Elektronische Baumstrukturaufgaben zur fachdidaktischen Unterstützung in der Hochschul-Mathematiklehre für Ingenieure:

Konzeption, technische Realisierung und Evaluation

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der RWTH Aachen University zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Gymnasiallehrer Robert Ivo Mei

aus Essen

Berichter: Universitätsprofessorin Dr. rer. nat. Johanna Heitzer
Universitätsprofessor Dr. rer. nat. Michael Herty

Tag der mündlichen Prüfung: 29.10.2018

Kurzfassung

Gegenstand dieser Arbeit sind die titelgebenden Baumstrukturaufgaben: Ein E-Learning-Angebot, entwickelt von Mitarbeitern des Lehr- und Forschungsgebiets Didaktik der Mathematik in enger Zusammenarbeit mit Dozenten des Instituts für Geometrie und Praktische Mathematik an der RWTH Aachen, als freiwilliges Begleitmaterial zur Veranstaltung „Mathematik I/II“ für Bauingenieurwesen und verwandte Fachrichtungen.

Ausgangssituation für dieses Projekt ist im weiten Sinne die herausfordernde Mathematiklehre am Übergang Schule-Hochschule gewesen, welche schon immer ein Thema war und in den letzten Jahren noch verstärkt in den Fokus gerückt ist – hier ebenso wie an anderen deutschen Hochschulen. Thematisiert werden etwa steigende Studierendenzahlen, veränderte Voraussetzungen der Studienanfänger, und eben Mathematikveranstaltungen der ersten Semester in MINT-Studiengängen als eine wesentliche Hürde für Studienanfänger. Reagiert wird darauf unter anderem mit einem anhaltend wachsenden Angebot verschiedenster Unterstützungsmaßnahmen vor allem an den Hochschulen, wobei ein Großteil dieser Maßnahmen ganz oder in Teilen als E-Learning realisiert wird. Trotz häufiger Einbindung moderner digitaler Veranschaulichungsmöglichkeiten benutzen die meisten dieser Angebote weiterhin das einfache Format „Aufgabenstellung – Endergebniseingabe – Korrektheitsfeedback“ für ihre Aufgaben, welches eher fertigkeitsorientiert ist und sich deshalb vor allem für die Behandlung des kalküllastigen Schulstoffs eignet. In der Hochschulmathematik sind viele Aufgabenstellungen allerdings deutlich komplexer und vielschrittiger als beim Schulstoff; der Lösungsverlauf erfordert häufig mehr Überblick sowie Entscheidungen, die man nur mit weitergehendem inhaltlichen Verständnis der zugehörigen Konzepte treffen kann.

Mit den Baumstrukturaufgaben ist also ein anderer Ansatz verfolgt worden, um das Aufgabenlösen konzept- und verständnisorientierter zu realisieren: Eine Aufgabe besteht nicht aus einer einzigen Frage, sondern aus einer Vielzahl von Inhalts- und Frageseiten, die untereinander verlinkt sind und damit den gesamten Lösungsprozess von anfänglichem Ausprobieren bis zum sauberen Lösungs-Aufschreiben abdecken. Dabei gabelt sich der „Weg“ immer wieder antwortabhängig an Frageseiten auf, bei denen Teilergeb-

nisse abgefragt werden. Auf diese Weise ist es möglich, zusätzliche Hilfestellungen nach falschen Antworten sowie überhaupt unterschiedliche Lösungswege zu realisieren. Mit den Inhaltsseiten können zudem die für die jeweilige Aufgabe relevanten Konzepte des Vorlesungsstoffs direkt im Lösungsverlauf mit unmittelbarem Problembezug wiederholt und vertieft werden. Seit Herbst 2012 hat der Autor bei der konkreten Entwicklung der Baumstrukturaufgaben mitgewirkt, ab Frühling 2014 diese alleinig weitergeführt.

Das Bestreben dieses Dissertationstexts liegt darin, dem interessierten Leser einen möglichst detaillierten Einblick in Konzept, Realisierung sowie Einsatzerfahrungen bzw. Evaluation der Baumstrukturaufgaben zu geben und damit etwaigen Mathematikdozenten eine Entscheidungsgrundlage zu liefern, ob dieses Format für die Anwendung in eigenen Lehrveranstaltungen lohnenswert erscheint. Dazu werden als Hauptteile der Dissertation folgende Facetten beleuchtet:

- Als Motivation für das Baumstrukturaufgaben-Projekt werden die Herausforderungen in der Mathematiklehre zum Studienbeginn beschrieben, sowohl allgemein in MINT-Fächern an deutschen Hochschulen als auch konkret in der Serviceveranstaltung, für welche die Baumstrukturaufgaben entwickelt worden sind.
- Anschließend werden die konzeptionellen didaktischen Grundlagen für die Baumstrukturaufgaben erläutert. Dazu gehören einerseits systematische eigene Beobachtungen in der Veranstaltung, andererseits theoretische Konzepte aus der Literatur wie etwa der Verzweigungs-Ansatz programmierten Lernens nach Norman Crowder oder (lokale) Adaptivität. Auf Basis dieser Konzepte werden auch die Ziele der Baumstrukturaufgaben-Entwicklung dargestellt.
- Als Einblick, wie Aufgaben dieses Formats aussehen können, werden die selbstentwickelten Baumstrukturaufgaben konkret beschrieben.
- Zuletzt werden die Evaluationsergebnisse zum bislang fünfjährigen Einsatz der Baumstrukturaufgaben dargestellt, allesamt auf der Basis anonymer Daten. Die Untersuchungselemente sind allgemeine Nutzungsdaten, eine Studierendenumfrage, eine Korrelationsuntersuchung zwischen Aufgabennutzung und Klausurleistung, sowie ein Nutzer-Nichtnutzer-Vergleich auf Basis eines Vortests.

Als wesentlicher potentieller Beitrag des Promotionsprojekts zu Forschung und Lehre sind die stoffdidaktische Analyse von Mathematikthemen des Studienbeginns sowie deren Aufarbeitung als nutzbare Baumstrukturaufgaben festzuhalten. Zudem stellt das Baumstruktur-Prinzip ein Mittel dar, Crowders bislang wenig genutzten Verzweigungs-Ansatz programmierten Lernens in zeitgemäß digitale Form zu bringen, und liefert eine mögliche Antwort auf die Frage, wie sich E-Learning zu (Hochschul-)Mathematik verständnisorientiert realisieren lässt.

Abstract

This dissertation discusses the "tree-structured exercises" – a type of e-learning material developed by the Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik in close cooperation with the Institut für Geometrie und Praktische Mathematik at RWTH Aachen University. The exercises are used as an optional practice element in the "Mathematics I/II" course for civil engineering and related disciplines.

