Darstellungstheorie

Manfred Hörz

Die (lineare) Darstellungstheorie versucht schwer zu durchschauende Eigenschaften von gewissen Gruppen (oder Algebren) durch strukturerhaltende Abbildungen auf Matrizen, deren Eigenschaften gut untersucht sind zu klären. Ist in einem Vektorraum eine Basis vorgegeben, so können (quadratische) Matrizen als Beschreibungen von Automorphismen (bijektive strukturerhaltende Abbildungen, d.h. bijektive lineare Abbildungen) des Vektorraums in sich selbst angesehen werden.

So spielen Darstellungen in der Elementarteilchenphysik und Atomphysik eine wichtige Rolle, ebenso in der Molekülphysik und Chemie, aber auch innerhalb der Mathematik, wo sie zur ihre Anfänge hatte (Frobenius), ist sie von eminenter Bedeutung. Beispielsweise wurde beim Beweis des Primzahlsatzes von Dirichlet (dass jede arithmetische Folge unendlich viele Primzahlen als Glieder enthält) oder beim Beweis des großen Satzes von Fermat ($x^n+y^n=z^n, n>2$ keine Lösung in $\mathbb{N}$) die Darstellungstheorie verwendet.

Beispiel 1: Sei K ein Körper, der auch als Vektorraum (Koordinatenraum) der Dimension 1 aufgefasst werden kann. Die invertierbaren 1 x 1 Matrizen, also i.A. die Zahlen, sind dann aus $K^*=K\setminus\{0\}$, die die „Automorphismen“ von $K\rightarrow K$ bezeichnen, die allgemeine lineare Gruppe bzgl. der Multiplikation: $GL(1,K)$. Die Darstellung, die jedem Gruppenelement $g\in G$ den identischen Automorphismus $id_{K^*}=1$ zuordnet, heißt *triviale Darstellung:* $\mathbf{1}: g\mapsto 1$

Beispiel 2: Eine Darstellung der zyklischen Restklassengruppe $\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{[0],[1]\}$ mit der Addition ist die Abbildung auf die komplexe multiplikative Einheitengruppe $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, die das Gleiche ist wie die Gruppe der Automorphismen $GL(1,\mathbb{C})$:
$[0]\mapsto e^{\pi i 0}=1=id_{\mathbb{C}}$ $\quad [1]\mapsto e^{\pi i\cdot 1}=-1$. Dieser Homomorphismus (die Darstellung) ist sogar injektiv. Man nennt die Darstellung dann *treu*. Diese Darstellung hat die *Dimension 1*, da der Vektorraum $\mathbb{C}$ als Koordinatenraum über $\mathbb{C}$, der sogenannte *Darstellungsraum* die Dimension 1 hat.

Definition: Ein Homomorphismus $\rho:(G,*)\rightarrow GL(V)=Aut(V)$ von einer Gruppe G in die Automorphismengruppe $(Aut(V),\circ)$ eines Vektorraums V über einem Körper K heißt **lineare Darstellung von G**. Es gilt also: $\rho(g*h)=\rho(g)\circ\rho(h)$

V heißt der **Darstellungsraum** und die **Dimension (Grad) der Darstellung** wird als Dimension des Darstellungsraums definiert: $dim\,\rho:=dim\,V$.

Ist eine Basis von V gegeben, so können die Automorphismen durch Matrizen mit Einträgen aus K angegeben werden. Die „general linear group“ $GL(V)$ ist dann isomorph zu $GL(n,K)$ der allgemeinen linearen Gruppe der invertierbaren Matrizen, mit $n=dim\,V$.
Ist der Darstellungshomomorphismus injektiv (Monomorphismus), so nennt man die Darstellung **treu**.

Satz: Für jede Darstellung $\rho: G\rightarrow GL(V)$ ist auch $det\,\rho: G\rightarrow GL(1,K);\, g\mapsto det\,\rho(g)$ eine (eindimensionale) Darstellung.

