1$ wird nicht verlangt!)
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Inhaltlich besagt diese Forderung, dass im Zylinder  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\epsilon, \delta)$  der Betrag der Änderung des Steigungsfeldes **bei gleichem t** nie den Wert L übersteigen darf. Ist F beispielsweise stetig differenzierbar, so liefert das Maximum der Ableitungsbeträge (über eine kompakte Menge) sicher ein solches L. Vgl. den Satz vom beschränkten Zuwachs!  $\epsilon > 0$  ist hier keine unabhängige Variable wie bei einer Strategiefunktion, sondern ist fest gewählt, dass die gestellte Bedingung erfüllt ist.

(3.2.5) Ein Gegenbeispiel: Zur Differentialgleichung  $y'(x) = (y(x))^{\frac{1}{3}}$  gehört  $\vec{F}(t, y) = y^{\frac{1}{3}}$ . Für y nach Null wird die Steigung unbeschränkt. Diese Gleichung erfüllt für  $y=0$  die Lipschitzbedingung nicht, wie man sich sofort überzeugt. Oder auch:  $M = \mathcal{Z}$  darf kein  $(t, y)$  mit  $y=0$  enthalten.

(3.2.6) Jetzt können wir das Problem angehen, die weiteren Bedingungen des Fixpunktsatzes zu erfüllen. Zunächst wählen wir  $\delta \leq \delta_0$  so klein, dass gilt:

$2\delta \sup_{\mathcal{Z}} \ \vec{F}(t, \vec{y})\  < \frac{\epsilon}{2}$ (*) und $\delta L < \frac{\epsilon}{2}$ (**).
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(3.2.7) An eben dieser Stelle verlieren wir die Kontrolle über den Wert unserer Größen, so dass sich nur ein lokales, kein globales Resultat ergibt. Bei dieser Konstruktion wird ja die Länge des Zylinders  $\mathcal{Z}$  verkleinert!

□ Interpretieren Sie  $\vec{F}$  als Geschwindigkeitsfeld und t als Zeit. Was besagt (\*) dann inhaltlich?

(3.2.8) M besteht aus allen  $\vec{f}$ , deren Graph im so bestimmten  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\epsilon, \delta)$  liegen.

(3.2.9) Nun können wir die erste im Fixpunktsatz geforderte Bedingung  $\mathcal{J}[\vec{f}] \in M$  für  $\vec{f} \in M$  sicherstellen. Hierzu schätzen wir wie folgt ab, wobei  $t \in I = [t_0, t_0 + \delta]$  sein soll:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}[f](t) - \vec{y}_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t ds \vec{F}(s, \vec{f}(s)) \right\| \leq \int_{t_0}^t ds \|\vec{F}(s, \vec{f}(s))\| \leq \int_{t_0}^{t+\delta} ds \|\vec{F}(s, \vec{f}(s))\| \\ &\leq (2\delta) \sup_{\mathcal{Z}} \|\vec{F}(s, \vec{y})\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{wegen (*)}. \end{aligned}$$

Für  $t \in [t_0 - \delta, t_0]$  sind nur die Integrationsgrenzen geeignet abzuändern. (Die erste Ungleichung verlangt  $t \geq t_0$ ). Damit liegt auch der Graph von  $\mathfrak{J}[\vec{f}]$  ganz im Zylinder und das heißt  $\mathfrak{J}[\vec{f}] \in M$  wie gewünscht.

**Wie steht es mit kontrahierend?** Das ist die letzte zu erfüllende Bedingung. Wir rechnen in  $\mathfrak{F}$  mit der Supremumsnorm  $\|\vec{f}\|_\infty = \sup_I \|\vec{f}(t)\|$ , wobei  $\|\vec{y}\|$  für die Phasenraumnorm steht. Weiter sei  $\gamma(t) = +1$  für  $t \geq t_0$  und  $= -1$  für  $t < t_0$ .

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{J}[\vec{g}] - \mathfrak{J}[\vec{f}]\|_\infty &= \sup_I \|\mathfrak{J}[\vec{g}](t) - \mathfrak{J}[\vec{f}](t)\| = \sup_I \left\| \int_{t_0}^t ds \left( \vec{F}(s, \vec{g}(s)) - \vec{F}(s, \vec{f}(s)) \right) \right\| \\ &\leq \sup_t \gamma(t) \int_{t_0}^t ds \left\| \vec{F}(s, \vec{g}(s)) - \vec{F}(s, \vec{f}(s)) \right\| \leq \sup_t \gamma(t) \int_{t_0}^t ds L \left\| \vec{g}(s) - \vec{f}(s) \right\| \\ &\leq L \left\| \vec{g} - \vec{f} \right\|_\infty |t - t_0| < \frac{\varepsilon}{2} \left\| \vec{g} - \vec{f} \right\|_\infty \quad \text{wegen } (**). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass der Integraloperator kontrahierend ist. Der Fixpunktsatz ist anwendbar!

- An welcher Stelle der Abschätzungen wurde die Lipschitzbedingung benutzt? Begründen Sie die einzelnen Schritte der Abschätzung genauer. Wieso wird  $L < 1$  **nicht** verlangt?
- Begründen Sie, dass die für (\*) benötigte Beschränktheit von  $\|\vec{F}(t, \vec{y})\|$  aus der Lipschitzbedingung folgt.

(3.2.10) Der Fixpunktsatz liefert jetzt zusammen mit den Vorüberlegungen die gewünschte lokale und eindeutige Lösung unseres Anfangswertproblems! Lokal heißt: Wir haben generell keinerlei Kontrolle über  $\delta$ . Wir sind nur sicher, dass es ein  $\delta > 0$  gibt.