In a broader sense, the challenge of teaching mathematics at the transition from school to university has been the starting point for this project. That challenge has long been a topic of interest and has garnered even higher momentum over the past years – here as well as at other German universities. Among the issues addressed are rising student numbers, changes in university freshmen's mathematical background knowledge, and mathematics courses as a substantial hurdle for freshmen in STEM study programmes. Reactions include growing numbers of diverse support measures especially at universities, many of which are partly or entirely realized as e-learning. Despite frequently using modern digital methods of visualization, exercises in most of these e-learning materials still use the simple format of "task description – input of result – correctness feedback". With its emphasis on skills, this format is particularly suitable for mathematics at school level. In university level mathematics, however, tasks often become significantly more complex and consist of more interdependent steps than tasks in school level mathematics; solution processes often require a sense of overview as well as decisions that can only be made with an advanced understanding of the relevant concepts.

In order to emphasize understanding and realize a more concept-oriented implementation of task solving processes, the tree-structured exercises follow a different approach: An exercise does not consist of a single question, but rather a multitude of interconnected content and question pages which cover the whole solution process – from initial trial-and-error phases to eventually writing down a neat solution. During the course of a tree-structured exercise, the "path" repeatedly splits up at question pages where the user gets asked for partial results in the solution process. In this manner, it is possible to implement additional assistance to the user after wrong answers, as well as different solutions in general. Furthermore, relevant lecture content can be revised and consolidated during the course of an exercise – with direct connection to the task at hand – on content pages. The author has taken part in the development of tree-structured exercises since autumn 2012 and has been the sole developer since spring 2014.

The main intention behind this dissertation text lies in giving detailed insights into the concept, realization, usage experiences and evaluation of the tree-structured exercises to interested readers, thereby providing mathematics lecturers with a basis for deciding whether this format appears worthwhile for use in their own courses. The following aspects are featured as main parts of this dissertation:

- The challenges in freshman mathematics courses – in STEM study programmes at German universities in general as well as in the specific course that the tree-structured exercises have been developed for – are described as a motivation for the tree-structured exercise project.
- Subsequently, didactical basics for the tree-structure concept are explained. This includes systematic observations in the specific course on one hand and theoretical concepts from literature on the other, for instance the branching approach of programmed instruction by Norman Crowder or (local) adaptivity. Based on these concepts, this part of the text also features the specific objectives behind developing the tree-structured exercises.
- As an insight into what exercises of this format can look like, the tree-structured exercises developed by the author are described in a concrete fashion.
- Finally, the evaluation results of five years of tree-structured exercise usage are presented, each on the basis of anonymous data. The evaluation comprises general usage data, a student survey, a correlation analysis between exercise usage and exam performance, as well as a comparison of users and non-users based on a pretest.

A substantial potential contribution of this dissertation project to research and university teaching lies in the didactical content analyses of topics in freshman mathematics, as well as the implementation of usable tree-structured exercises based on these analyses. Furthermore, the tree-structure principle can refurbish Crowder's so far little-used branching approach of programmed instruction in a modern digital fashion – providing a possible answer to the question of how to realize e-learning for (university level) mathematics that emphasizes conceptual understanding.

Danksagung

Am Gelingen dieser Arbeit haben mehrere Personen einen wichtigen Anteil, weswegen ich an dieser Stelle meinen Dank ausdrücken möchte.

Insbesondere danke ich meiner Doktormutter, Frau Professor Dr. Johanna Heitzer. Ihr stetes Vertrauen, ihre konstruktiven Anregungen und ermutigenden Rückmeldungen waren von maßgeblichem Wert für diese Arbeit.

Herrn Professor Dr. Michael Herty danke ich herzlich für die Übernahme des Zweitgutachtens sowie für seine hilfreichen Rückmeldungen und Impulse im gesamten Projektverlauf.

Ihm und Herrn Professor Dr. Lars Grasedyck bin ich dankbar für die Möglichkeit, in der Hochschul-Servicemathematiklehre mitzuwirken und zugehörige empirische Untersuchungen durchführen zu können. Zudem danke ich ihnen für ihre langjährig fundierten Einsichten in typische Herausforderungen des Veranstaltungsbetriebs. Frau Dr. Sonja Steffensen danke ich für ihre hilfreichen Informationen zum Übungsbetrieb und zur Studierendenschaft.

Darüber hinaus gilt mein Dank den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls A für Mathematik sowie des Instituts für Geometrie und Praktische Mathematik der RWTH Aachen für die jederzeit anregende und angenehme Arbeitsatmosphäre. Im Besonderen danke ich Frau Dr. Andrea Offergeld für die Vorarbeit bei der Entwicklung erster Baumstrukturaufgaben, Frau Ruth Bisterfeld, Herrn Dr. Tobias Hock, Frau Dr. Agnes Peters, Herrn Stefan Pohlkamp, Herrn Marvin Titz, Frau Regine Wallraf und Herrn Tobias Wiernicki-Krips für die fruchtbaren Diskussionen und Rückmeldungen, Frau Kateryna Graf und Herrn Frank Knoben für die Unterstützung bei der Datenakquise und Herrn Dr. Axel Häck für den hilfreichen Austausch bzgl. fachmathematischer Aspekte. Bei Herrn Anton Immel, Herrn Marcel Ritz und Herrn Sven Schöbel bedanke ich mich für die Hilfe bei verschiedenen technischen Fragen.

Mein abschließender Dank gilt meiner Familie, die mich über die gesamte Zeit der Promotion uneingeschränkt unterstützt und bestärkt hat.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Vor dem Hintergrund der aktuellen Entwicklungen im deutschen Bildungsbereich – etwa eines deutlich gewachsenen Anteils an Schulabsolventen mit Allgemeiner Hochschulreife, entsprechend gestiegener Studierendenzahlen sowie veränderter Voraussetzungen der Studienanfänger – ist der schon immer herausfordernde Übergang Schule-Hochschule in den letzten Jahren noch mehr in den Fokus gerückt. Insbesondere Mathematikveranstaltungen der ersten Semester in MINT- und auch Wirtschafts-Studiengängen haben sich als eine wesentliche Hürde für Studienanfänger herausgestellt und werden häufig als Hauptgrund für einen Studienabbruch genannt. Als wesentliche Beteiligte reagieren die Hochschulen darauf unter anderem mit einem wachsenden Angebot verschiedenster Unterstützungsmaßnahmen.