Beweis: $\det\rho(g*h)=\det(\rho(g)\circ\rho(h))=\det\rho(g)\cdot\det\rho(h)$

Zwei lineare Darstellungen $\rho_1:G\rightarrow GL(V_1),\rho_2:G\rightarrow GL(V_2)$ gleicher Dimension heißen **äquivalent** oder **isomorph** ($\rho_1\sim\rho_2$), wenn es einen Vektorraum-Isomorphismus $\tau:V_1\rightarrow V_2$ gibt, sodass für alle $g\in G$ gilt: $\rho_1(g)=\tau^{-1}\rho_2(g)\tau$, d.h. dass die Matrizen von $\rho_1(g)$ und $\rho_2(g)$ für alle g ähnlich sind:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\tau} & V_2 \\ \rho_1(g)\downarrow & & \downarrow\rho_2(g) \\ V_1 & \xleftarrow[\tau^{-1}]{} & V_2 \end{array}$$ (kommutierendes Diagramm)

Bemerkung: Ist e das neutrale Element der Gruppe G und g^{-1} das Inverse des Gruppenelements g , so gilt (1) $\rho(e)=id_V$ (2) $\rho(g^{-1})=\rho(g)^{-1}$

Beweis:
(1) Sei $w\in V$ beliebig und $v=\rho(e)^{-1}w\in V$, dann ist
$w=\rho(e)v=\rho(e*e)v=(\rho(e)\circ\rho(e))v=\rho(e)(\rho(e)v)=\rho(e)w$, also ist $\rho(e)=id_V$.
(2) $\rho(g)^{-1}=id_V\circ\rho(g)^{-1}=\rho(e)\circ\rho(g)^{-1}=\rho(g^{-1}*g)\circ\rho(g)^{-1}=(\rho(g^{-1})\circ\rho(g))\circ\rho(g)^{-1}=$
$=\rho(g^{-1})\circ(\rho(g)\circ\rho(g)^{-1})=\rho(g^{-1})\circ id_V=\rho(g^{-1})$.

Bemerkung: Die Äquivalenz von Darstellungen ist eine Äquivalenzrelation und zerlegt die Menge aller Darstellungen in Klassen. Treue und Dimension sind Klasseneigenschaften, d.h. sie bleiben erhalten unter Transformation in äquivalenten Darstellungen.

Beispiel 3: Eine treue 2-dimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/nZ$ ist

$$\rho:Z_n\rightarrow GL(2,\mathbb{R});[k]\mapsto\begin{pmatrix}\cos(\frac{2\pi k}{n}) & -\sin(\frac{2\pi k}{n})\\ \sin(\frac{2\pi k}{n}) & \cos(\frac{2\pi k}{n})\end{pmatrix}$$ mit $n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}_0$

Ist $\zeta_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ die n-te primitive komplexe Einheitswurzel, so ist

$\rho*:\mathbb{Z}_n\rightarrow GL(1,\mathbb{C})=\mathbb{C}^*;[k]\mapsto\zeta_n^k$ eine treue Darstellung der Restklassengruppe der Dimension 1.

Definition: Sei $U\subseteq V$ ein Unterraum von V und $\rho:G\rightarrow GL(V)$ eine lineare Darstellung von G auf dem K-Vektorraum V. Der Unterraum U heißt **invariant (unter ρ)** oder **ρ-invariant** oder **Unterdarstellung von V**, gdw. $\bigwedge_{g\in G}\rho(g)U=:gU\subseteq U$, d.h. $\bigwedge_{g\in G}\bigwedge_{u\in U}\rho(g)u\in U$.

Bemerkung:

(1) Natürlich ist V auch eine Unterdarstellung (invarianter Unterraum) von V.

(2) Der triviale Unterraum $\{0\}$ ist stets Unterdarstellung (invarianter Unterraum) von V: denn $\bigwedge_{g\in G}\bigwedge_{u\in\{0\}}\rho(g)u\in\{0\}$, da $\rho(g)0=0$.

Definition: Eine Darstellung $\rho: G\to GL(V)$ bzw. der Darstellungsraum V heißt **irreduzibel**,

wenn es nur die beiden ρ-invarianten Unterräume $\{0\}$ und V gibt, andernfalls heißt sie **reduzibel**.