Eine logische Subtilität gilt es noch zu klären: Könnte es noch Lösungen des Anfangswertproblems geben, die nicht in  $M$  liegen, weil sie zu stark wachsen? Dann müssen sie auch nicht vom Fixpunktsatz erfaßt werden und könnten die Eindeutigkeitsaussage zunichte machen. Der Satz vom beschränkten Zuwachs oder eine direkte Integralabschätzung zeigen sofort, dass es derartige Lösungen nicht gibt. Fassen wir alles zusammen.

**Satz über die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Differentialgleichungen.**

**Sei**  $\vec{y}(t) = \vec{F}(t, \vec{y}(t))$  eine Differentialgleichung mit stetigem  $\vec{F}$ .  
 Weiter sei  $G$  ein Gebiet des erweiterten Phasenraumes derart, dass für jeden Punkt  $(t_0, \vec{y}_0) \in G$  eine lokale Lipschitzbedingung gilt. D.h. es gibt Zahlen  $\varepsilon, \delta, L > 0$  mit  $\|\vec{F}(t, \vec{y}) - \vec{F}(t, \vec{z})\| < L \|\vec{y} - \vec{z}\|$  für alle  $|t - t_0| < \delta$  und  $\|\vec{y} - \vec{z}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

**Dann** existiert lokal eine Lösung der Anfangswertaufgabe durch  $(t_0, \vec{y}_0)$ .  
 Und jede andere Lösung stimmt mit ihr auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche überein.

*Lokale Lipschitzbedingung* besagt, dass die verlangten Abschätzungen nicht notwendig gleichmäßig in  $G$  sein müssen!

(3.2.11) Eine Lipschitzabschätzung existiert sicher, wenn  $\vec{F}$  nach  $\vec{y}$  stetig partiell differenzierbar ist! Der Satz vom beschränkten Zuwachs stellt das sicher, was wir in (3.2.15) genauer zeigen.

**Folgerung:** Ist  $F$  in  $G$  partiell differenzierbar mit  $\|D_{\vec{y}}\vec{F}(t, \vec{y})\| \leq L$  in  $G$ , dann kann  $L$  als Lipschitzkonstante genommen werden.

Da im endlichdimensionalen Fall alle Normen äquivalent sind, dürfen wir auch die in  $V$  verwandte Norm nach Belieben wählen.

(3.2.12) **Damit haben wir eine praktikable und einfache Methode, um die lokale Existenz und Eindeutigkeit sicherzustellen: Wir differenzieren nach  $\vec{y}$  und schätzen die Norm ab.** Geht das, liegt lokal der Idealfall vor. Der mehrdimensionale Fall ist natürlich eingeschlossen. Man kann eine der üblichen Matrixnormen zur Abschätzung wählen. Beachten Sie: Meist wird man die Norm nicht über den gesamten Phasenraum abschätzen, sondern geeignete beschränkte Teilgebiete herausgreifen. Etwa Rechtecke. Dann wird  $L$  von der Größe des Rechteckes abhängen. Man ist fertig, sobald man für jeden Punkt ein solches Gebiet oder Rechteck findet, das diesen Punkt enthält.

- Welche Approximationsmethode zur Lösung von Differentialgleichungen legt der Fixpunktsatz nahe?

(3.2.13) Beispiel: Die van der Pol'sche Gleichung  $\ddot{x}(t) + (x^2(t) - P)\dot{x}(t) + Qx(t) = 0$ . Per Reduktionstrick machen wir daraus ein (N=2)-System und bilden die totale Ableitung des Feldes. Da die Gleichung autonom ist, gilt  $D\vec{F} = D_{\vec{y}} \vec{F}$ .

$$\dot{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -Qy_1(t) - (y_1^2(t) - P)y_2(t) \end{pmatrix} \quad D_{\vec{y}}\vec{F}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q - 2y_1y_2 & -(y_1^2 - P) \end{pmatrix}$$

Als Norm wählen wir die Supremumsnorm. Wir betrachten  $|y_1| = |x| \leq A$  und  $|y_2| = |v| \leq B$ . Dann ist sicher  $\|D_{\vec{y}}\vec{F}(t, \vec{y})\| \leq 1 + |Q| + |P| + 2AB + A^2$ . Der Satz ist für jedes endliche Rechteck des Phasenraumes anwendbar.

(3.2.14) Beispiel: Für die folgende Gleichung ist das Eindeutigkeitsproblem dagegen schwierig:  $y'(x) = x^2 + y^{\frac{1}{3}}(x)$ . Problematisch ist der Ursprung.

(3.2.15) **Anhang : Die Integralform des Satzes vom beschränkten Zuwachs.** Das jetzt herzuleitende Resultat kann benutzt werden, um die wichtige Folgerung (3.2.11) zu beweisen. Die in Kapitel 6.4 gegebenen Form des Satzes bezog sich auf Kurven, die jetzt herzuleitende Form gilt allgemeiner für Felder.

Sei  $\vec{F} : G \rightarrow W$  glatt mit  $G \subset V$ , wobei  $V$  und  $W$  endlichdimensional. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir die folgende Identität:

$$\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a}) = \int_0^1 ds \frac{d}{ds} \vec{F}(\vec{a} + s(\vec{x} - \vec{a})) = \int_0^1 ds D\vec{F}(\vec{a} + s(\vec{x} - \vec{a})) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

Dabei seien die Punkte  $\vec{x}$  und  $\vec{a}$  in  $V$  so gewählt, dass die gesamte Verbindungsstrecke von  $\vec{a}$  und  $\vec{x}$  im Definitionsbereich  $G$  der Abbildung  $\vec{F}$  liegt. Entlang dieser Strecke wird ja integriert. Dann ist die gegebene Rechnung korrekt.