Den Zeichen der Zeit entsprechend – und auch schlicht als Antwort auf die hohen Studierendenzahlen – werden viele dieser Unterstützungsmaßnahmen als E-Learning entwickelt. Die meisten dieser E-Learning-Angebote sind so aufgebaut, dass jede einzelne Aufgabe aus Aufgabenstellung, Eingabe des zugehörigen Endergebnisses und Korrekt/Falsch-Feedback besteht. Damit ist die jeweilige Aufgabe dann auch abgeschlossen. (Ein Beispiel für ein von diesem Prinzip abweichendes E-Learning-Angebot mit mehrseitigen Aufgaben, wenn auch aus dem Mechanik-Bereich, ist am Ende von Abschnitt 3.2.2 referenziert.) Dadurch werden Inhalte tendenziell fertigkeitsorientiert abgefragt: Nullstellen eines Polynoms bestimmen, Term der Ableitung oder einer Stammfunktion angeben, Determinante einer Matrix berechnen, oder auch Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe entscheiden, etc. Für den Aufbau des inhaltlichen Verständnisses hinter diesen Fertigkeiten stehen typischerweise separat von den Aufgaben digital aufbereitete Materialien zur Verfügung, die im Wesentlichen Skriptform aufweisen und deren Durcharbeiten auf herkömmliches Durchlesen und Nachvollziehen hinausläuft. Das ändert sich prinzipiell auch nicht durch Einbinden moderner digitaler, ggfs. dynamischer Veranschaulichungsmöglichkeiten z. B. in Applet-Form. Dadurch eignet sich der beschriebene Aufbau besonders zum Auffrischen bzw. Festigen des Schulstoffs, der auch heute noch im Wesentlichen kalküllastig ist.

Mit den Inhalten der Hochschulmathematik verhält es sich etwas anders: Viele Aufgabenstellungen sind deutlich komplexer und vielschrittiger als beim Schulstoff; der Lösungsverlauf erfordert mehr Überblick und zudem häufig Entscheidungen, die man nur mit weitergehendem inhaltlichen Verständnis der zugehörigen Konzepte treffen kann. Das Kalkül ist nun selbstverständliche Voraussetzung und tritt gegenüber dem strukturell-logischen Durchdringen häufig in den Hintergrund. Der zuvor beschriebene typische E-Learning-Aufbau bietet dafür keinen optimalen Ansatz.

An dieser Stelle, hier speziell für eine Mathematik-Einführungsveranstaltung im Ingenieurbereich an der RWTH Aachen, sollten die titelgebenden Baumstrukturaufgaben (BSAs) ansetzen: Ein E-Learning-Angebot, entwickelt von Mitarbeitern des Lehr- und Forschungsgebiets Didaktik der Mathematik in enger Zusammenarbeit mit Dozenten des Instituts für Geometrie und Praktische Mathematik, als freiwilliges Begleitmaterial zur Veranstaltung „Mathematik I/II“ für Bauingenieurwesen und verwandte Fachrichtungen (welches aber genauso auch in ähnlichen Service-Mathematikveranstaltungen benutzt werden könnte). Die BSAs sollten ein verständnis- und konzeptorientiertes E-Learning-Angebot werden, welches besser als einzelne Frage-Antwort-Einheiten zu den Anforderungen des Lernens von Hochschulmathematik passt.

Als Reaktion auf die in der Veranstaltung beobachteten Herausforderungen (etwa Realisierung individuellen Feedbacks für sehr viele Studierende oder Animieren zum eigenständigen Aufgabenlösen) sowie unter Rückgriff auf Konzepte aus der Literatur (etwa der verzweigte Ansatz programmierten Lernens nach Norman Crowder) ist das Baumstruktur-Prinzip konzipiert worden: Eine Aufgabe besteht nicht aus einer einzigen Frage, sondern aus einer Vielzahl von Inhalts- und Frageseiten, die untereinander verlinkt sind und damit den gesamten Lösungsprozess von anfänglichem Ausprobieren bis zum sauberen Lösungs-Aufschreiben abdecken. Dabei gabelt sich der „Weg“ immer wieder antwortabhängig an Frageseiten auf, bei denen Teilergebnisse abgefragt werden. Auf diese Weise ist es möglich, zusätzliche Hilfestellungen nach falschen Antworten sowie überhaupt unterschiedliche Lösungswege zu realisieren. Mit den Inhaltsseiten können zudem die für die jeweilige Aufgabe relevanten Konzepte des Vorlesungsstoffs direkt im Lösungsverlauf mit unmittelbarem Problembezug wiederholt und vertieft werden. Seit Herbst 2012 hat Dr. Andrea Offergeld unterstützt durch den Autor, ab Frühjahr 2014 allein letzterer auf Basis des genannten Prinzips die Baumstrukturaufgaben entwickelt.

Der aktuelle Fundus besteht bis auf wenige Detailänderungen seit Frühjahr 2017.

Diese Entwicklung, zusammen mit dem Einsatz in der Veranstaltung sowie zugehörigen Untersuchungen, ist zum Promotionsprojekt des Autors geworden. Als *Ziele des BSA-Projekts* haben sich im Wesentlichen die folgenden herauskristallisiert:

- Die BSAs als E-Learning-Produkt, welches für die Studierenden möglichst inhaltlich hilfreich und gut nutzbar sein soll – hauptsächlich untersucht anhand einer wiederholt durchgeführten anonymen Umfrage unter den Studierenden.
- Eine möglichst hohe BSA-Nutzungsquote unter den Studierenden – untersucht anhand anonymisierter BSA-Nutzungsdaten.
- Eine objektiv messbare, positive Wirkung der BSA-Bearbeitung für die Studierenden – untersucht anhand anonymisierter Daten zu Aufgabennutzung und Klausurleistung.

Daneben liegt das *Bestreben dieses Dissertationstexts* darin, dem interessierten Leser einen möglichst detaillierten Einblick in Konzept, Realisierung sowie Einsatzerfahrungen bzw. Evaluation der BSAs zu geben und damit etwaigen Mathematikdozenten eine Entscheidungsgrundlage zu liefern, ob dieses Format für die Anwendung in eigenen Lehrveranstaltungen lohnenswert erscheint. Dazu werden als Hauptteile der Dissertation folgende Facetten der BSAs beleuchtet: Die Herausforderungen in der Mathematiklehre zum Studienbeginn als Motivation für das BSA-Projekt, die konzeptionellen Grundlagen für die BSAs, eine detaillierte Beschreibung der konkret entwickelten BSAs aus didaktischer Sicht sowie die Evaluation mitsamt Ergebnissen aus dem bislang fünfjährigen Einsatz in der Veranstaltung.

