Bolzano als Vorläufer der mathematischen Logik.[1]

Von Walter Dubislav (Technische Hochschule Berlin).

Betrachtet man die Aufnahme, welche die Lehren großer Forscher bei ihrer Mitwelt finden, ein wenig näher, dann hat man vor allem zwei Arten ihrer Wirkung festzustellen:

In den Forschungen von erster Art der Wirkung werden Gedankengänge entwickelt oder weitergebildet, zu denen die einschlägigen wissenschaftlichen Untersuchungen gleichsam drängen. Ihre Urheber erscheinen deshalb als die u. U. überschwänglich gepriesenen Repräsentanten des wissenschaftlichen Bewußtseins ihrer Zeit. Denn ihnen glückte es, gerade das zu ermitteln, was jeder ihrer Fachgenossen suchte, selbst jedoch nicht finden konnte.

In den Forschungen von zweiter Art der Wirkung aber werden Theorien aufgestellt, die dem Verständnis der jeweiligen Forschergeneration weit vorauseilen und die deshalb nicht mit anderen zeitgenössischen Untersuchungen in fruchtbare Wechselwirkung treten. Ihren Urhebern widerfährt infolgedessen meist das herbe Geschick, mit ihren tiefen Forschungen fast unbeachtet zu bleiben oder völlig verkannt zu werden.

Auch Bernard Bolzano, dessen 150. Geburtstag die wissenschaftliche Welt am 5. Oktober 1931 feiert, hatte dieses Los.

Wenn wir uns im folgenden anschicken, in gedrängter Kürze seine größten Leistungen auf dem Gebiete der exakten, vorzugsweise an der Mathematik orientierten Logik zu würdigen, dann wollen wir das in seinem Geiste tun. Das heißt, wir werden seine Forschungen weder wie der Historiker mit liebevollem Eingehen auf alle, häufig auch irrtümlichen Einzelheiten behandeln, noch sie nach Art mancher von Bolzano scharf bekämpften Philosophen in eine Wolke dunkler Orakelsprüche einhüllen. Wir werden vielmehr versuchen, seine tiefsten einschlägigen Leistungen, erforderlichenfalls von hebbaren Mängeln befreit, in schlichter, für sich selbst sprechen-

[1]) Eine Würdigung anläßlich seines 150. Geburtstages. Bernard Bolzano wurde zu Prag am 5. Oktober 1781 geboren. Er starb ebenda am 18. Dezember 1848.

der Klarheit darzustellen, wobei wir aber weder verleugnen wollen noch können, daß wir uns dabei an den Resultaten der mathematisch-logischen Forschungen orientieren, nicht aber an den schwankenden Ergebnissen einer modernen Systemphilosophie.

Die Logik oder, wie Bolzano sie zumeist nennt, die Wissenschaftslehre, ist ihm zufolge eine Wissenschaft gleichsam von zweiter Stufe. Und zwar soll sie — darauf läuft die Bolzano'sche Charakterisierung in der Hauptsache hinaus — diejenige Disziplin einschließlich vieler dazu erforderlicher Hilfsuntersuchungen sein, in der vorzugsweise die Beweisverfahren (u. a. die Arten der „Beweise" sensu stricto), die Darstellungsverfahren (u. a. die Arten der Definitionen) wie schließlich die Theorien- und Hypothesenbildung der Wissenschaft behandelt werden. Drei Leistungen auf dem Gebiete dieser Wissenschaftslehre sind es nun neben vielen anderen weniger wichtigen, die wir hier nicht behandeln, durch welche Bolzano für alle Zeit mit der mathematischen Logik verbunden bleibt.

1. Seine Entdeckung der heute sog. Aussage- oder Satzfunktionen.[1]) Die darauf fußende Entdeckung der ausschlaggebenden Wichtigkeit der Variablen für alles „Schließen" wie seine von diesen Entdeckungen abhängige Charakterisierung und Benützung der zwischen Aussagefunktionen obwaltenden Beziehungen, insonderheit der der Ableitbarkeit[2]) und der der Wahrscheinlichkeit.