Mit der Dreiecksungleichung für Integrale und der Operatornorm (für lineare Abbildungen) schätzen wir wie folgt ab ( $\|T \cdot \vec{x}\|_W \leq \|T\|_{op} \|\vec{x}\|_V$ ):

$$\|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})\|_W \leq \int_0^1 ds \|D\vec{F}(\vec{a} + s(\vec{x} - \vec{a}))\|_{op} \|\vec{x} - \vec{a}\|_V$$

Nun nehmen wir an, daß im gesamten Definitionsbereich  $G$  von  $f$  gilt:

$$\|D\vec{F}(\vec{y})\|_{op} \leq K.$$

Einsetzen gibt das gesuchte Resultat in Form einer Lipschitzabschätzung. Also

$$\boxed{\|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})\|_W \leq K \|\vec{x} - \vec{a}\|_V \quad \text{mit} \quad \|D\vec{F}(\vec{y})\|_{op} \leq K \quad \text{für} \quad \vec{y} \in G.}$$

Und denken sie daran, dass die gesamte Verbindungsstrecke von  $\vec{a}$  mit  $\vec{x}$  in  $G$  liegen muss!

Der Zuwachs  $\Delta\vec{F}$  der Funktionswerte ist folglich im gesamten zulässigen Bereich in der durch die Ungleichung gegebenen Weise beschränkt. Daher auch die Bezeichnung des Satzes.

Die Operatornorm ist meist etwas mühsam zu berechnen. Die  $L^1$ -Norm für Matrizen etwa ist rechnerisch besser zugänglich. Führt man ein Koordinatensystem  $K$  ein, wird  $D\vec{F}$  zur beschreibenden Matrix  $(D\vec{F}(\vec{x}))^K = D\vec{F}^K(\vec{x}^K)$ , für die sich diese Norm bilden läßt. Für sie gilt  $\|M \cdot \vec{x}\|_1 \leq \|M\|_1 \|\vec{x}\|_1$  wie wir gleich beweisen werden. Damit kann man obige Rechnung problemlos erneut durchführen und findet entsprechend:

$$\boxed{\|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})\|_1 \leq K \|\vec{x} - \vec{a}\|_1 \quad \text{mit} \quad \|D\vec{F}(\vec{y})\|_1 \leq K \quad \text{für} \quad \vec{y} \in G.}$$

Wie beweist man die benötigte Ungleichung?

$$\begin{aligned} \|M \cdot \vec{x}\|_1 &= |\sum_{ik} M_{ik} x_k| \leq \sum_{ik} |M_{ik}| |x_k| = \sum_{ijk} |M_{ij}| |\delta_{jk}| |x_k| \stackrel{(e)}{\leq} \sum_{ijk} |M_{ij}| |x_k| \\ &= (\sum_{ij} |M_{ij}|) (\sum_k |x_k|) = \|M\|_1 \|\vec{x}\|_1. \end{aligned}$$

Hierbei steht das *Kroneckersymbol*  $\delta_{jk}$  wie üblich für die Komponenten der Einheitsmatrix. An der entscheidenden Stelle (e) werden zur Summe nicht negative Summanden (für  $j \neq k$ ) hinzugefügt.

Beachten Sie: Ist  $\vec{y} \mapsto D\vec{F}(\vec{x})$  stetig in einem kompakten  $\vec{y}$ -Bereich, dann ist die Norm dort auf jeden Fall beschränkt. Damit kann man in der Regel per Inspektion feststellen dass eine Lipschitzabschätzung möglich ist.

Nehmen wir als Beispiel das nicht linearisierte ebene Pendel. Dabei arbeiten wir mit der physikalischen Form, achten darauf, dass Komponentenvektoren im Phasenraum gleiche Einheiten haben, damit wir die  $L^1$ -Norm bilden können. Die zugehörige Bewegungsgleichung schreibt sich  $\ddot{y}(t) = -\alpha \sin(\beta y(t))$  mit Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$ . Sei jetzt  $T_0$  eine Konstante mit der Einheit einer Zeit. Dann schreiben wir den Reduktionstrick für diesen Fall wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{T_0}(T_0 v(t)) = \frac{1}{T_0} w(t) \\ \dot{w}(t) &= -\alpha T_0 \sin(\beta x(t)) \end{aligned} \quad \text{Phasenraumvektor; } \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige (autonome) Feld und dessen totale Ableitung lautet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} &\mapsto \vec{F}(x, w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_0} w \\ -\alpha T_0 \sin(\beta x) \end{pmatrix} \\ D\vec{F}(x, w) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{T_0} \\ -\alpha \beta T_0 \cos(\beta x) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

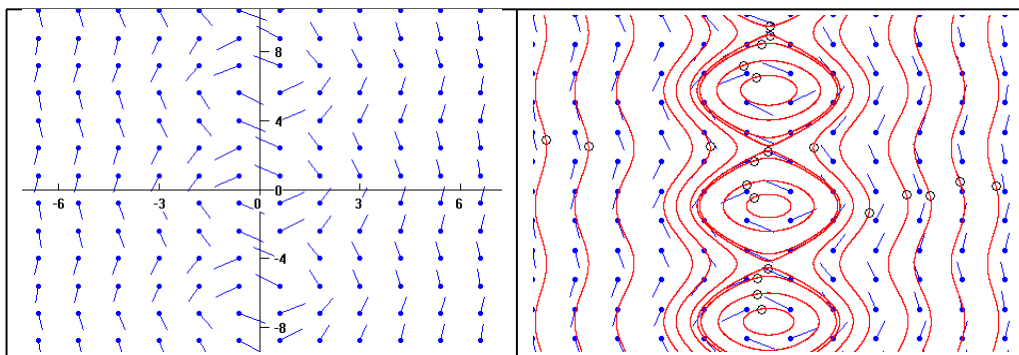
Das gibt für die  $L^1$ -Norm

$$\|DF(x, v)\|_1 = \frac{1}{T_0} + |\alpha \beta T_0 \cos \beta x| \leq \frac{1}{T_0} (1 + |\alpha \beta| T_0^2) = \frac{1}{T_0} (1 + \omega_0^2 T_0^2)$$

Damit haben wir eine globale Abschätzung für den gesamten  $\mathbb{R}_{xv}^2$  und damit eine globale Lipschitzabschätzung: Wir haben eine globale Lipschitzabschätzung

$$\|F(x, v) - F(y, w)\|_1 \leq \frac{1}{T_0} (1 + \omega_0^2 T_0^2) \|(x - y, v - w)\|_1$$

Die Gleichung ist autonom, so dass wir im Phasenraum die Trajektorienpartition haben.