1.2 Kapitelübersicht und Zielgruppe

Die Arbeit besteht aus folgenden vier Hauptteilen:

In Kapitel 2 wird zunächst die allgemeine Situation zu Studienbeginn in mathematikreichen Studiengängen an deutschen Hochschulen beschrieben, welche geprägt ist durch zunehmende Abiturienten- und Studienanfängerzahlen sowie veränderte Voraussetzungen bzgl. der mitgebrachten Vorkenntnisse und Fertigkeiten. Zudem wird ein Überblick über gängige Unterstützungsmaßnahmen in Deutschland gegeben. Es folgt die Beschreibung der Situation in der konkreten Service-Mathematikveranstaltung, für welche die Baumstrukturaufgaben entwickelt worden sind – mit Details zu den Veranstaltungselementen und Darstellung der beobachteten didaktischen Herausforderungen.

Gegenstand von Kapitel 3 sind die konzeptionellen Grundlagen für die Baumstrukturaufgaben. Zunächst werden grundsätzliche Leitideen und Forderungen für die zu konzipierende Unterstützungsmaßnahme aus den Herausforderungen am Ende des vorigen Kapitels gezogen. Es folgen relevante Theorie-Konzepte aus der Literatur wie etwa das programmierte Lernen oder Adaptierbarkeit und Adaptivität, ein möglichst vollständiger Überblick über die übergreifenden BSA-Eigenschaften sowie eine Kurzdarstellung des BSA-Erstellungsprozesses. Die letztgenannten beiden Abschnitte eignen sich für Leser, die wesentliche Gestaltungsaspekte schnell in zusammengefasster Form finden wollen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden schließlich die Ziele für das BSA-Projekt benannt.

In Kapitel 4 werden die selbstentwickelten BSAs beschrieben – drei ausgewählte repräsentative Aufgaben jeweils mit fachlichem Hintergrund zum Thema, didaktischen Überlegungen, deren Umsetzung und dem genauen Ablauf der Aufgabe, die restlichen BSAs danach in wesentlichen Zügen. Leser, die eher nur die wichtigsten Informationen im Überblick sichten wollen, können den BSA-Ablauf im Ganzen jeweils einem Ablaufdiagramm entnehmen; die wichtigsten didaktischen Überlegungen sind zudem übersichtlich in der jeweiligen Tabelle mit den didaktischen Umsetzungen („Abhilfen“) zu sehen.

In Kapitel 5 werden die Evaluationsergebnisse der mehrjährigen BSA-Nutzung in der Veranstaltung vorgestellt – allesamt auf der Basis anonymisierter Daten. Die wesentlichen Untersuchungs-Elemente sind allgemeine Nutzungsdaten, eine wiederholt durchgeführte Studierendenumfrage, eine Korrelationsuntersuchung zwischen Aufgabennutzung und Klausurleistung, sowie ein BSA-Nutzer-Nichtnutzer-Vergleich auf Basis eines Vortests zu Beginn der Veranstaltung. Jeder Abschnitt enthält eine Tabelle mit wesentlichen Zahlenwerten zu den Evaluationsergebnissen; diese eignet sich jeweils wieder dafür, Lesern einen schnellen Überblick zu verschaffen.

Im Fazit wird – nach einem Rückblick auf die Haupterkenntnisse der vorigen Kapitel – zusammengefasst, wie die Ergebnisse der statistischen Untersuchungen in Bezug auf das Erreichen der am Ende von Kapitel 3 benannten Ziele zu sehen sind. Es folgt eine kurze Darstellung von im Nachhinein als verbesserungswürdig beurteilten Aspekten bei BSA-Entwicklung, -Einsatz und -Evaluation, ggfs. mit zugehörigen Verbesserungsvorschlägen, sowie einigen Ansatzpunkten für eine mögliche zukünftige Weiterentwicklung. Den Abschluss bildet ein Resümee zum Nutzen und zum Forschungsbeitrag der BSAs, in welches insbesondere Überlegungen zu Aufwand und Voraussetzungen eingehen.

Zielgruppe dieser Arbeit sind primär Hochschuldozenten aus der Mathematiklehre – egal ob in Hauptfach- oder Serviceveranstaltungen involviert – die sich über aktuelle Möglichkeiten von E-Learning zur Mathematik informieren wollen, und die eventuell sogar auf der Suche nach brauchbaren Formaten sind, mit denen sich konzept- und verstehensorientiertes elektronisches Lernen in Mathematik realisieren lässt. Daneben mag die Arbeit allgemeiner für (Mathematik-)Didaktiker von Interesse sein, die sich über zeitgemäße Realisierungen programmierten Lernens informieren wollen.

Zur bestmöglichen Lektüre insbesondere der BSA-Beschreibungen ist eine grobe Kenntnis von Inhalten der Höhere-Mathematik-Veranstaltungen des ersten und zweiten Semesters erforderlich. Das Kapitel zur Evaluation und dort vor allem die Abschnitte zu Korrelationen und zur Eingruppierungs-Untersuchung benötigen grundlegende Kenntnisse der Stochastik/Statistik.

Kapitel 2

Die herausfordernde Studieneingangsphase als Ausgangssituation

Zum Einstieg ins Thema der Dissertation werden in diesem Kapitel wesentliche Herausforderungen in der Mathematiklehre am Übergang Schule-Hochschule beschrieben – zuerst allgemein mit Bezug auf die gesamtdeutsche Schul- und Hochschulbildung, dann speziell in der Veranstaltung „Mathematik I/II", für die die Baumstrukturaufgaben entwickelt worden sind. Insbesondere letzteres wird sich als direkt relevant für die Konzeption des Baumstruktur-Prinzips herausstellen.

2.1 (Service-)Mathematiklehre an deutschen Hochschulen

2.1.1 Zahlen und Fakten zu Lernerschaft und Rahmenbedingungen

Der inhaltliche Bruch zwischen Schul- und Hochschulmathematik ist kein neues Phänomen und kann als „beinahe klassisches Problem" in der Mathematikdidaktik gelten ([97], S. 949). Schon 1908 benannte beispielsweise Felix Klein diesen im Zusammenhang mit der „doppelten Diskontinuität" in der deutschen Mathematiklehrerbildung (vgl. das Vorwort in [12]). Heute wie damals stellt sich der Bruch folgendermaßen dar: Während man in der Schulmathematik Sachverhalte vor allem durch Anschaulichkeit und intuitives Verständnis legitimiert und einen Schwerpunkt auf das Beherrschen elementarer Kalkülfertigkeiten legt, definiert man Sachverhalte und Objekte in der Hochschulmathematik rein formal-abstrakt auf exakter axiomatischer Basis und untersucht sie entsprechend mithilfe von rein logischen Argumentationen (vgl. z. B. [38], S. 284-286). Empirie unterstützt dann höchstens noch beim Verständnis oder bei der Lösungssuche, hat aber keine legitimierende Funktion mehr (vgl. [97], S. 951). Dieser Wechsel hin zum formallogischen Argumentieren verlangt seit Generationen von den MINT-Studierenden viel Eingewöhnung und Übung.