Bemerkung: Die Darstellungstheorie bemüht sich um die Klassifikation irreduzibler (einfacher) Darstellungen. Die irreduziblen Darstellungen einer Gruppe sind sozusagen die Grundbausteine der Darstellungen der Gruppe.

Definition: $V_1\oplus V_2:=\{(v_{1,}v_2), v_1\in V_{2,} v_2\in V_2\}$ heißt die **direkte Summe** der Räume V_1 und V_2 .

Sind $\rho_1: G\to GL(V_1)$ und $\rho_2: G\to GL(V_2)$ zwei Darstellungen der Gruppe G,

dann ist $\rho_1\oplus\rho_2: G\to GL(V_1\oplus V_2)$, $(\rho_1\oplus\rho_2)(g)(v_1,v_2):=(\rho_1(g)v_1,\rho_2(g)v_2)$ oder kurz

$\rho_1\oplus\rho_1(g)=(\rho_1(g),\rho_2(g))$ die **direkte Summe der Darstellungen von** ρ_1 **und** ρ_2 , die

wieder eine Darstellung von G ist.

In Matrixschreibweise ist $(\rho_1(g),\rho_2(g))=\begin{pmatrix}\rho_1(g) & 0\\ 0 & \rho_2(g)\end{pmatrix}$, da

$$\left(\begin{pmatrix}\rho_1(g) & 0\\ 0 & \rho_2(g)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}\rho_1(g)v_1\\ \rho_2(g)v_2\end{pmatrix}^T\Leftrightarrow(v_1,v_2)\cdot\begin{pmatrix}\rho_1(g) & 0\\ 0 & \rho_2(g)\end{pmatrix}=(\rho_1(g)v_1,\rho_2(g)v_2)$$

Für eine erweiterte direkte Summe $\rho_1\oplus\rho_2\oplus\rho_3\oplus\ldots\oplus\rho_n(g)$ gilt in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix}\rho_1(g) & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \rho_2(g) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \rho_3(g) & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \rho_n(g)\end{pmatrix}$$

Definition: Eine Darstellung $\rho: G\to GL(V)$ heißt **vollständig reduzibel** oder **vollreduzibel**,

wenn sie irreduzibel ist oder wenn sie sich als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen

schreiben lässt: $\rho=\bigoplus_{i\in I}\rho_i$, I Indexmenge und ρ_i irreduzibel.

Beispiel: $G=\mathbb{Z}_3$ $\quad \rho:\mathbb{Z}_3\to GL(1,\mathbb{C})=\mathbb{C}^*;[k]\mapsto e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot k}$ ist treue Darstellung vom Grad 1.

$\zeta_3:=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ist die dritte primitive Einheitswurzel. Das Bild $\rho(\mathbb{Z}_3)=\{1,\zeta_3,\zeta_3^2\}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_3=\{[0],[1],[2]\}$.

Eine weitere treue Darstellung vom Grad 2 derselben Gruppe wäre etwa:

$\rho_1:\mathbb{Z}_3\to GL(2,\mathbb{C});\rho_1([k]):=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta_3^k\end{pmatrix}$, die äquivalent ist zur treuen Darstellung ρ_2 vom selben Grad : $\rho_2:\mathbb{Z}_3\to GL(2,\mathbb{C});\rho_2([k]):=\begin{pmatrix}\zeta_3^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Die Matrix $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ mir ihrer Inversen $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ stellt den notwendigen Isomorphismus für die Äquivalenz dar.

Die Darstellung ρ_1 ist reduzibel. Sie lässt sich schreiben als direkte Summe von $\rho_0\oplus\rho$, wobei ρ_0 die triviale Darstellung ist mit $\rho_0([k])=id_{\mathbb{C}}=:1$: $\rho_0\oplus\rho=\begin{pmatrix}\rho_0(g) & 0\\ 0 & \rho(g)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta_3^k\end{pmatrix}=\rho_1$ und $\rho\oplus\rho_0=\begin{pmatrix}\rho(g) & 0\\ 0 & \rho_0(g)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\zeta_3^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\rho_2$.

