# GPV 2: Pohlscher Schwingungsapparat

## 1 Aufgaben

1. Bestimmung der Schwingungsdauer, des Dämpfungsverhältnisses und des logarithmischen Dekrements für das ungedämpfte und gedämpfte System.

2. Messung und graphische Darstellung der Schwingungsamplituden als Funktion der Zeit bei zwei verschiedenen Dämpfungen.

3. Aufnahme der Resonanzkurve bei zwei verschiedenen Dämpfungen und Darstellung in einem Diagramm. Vergleich mit der theoretischen Kurve. Beobachtung der Phasenbeziehung zwischen Erreger- und Oszillatorschwingung.

## 2 Erläuterungen

### 2.1 Apparatbeschreibung

Der Pohlsche Schwingungsapparat dient zur Untersuchung von gedämpften und erzwungenen Schwingungen. Er besteht im wesentlichen (entsprechend der Unruh einer Uhr) aus einer Spiralfeder verbunden mit einer Kupferscheibe, die um eine horizontale Achse Drehschwingungen ausführen kann. Die Dämpfung ist durch eine Wirbelstrombremse einstellbar. Die Anregung zu erzwungenen Schwingungen erfolgt über ein Gestänge mit einem Elektromotor veränderlicher Drehzahl.

### 2.2 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für einen derartigen Drehschwinger folgt aus dem Drehimpulssatz:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{D}_i \tag{1}$$

Sowohl der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ als auch alle Drehmomentvektoren $\vec{D}_i$ haben die Richtung der Drehachse. Das Problem ist somit eindimensional. Die Bewegung wird durch den Auslenkungswinkel $\phi$ der Scheibe beschrieben:

- Drehimpuls: $L = J\dot{\phi}$ ($J$ : Trägheitsmoment der Scheibe)
- Rücktreibendes Moment: $D_1 = -D^*\phi$ ($D^*$ : Richt- oder Direktionsmoment der Feder)
- Moment der Reibungskraft: $D_2 = -\rho\dot{\phi}$ ($\rho$ : Reibunqsfaktor)
- Erreger - Moment: $D_3 = D(t)$

Damit lautet die Bewegungsgleichung:

$$J\ddot{\phi} = -D^*\dot{\phi} - \rho\phi + D(t) \quad oder \quad J\ddot{\phi} + \rho\dot{\phi} + D^*\phi = D(t) \tag{2}$$

Diese Bewegunqsgleichung für eine gedämpfte erzwungene Drehschwingung ist eine gewöhnliche, lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

gewöhnlich : $\phi$ hängt nur von einer unabhängigen Variablen (hier der Zeit) ab.
linear : in der unbekannten Funktion $\phi$ und deren Ableitungen vom ersten Grad
inhomogen : Nicht jedes Glied der Gleichung enthält die Unbekannte $\phi$.
2. Ordnung : Die höchste vorkommende Ableitung ist von zweiter Ordnung.
konstante Koeffizienten : $J$, $\rho$ und $D^*$ sind unabhängig von $\phi$ bzw. von der Zeit.

Lösung : Gesucht ist eine Funktion $\phi(t)$, die mit ihren Ableitungen für jede Zeit t die Bewegungsgleichung erfüllt. Die Lösung einer solchen Gleichung setzt sich additiv zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

## 2.3 Freie Schwingungen

Die homogene Bewegungsgleichung ($D(t) = 0$)

$$J\ddot{\phi} + \rho\dot{\phi} + D^*\phi = 0 \tag{3}$$

beschreibt eine freie gedämpfte Schwingung.
Lösungsansatz: $\phi(t) = a \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$
Einsetzen des Ansatzes in Gl.(3) führt auf die charakteristische Gleichung

$$J\lambda^2 + \rho\lambda + D^* = 0 \tag{4}$$

oder mit $\beta = \frac{\rho}{2J}$ und $\omega_0^2 = \frac{D^*}{J}$ auf

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{5}$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \tag{6}$$

Je nach der Größe der Diskriminante unterscheidet man drei Fälle:

$$\begin{array}{ll} \beta^2 - \omega_0^2 < 0 & \text{Schwingfall (schwache Dämpfung)} \\ \beta^2 - \omega_0^2 = 0 & \text{aperiodischer Grenzfall} \\ \beta^2 - \omega_0^2 > 0 & \text{Kriechfall (starke Dämpfung)} \end{array}$$

**Schwingfall:** $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\beta \pm i\omega$ Damit ergeben sich zwei partikuläre Lösungen. Ihre Linearkombination liefert die allgemeine Lösung, die zwei frei Konstanten enthält, welche durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden.