Durch relativ neue Entwicklungen in Deutschland hat sich diese Hürde noch vergrößert (vgl. auch [43], S. 4). Eine dieser Veränderungen besteht darin, dass ungefähr seit der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts das Gymnasium und vor allem die Hochschule nicht mehr Bildungseinrichtungen für wenige ausgesuchte Schüler bzw. Studierende darstellen, sondern mittlerweile von einer breiten Masse besucht werden (vgl. etwa [90]). Hintergrund dessen ist u. a. die politisch geförderte Akademisierung in Deutschland (vgl. [89], S. 9), und damit verbunden auch die Forderung nach mehr Absolventen im MINT- und vor allem im Ingenieurs-Bereich (vgl. [44], S. 6).

Veranschaulicht an Zahlen: 1952 besuchten ca. 15% der gesamten deutschen Schülerschaft ein Gymnasium, 2015 bereits ca. 27% (zur gesamten Schülerschaft zu einem Zeitpunkt zählen hier u. a. auch die Grundschüler). Deutlich ist auch der Unterschied bei den Übergangsquoten von der Grundschule zum Gymnasium. So lag zum Schuljahr 1970/71 diese Übergangsquote in Nordrhein-Westfalen bei ca. 24%, zu 2011/2012 schon bei ca. 41%; in den anderen Bundesländern sieht die Entwicklung ähnlich aus. Damit ist das Gymnasium in den meisten Bundesländern mittlerweile die meistbesuchte weiterführende Schulform (vgl. z. B. [46], S. 48-49; für Baden-Württemberg [85], S. 32; für Niedersachsen [30], S. 18-19). Noch stärker ist die Veränderung bei den Hochschulen: Die bundesweite Studienanfänger-Quote (inklusive Fachhochschulen) lag 1980 bei ca. 20% des jeweiligen Geburtsjahrgangs, 2014 bereits bei ca. 58% bzw. ca. 48% unter Herausrechnen von Studierenden mit ausländischer Hochschulzugangsberechtigung (vgl. [18], S. 297, zur Methodik auch S. 129). Die Entwicklung schlägt sich auch in den MINT-Fächern nieder, diesmal an absoluten Zahlen veranschaulicht: Im Jahr 1976 waren im heutigen Bundesgebiet insgesamt rund 79.000 Studierende im ersten Fachsemester eines MINT-Studiengangs eingeschrieben, davon ca. 47.000 im Ingenieurbereich; im Jahr 2014 sind es rund 337.000 Studierende, davon ca. 169.000 im Ingenieurbereich (vgl. [56]; [55]), also jeweils ungefähr eine Vervierfachung. (Bis 2014 zählte die Informatik zum Fachbereich Mathematik & Naturwissenschaften, seit 2015 zum Ingenieurbereich, weshalb die Relationen vorher und nachher nicht unmittelbar vergleichbar sind.)

Im Zuge dieser Ausweitung der Gymnasialschüler- und Studierendenschaft hat sich außerdem deren soziale Zusammensetzung geändert; heutzutage kommt ein bedeutender Anteil nicht aus einem bildungsbürgerlichen Umfeld (vgl. [51]). Daraus resultiert eine in diesem Ausmaß früher nicht vorhandene Heterogenität bezüglich Vorwissen, Lernverhalten, Eigenständigkeit, Frustrationstoleranz, Leistung u. a. Die Bandbreite ist dabei insbesondere auch „nach unten hin“ größer geworden.

Parallel dazu hat vor allem vor dem Hintergrund der Kompetenzorientierung, welche ungefähr seit 2000 den Diskurs im Bildungssystem beherrscht – aber auch durch andere gleichzeitige Entwicklungen wie die G8-Schulzeitverkürzung – ein bedeutsamer Paradigmenwechsel im deutschen Mathematikunterricht stattgefunden. Dieser äußert sich in mehreren Aspekten (vgl. dazu [22], S. 25; [53], S. 231-232; [23]; [66]):

- Schwerpunktverschiebung weg von Kalkül-Aufgabenpools hin zu anwendungsorientierten Aufgaben in Sachzusammenhängen
- Analoge Schwerpunktverschiebung weg von innermathematischen hin zu sachbezogenen Argumentationen
- Reduktion des Abstraktionsgrads bei der Darbietung des Stoffs (u. a. in Schulbüchern)

Dieser Paradigmenwechsel hat – bei aller Wohlbegründung – vermutlich dazu beigetragen, dass mittlerweile Studienanfänger im Vergleich zu vorher vermehrt Unsicherheiten im Kalkül sowie Unvertrautheit mit formalen Schreibweisen und innermathematischen Argumentationen aufweisen (vgl. auch [52]; [22], S. 26). All dies erschwert ihnen tendenziell den Einstieg in die Hochschulmathematik. Wer etwa bei elementaren Term- oder Äquivalenzumformungen wenig Übung hat und Mühe für deren Nachvollziehen aufwenden muss, wem der Unterschied zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung noch nicht ganz klar ist, wer sich erst noch an die Benutzung des Äquivalenzpfeils gewöhnen muss usw., der hat entsprechend weniger Kapazitäten, um sich auf die hinzukommenden, oft noch schwierigeren Aspekte zu konzentrieren – etwa die rein innermathematisch-axiomatische Argumentationsweise, Erfassung des Wie und Warum von Verfahren, Voraussetzungen von Sätzen, grundlegende Beweisideen oder zu beachtende Sonderfälle. „Stumpfes“ automatisiertes Kalkül bleibt auch heutzutage eine wichtige Fähigkeit, um mental die Kapazitäten für Begriffsbildung und tiefergehendes Verständnis freizuhalten.

Relevant dürfte auch der Wegfall einzelner Unterrichtsinhalte aus Mathematik-Lehrplänen sein. Exemplarisch seien einige weggefallene Inhalte aus dem Oberstufenstoff in Nordrhein-Westfalen genannt, vergleichend zwischen dem aktuellen Sek-II-Lehrplan von 2014 und dem früheren von 1999 (vgl. [67]; [68]; zu Änderungen vgl. auch die Aufstellung bei [82], S. 230-231):

- Koordinatengeometrie mit Kreisen: Kreisgleichung, Tangenten an Kreise, Schnitte von Kreis und Gerade
- Koordinatenform von Ebenen im dreidimensionalen Raum nicht mehr im Grundkurs
- Lineare Regression und Korrelation
- Zusammenhänge zwischen Integrierbarkeit, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Statt dass Hochschulen solche Stoffe wiederaufgreifen bzw. vertiefen können, müssen sie diese nun von Grund auf neu einführen – womit sich ein Teil der Lehrverantwortung weiter von der Schule hin zur Hochschule verschoben hat. Allgemein vergrößern diese weggefallenen Inhalte die Diskrepanz zwischen den Mathematikinhalten des Abiturs und dem, was Hochschulen als mathematisches Mindestvorwissen voraussetzen (vgl. etwa den Mindestanforderungskatalog der cosh-Arbeitsgruppe, [15]).

