Musterlösung: Ex10, Kategorientheorie

Funktionale Programmierung WS 2013/14

Luminous Fennell

Aufgabe 1

Eine Komposition zweier Pfeile $f : m \to n$ und $g : n \to p$ ist die Matrixmultiplikation $\_ * \_$:

$$g \circ f := g * f$$

Die Identitätspfeile id_n sind die Einheitsmatrizen I_n. Die Assoziativität von $\_ \circ \_$ und die Identitäten von id_n folgen aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation und der Identitätseigenschaft der Einheitsmatrizen.

Aufgabe 2

Es ist zunächst zu prüfen ob die Komposition von $g : (B', \pi_{B'}) \to (B'', \pi_{B''})$ und $f : (B', \pi_{B'}) \to (B'', \pi_{B''})$ in $\mathcal{C}_{\downarrow A}$

$$g_{\downarrow A} \circ_{\downarrow A} f_{\downarrow A} = g \circ f$$

auch tatsächlich ein $\mathcal{C}_{\downarrow A}$ Pfeil ist (und nicht einfach nur ein $\mathcal{C}$ Pfeil).

Dazu ist zu zeigen, dass im folgenden Diagramm $D_{g \circ f}$, das äußere Dreieck kommutiert, wenn die beiden inneren Dreiecke kommutieren.

$$D_{g \circ f} :$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & B' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_{B'}"] & B'' \arrow[dl, "\pi_{B''}"] \\
& \mathrm{A} &
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen: $\pi_{B''} \circ g \circ f = \pi_B$. Voraussetzungen:

$$\pi_{B'} \circ f = \pi_B \tag{1}$$

$$\pi_{B''} \circ g = \pi_{B'} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \pi_{B''} \circ g \circ f &= \pi_{B'} \circ f && \text{mit (2)} \\ &= \pi_B && \text{mit (1)} \end{aligned}$$

Eine mögliche Interpretation eines Objekts (B, π_B) von $(\mathbf{Set} \downarrow \{0,1\})$ ist das eines (einstelligen) Prädikates $P_{(B,\pi_B)}$ auf der Menge B: Falls für ein $b \in B$ gilt dass $\pi_B(b) = 1$ interpretiert man $P_{(B,\pi_B)}(b)$ als ,,wahr", ansonsten gilt $\neg P_{(B,\pi_B)}(b)$. Ein Pfeil $f : P_{(B,\pi_B)} \to P_{(B',\pi_{B'})}$ gibt dann eine *Reduktion* an, die es erlaubt, eine atomare Aussage $P_{(B,\pi_B)}(b)$ alternativ in B' als $P_{(B',\pi_{B'})}(f(b))$ zu betrachten, zu beweisen, oder zu wiederlegen.

Aufgabe 3

Wenn f, g monisch dann $f \circ g$ monisch Zu zeigen: $(f \circ g) \circ h = (f \circ g) \circ h' \Rightarrow h = h'$.

$$\begin{aligned} & (f \circ g) \circ h = (f \circ g) \circ h' && \\ \Rightarrow\ & f \circ (g \circ h) = f \circ (g \circ h') && \text{Assoziativität} \\ \Rightarrow\ & (g \circ h) = (g \circ h') && f \text{ ist monisch} \\ \Rightarrow\ & h = h' && g \text{ ist monisch} \end{aligned}$$

Wenn $f \circ g$ monisch dann g monisch Zu zeigen: $g \circ h = g \circ h' \Rightarrow h = h'$.

$$\begin{aligned} & g \circ h = g \circ h' && \\ \Rightarrow\ & f \circ (g \circ h) = f \circ (g \circ h') && \text{erweitern} \\ \Rightarrow\ & (f \circ g) \circ h = (f \circ g) \circ h' && \text{Assoziativität} \\ \Rightarrow\ & h = h' && f \circ g \text{ ist monisch} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Lösung 1: In der Kategorie **2**

$$\mathrm{id}_A \circlearrowright A \xrightarrow{f} B \circlearrowleft \mathrm{id}_B$$

ist der Pfeil f monisch und episch: die einzigen Möglichkeiten zur Komposition sind $f \circ \mathrm{id}_A$ und $\mathrm{id}_B \circ f$. Es sind also alle Pfeile, die links an f komponiert werden können, identisch; f ist trivialerweise episch. Genauso sind alle Pfeile die rechts an f komponiert werden können identisch; f ist auch monisch.