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= a_1 \mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{i\omega t} &&= a_1\mathrm{e}^{-\beta t}[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] \\ \phi_2(t) &= a_2 \mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-i\omega t} &&= a_2\mathrm{e}^{-\beta t}[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] \\ \phi(t) &= \phi_1 + \phi_2 &&= \mathrm{e}^{-\beta t}[(a_1 + a_2)\cos(\omega t) + i(a_1 - a_2)\sin(\omega t)] = \mathrm{e}^{-\beta t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] \end{aligned} \tag{7}$$

Es ist somit $\omega$ die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung und $\omega_0$ die Kreisfrequenz dieses Oszillators bei fehlender Dämpfung.
Anfangsbedingungen: Für $t = 0$ sei $\phi(0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$. Dies führt auf

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}(\phi_0 \cos\omega t + \frac{\dot{\phi}_0 + \beta\phi_0}{\omega}\sin\omega t) \tag{8}$$

In diesem allgemeinen Fall entsprechen $\phi_0$ bzw. $\dot{\phi}_0$ nicht den Maximalwerten der Auslenkung bzw. der Winkelgeschwindigkeit. Die Spezialfälle $\phi(0) = 0$ und $\dot{\phi}(0) = 0$ ergeben sich unmittelbar aus Gl.(8).

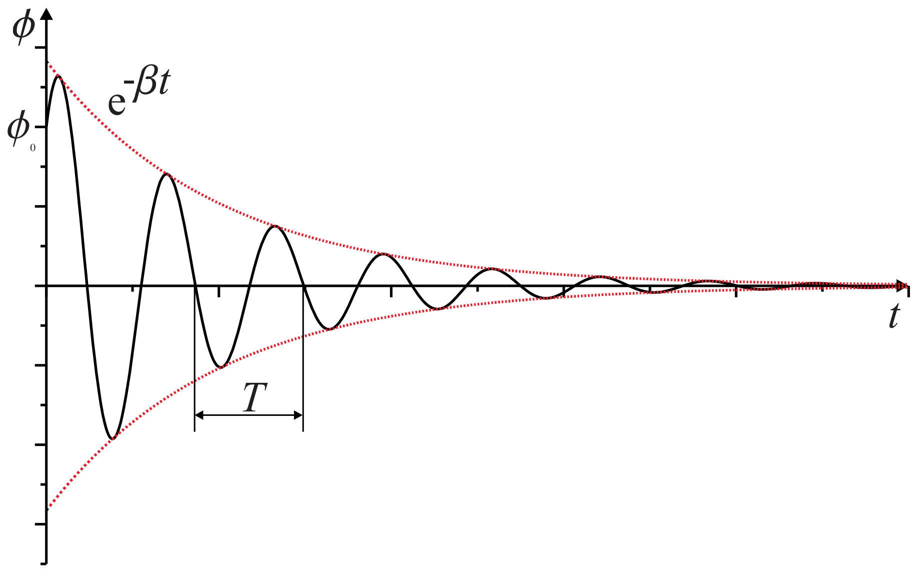


Abbildung 1: Schwingungsverhalten des freien, gedämpften Oszillators

Die Amplitude nimmt exponentiell ab, die gedämpfte Schwingung ist somit keine harmonische Schwingung.
Schwingungsdauer T : Zeit zwischen zwei Nulldurchgängen gleicher Richtung $T = \frac{2\pi}{\omega}$
Dämmfungsverhältnis k : Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Ausschläge gleicher Phase

$$k = \frac{\phi(t)}{\phi(t+T)} = \mathrm{e}^{\beta T} = \text{const.} \tag{9}$$

$$k^n = \frac{\phi(t)}{\phi(t+nT)} \quad \text{bzw.} \quad k = \sqrt[n]{\frac{\phi(t)}{\phi(t+nT)}} \tag{10}$$

Logarithmisches Dekrement $\Lambda$ :

$$\Lambda = ln(k) = \beta T \tag{11}$$

Zusammenhang zwischen $T$ und $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\Lambda^2}{T^2} \quad \longrightarrow \quad T = T_0\sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}} \tag{12}$$

**aperiodischer Grenzfall:** $\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\beta$ In diesem Spezialfall werden die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung identisch. Trotzdem muss noch eine zweite linear unabhängige Lösung existieren. Man kann zeigen, dass es sich dabei um ein Polynom in der Zeit handelt, dessen Grad mit der Entartung der charakteristischen Gleichung zusammenhängt. Im vorliegenden Fall lautet die linear unabhängige Lösung

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}(A + Bt), \tag{13}$$

wie man durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung verifizieren kann. Der aperiodische Grenzfall ergibt die schnellstmögliche Rückkehr in die Ruhelage.