2. Seine Ansätze zu einer Deskriptionstheorie zwecks Ausmerzung der mit den sogenannten Chimären verbundenen Pseudoprobleme.[3])

3. Seine Charakterisierung der, wie man heute nach B. Russell sagt, „immer wahren" bezw. „immer falschen" und „manchmal wahren und manchmal falschen" Aussagefunktionen.[4])

Seitdem Aristoteles[5]) einen „Schluß" als eine Aussage bezeichnet hat, in welcher, wenn etwas gesetzt (als wahr unterstellt) wird, etwas von diesem Gesetzten Verschiedenes sich notwendig dadurch ergibt, daß das Gesetzte ist, haben sich die Logiker und

---

[1]) Bolzano bezeichnete diese Gebilde als „Sätze mit veränderlichen Teilen" oder auch als „Sätze mit veränderlichen Vorstellungen". Vgl. B. Bolzano, *Wissenschaftslehre.* 1837 (Neudruck der Philosophischen Bibliothek, 1929 ff.). §§ 147, 154; siehe auch § 69, Absatz 4 wie ebenda Anm. Nr. 2 und § 108.

[2]) Die Bolzanosche Beziehung der Ableitbarkeit ist in der Hauptsache identisch mit der heute sogenannten Beziehung der formalen Implikation.

[3]) Vgl. B. Bolzano, *Wissenschaftslehre.* §§ 196, 225, 230 Anm., 234 Anm., 248 Anm., 252 Anm., 358, 259.

[4]) Vgl. B. Bolzano, *Wissenschaftslehre,* § 148.

[5]) Vgl. Aristoteles, *Anal. pr.* 24 b 10.

unter ihnen selbst Leibniz vergeblich bemüht, den „Schluß“ erschöpfend zu charakterisieren. Erst Bolzano glückte es, das auf Begriffe zu bringen, was in den Worten von Aristoteles mehr — wenn auch der Intention nach zutreffend — angedeutet als präsise angegeben ist. Er erkannte nämlich, daß das bündige „Schließen“, welches von irgendwelchen, meist als wahr unterstellten Aussagen seinen Ausgang nimmt, darauf beruht, daß man in diesen Aussagen Teile als variabel ansetzt, die man dann nach Maßgabe bestimmter Vorschriften, vorzugsweise von Einsetzungsvorschriften dergestalt behandelt, daß man zu wahren Aussagen gelangt, wenn die ersten Aussagen wahre Aussagen sind. Bolzano erkannte mit anderen Worten, daß das bündige Schließen gleichsam ein Operieren ist, das wahre Aussagen liefert, wenn man es auf wahre Aussagen anwendet, in denen Teile als variabel angesetzt werden.