Das linke Bild zeigt das Phasenraumfeld, wobei  $x$  vertikal aufgetragen ist.  $x$  ist in der üblichen Interpretation der Auslenkungswinkel. Horizontal ist  $v$  aufgetragen. Also die Winkelgeschwindigkeit.

□ Überlegen Sie sich selbst, wie die zugehörigen Konfigurationsraumkurven aussehen.

## 8.4 Anwendungen des Fixpunktsatzes auf Probleme der Analysis

### 8.4.1 Der Satz über die inverse Abbildung.

(4.1.1) Das Problem, um das es geht, ist die Umkehrung glatter Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Konkret also die Auflösung einer Vektorgleichung  $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$  nach  $\vec{x}$ . Wichtig dabei ist, dass die Umkehrung auch wieder glatt

sein soll. Zunächst könnte man auch Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  in Betracht ziehen. So gibt es eine surjektive stetige Abbildung  $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Aber deren umkehrbare Restriktionen sind alles andere als stetig. Verlangt man eine glatte Umkehrabbildung, läßt sich zeigen, daß nur  $n=m$  in Frage kommt. Zur Veranschaulichung sollte man möglichst den Transformationsstandpunkt wählen und nach der Umkehrbarkeit des Zuordnungspfeiles fragen.

Zunächst etwas Phänomenologie. **Was kann alles vorkommen?**

(4.1.2) Beispiel:  $(\mathbb{R}, x \mapsto x^2, \mathbb{R})$ . Dies klassische Beispiel zeigt, dass man **nicht nach globaler Umkehrbarkeit** fragen sollte. Besser ist es, nach lokaler zu fragen. Man sollte Umgebungen ausgewählter Punkte betrachten und die Abbildung darauf restringieren. Dann kann man auf injektiv verzichten wie im Falle der Parabel. Aber man sollte immer einen Punkt des Graphen angeben, um den herum umgekehrt werden soll. Verlangt wird lokale Injektivität. Die ist bei der Parabel nur im Ursprung nicht gegeben. Man sollte daher immer einen Graphenpunkt  $(x,y)$  angeben, wenn man umkehren will. Nicht etwa  $y$  allein, wie es vielfach geschieht. Denn zu dem einen  $y$  könnte es mehrere  $x$  geben. Im Falle von  $h:x \mapsto x^2$  gehören zu  $(-2,4)$  und  $(+2,4)$  durchaus verschiedene Umkehrungen, obwohl beide zu demselben  $y=4$  gehören. Die Veranschaulichung verwendet hier den Graphenstandpunkt.

**Sprechweise:** Man sollte sagen:  $f$  ist lokal umkehrbar um den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  des Graphen.

(4.1.3) Beispiel:  $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3, \mathbb{R})$ . Diese Abbildung ist bijektiv, im Sinne der Mengenlehre umkehrbar. Im jetzt zu behandelnden Sinne der Analysis ist sie es nicht. Denn die Umkehrabbildung  $(\mathbb{R}, x \mapsto x^{\frac{1}{3}}, \mathbb{R})$  ist bei Null nicht differenzierbar, die Tangente hat unendliche Steigung.

(4.1.4) Die für unsere Zwecke angemessene **Definition** ist vielmehr:

$f:G \rightarrow W$  heißt **lokal umkehrbar** in  $(x_0, f(x_0))$ , wenn gilt:  
 Es gibt eine offene Umgebung  $U \subset G$  von  $x$ , derart, dass die  
 Restriktion  $f|_U$  bildbar, bijektiv und in beiden Richtungen  $C^1$  ist.

Entsprechend ist  $x \mapsto x^3$  in  $(0,0)$  nicht lokal umkehrbar wogegen  $x \mapsto x^2$  es in  $(2,4)$  ist.

(4.1.5) Beispiel:  $(\mathbb{R}, x \mapsto x^{\frac{3}{2}}, \mathbb{R})$ . Auch das ist eine bijektive Abbildung. Wie steht es mit der Umkehrbarkeit um  $(0,0)$ ? Die Funktion selbst ist bei 0 stetig, aber nicht differenzierbar. Die Umkehrfunktion ist stetig und auch differenzierbar. Erneut haben wir bei  $(0,0)$  keine lokale Invertierbarkeit, da wir **beide** Richtungen  $C^1$  haben möchten.

(4.1.6) Wir können das auch etwas anders interpretieren: **Wegen der verlangten Differenzierbarkeit ist lokal, in der Nähe von  $x_0$  die Funktion ungefähr gleich ihrer Tangentenapproximation:**

$$y = f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + Df(x_0) \cdot \Delta x \quad (*)$$

Wenn die lokale Umkehrabbildung erneut glatt ist, muss sie auch eine Tangenzenzerlegung besitzen. Wir erwarten, dass wir diese durch Umkehrung von  $(*)$  erhalten. Das ist aber nur möglich, wenn die lineare Abbildung  $Df(x_0)$  invertierbar ist. Dann folgt sofort:

$$x = x_0 + \Delta x \approx x_0 + Df(x_0)^{-1} \cdot (y - y_0) \quad \text{mit } y_0 = f(x_0)$$

Kurz: wir erwarten, daß lokale Umkehrbarkeit voraussetzt, dass  $Df(x_0)$  umkehrbar ist. Im Fall  $n=m=1$  heißt das einfach  $f'(x_0) \neq 0$ . Allgemein muß die Funktionalmatrix maximalen Rang haben.