Schließlich ist anzunehmen, dass auch das langfristige Verringern der Gesamtstundenanzahl des Schulfachs Mathematik eine verstärkende Auswirkung auf die obigen Entwicklungen gehabt hat. Dabei ist die Stundenverringerung je nach Bundesland unterschiedlich stark ausgefallen (vgl. [82], S. 227).

Als Konsequenz der beschriebenen Veränderungen sind die folgenden aktuellen Herausforderungen zusammenzufassen, die den Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik zusätzlich problematischer machen, und deren Bewältigung aktuell zu großen Teilen der Hochschul-Mathematiklehre obliegt.

- Die *quantitative* Herausforderung: Die Lehr- und Übungselemente müssen für zunehmend große Teilnehmergruppen sinnvoll nutzbar bleiben. Als Veranschaulichung dazu: In Mathematikvorlesungen sowohl im Mathematikstudium selbst als auch in anderen MINT-Fächern werden oft semesterbegleitend regelmäßige schriftliche Hausaufgaben gestellt. Diese werden von Tutoren korrigiert und erlauben so eine individuelle Rückmeldung zu gemachten Fehlern, Argumentationslücken, besseren Lösungswegen etc. Für 1000, 2000 oder 3000 Hörer einer Erstsemester-Mathematikvorlesung für Maschinenbauer lässt sich solch ein Angebot jedoch meist nicht mehr (für alle verpflichtend) realisieren, sodass andere Möglichkeiten gefunden werden müssen.
- Die *qualitative* Herausforderung: Die Hochschullehre trifft heutzutage auf Studienanfänger-Kohorten, die bzgl. Vorwissen, Kalkülsicherheit, Lernverhalten, Frustrationstoleranz u. a. zunehmend heterogener aufgestellt sind. Das traditionel-

> le Vorgehen mit Vorlesung, begleitenden Tutorien und eventuell zugehörigen schriftlichen Hausaufgaben ist damit für einen zunehmenden Teil der Studienanfänger überfordernd. Die schulmathematische Schwerpunktverschiebung weg von Kalkülfertigkeiten hat diese Überforderung noch verstärkt. Will man weiterhin den Großteil der Studierenden „mitziehen", muss dies gelöst werden.

Die in diesem Unterabschnitt umrissenen Probleme bestehen auf ähnliche Weise auch in vielen anderen europäischen und außereuropäischen Ländern (vgl. z. B. [38], S. 283). Bei nationalen und internationalen mathematikdidaktischen Tagungen bildet der Übergang Schule-Hochschule oft einen eigenen Unterpunkt des Programms (so etwa bei der 51. GDM-Jahrestagung 2017 in Potsdam). Stark thematisiert wird die Mathematiklehre zudem im Kontext der Hochschul-Ingenieurausbildung; auch dafür gibt es eigene, nationale sowie internationale Tagungen und Interessenverbände (etwa der innerdeutsche Workshop Mathematik für Ingenieure oder die europäische SEFI Mathematics Working Group). Gründe für die prominente Thematisierung im Ingenieurwesen mögen darin liegen, dass die Ingenieurrichtung den wirtschaftlich wohl bedeutendsten MINT-Zweig darstellt, dass rund die Hälfte aller MINT-Studierenden ein Ingenieursfach studiert (siehe die Studierendenzahlen weiter oben), dass dafür die Mathematikanforderungen vergleichsweise hoch sind (etwa höher als für Wirtschafts-Studiengänge), und nicht zuletzt dass die Mathematikveranstaltungen dort oft als Grund für Misserfolg im Studium genannt werden (vgl. etwa [79], S. 398-399; [45], S. 70-72). Entsprechend findet sich auch ein großer Teil der derzeitigen Mathematik-Unterstützungsprojekte in Ingenieurstudiengängen.

Beispiele für solche alternativen oder zusätzlichen Angebote aus der aktuellen Hochschulmathematik-Lehrpraxis in Deutschland sind im nächsten Unterabschnitt zu kategorisieren und beschreiben.

2.1.2 Aktuelle Beispiele für Unterstützungsmaßnahmen

Vorbereitungsmaterial vor dem Studium

Es gibt zahllose Angebote an deutschen Hochschulen, die Studieninteressierten schon vor dem Studium eine Einschätzung von Studienanforderungen und eigenen Fähigkeiten erleichtern oder ihnen Einblick in Studieninhalte ermöglichen sollen. Dazu zählen etwa Präsenzangebote direkt an den Hochschulen (Infotage, „Schnupperstudium" etc.) und Online-Self-Assessments. Beides ist oft nach Fachrichtungen unterteilt, und oft bildet die Fachrichtung Mathematik oder allgemein MINT eines dieser Unterangebote. In einzelnen Regionen werden auch an ausgewählten Schulen für MINT-interessierte Schüler

Oberstufenkurse zu didaktisch aufbereiteter, elementarer Hochschulmathematik angeboten, mit von Hochschulen entwickeltem Kursmaterial (siehe etwa das Aachener Projekt iMPACt, vgl. [43]).

Angestrebt ist, dass die Studieninteressierten nach Nutzung des Vorbereitungsmaterials besser entscheiden können, ob ein mathematikreiches Studium für sie geeignet ist oder nicht, oder ob sie zuvor noch Mathematikkenntnisse nachholen müssen.

Beispiele:

- Nach Fächern unterteiltes Online-Self-Assessment der Universität Bonn: https://www.uni-bonn.de/studium/vor-dem-studium/orientierung-beratung/online-self-assessment
- Nach Fächern unterteiltes Online-Self-Assessment der Universität Kiel: https://www.studium.uni-kiel.de/de/studienentscheidung/self-assessment
- Schnupperangebote und Infotage an der RWTH Aachen: http://www.rwth-aachen.de/go/id/ccuo
- Oberstufen-Kursmaterial „iMPACt“ zu elementarer Hochschulmathematik: http://www.mathematik.rwth-aachen.de/go/id/tek

Vor- und Brückenkurse auf Präsenzbasis

Ebenfalls sehr verbreitete Unterstützungsmaßnahmen sind Vor- bzw. Brückenkurse zur Mathematik, welche an sehr vielen Hochschulen mit MINT-Studienfächern zu finden sind. Sie dienen vor allem zum Sicherstellen der nötigen Mathematik-Grundlagenkenntnisse zum Studienbeginn sowie zum Fördern eines einheitlicheren Vorkenntnisniveaus der Lernerschaft.