Das haben wir nun mit Bolzano im einzelnen zu zeigen. Unseren Ausgang wollen wir von einem Beispiel nehmen, das auch Bolzano gelegentlich zu gleichem Zweck benutzt, und zwar von der üblichen Charakterisierung der Beziehung des Widerspruches zwischen zwei Aussagen. Man sagt gemeinhin, zwei Aussagen widersprechen einander, wenn sie simultan nicht beide wahr und nicht beide falsch sein können. Aber nun ist doch eine Aussage als solche, wenn man sie nur korrekt formuliert, nicht gelegentlich wahr und gelegentlich falsch. Sondern, wenn sie wahr ist, dann ist sie eben wahr, und wenn sie falsch ist, dann ist sie eben falsch. Aber niemals kann sie, da Ort- und Zeitangaben in der Syntax unserer Sprache bei korrekter Formulierung zum Subjekte zu ziehen sind, einmal falsch und einmal wahr sein. Die obige Formulierung ist also verfehlt. Man hat jedoch den Eindruck, daß in ihr mit den Worten „sein können“ etwas angedeutet wird, was es gilt, auf Begriffe zu bringen. Das hat nun Bolzano getan und damit eine klassische Entdeckung, nämlich die der sogenannten Aussagefunktionen gemacht. Eine Aussagefunktion charakterisiert er folgendermaßen, wobei wir die heute übliche Terminologie benutzen: Eine Aussagefunktion ist ein Gebilde, welches ein oder mehrere Leerstellen dergestalt enthält, daß, wenn man die Leerstelle nach Maßgabe einer Einsetzungsvorschrift ausfüllt, eine Aussage resultiert. Machen wir uns diese Charakterisierung an einem einfachen Beispiel klar! Man gehe von der Aussage aus: „Drei hat genau zwei Teiler“ und denke sich einen Teil dieser Aussage, und zwar die „drei“ durch ein Klammerpaar ersetzt, man erhält „( ) hat genau zwei Teiler“. Man gebe nun für dieses Gebilde mit einer Leerstelle — so nennt man das nichts umklammernde Klammerpaar — nachstehende Einsetzungsvorschrift an: Für das Zeichen „( )“ kann, wenn man will, innerhalb des Gebildes ein Zeichen gesetzt werden, sagen wir a, welches die Beschaffenheit besitzt, daß „a hat genau zwei Teiler“ eine Aussage ist. Wird nach Einsetzung eines derartigen Zeichens a in eine Aussagefunktion mit einer Leerstelle aus derselben eine wahre bezw. falsche Aussage, so sagt man, a befriedigt die Aussagefunktion bezw. befriedigt sie nicht. Die Leerstelle selbst bezeichnet man evtl. auch, wenn man sie durch x, y u.s.w. charakterisiert, als eine Variable.

Bolzano hat aber nicht nur diese Aussagefunktionen entdeckt, sondern auch sogleich die wichtigsten der zwischen ihnen obwaltenden Beziehungen zu charakterisieren gewußt. So definiert er zunächst die beiden Beziehungen der Verträglichkeit und Unverträglichkeit: Zwei Aussagefunktionen derselben Variablen x, sagen wir $f\hat{x}$ und $g\hat{x}$ heißen miteinander verträglich, wenn es einen Wert von x, sagen wir a, dergestalt gibt, daß sowohl fa wie ga wahre Aussagen sind. Andernfalls, wenn es also keinen Wert von x gibt, der sowohl $f\hat{x}$ als auch $g\hat{x}$ befriedigt, nennt man sie miteinander unverträglich. Er erweitert dann noch in naheliegenderweise diese Definitionen auf Aussagefunktionen mehrerer Variablen wie auf Systeme von solchen.

An Arten der Verträglichkeit unterscheidet er: 1) die Ableitbarkeit, 2) die Aequivalenz, 3) die Unterordnung und 4) die Verschlungenheit; an Arten der Unverträglichkeit: 1) die Ausschließung[1]), 2) die wechselseitige Ausschließung, 3) den Widerspruch (den kontradiktorischen Gegensatz) und 4) den Widerstreit (den konträren Gegensatz).

Die Beziehung der Ableitbarkeit charakterisiert er folgendermaßen: Man sage, aus $f\hat{x}$ sei $g\hat{x}$ ableitbar, wenn es 1) mindestens einen Wert a von x gibt, so daß fa und ga wahre Aussagen sind und wenn 2) die Menge der Werte von x, welche $f\hat{x}$ befriedigen, eine Teilmenge der Menge der Werte von x ist, welche $g\hat{x}$ befriedigen.

Damit hat Bolzano im wesentlichen diejenige Beziehung entdeckt, die man heute als formale oder generelle Implikation bezeichnet. Nur daß man in der mathematischen Logik, um Beweisführungen abzukürzen, um Fallunterscheidungen entbehrlich zu machen, bei der

[1]) Die Beziehung der Ausschließung ist unter den von Bolzano gemachten Voraussetzungen sowohl von der der Unverträglichkeit als auch von der der wechselseitigen Ausschließung, jedenfalls für Systeme von Aussagefunktionen, zu unterscheiden.