Da es in **2** keinen Pfeil von B nach A gibt, kann es auch keinen inversen Pfeil zu f geben.

Lösung 2: Es wurde bereits in der Vorlesung gezeigt, dass in **Mon** der Pfeil $f : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{Z}, +))$ mit $f(x) = x$ existiert, der monisch und episch ist. Ein $f^{-1} : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{N}, +))$ für dass gilt $f(f^{-1}(x)) = x$ existiert aber offensichtlich nicht.

Aufgabe 5:

Die initialen Objekt von $\textbf{Set} \times \textbf{Set}$ sind die Paare der initialen Objekte von **Set**, also nur $(\emptyset, \emptyset)$: Zu jedem Objekt (A, B) existiert der Pfeil (f, g) mit den eindeutigen leeren Funktionen $f : \emptyset \to A$ und $g : \emptyset \to B$.

Es gibt auch keine weiteren initialen Objekte: Seien (A, B) und (C, D) Objekte in $\textbf{Set} \times \textbf{Set}$ und, o.B.d.A. $A \neq \emptyset$ und somit *nicht* initiales Objekt von **Set**. Es existieren also entweder keine Pfeile von A nach C oder mindestens zwei Pfeile f, g von A nach C. Für jeden Pfeil $h : B \to D$ gibt es also entweder keinen Pfeil von (A, B) nach (C, D), oder mindestens zwei: (f, h) und (g, h). Das disqualifiziert (A, B) als initiales Objekt.

Die terminalen Objekte von $\textbf{Set} \times \textbf{Set}$ sind die Paare der einelementigen Mengen, da diese die terminalen Objekte von **Set** bilden. Die Begründung verläuft analog zu der für die initialen Objekte.

Das einzige initiale Objekt von $\textbf{Set}^{\to}$ ist die leere Identitätsfunktion $\mathrm{id}_\emptyset : \emptyset \to \emptyset$: zu jedem $\textbf{Set}^{\to}$ Objekt $f : A \to B$ gibt es genau den Pfeil $(a_\emptyset, b_\emptyset)$ mit den beiden leeren Funktionen $a : \emptyset \to A$ und $b : \emptyset \to B$. Da Verkettungen mit leeren Funktionen wieder leere Funktionen ergeben gilt $f \circ a_\emptyset = b_\emptyset \circ \mathrm{id}_\emptyset$.

Es gibt auch keine weiteren initialen Objekte: Angenommen $f : A \to B$ wäre ein initiales Objekt und $f \neq \mathrm{id}_\emptyset$. Es muss also genau einen Pfeil von f zu $\mathrm{id}_\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ geben und somit die Funktionen $a : A \to \emptyset$ und $b : B \to \emptyset$. Demzufolge muss gelten $A = B = \emptyset$ und somit $f = \mathrm{id}_\emptyset$ was ein Widerspruch zur Annahme $f \neq \mathrm{id}_\emptyset$ ist.

Die terminalen Objekte von $\textbf{Set}^{\to}$ sind die konstanten Funktionen mit ein-elementigem Definitionsbereich $\mathrm{const}_{1,c} : \{x\} \to B$ mit $\mathrm{const}_{1,c}(x) = c$. Von jedem $\textbf{Set}^{\to}$ Objekt $f : A \to B$ gibt es den Pfeil $(a_x, b_c) : f \to \mathrm{const}_{1,c}$ mit den konstanten Funktionen $a_x(z) = x$ und $b_c(z) = c$. Es gilt $(\mathrm{const}_{1,c} \circ a_x)(z) = c = (b_c \circ f)(z)$.