In diesen üblicherweise freiwilligen Präsenzkursen wird meist Mathematik-Schulstoff wiederholt und teilweise auf Hochschulniveau vertieft (das kann je nach Vorkurs so weit gehen, dass z. B. der Grenzwertbegriff schon mittels ε-Folgengrenzwert-Definition formalisiert wird). Daneben werden oft auch Grundlagen der Hochschulmathematik behandelt (z. B. Aussagenlogik oder Mengenlehre). Schließlich werden häufig auch Themen angesprochen, die im Schulunterricht nicht mehr oder nur noch am Rande vorkommen, etwa Kreisgleichungen oder Ungleichungen. Eingeführt wird der Stoff häufig frontal im Vorlesungsstil, begleitende Übungsaufgaben dazu werden typischerweise in Übungsgruppen bearbeitet und besprochen. Vorkurse können zeitintensiv einige Wochen vor Beginn des ersten Semesters stattfinden (dies ist das vorherrschende Modell) oder begleitend zum ersten Semester laufen. Die Bezeichnung „Vorkurs“ beschreibt immer ersteres, „Brückenkurs“ kann sowohl ersteres als auch letzteres bezeichnen. Gerichtet sind die Kurse an angehende Studierende der Mathematik und anderer Fächer aus den obengenannten Gebieten (in denen Mathematikveranstaltungen Teil des Studiums sind). Oft werden auch leicht unterschiedliche Mathematik-Vorkurse für unterschiedliche Studienrichtungen angeboten, z. B. speziell für ein ingenieurwissenschaftliches, naturwissenschaftliches, wirtschaftliches oder fachmathematisches Studium.

Vor- und Brückenkurse sind bereits seit ungefähr den 1970er Jahren gängig (vgl. [53], S. 228). Schon früh wurden unterschiedliche Vorkenntnisse der Studienanfänger als ein Grund für die Einführung der Kurse genannt – bei Abiturienten ebenso wie bei Nichtstandard-Studienanfängern, die etwa nach dem Abitur zuerst berufstätig waren oder die die Studienberechtigung nicht über das „normale“ Abitur erlangt haben (vgl. das Vorwort in [81]). Die in Unterabschnitt 2.1.1 beschriebenen Entwicklungen deuten darauf hin, dass seitdem die Heterogenität der Studienanfänger noch zugenommen hat. Die Bedeutung von Vor- und Brückenkursen bleibt damit auch heutzutage ungebrochen.

Beispiele:

- Mathematik-Vorkurs an der RWTH Aachen:
  http://www.mathematik.rwth-aachen.de/go/id/izbi
- Mathematik-Vorkurs am Karlsruher Institut für Technologie:
  https://www.mint-kolleg.kit.edu/VorkursMathematik.php
- Mathematik-Vorkurs an der TU München:
  http://www.ma.tum.de/Vorkurse/WebHome
- Mathematik-Brückenkurs an der TU Dresden:
  https://tu-dresden.de/mn/math/studium/lehrangebot/brueckenkurs
- Mathematik-Brückenkurs an der TU Berlin:
  https://www.math.tu-berlin.de/studienfachberatung_mathematik/vor_dem_studium/brueckenkurs

Nulltes Semester

Eine deutlich ausgeweitete Abwandlung des Vorkurskonzepts ist das „Nullte Semester“, welches aktuell an einigen Hochschulen primär im Ingenieurbereich angeboten wird. Hierbei besuchen die Studieninteressierten schon früh im Sommersemester für einen längeren Zeitraum (z. B. 15 Wochen oder mehr) Veranstaltungen, die nah an den Anforderungen des eigentlichen Studiums liegen und ebendarauf vorbereiten. Dadurch erhalten sie einen realistischen Einblick in einige mehrere, aber verwandte Studiengänge.

Die Entscheidung für den eigentlichen Studiengang und Studienbeginn kann dann zum direkt anschließenden Wintersemester fallen und ist im besten Fall deutlich fundierter und persönlich passender als zuvor.

Veranstaltungen des Nullten Semesters setzen sich zusammen aus regulären Modulen der jeweiligen Studiengänge (in denen je nach Hochschule sogar schon anrechenbare Leistungen abgelegt werden können) sowie aus eigens zugeschnittenen Veranstaltungen. Dazu gehört Mathematik ebenso wie technische Fächer oder spezielle Mentoring-Programme.

Beispiele:

- Guter Studienstart an der FH Aachen und an der RWTH Aachen:
  https://www.guterstudienstart.de
- Nulltes Semester der DHBW Stuttgart:
  https://www.skt-stuttgart.de/kurs/nulltes-semester

Vor- und Brückenkurse zur Online-Bearbeitung

Wie bei den Anwesenheits-Vor- und Brückenkursen ist auch hier die Idee, den Studienanfängern Material zur Wiederholung und Festigung des Mathematik-Schulstoffs anzubieten, um ein einigermaßen einheitliches und ausreichendes Vorkenntnisniveau zum Studienbeginn herzustellen. Allerdings wird hierbei der Kursinhalt stattdessen als Online-E-Learning angeboten.

Der Kursinhalt setzt sich mindestens aus Informationselementen, üblicherweise auch aus Übungselementen zusammen. Informationselemente sind meist nach Unterthemen geordnet und bestehen aus didaktisch aufbereiteten Einführungstexten zu den zugehörigen Konzepten, je nach Stoff mit Illustrationen, Beispielen etc. versehen. Sie entsprechen grob den Vorlesungen von Präsenzkursen und sind vom Nutzer durchzulesen und durchzudenken. Übungselemente sind oft den Themen direkt zugeordnet und liegen meist als Aufgabenpools von Kurzfragen vor – was bedeutet, dass jeweils einfach ein einzelnes Ergebnis abgefragt wird (Lösung einer Gleichung, Wahrheitswert einer Aussage, Elemente einer Menge, Schnittpunkt geometrischer Objekte, Term einer gesuchten Funktion, bestimmter Punkt auf einem Funktionsgraphen etc.). Als Rückmeldung gibt es schlicht ein Richtig/Falsch und je nach Kurs bei einer falschen Antwort auch Hinweise dazu, wie man zu einer korrekten Antwort gelangt. Als Gesamtfeedback für den Lerner wird oft zu den verschiedenen Themen jeweils die Anzahl korrekt beantworteter Kurzfragen festgehalten; bei genügend korrekten Antworten gilt der Kenntnisstand zum Thema als ausreichend.

Derzeit gibt es in Deutschland zwei besonders weitverbreitete Online-Vorkurs-Systeme: OMB+ und VEMINT. Beide wurden jeweils in Kooperation mehrerer Hochschulen entwickelt. Ähnliche Materialien sind aber vielfach auch an einzelnen Hochschulen in kleinerem Maßstab entwickelt worden.