Charakterisierung der formalen Implikation die von Bolzano erhobene Forderung der Verträglichkeit fallen läßt. Damit im engsten Zusammenhange steht die ebenfalls erst in neuerer Zeit vereinbarte Festsetzung, daß die Nullmenge als Teilmenge jeder Menge betrachtet wird.

Ein Beispiel mag noch den Unterschied der Bolzano'schen Definition der Ableitbarkeit von der der formalen Implikation erläutern. Bekanntlich hat man Bx durch einen vollständigen Induktionsschluß zweiter Art für jede natürliche Zahl x bewiesen, wenn man zeigen kann: Sei n eine beliebige natürliche Zahl, dann gilt Bn unter der Induktionsvoraussetzung zweiter Art, daß Bx für jede natürliche Zahl x zutrifft, die kleiner als n ist. Denn unter dieser Voraussetzung gilt: (1). (x): „x ist eine natürliche Zahl, die kleiner als Null ist" $\cdot \supset \cdot$ Bx: $\supset \cdot$ Bo. (2). ist aber das Implikans des Implikans von (1), d. h. die Formel: „x ist eine natürliche Zahl, die kleiner als Null ist" eine falsche. Es gibt nämlich keine natürliche Zahl kleiner als Null. (3). gilt also auf Grund der Definition der Implikationsbeziehung Bo, und damit auch Bx für jede natürliche Zahl x. So kann man aber ersichtlich nur schießen, wenn man die Beziehung der Implikation an Stelle der Bolzano'schen Beziehung der Ableitbarkeit benutzt, denn für die letztere könnte (1) nie gelten.

Bolzano kommt aber nicht nur das Verdienst zu, diese Ableitbarkeitsbeziehung entdeckt zu haben, sondern er hat aus seiner Charakterisierung derselben auch gleich alle wichtigeren Konsequenzen gezogen. So hat er zum Beispiel erkannt, daß bei Zugrundelegung seine Charakterisierung (im Unterschiede zu der der formalen Implikation) aus (x): $fx \cdot \supset \cdot gx$ nicht folgt (x): $\sim gx \cdot \supset \cdot \sim fx$. Er hat deshalb die konventionellen Regeln der sogenannten Umkehrung teilweise bestritten und seinen Voraussetzungen entsprechend einwandfrei modifiziert. Am deutlichsten wird übrigens der Unterschied zwischen seiner Definition der Ableitbarkeitsbeziehung und der der formalen Implikation, wenn man die Negationen heranzieht. Die Negation von der Behauptung „Die Bolzanosche Beziehung zwischen $f\hat{x}$ und $g\hat{x}$ gilt", lautet nämlich „$f\hat{x}$ und $g\hat{x}$ sind unverträglich oder es gibt einen Wert a von x, so daß fa eine wahre und ga eine falsche Aussage ist." Die Negation von (x): $fx \cdot \supset \cdot gx$ besagt aber nur: „Es gibt einen Wert a von x, sodaß fa eine wahre und ga eine falsche Aussage ist".

Aber nicht genug damit, daß Bolzano diese Ableitbarkeitsbeziehung entdeckt und in ihren Konsequenzen verfolgt hat, es ist ihm auch noch gelungen, mit ihrer Benützung die im wesentlichen endgültige Charakterisierung des bündigen Schließens zu geben. Er erkannte nämlich, daß es zwei Arten von Ableitbarkeitsbeziehungen gibt. Erstens solche, zu deren Feststellung man lediglich logischer Kenntnisse bedarf, und zweitens solche, zu deren Feststellung außerlogische Kenntnisse herangezogen werden müssen. Die Ableitbarkeitsbeziehungen von erster Art nun bilden den geklärten Sinn dessen, was Aristoteles bei seiner Bestimmung andeutet, was aber erst Bolzano präzisieren konnte. Es blieb aber seinem Scharfsinne nicht verborgen, daß es noch eines Kriteriums der von ihm sogenannten logischen Kenntnisse bedarf, um seine Charakterisierung vollkommen zu machen. Dieses Kriterium jedoch, das man nur auf Grund eines Entscheidungsverfahrens oder auf Grund eines genau nach Ausgangsformeln und Operationsvorschriften umrissenen Axiomensystems der Logik geben kann, hat er nicht mehr ausfindig gemacht, da ihm die kalkülmäßige Nutzbarmachung seiner großen Entdeckungen verborgen blieb.