Dies sind auch die einzigen terminalen Objekte: Sei $f : A \to B$ ein terminales Objekt.

- Wenn $A = \emptyset$ dann dann gibt es keinen Pfeil von $\mathrm{const}_{1,c} : \{x\} \to C$ zu f, da in **Set** kein Pfeil $\{x\} \to \emptyset$ existiert: f kann somit nicht terminal sein.
- Ansonsten existieren für jedes $\textbf{Set}^{\to}$ Objekt $x_a \in A$ die konstanten Funktionen $a(z) = x_a$ und $b(z) = f(x_a)$. Für jedes Objekt $g : C \to D, C \neq \emptyset$ gilt $(f \circ a)(z) = f(x_a) = b(g(z)) = (b \circ g)(z)$. Es gibt also mindestens so viele Pfeile zwischen f und g wie Elemente in A. Damit f terminal ist muss A also eine ein-elementige Menge sein und damit eine konstante Funktion.

Aufgabe 6:

- Die Kategorie **0** hat offensichtlich weder initiale, noch terminale Objekte.

- Die Kategorie der partiellen Ordnung $(\mathbb{N}, \leq)$ hat keine terminalen Objekte: es existiert zu jeder natürlichen Zahl eine größere. Genauso hat $(\mathbb{N}, \geq)$ keine initialen Objekte.

- Jede Quasiordnung (transitive und reflexive, aber nicht unbedingt antisymmetrische Relation) kann (analog zu partiellen Ordnungen) als Kategorie aufgefasst werden. Die Äquivalenzrelation $(\mathbb{N}, =)$ hat weder initiale, noch terminale Objekte. Genauso die Kongruenz $(\mathbb{N}, \_ \equiv \_ (\operatorname{mod} k))$.

Aufgabe 7:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "f \circ h"'] \arrow[dd, dashed, bend left, "\langle f \circ h, g \circ h \rangle"] \arrow[ddr, bend left, "g \circ h"] & \\
 & B \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g \rangle"'] \arrow[dr, "g"] & \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & D
\end{tikzcd}
$$

Es folgt aus der Definition von $\langle f, g \rangle$, dass $f = \pi \circ \langle f, g \rangle$ und somit $f \circ h = \pi_1 \circ \langle f, g \rangle \circ h$. Ebenso gilt $f \circ g = \pi_2 \circ \langle f, g \rangle \circ h$. Folglich kommutiert das blaue Dreieck zusammen mit dem Pfeil $\langle f, g \rangle \circ h$. Der Pfeil $\langle f \circ h, g \circ h \rangle$ ist definiert als der einzige Pfeil, mit dem das blaue Dreieck kommutiert. Somit muss gelten $\langle f, g \rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h \rangle$.

Aufgabe 8:

Das Produkt $A \times B$ ist genau die *größte untere Schranke* $(\_ \sqcap \_)$ von A und B (falls diese existiert), also $A \sqcap B = x$, so dass $x \leq A$ und $x \leq B$ und $\forall y. y \leq A \wedge y \leq B \Rightarrow y \leq x$. Die Projektionen π_i, $i \in \{1, 2\}$ sind dann genau die Relationspaare $A \sqcap B \leq A$ und $A \sqcap B \leq B$ aus der Definition von $\_ \sqcap \_$. Der Pfeil $\langle f, g \rangle$ ist genau das Relationspaar $Y \leq A \sqcap B$ aus der Definition.