Werden die Drehungen im $\mathbb{R}^2$ ausgeführt, so lauten die Drehmatrizen um den Winkel α :

$D_\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$. Für die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_3$ ergibt sich dann die Darstellung

$\rho:\mathbb{Z}_3\to GL(2,\mathbb{R});[k]\mapsto\begin{pmatrix}\cos(\frac{2\pi}{3}\cdot k) & -\sin(\frac{2\pi}{3}\cdot k)\\ \sin(\frac{2\pi}{3}\cdot k) & \cos(\frac{2\pi}{3}\cdot k)\end{pmatrix}=D_{\frac{2\pi}{3}\cdot k}$ vom Grad 2. Diese Darstellung ist irreduzibel: Jeder echte nichttriviale Unterraum U von $\mathbb{R}^2$ ist vom Grad 1 und hat die Gestalt

$U=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2/\bigvee_{\lambda\in\mathbb{R}}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\right\}$, wobei $a_1\neq0\vee a_2\neq0$. Sei $k=1$. Es wird gezeigt, dass $D_{\frac{2\pi}{3}}U\not\subseteq U$, dass also U nicht ρ-invariant ist. Sei $0\neq\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\in U\Rightarrow\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$ mit $\lambda\neq0$

$D_{\frac{2\pi}{3}}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\cos(\frac{2\pi}{3})-\lambda a_2\sin(\frac{2\pi}{3})\\ \lambda a_1\sin(\frac{2\pi}{3})+\lambda a_2\cos(\frac{2\pi}{3})\end{pmatrix}\notin U$, denn sonst würde gelten mit $\cos(\frac{2\pi}{3})=:c_1$ und

$\sin(\frac{2\pi}{3})=:c_2$: (I) $\lambda a_1 c_1-\lambda a_2 c_2=\lambda_1 a_1$ und (II) $\lambda a_1 c_2+\lambda a_2 c_1=\lambda_1 a_2 \overset{a_2 I - a_1 II}{\Rightarrow}$

$\lambda(a_1 a_2 c_1-a_1^2 c_2)=\lambda(a_2^2 c_2+a_1 a_2 c_1)\overset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow}-a_1^2 c_2=a_2^2 c_2 \Rightarrow c_2(a_2^2+a_1^2)=0$. Das ist aber nicht

möglich, da $c_2=\sin(\frac{2\pi}{3})\neq 0$ und $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\neq 0$. Also ist ρ irreduzibel.

Bemerkung:
1) Darstellungen vom Grad 1 sind immer irreduzibel, da der Darstellungsraum nur den trivialen Unterraum und sich selbst als Unterraum hat.
2) die triviale Darstellung mit Darstellungsraumdimension größer 1 ist reduzibel, da für jeden Unterraum U gilt: $id_V U \subseteq U$.

Definition: Sei G Gruppe. Zwei Gruppenelemente $g_1, g_2 \in G$ heißen **konjugiert** zueinander, wenn es ein Gruppenelement $h \in G$ gibt, sodass gilt: $g_1 = h g_2 h^{-1}$.

$G g G^{-1}=\{h g h^{-1} / h \in G\}$ heißt die **Konjugationsklasse von g**.

Bemerkung: Da die Konjugation eine Äquivalenzrelation ist, wird G in Konjugationsklassen vollständig zerlegt.

Satz: Jede Darstellung einer endlichen Gruppe ist vollreduzibel.

Satz: Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen derselbigen.

Definition: Sei $\rho: G \rightarrow GL(n, K)$ eine lineare Darstellung in Matrixform.

Die Abbildung $\chi_\rho: G \rightarrow K; g \mapsto \chi_\rho(g)=spur(\rho(g))$ heißt **Charakter von ρ** .

Beispiel: $\rho: \mathbb{Z}_3 \rightarrow GL(2, \mathbb{C}); \rho([k]):=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_3^k \end{pmatrix}$ hat den Charakter $\chi_\rho = 1+\zeta_3^k \quad (k=0,1,2)$