**Kriechfall:** $\gamma := \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\beta \pm \gamma$ (reell!)
Die allgemeine Lösung ist aperiodisch:

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}(A\mathrm{e}^{\gamma t} + B\mathrm{e}^{-\gamma t}) \tag{14}$$

Das Kriechen in die Ruhelage erfolgt um so langsamer, je größer $\beta$ ist.

## 2.4 Erzwungene Schwingungen

Für das erregende Drehmoment $D(t)$ wird eine harmonische Zeitabhängigkeit mit der Kreisfrequenz $\Omega$ angenommen:

$$J\ddot{\phi} + \rho\dot{\phi} + D^*\phi = D_0\cos(\Omega t) \tag{15}$$

Für die allgemeine Lösung muss noch eine partikuläre Lösung dieser Gleichung gefunden werden. Prinzipiell kann man dafür die Methode der Variation der Konstanten heranziehen. Schneller kommt man mit einem physikalisch begründeten Ansatz zum Ziel: Die Beobachtung zeigt, dass sich nach einiger Zeit ein stationärer Zustand $\phi_{\mathrm{s}}(t)$ einstellt, bei dem die Schwingung mit konstanter Amplitude mit der Frequenz des Erregers, diesem gegenüber jedoch mit einer bestimmten Phasenverschiebung erfolgt. Man wählt daher den Ansatz $\quad \phi_{\mathrm{s}}(t) = \phi_{0\mathrm{s}} \cos(\Omega t - \alpha)$.
Die Lösung vereinfacht sich durch die komplexe Schreibweise: $D(t) = D_0 \mathrm{e}^{i\Omega t}$
(Der Realteil dieser komplexen Zahl ist das reale physikalische Drehmoment. Entsprechend erhält man eine komplexe Lösungsfunktion, deren Realteil die gesuchte physikalische Lösung ist.) Einsetzen des (nun komplexen) Ansatzes $\phi_{\mathrm{s}}(t) = \phi_{0\mathrm{s}} \mathrm{e}^{i(\Omega t - \alpha)}$ führt auf die Gleichung

$$\phi_{0\mathrm{s}}(\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\beta\Omega) = \frac{D_0}{J} \mathrm{e}^{i\alpha} \tag{16}$$

Gleichsetzen der Beträge liefert

$$\phi_{0\mathrm{s}} = \frac{D_0/J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \tag{17}$$

Die Gleichheit der Phasenwinkel führt auf

$$\tan(\alpha) = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{18}$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\phi_{\mathrm{s}} = \frac{D_0/J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \cos\left[\Omega t - \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)\right] \tag{19}$$

und die allgemeine Lösung hat die Form

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] + \phi_{\mathrm{s}}(t) \tag{20}$$

Diese Überlagerung der gedämpften Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega$ und der Schwingung mit der Kreisfrequenz $\Omega$ stellt den Einschwingungsvorgang dar. Für genügend große Zeiten bleibt nur der zweite Summand übrig, der somit allein den stationären Zustand beschreibt.
Beim Pohlschen Schwingungsapparat wird die Erregung nicht durch ein direkt an der Kupferscheibe angreifendes Drehmoment vorgenommen, sondern durch eine periodische Bewegung der Spiralfeder. Damit verändert sich die Ruhelage der Kupferscheibe nach der Funktion
$\psi = \psi_0 \cos(\Omega t)$

$$\psi \approx \frac{1}{L} l \cos\Omega t, \quad \psi_0 = \frac{l}{L}$$

wobei $\psi$ (wie auch $\phi$) auf der raumfesten Skala abgelesen wird.