Aufgabe 9:

Das Koprodukt $A+B$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen, $\{(1, a) \mid a \in A\} \cup \{(2, b) \mid b \in B\}$ zusammen mit einer Ordnung $\_ \leq_{A+B} \_ := \{((i, x), (j, y)) \mid i < j \vee (i = j \wedge x \leq y)\}$ (auch andere Definitionen von $\leq_{A+B}$ sind möglich). Weiterhin sind $\iota_1(a) := (1, a)$ und $\iota_2(b) := (2, b)$ die monotonen Injektionsfunktionen. Der Pfeil $[f, g]$ wendet f auf die 1-indizierten Elemente von $A + B$ an und g auf die 2-indizierten:

$$
[f, g](x) = \begin{cases} f(a) & \text{falls } x = (1, a) \\ g(b) & \text{falls } x = (2, b) \end{cases}
$$

Aufgabe 10:

Die Aufgabenstellung war missverständlich. Es ist nicht möglich für alle beliebigen Pfeile f und g einen Koequalizer zu finden. Die Funktionen und Mengen müssen entsprechend gewählt werden.

Ein Pfeil $e : B \to X$ ist ein Koequalizer für zwei Pfeile $f : A \to B$ und $g : A \to B$ wenn es für jedes Objekt X' und Pfeil $e' : B \to X'$ es einen eindeutigen Pfeil $k : X \to X'$ gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "k"'] & B \arrow[l, "e"'] \arrow[dl, "e'"] & A \arrow[l, bend right, "f"'] \arrow[l, bend left, "g"] \\
X' & &
\end{tikzcd}$$

Sei B eine Menge. Seien weiterhin $A \subseteq B \times B$ eine Äquivalenzrelation auf B und $f(b_1, b_2) = b_1$ und $g(b_1, b_2) = b_2$.

Die Äquivalenzklasse eines Punktes $b \in B$ ist:

$$[b] = \{x \mid x \sim_{f,g} b\}$$

Jede Äquivalenzklasse hat einen willkürlich gewählten Repräsentanten $\text{rep}(x) \in [b]$.

Der Pfeil $e : B \to X$, mit

$$X = \{[b] \mid b \in B\}$$

und

$$e(b) = [b]$$

ist nun ein Koequalizer für f und g, der die Punkte in B auf ihre Äquivalenzklassen abbildet. (Seine Kodomäne X ist dabei die Quotientenmenge B/A)

- Für $(b_1, b_2) \in A$ liegen $f(a)$ und $g(a)$ (per Definition) in derselben Äquivalenzklasse $[f(a)] = [g(a)]$. Somit gilt auch $(e \circ f)(a) = [f(a)] = [g(a)] = (e \circ g)(a)$

- Für jeden Pfeil $e' : A \to X'$, für den das Koequalizer-Diagram kommutiert, existiert auch der Pfeil $k : X \to X'$ mit

$$k(x) := e'(\text{rep}(x))$$

- Der oben definierte Pfeil k ist eindeutig: Angenommen es existierte $k' \neq k$. Dann existiert $x \in X$ so dass $k'(x) \neq e'(\text{rep}(x))$. Da das Diagramm kommutiert, muss $k'(e(\text{rep}(x))) = e'(\text{rep}(x))$ gelten und somit $k'([\text{rep}(x)]) = e'(\text{rep}(x))$. Für Äquivalenzklassen gilt aber $[\text{rep}(x)] = x$, was zum Widerspruch $k'(x) = e'(\text{rep}(x))$ führt.

Aufgabe 11:

Das folgende kommutierende Diagramm definiert den Equalizer e.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\
X' \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Es gilt also $f \circ e = g \circ e$. Da e episch ist, gilt somit $f = g$. Es existiert demnach für jedes X' und $e' : X' \to A$ ein eindeutiges $k : X' \to X$ so dass

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
X' \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. Insbesondere gilt dies für $X' = A$ und $e' = \mathrm{id}_A$ und das folgende Diagramm kommutiert (hier mit explizitem Identitätspfeil von X):

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[loop left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[r, bend left, "e"] & A \arrow[l, dashed, bend left, "k"] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

Daher gilt $e \circ k = \mathrm{id}_X$ und $k \circ e = \mathrm{id}_A$ und k ist der inverse Pfeil zum Isomorphismus e'.