In engem Zusammenhange mit seiner Bestimmung der Ableitbarkeitsbeziehung steht sein Versuch, sie zu verallgemeinern, um zu einer zwischen Aussagefunktionen gegebenenfalls bestehenden Wahrscheinlichkeitsbeziehung zu gelangen. Dabei läßt er sich von der Erwägung leiten, daß der Beziehung der Ausschließung der Wert 0 der Wahrscheinlichkeitsbeziehung, und der Ableitbarkeitsbeziehung der Wert 1 der Wahrscheinlichkeitsbeziehung zu entsprechen hätte, ohne daß die Umkehrungen dieser beiden Behauptungen zu gelten brauchten. Um bei dieser Gelegenheit auch einmal ein Beispiel für die Bolzano eigentümliche Art der Darstellung zu geben, lassen wir seine entsprechenden Bemerkungen im Wortlaut folgen, die wir dem § 161 seiner Wissenschaftslehre entnehmen: „Betrachten wir" . . . „in einem einzelnen Satz A oder auch in den mehren A, B, C, D . . . gewisse Vorstellungen i, j, . . . als veränderlich, und sind im letzteren Falle die Sätze A, B, C, D, . . . hinsichtlich dieser Vorstellungen in dem Verhältnisse einer Verträglichkeit: so wird es öfters ungemein wichtig, das Verhältnis zu erfahren, in welchem die Menge der Fälle, darin die Sätze A, B, C, D, . . . alle wahr werden, zur Menge derjenigen Fälle stehen, in welchen neben ihnen auch noch ein anderer Satz M wahr wird. Denn wenn wir die Sätze A, B, C, D, . . . für wahr halten: so lehrt uns das eben genannte Verhältnis, in welchem die Menge der Fälle, worin A, B, C, D, . . . wahr werden, zur Menge derjenigen stehet, wo neben ihnen noch M wahr wird, ob wir auch M für wahr annehmen sollen oder nicht. Wenn nämlich die letzere Menge mehr als die Hälfte der ersteren beträgt: so können wir bloß wegen der Wahrheit der Sätze A, B, C, D, . . . auch den Satz M für wahrhalten, und wenn dies nicht ist, nicht. Ich erlaube mir also dieses Verhältnis zwischen den angegebenen Mengen" . . . „die Wahrscheinlichkeit, welche dem Satze M aus den Voraussetzungen A, B, C, D . . . erwächst, zu nennen."

Bolzano bemüht sich dann weiterhin auf Grund einer eigenartigen Regel, die er anderwärts als „höhere Regeldetri" bezeichnet, die Meßbarkeit seiner Wahrscheinlichkeitsbeziehung durchzuführen. Das kann aber wohl nur durch Aufstellung zusätzlicher Forderungen einwandfrei gelingen, welche die fragliche Begriffsbestimmung einengen.