Nochmals: Das ist eine Bedingung für **einen** Punkt, den Aufpunkt  $x_0$ . Gefolgert wird für **alle** Punkte einer zugehörigen Umgebung.

Ein triviales mehrdimensionale Beispiel:  $(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2)$ . Die Geometrie dieser Abbildung haben wir in Kapitel 1 besprochen. Umkehrbarkeit im Sinne der Definition liegt in allen Punkten  $\left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \end{pmatrix} \right)$  außerhalb der Achsen vor, also  $a, b \neq 0$ .

(4.1.7) Beispiel: Jetzt betrachten wir ein weiteres (wichtiges) Beispiel für  $n=2$ . Dazu sei  $F = (\mathbb{R}^2, {}^t(x, y) \mapsto {}^t(u, v) = {}^t(x, xy - y^3), \mathbb{R}^2)$ . Um diese Abbildung geometrisch besser zu verstehen, zerlegen wir sie in 2 Abbildungen, eine Injektion  $I$  und eine Projektion  $P$ . Genauer schreiben wir:

$$\begin{matrix} {}^t(x, y) & \xrightarrow{I} & {}^t(x, y, xy - y^3) = {}^t(u, w, v) & \xrightarrow{P} & {}^t(u, v) \\ & & {}^t(x, y, z) & \xrightarrow{P} & {}^t(x, z) \end{matrix}$$

I ist Parametrisierung einer Fläche im Raum und P ist eine Projektion dieser Fläche. Vorgegeben ist  $F = P \circ I$  als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Wie steht es mit der Umkehrbarkeit dieser Abbildung im beschriebenen Sinn?

Beim späteren Satz über die impliziten Funktionen ist umgekehrt I gegeben und P wird als Hilfskonstruktion hinzugenommen.

Die Figur zeigt deutlich, wann man lokal umkehren kann und wann nicht. Ausgenommen sind Talgrund und Grat der Hilfsfläche. Dort werden die zugehörigen Tangentialebenen durch die Projektion P zu Geraden in der u-v-Ebene und das bedeutet, dass  $Df(x_0)$  für diese Punkte kein Isomorphismus ist. Für die totale Ableitung ergibt sich:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_0 & x_0 - 3y_0^2 \end{pmatrix}.$$

Für  $x=3y^2$  haben wir nicht maximalen Rang 1, also eine Gerade für das Bild von  $DF(x,y)$ . Im Werteraum, also der u-v-Ebene wird diese Parabel  $x=3y^2$  auf die durch  $4u^3 = 27v^2$  bestimmte Kurve - eine Neillsche Parabel - abgebildet. Für diese Punkte des u-v-Raumes existiert keine lokale Umkehrung.

(4.1.9) Das Beispiel legt die folgende **Vermutung** nahe:

Man kann eine Abbildung f lokal bezüglich eines Punktes  $(x_0, y_0)$  des Graphen invertieren, wenn die totale Ableitung in  $x_0$  umkehrbar - also ein Isomorphismus - ist. Dann hat dort in  $y_0 = f(x_0)$  die Umkehrabbildung eine Tangentenerlegung mit totaler Ableitung  $Df(x_0)^{-1} = Df^{-1}(y_0)$ . Wir werden sehen, daß sich diese Vermutung tatsächlich beweisen läßt.

(4.1.10) Zunächst noch eine andere Frage: Wie invertiert man eine Gleichung rechnerisch, oder versucht dies zumindest, wenn man eine Berechnungsformel für  $f(x)$  gegeben hat? In der Mehrzahl aller Fälle läßt sich natürlich ein Rechenausdruck für die Umkehrung nicht angeben. Wie im Falle  $n=1$  setzt man  $\vec{f}(\vec{x})=\vec{y}$ , interpretiert  $\vec{y}$  als äußeren Parameter und versucht nach  $\vec{x}$  aufzulösen. Meist wird man  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  als Komponententupel ansetzen und erhält dann ein mehr oder weniger kompliziertes Gleichungssystem.

Im Beispiel (4.1.8) etwa ist  $(x, xy - y^3) = (u, v)$  anzusetzen. Elimination von x gibt  $uy - y^3 = v$  als kubische Bestimmungsgleichung für y mit den äußeren Parametern u und v. Das läßt sich gerade noch mit der Cardanoschen Formel ausdrücken, worauf wir aber verzichten. Das Resultat hat generell die Form  $x=x(u,v)$  und  $y=y(u,v)$ . Man pflegt also meist Variable und Funktion mit demselben Buchstaben zu bezeichnen!

(4.1.11) Für das nächste Beispiel ist die Rechnung übersichtlicher:

$${}^t(x, y) \mapsto f(x,y) = {}^t(xy, x^2 + y^2) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Die Zuordnung ist homogen, so daß Polarkoordinaten naheliegen. Der Transformationstandpunkt klärt das Feldverhalten sofort

$${}^t(r, \varphi) \mapsto {}^t(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \xrightarrow{f} {}^t(r^2 \cos \varphi \sin \varphi, r^2) = r^2 {}^t\left(\frac{1}{2} \sin(2\varphi), 1\right).$$

Halbgeraden werden somit auf Halbgeraden abgebildet und Kreise ( $r=\text{const}$ ) auf Strecken parallel zur u-Achse. Stets ist  $|v| < \frac{|u|}{2}$ . D.h. Bildf liegt zwischen den beiden Geraden  $v=\frac{1}{2}u$  und  $v=-\frac{1}{2}u$ . Außerhalb dieser Geraden werden jeweils 4 Punkte des x-y-Raumes auf denselben Punkt des u-v-Raumes abgebildet. Es sind  $(x,y)$ ,  $(-x,-y)$ ,  $(y,x)$  und  $(-y,-x)$  wie man sieht. Die Invertierbarkeitsbedingung für die totale Ableitung führt auch auf diese beiden Geraden.