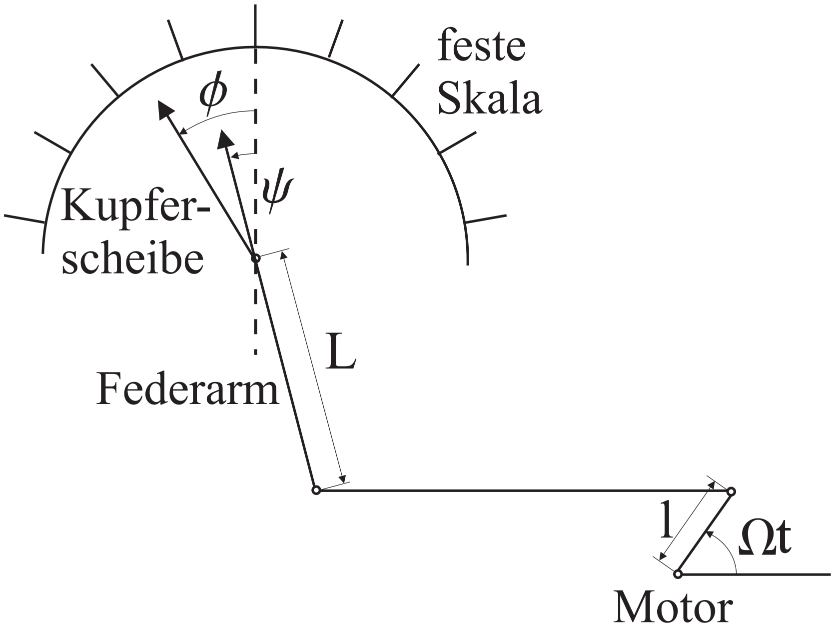


Abbildung 2: schematischer Aufbau eines Pohlrades

Das rücktreibende Drehmoment ist daher $-D^*(\phi - \psi)$ und die Bewegungsgleichung lautet:

$$J\ddot{\phi} = -D^*(\phi - \psi) - \rho\dot{\phi} \quad \text{oder} \quad J\ddot{\phi} + \rho\dot{\phi} + D^*\phi = D^*\psi_0 \cos\Omega t \tag{21}$$

Die Amplitude des erregenden Drehmomentes in Gl. (15) ergibt sich somit zu $D_0 = D^*\psi_0$. Damit erhält man für die stationäre Amplitude

$$\phi_{0\mathrm{s}} = \frac{\omega_0^2\psi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \tag{22}$$

Durch Einführen der dimensionslosen Größen Frequenzverhältnis $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ und Dämpfungsmaß $d = \frac{\beta}{\omega_0}$ kann man die Vergrößerungsfunktion $V$ (Verhältnis der Amplitude der stationären Schwingung $\phi_{0\mathrm{s}}$ zur statischen Auslenkung $\psi_0$) in folgender Form angeben:

$$V = \frac{\phi_{0\mathrm{s}}}{\psi_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4d^2\eta^2}} \tag{23}$$

Diskussion der Vergrößerungsfunktion $V(\eta, d)$:

$$\eta = 0 \quad V(0,d) = 1, \qquad \phi_{0\mathrm{s}} = \psi_0 \quad und \quad \frac{\partial V}{\partial \eta}|_{\eta=0} = 0 \qquad \text{für jedes d}$$
$$\eta \to \infty \, V(\infty, d) \to 0 \qquad \phi_{\mathrm{s}} = 0 \qquad \text{für jedes d}$$

Maximum von V(Resonanz):
aus

$$\frac{\partial V(\eta, d)}{\partial \eta} = 0 \tag{24}$$

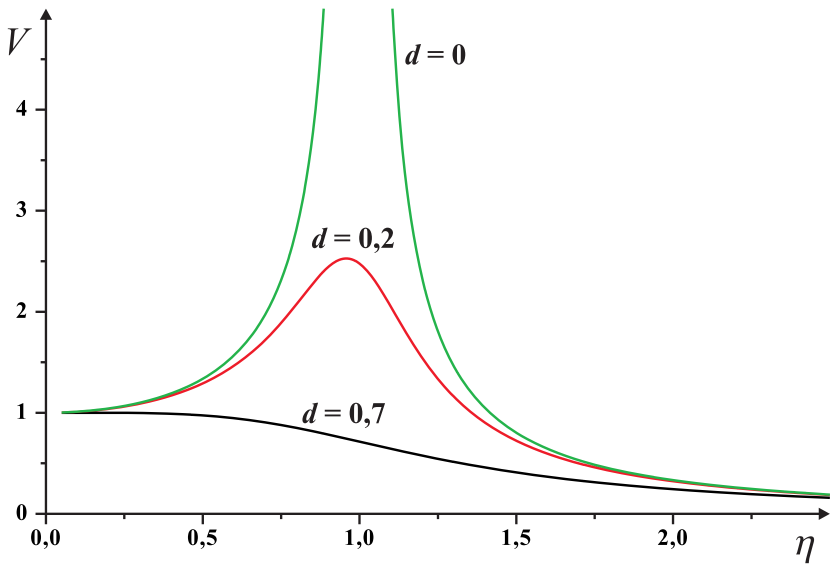


Abbildung 3: Vergrößerungsfunktion $V(\eta, d)$

folgt

$$\eta_0^2 = 1 - 2d^2 \tag{25}$$

d.h. mit wachsender Dämpfung verschiebt sich das Maximum zu kleineren Werten. Für $d > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ fällt $V(\eta, d)$ monoton mit wachsendem $\eta$. Resonanzkurven für verschiedene $d$-Werte schneiden sich nicht. Sie sind bezüglich $\eta_0$ unsymmetrisch.