Ist die Bolzano'sche Entdeckung der Ableitbarkeitsbeziehung und der Wahrscheinlichkeitsbeziehung eine fundamentale, so gilt das nicht in demselben Maße von seinem, wie man heute nach B. Russell formulieren würde, Versuch, eine Deskriptionstheorie aufzustellen. Die moderne Deskriptionstheorie stammt bekanntlich von B. Russell und handelt von der kalkülmäßigen Fassung von Aussagen, die bei gewöhnlicher Formulierung unter Umständen einen Wortkomplex als Subjektswort bezw. als Objektswort enthalten, der nichts bezeichnet. In dieser Theorie sind also die Regeln für die korrekte Fassung derartiger Sätze aufzustellen. Dies geschieht nach B. Russell folgendermaßen: Es sei eine Eigenschaftsaussage über „ein Soundso", d. h. über eine mehrdeutige Deskription (Kennzeichnung) zu machen, wobei die „Soundsos" dahin charakterisiert werden, daß, wenn a ein derartiges „Soundso" wäre, die Aussagefunktion $f\hat{x}$ von a befriedigt würde. Will man nun sagen: „Ein Soundso (Eigenschaft $f(\hat{x})$) hat die Eigenschaft $g\hat{x}$", so lautet die entsprechende Formel: $(\exists c) \cdot fc \cdot gc$. Man muß sie übrigens unterscheiden von der Aussage „Alle Gebilde von der Eigenschaft $f\hat{x}$ haben die Eigenschaft $g\hat{x}$", deren formelmäßiges Aequivalent lautet: $(x) : fx \cdot \supset \cdot gx$, wobei es kein derartiges Gebilde zu geben braucht. Will man aber sagen, „Ein Soundso", d.h. ein Gebilde von der Eigenschaft $f\hat{x}$, gibt es nicht", so lautet die entsprechende Formel: $(x) \cdot \sim f\hat{x}$. Aehnlich formuliert man nach B. Russel die Sätze über „das (einzige) Soundso". Die dem Satze „Das (in der Einzahl), was die Eigenschaft $f\hat{x}$ hat, hat auch die Eigenschaft $g\hat{x}$", entsprechende Formel ist die nachstehende: $(\exists c) : fx \cdot \equiv_x x = c : g\, c$, während der Satz „das Soundso existiert" durch die Formel $(\exists c) : fx \cdot \equiv_x x = c$ wiedergegeben wird. Besonders hervorzuheben ist bei dieser von uns nur in aller Kürze behandelten Russellschen Deskriptionstheorie, daß in ihr die Existenz nicht als eine Eigenschaft der „Soundsos" auftritt, sondern daß lediglich in diesem Zusammenhange der wichtige Satz gilt: Hat „das Soundso" eine Eigenschaft, so existiert es.

Wenngleich nun auch der jetzt seinem Grundgedanken nach anzugebende Bolzanosche Versuch nicht diejenige Präzision besitzt, wie die Russellsche Theorie, so hat Bolzano sie doch im wesentlichen vorweggenommen, denn er stellt ganz allgemein die Behauptung auf, daß mindestens bei den wahren Aussagen die Subjektsvorstellungen erfüllt sind und daß dementsprechend bei korrekter Formulierung der übliche sprachschriftliche Ausdruck vieler Aussagen umzugestalten sei,[1]) wodurch ersichtlich der Ausschluß der sogenannten Chimären erzielt wird. Der Satz beispielsweise: „Reguläre 57-Flächner gibt es nicht", ist nach Bolzano so zu formulieren: „„Die Aussagefunktion „x wird von 57 kongruenten Polygonen allseitig begrenzt", ist eine leere."" Von besonderem Interesse ist übrigens noch die Feststellung, daß Bolzano im Gegensatz zu Russell die Existenz als eine Eigenschaft behandelt, und zwar aus Gründen, die durch die bekannten Kantischen Ueberlegungen keineswegs entkräftet werden.