Jetzt aber zur **rechnerischen Bestimmung** der Umkehrabbildung. Unser Ansatz führt auf das Gleichungssystem:

$\begin{aligned} xy &= u \\ x^2 + y^2 &= v \end{aligned}$	$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{u}{x}\right)^2 &= v \\ y^2 + \left(\frac{u}{y}\right)^2 &= v \end{aligned}$	$\begin{aligned} x &= \varepsilon_1 \sqrt{\frac{v}{2} + \varepsilon_2 \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 - u^2}} \\ y &= \varepsilon_1 \text{sign}(u) \sqrt{\frac{v}{2} - \varepsilon_2 \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 - u^2}} \end{aligned}$
-----------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Hierbei ist  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$  und  $\text{sign}(u)$  ist das Vorzeichen von u. Man prüft nach, dass diese vier Lösungen die beiden Bedingungen erfüllen. So wurden auch die richtigen Vorzeichenkombinationen bestimmt.

Die Formeln zeigen, dass  $v^2 \geq 4u^2$  gelten muß, wie bereits gezeigt. Auf dem Rande entstehen Probleme mit der Ableitung. Selbst in diesem einfachen Fall ist die Formel relativ kompliziert. Unser allgemeiner



Satz wird eine beträchtliche Reduzierung des Aufwandes bewirken auf Kosten der Angabe einer expliziten Formel.

(4.1.12) Jetzt zum allgemeinen Resultat:

**Der Satz über die Existenz der lokalen inversen Abbildung.**

Sei	a) $V$ Banachraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ , $\dim V < \infty$ und $U \subset V$ offen.
	b) $f: U \rightarrow V$ eine $C^1$ -Abbildung, also in $U$ stetig differenzierbar.
	c) $x_0 \in U$ und $y_0 = f(x_0)$ . Also $(x_0, y_0) \in \text{Graph}(f)$
!!!!	d) Für $x_0$ aus d) sei $Df(x_0)$ Vektorraumisomorphismus.
Dann	ist $f$ lokal um $(x_0, y_0)$ invertierbar. Genauer:
	i) $\exists$ eine offene Umgebung $U(x_0)$ , für die die Restriktion $f _{U(x_0)} : U(x_0) \rightarrow f(U(x_0))$ bijektiv ist.
	ii) $f(U(x_0))$ ist auch offen und die Umkehrabbildung ist auch $C^1$ .
	iii) Ist $f$ in $U$ $C^p$ mit $p > 1$ , <b>dann</b> ist auch die Umkehrabbildung $C^p$ .

(4.1.13) Unter den zu erfüllenden Voraussetzungen ist insbesondere d) wichtig. Inhaltlich läßt sich der Satz so zusammenfassen: **Ist die Tangentenapproximation umkehrbar, dann gilt das lokal auch für die Abbildung, die approximiert wird.** Das ist plausibel und zufriedenstellend. Beachten Sie, dass die lineare Algebra erlaubt, Bedingung d) in andere gleichwertige Formen zu bringen, wie  $\text{Rang} Df(x_0) = \dim V$  oder  $\text{Kern} Df(x_0) = 0$  usw. So hat man zahlreiche Möglichkeiten, im konkreten Fall zu prüfen, ob d) erfüllt ist oder nicht. Über die tatsächliche Größe von  $U$ , macht der Satz keine Aussage.

Denken Sie auch daran, daß  $x_0$ , zum Urbildbereich von  $f$  gehört, wogegen die inverse Abbildung für  $y_0 = f(x_0)$  zu definieren ist.

(4.14) **Zum Beweis.** Dieser erfolgt in drei Schritten. Der erste hat vorbereitenden Charakter. Der zweite gibt i). Der Rest folgt im dritten Schritt.

1. O.B.d.A darf man  $x_0 = y_0 = 0$  wählen. (Betrachten Sie einfach die Funktion  $g$  mit  $f(x) = g(x - x_0) - y_0$  anstelle von  $f$ . Man kann nach  $g$  auflösen. Dann multipliziert man  $g$  noch mit  $(Dg(0))^{-1}$ . Die entstehende Funktion hat auch noch die totale Ableitung  $\text{id}_V$ ). D.h. wir dürfen auch  $Df(0) = \text{id}_V$  voraussetzen. Kurz:  $f$  ist gleich der identischen Abbildung plus einer kleinen Abweichung. Die Tangentenerlegung lautet  $f(0 + \Delta x) = 0 + \Delta x + \dots$
2. Jetzt müssen wir die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes nacheinander durchgehen. Als Banachraum wählen wir  $V$  selbst. Die zugehörige Teilmenge  $M$  soll eine abgeschlossene Kugel sein:

$$M = \bar{B}_a(0) = \{x \mid x \in V, \|x\| \leq a\}.$$

Und als Operator wählen wir  $x \mapsto Tx = T_y x = y + x - f(x)$ . Denken sie daran:  $y$  ist äußerer Parameter. Ein Fixpunkt  $x$  erfüllt  $y = f(x)$ , löst also die Gleichung wie gewünscht. Oder  $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ .

Klar gilt  $T: M \rightarrow V$ . Aber auch  $M \rightarrow M$ ? Wir setzen  $g(x) = x - f(x)$  und wählen dann  $a$  so klein, daß  $\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}$  ist für  $\|x\| \leq a$ . Da  $f$  und damit  $g$  beide  $C^1$  sind und  $Dg(0) = 0$  ist nach dem ersten Schritt, ist das möglich. Mit dem Satz vom beschränkten Zuwachs folgt:

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|g(x) - g(0)\| \leq \frac{1}{2} \|x\| \quad \text{für alle } x \text{ mit } \|x\| \leq a. \quad \text{Also} \\ \|T_y x\| &= \|y + g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2} \|x\| \end{aligned}$$

Für  $y$  mit  $\|y\| \leq \frac{a}{2}$  gilt daher  $T_y : \bar{B}_a(0) \rightarrow \bar{B}_a(0)$ , also  $T_y : M \rightarrow M$  wie verlangt. Es bleibt die Frage, ob  $T_y$  auch **kontrahierend** ist. Dazu rechnet man:

$$\|T_y x_1 - T_y x_2\| = \|x_1 - x_2 - f(x_1) + f(x_2)\| = \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

nach dem Satz vom beschränkten Zuwachs.  $T_y$  ist somit kontrahierend und erfüllt alle Eigenschaften des Fixpunktsatzes. Der eindeutige Fixpunkt existiert und löst wie gewünscht die Gleichung  $y = f(x)$  mit  $x \in \bar{B}_a(0)$ .

- 3) Im dritten Schritt ist schließlich zu zeigen, daß die so gefundenen Lösungen  $y(x) = f^{-1}(y)$  wieder  $C^1$  sind. Diesen restlichen Teil lassen wir hier aus.

□ Wie steht es mit der Invertierbarkeit der nachfolgenden zwei Abbildungen? Wenden Sie den Satz an und analysieren Sie das Ergebnis genauer.

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix} \quad G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

## 7.4.2 Das Theorem über die lokale Existenz implizit definierter Funktionen.

Zunächst wieder einige Beispiele:

(4.2.1) Hat man ein Skalarfeld  $s$  der Ebene und die Gleichung einer zugehörigen Niveaukurve  $s(x, y) = c$ , dann erhebt sich die Frage, ob man diese zumindest lokal nach einer Variablen, sagen wir  $y$ , auflösen kann, so wie  $x^2 + y^2 = r^2$  zu  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  aufgelöst wird. Die Auflösung definiert dann eine Funktion  $x \mapsto y = y(x)$ , deren Graph die Niveaukurve oder zumindest ein Teil derselben ist. Und der zugehörige Rechenausdruck erfüllt die Gleichung  $s(x, y(x)) = c$ .

(4.2.2) Sei  $\vec{r}(t)$  eine Kurve in einem  $n$ -dimensionalen Raum, die eine Gleichung  $\vec{f}(\vec{r}(t), t) = \vec{c}$  erfüllt. Kann man nach  $\vec{r}$  auflösen? Höchstens, wenn auch  $\vec{c}$   $n$ -dimensional ist. Die Kurve ist nicht explizit gegeben, sondern implizit über die gestellte Bedingung. Beispiel:  $(t, \vec{r}) \mapsto \vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \vec{a}t$ . Was ergibt  $\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{b}$  durch Auflösen?

(4.2.3) Unter welche Umständen ist so eine Auflösung - also die Bestimmung einer Abbildung durch eine Bedingung - allgemein möglich? Dabei wollen wir natürlich für  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  wieder vektorielle Variable zulassen. Ist der Wert  $\vec{y}$   $m$ -dimensional, so benötigt man offenbar ebenso viele skalare Bedingungen. Bei  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  hat man **eine** skalare Gleichung, kann also nur nach einer Variablen auflösen, etwa nach  $z$ . Nimmt man als zweite Gleichung  $x+y+z=0$  hinzu, so kann man beispielsweise nach  $y$  und  $z$  auflösen, hat also  $y=y(x)$  und  $z=z(x)$  zu erwarten.

Dagegen sind die Dimensionen von Urbildraum und Werteraum der resultierenden Abbildung nicht mehr gekoppelt wie bei der inversen Abbildung.

(4.2.4) Der nachfolgende Satz - das **Theorem über die impliziten Funktionen** - gibt die Antwort auf unser Problem, wieder in Form einer Aussage zur lokalen Existenz.

Seien	a)	$E, F$ und $G$ Banachräume endlicher Dimension
	b)	$U \subset E$ und $V \subset F$ offen. $\dim F = \dim G$ und
	c)	$\vec{s} = (U \times V, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto s(\vec{x}, \vec{y}), G)$ eine $C^1$ -Abbildung
	!!	d) $\vec{c} \in G$ und $(\vec{a}, \vec{b}) \in U \times V$ mit $\vec{s}(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{c}$
	!!!	e) Für $(\vec{a}, \vec{b})$ aus d) sei die partielle Ableitung $D_{\vec{y}} \vec{s}(\vec{a}, \vec{b})$ Isomorphismus.
Dann	gibt es eine Umgebung $U_0 \subset U$ von $\vec{a}$ und eine auf $U_0$ eindeutig bestimmte Abbildung $g: U_0 \rightarrow V$ mit $g(\vec{a}) = \vec{b}$ , derart, dass $\vec{s}(\vec{x}, g(\vec{x})) = \vec{c}$ für all $\vec{x} \in U_0$ .	

D.h.  $\vec{y} = g(\vec{x})$  ist lokale Auflösung von  $\vec{s}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{c}$  um  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

(4.2.5) Zum Beweis betrachten wir die folgende Abbildungskette mit zwischengeschaltetem Graphen von  $\vec{s}$ :

$$(\vec{x}, \vec{y}) \xrightarrow{I} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{s}(\vec{x}, \vec{y})) \xrightarrow{P} (\vec{x}, \vec{s}(\vec{x}, \vec{y}))$$