Phasenverschiebung: $\tan(\alpha) = \frac{2d\eta}{1-\eta^2}$
Aus $\eta = 0$ folgt $\alpha = 0$ für jedes $d$.
Aus $\eta = 1$ folgt $\alpha = \Pi/2$ für jedes $d$.
Aus $\eta \rightarrow \infty$ folgt $\alpha = \pi$ für jedes $d$.

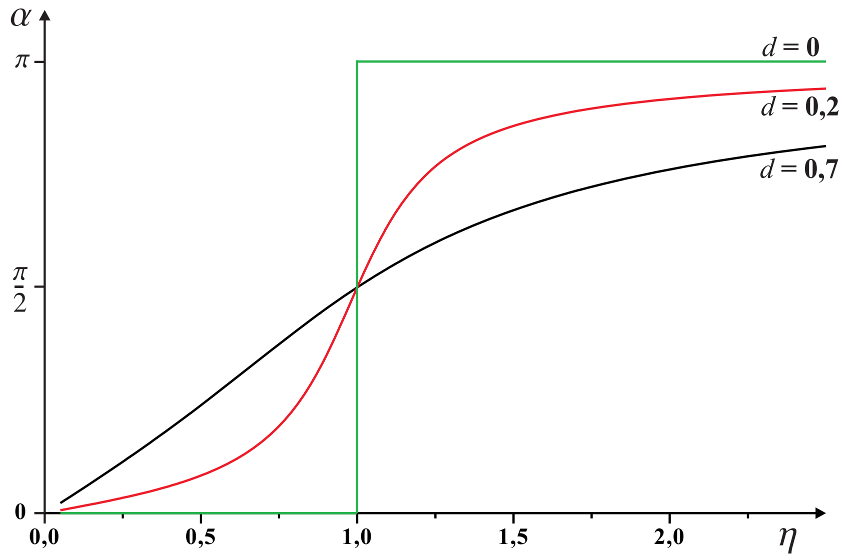


Abbildung 4: Phasenverschiebung

# 3 Geräte

- Pohlscher Schwingungsapparat
- Motor mit Netzgerät bzw. Regeltrafo je nach Typ
- Vielfachmessgerät
- Stoppuhr

# 4 Ausführung der Aufgaben und Auswertung:

zu 1) Gemessen wird die Periodendauer $T_0$ des ungedämpften Systems. Weil auch ohne Bremse eine gewisse Dämpfung durch Reibung im System vorhanden ist sollten auch hier die Anfangsamplitude $\phi_0$ und Endamplitude nach der 10-ten Schwingung $\phi_{10}$ gemessen werden. $T$ erhält man am besten aus Messung der Gesamtzeit von 10 Perioden (3-5 Messungen, Fehlerrechnung). Messen Sie anschließend die Periodendauer $T_i$ des Systems mit zwei unterschiedlichen Dämpfungen $i$ und nehmen Sie zudem zur Bestimmung des Dämpfungverhältnisses die Anfangs- und Endamplitude auf. Ist ein Unterschied zwischen den Periodendauern $T_0$ und $T_i$ messbar?

zu 2) Gemessen wird die Amplitude des Systems bei beiden Dämpfungen bei jeder Periode. Der Amplitudenabfall wird gegen $t$ aufgetragen. Welche Auftragungsart ist besser geeignet: linear oder logarithmisch? Versuchen Sie auch aus diesen Messungen die Dämpfung zu ermitteln und vergleichen Sie diese mit den Werten aus der ersten Aufgabe.

zu 3) Bei beiden Dämpfungen misst man für ca. einige Werte der Motordrehzahl $\Omega$ $\phi_s 0$ und $\psi_0$. Die Drehzahlwerte sollte so gewählt werden, dass die Resonanz möglichst genau erfasst wird und beiderseits der Resonanzfrequenz mindestens drei Werte gemessen werden. Bei jeder Änderung der Frequenz muss das Ende des Einschwingvorganges abgewartet werden. Vergleichen Sie ihre Kurven von $V$ gegen $\eta$ mit den theoretisch erwarteten und überprüfen Sie Gl. 25. Beschreiben Sie ihre Beobachtung der Phasenlage.Der Phasensprung beim Überschreiten der Resonanzfrequenz kann vor allem bei schwacher Dämpfung deutlich beobachtet werden.

Alle unerwarteten Effekte sind im Protokoll festzuhalten und zu deuten. Achten Sie auf eventuell auftretende Schwebungen (zwischen welchen Systemen der Apparatur?).