Nach dem Vorgange von Chr. A. Crusius[2]) hat Kant die durch ihn berühmt gewordene Einteilung der Aussagen in analytische und synthetische vorgenommen und auf Grund dieser Einteilung viele wichtige Betrachtungen angestellt. Bolzano entdeckte aber bald, obwohl die bekannten Kantischen Definitionsversuche unzulänglich sind, daß Kant bei seiner Einteilung ein tiefer Gedanke vorschwebte, nur daß es ihm niemals gelang, denselben zu präzisieren. Um nun dieses zu leisten, sucht Bolzano zunächst einmal festzustellen, von welcher Art diejenigen Aussagen sind, die Kant in Wahrheit auf Grund seiner Bestimmungen als analytische bezeichnen kann. Er findet, daß diese Aussagen in der Hauptsache von folgendem Typ sind: Ein A, das die Beschaffenheit b hat, hat die Beschaffenheit b. Mit anderen Worten: die Aussagen, welche Kant einwandfrei als analytische hinstellen kann, sind armselige Trivialitäten. Sie haben aber nichtsdestoweniger eine bemerkenswerte Eigenschaft, die Kant nicht berücksichtigte, deren Beachtung es einem aber ermöglicht, beträchtlich über ihn hinauszukommen. Die Aussagefunktion nämlich, die einer im Kantischen Sinne analytischen Aussage entspricht, ist so beschaffen, daß, wenn man ihre Leerstellen ausfüllt, insgesamt wahre Aussagen resultieren, wenn auch nur eine einzige derselben eine wahre ist,

---

[1]) Bolzano hätte die einschränkende Bemerkung „mindestens bei den wahren" nicht hinzufügen sollen.

[2]) Chr. A. Crusius, *Weg zur Gewißheit der menschlichen Erkenntnis.* 1747, § 260.

bezw. insgesamt falsche Aussagen resultieren, wenn auch nur eine einzige derselben eine falsche ist. Bolzano ändert nun die Kantische Bestimmung der analytischen Aussagen dahin ab, daß er die Aussagefunktionen von der eben angegebenen Art als analytische bezeichnet und entsprechend alle anderen als synthetische. Damit hat Bolzano eine Einteilung von außerordentlicher Fruchtbarkeit vorgenommen. Denn diese von Bolzano als analytisch charakterisierten Aussagefunktionen, man nennt sie heute nach B. Russell „immer wahre" oder „immer falsche", umfassen, was auch schon Bolzano wußte, die in der Logik auftretenden fundamentalen Beziehungen zwischen logischen Funktionen, soweit sie dort generell behauptet werden. So ist z. B. die zwischen den Aussagefunktionen $f\hat{x}$ und $(f\hat{x} \wedge g\hat{x})$ bestehende Beziehung der Ableitbarkeit eine im Bolzanoschen Sinne analytische Aussagefunktion. Das legt die Vermutung nahe, daß überhaupt die aus den richtigen Formeln der Logik durch geeignete Weglassung von Operatoren resultierenden Aussagefunktionen von analytischem Charakter im Bolzanoschen Sinne sind. Diese Vermutung trifft nun in der Tat zu, wenngleich ihre Umkehrung nicht gilt. Man hat aber gegenwärtig, sei es auf dem Wege einer präzisen Charakterisierung der Ausgangsformeln und Operationsvorschriften der Logik, sei es auf dem Wege eines Entscheidungsverfahrens[1]) diese ja auch schon von Bolzano gelegentlich berührte (vgl. S. 453) Verschärfung seiner Begriffsbestimmung erreicht und damit die Tautologien von den Nichttautologien objektiv unterscheiden können.

Ueberblicken wir zum Schluß unserer Betrachtung noch einmal die von uns behandelten Leistungen Bolzanos auf dem Gebiete der Logik, dann haben wir festzustellen:

Bolzano ist ein Klassiker der exakten Logik, und zwar nicht auf Grund seiner heute sogar zu einer gewissen Berühmtheit gelangten Betrachtungen über die „Sätze-", „Wahrheiten-" und „Vorstellungen an sich", Betrachtungen, die vielleicht sogar des Sinnes entbehren, von ihrer Wahrheit oder Falschheit ganz zu schweigen, sondern auf Grund seiner Vorwegnahme tragender Ueberlegungen und Begriffsbildungen der mathematischen Logik, durch die er sich ein Denkmal gesetzt hat aere perennius.

[1]) Vgl. Crelle'sches Journal, Bo. 161, Heft 2, 1929.