Wir setzen  $\Phi = P \circ I$ . Insbesondere ist  $\Phi(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c})$ . Beispiel (4.1.7) erläutert diese Konstruktion. Angenommen zu  $\Phi$  existiert ein lokales Inverses  $\Phi^{-1}$  um  $(\vec{a}, \vec{c})$ . Insbesondere ist  $\text{pr}_1(\Phi^{-1}(\vec{x}, \vec{w})) = \vec{x}$  und  $\Phi^{-1}(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b})$ . Weiter setzen wir  $\text{pr}_2(\Phi^{-1}(\vec{x}, \vec{w})) = \vec{g}(\vec{x})$ . Dann bilden wir die folgende Zuordnung:

$$\vec{x} \mapsto \vec{i}_{\vec{c}}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{c}) \mapsto \Phi^{-1}(\vec{x}, \vec{c}) = (\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) \mapsto \text{pr}_2(\Phi^{-1}(\vec{x}, \vec{c})) = \vec{g}(\vec{x}) = \vec{y}$$

Wenden wir  $\Phi$  auf  $\Phi^{-1}(\vec{x}, \vec{c}) = (\vec{x}, \vec{g}(\vec{x}))$  an, so folgt  $(\vec{x}, \vec{c}) = (\vec{x}, \vec{s}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})))$ . D.h. aber  $\vec{g}(\vec{x})$  erfüllt die gewünschte Gleichung!

Bleibt die Frage: Wann existiert nun  $\Phi^{-1}$  lokal um  $(\vec{a}, \vec{c})$ ? Wir wenden den Satz über die inverse Abbildung an. Wir haben bereits  $\Phi(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{c}$ . Zu untersuchen bleibt, wann die totale Ableitung  $D\Phi(\vec{x}, \vec{y})$  Isomorphismus ist. Wir bilden die partiellen Ableitungen bezüglich der beiden durch  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  bestimmten Teilräume, also nach E und F, und finden die folgende Blockmatrix:

$$D\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} id_E & \vec{0} \\ \vec{s}_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) & \vec{s}_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \vec{s}_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) : E \rightarrow G \quad \text{linear} \\ \vec{s}_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) : F \rightarrow G \quad \text{linear} \end{array}$$

Sofern  $\vec{s}_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y})$  als lineare Abbildung invertierbar ist, kann man die folgende Blockmatrix bilden :

$$N = \begin{pmatrix} id_E & \vec{0} \\ -(\vec{s}_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \circ \vec{s}_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) & (\vec{s}_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \end{pmatrix}$$

Man prüft sofort nach, dass N die inverse lineare Abbildung zu  $M = D\Phi(\vec{x}, \vec{y})$  ist. Damit ist alles auf die Invertierbarkeit von  $\vec{s}_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y})$  zurückgeführt und der Satz über die impliziten Funktionen folgt.

(4.2.6) **Wann wendet man den Satz an?** Immer wenn eine rechnerische Auflösung nicht möglich ist oder aber das Resultat schwer zu diskutieren. Und immer dann, wenn man ein Kriterium für ein allgemeines Problem sucht.

(4.2.7) Beispiel (für ein Kriterium): Gegeben eine Differentialgleichung  $F(y'(x), y(x), x) = 0$ , die nicht in expliziter Form ist.  $N=1$ . Wo ist diese Gleichung explizit? Sei  $(v_0, y_0, x_0)$  ein Punkt mit  $F(v_0, y_0, x_0) = 0$ . Wir bilden die partielle Ableitung  $\frac{\partial F}{\partial v}(v_0, y_0, x_0)$ . Ist diese Zahl ungleich Null, so liegt lokale Auflösbarkeit nach  $v=y'$  vor, die Gleichung ist in diesem Punkt explizit.

□ Gehen Sie alte Beispiele nicht expliziter Differentialgleichungen durch.

#### (4.2.8) Strategie zur Anwendung des Satzes:

1. Man beginnt mit der Dimensionsbedingung, überzeugt sich also, dass das zu bestimmende  $\vec{y}$  ebensoviele Komponenten hat wie  $\vec{s}$ .
2. Anschließend bestimmt man die einen interessierenden Ausgangspunktpaare  $(\vec{a}, \vec{b})$  mit  $\vec{s}(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{c}$ .
3. Parallel dazu bildet man die partielle Ableitung  $\vec{s}_{\vec{y}}$  und bestimmt die kritischen  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  für die der Rang von  $\vec{s}_{\vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  **nicht** maximal gleich  $\dim(F)$  ist.
4. Punkte  $(\vec{a}, \vec{b})$  aus 2., die nicht nach 3. verboten sind, erlauben dann eine lokale Auflösung.

(4.2.9) Beispiel (mit ebenen Vektoren aus  $\mathbb{R}^2$ ):

$$\begin{array}{ll}
 (t, \vec{r}) \mapsto \vec{s}(t, \vec{r}) = t(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}. & t(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r} = \vec{c} \\
 & \text{soll nach } \vec{y} = \vec{r} \text{ aufgelöst werden. } \vec{a} \neq \vec{0}
 \end{array}$$

In Komponenten ergibt das

$$t(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r} = \begin{pmatrix} t(a_1 y_1 + a_2 y_2) y_1 \\ t(a_1 y_1 + a_2 y_2) y_2 \end{pmatrix} \quad \vec{s}_{\vec{y}}(t, \vec{y}) = t \begin{pmatrix} 2a_1 y_1 + a_2 y_2 & a_2 y_1 \\ a_1 y_1 & a_1 y_1 + 2a_2 y_2 \end{pmatrix}$$

Die übliche Determinantenbedingung für den Rang einer  $2 \times 2$ -Matrix gibt  $t(a_1 y_1 + a_2 y_2) = 0$  für zu kleinen Rang. D.h.  $t=0$  oder  $\vec{a} \cdot \vec{y}=0$ . Ist das Skalarprodukt ungleich Null, kann man daher für  $t \neq 0$  nach  $\vec{r}$  oder  $y_1$  und  $y_2$  auflösen.

- Versuchen sie das einmal rechnerisch zu realisieren, also folgendes System aufzulösen:

$$\begin{aligned}t(a_1 y_1 + a_2 y_2) y_1 &= c_1 \\t(a_1 y_1 + a_2 y_2) y_2 &= c_2\end{aligned}$$