Je nach Hochschule können Mathematik-Vorkurse auch als Blended Learning gestaltet sein, bei dem zu den Präsenzelementen Vorlesung und Übung noch Online-Elemente hinzukommen – etwa Videos, Aufgaben oder interaktive Visualisierungen.

Beispiele:

- Online-Mathematik-Brückenkurs OMB+:
  https://www.ombplus.de
- Virtuelles Eingangstutorium VEMINT:
  https://www.mint-kolleg.kit.edu/VorkursMathematik.php
- Online-Vorkurs des MINT-Kollegs Baden-Württemberg:
  http://www.mint-kolleg.de/stuttgart/angebote/online_kurse/onlinemathematikvorkurs.html
- Online-Kompaktkurs Elementarmathematik der HTW Berlin:
  http://elearning-material.htw-berlin.de/KM2
- Ein Blended-Learning-Vorkurs an der HAW Hamburg:
  https://www.haw-hamburg.de/viaMINT
- Ein Blended-Learning-Vorkurs mit VEMINT-Elementen an der Universität Kassel:
  https://www.uni-kassel.de/fb10/institute/mathematik/studium-und-lehre/vorkurs-mathematik.html

Zusätzliche Hilfsveranstaltungen während der ersten Semester

Die zuvor genannten Angebote sind größtenteils zeitlich vor dem Studienbeginn angesiedelt. Mit ihnen wird noch vor dem eigentlichen Studium versucht, Lücken bei Kenntnissen und Fertigkeiten der Studienanfänger zu schließen. Dieses Ziel wird jedoch nicht für die gesamte jeweilige Kohorte erreicht; die obigen Angebote werden nur von einem Teil der Studienanfänger genutzt, und auch dann können Lücken oder problematische Lernstrategien bestehen bleiben. Ist dies der Fall, so können dennoch die Hochschulen im Verlauf der ersten Semester noch auf solche Probleme reagieren.

Eine typische Reaktion in den zuständigen Fakultäten ist das Anbieten separater Hilfsveranstaltungen in diesen ersten Semestern, welche von interessierten bzw. bedürftigen

Studierenden zusätzlich zu den regulären Studienveranstaltungen wahrgenommen werden können. Die obengenannte semesterbegleitende Variante der Brückenkurse ist ein Beispiel dafür; darin werden Schulmathematik und/oder Grundlagen der Höheren Mathematik ausführlich und mit vielen Übungsgelegenheiten behandelt. Andere Möglichkeiten für Unterstützungsangebote sind z. B. Mathematik-Beratungsstellen für persönliche Hilfe bei fachlichen Problemen, Kurse zum Einüben effektiver Lernstrategien, oder „Motivationskurse", in denen Teilnehmer die gerade gelernten Mathematikkonzepte zum Lösen fachbezogener Anwendungsprobleme nutzen können.

Beispiele:

- Mathematik-Beratung im „Mathematikzentrum" an der Goethe-Universität Frankfurt:
  http://www.starkerstart.uni-frankfurt.de/56048655/Mathematikzentrum
- Lernstrategie-Kurse im Rahmen des MP^2-Projekts an der Ruhr-Universität Bochum:
  http://www.ruhr-uni-bochum.de/matheplus
- „Motivationskurs" für bestimmte Ingenieurstudiengänge im Rahmen des MP^2-Projekts an der Ruhr-Universität Bochum:
  http://www.ruhr-uni-bochum.de/mp2/mathepraxis.html

Hilfsmaterial innerhalb von schon bestehenden Mathematikveranstaltungen

Das Anbieten zusätzlicher Hilfselemente innerhalb einer schon bestehenden regulären Mathematikveranstaltung ist von allen Unterstützungsmaßnahmen vermutlich am weitesten verbreitet. Allerdings sind diese Maßnahmen tendenziell selten für Externe einsehbar; und ob öffentlich einsehbar oder nicht, die Veranstaltungs-Webseiten bestehen häufig nur für eine begrenzte Zeit über das jeweilige Semester hinaus. Deshalb seien hier Beispielausprägungen ohne Links genannt.

Beispiele:

- Videos mit detailliert vorgerechneten Aufgabenlösungen
- Fragestunden zu Vorlesungsstoff oder Übungsaufgaben, in denen z. B. zusätzliche HiWis als Ansprechpartner für die Studierenden zur Verfügung stehen
- zusätzliche Aufgabenblätter mit elementareren Übungsaufgaben, evtl. sogar spezielle Übungsgruppen dazu

- begleitende E-Learning-Angebote mit Übungs- bzw. Testaufgaben und/oder Informationselementen

Begleitende E-Learning-Übungsaufgaben bilden das eigentliche Interessensgebiet dieser Dissertation – die titelgebenden Baumstrukturaufgaben selbst fallen in ebendiese Kategorie – und werden im weiteren Verlauf des Texts näher beleuchtet.

2.2 Situation in der Veranstaltung „Mathematik I/II“

Die Baumstrukturaufgaben sind für die Veranstaltung „Mathematik I/II“ für Bauingenieurwesen und verwandte Fachrichtungen an der RWTH Aachen entwickelt worden. Sie stellt also einen wichtigen Hintergrund dar, der im Folgenden zum Stand Frühjahr 2018 zu beschreiben ist.

2.2.1 Beschreibung der Veranstaltung

Kenndaten und Zahlen

Die Veranstaltungen Mathematik I und II sind vorgesehen im ersten und zweiten Semester des Studiums. Sie sind Teil der „mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagen“, die im Studienverlaufsplan neben anderen Ingenieursfächern für die ersten drei Semester vorgesehen sind (vgl. den Studienverlaufsplan in [9], S. 42):

- Mathematik I (1. Semester, 6 SWS, 8 CP)
- Mathematik II (2. Semester, 6 SWS, 8 CP)
- Mechanik I (1. Semester, 7 SWS, 8 CP)
- Mechanik II (2. Semester, 7 SWS, 9 CP)
- Hydromechanik I (3. Semester, 2 SWS, 3 CP)
- Angewandte Statistik (1. Semester, 3 SWS, 3 CP)

Jeweils abwechselnd findet Mathematik I im Wintersemester und Mathematik II im Sommersemester statt. Grob vereinfacht wird in Mathematik I eindimensionale Analysis behandelt, in Mathematik II lineare Algebra, analytische Geometrie sowie Grundlagen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Organisation, Ablauf und beteiligte Personen sind bei beiden Veranstaltungen weitgehend identisch, sodass in dieser Arbeit oft einfach „die Veranstaltung“, „die Vorlesung“, „die Globalübung“ etc. geschrieben wird.

Es handelt sich um eine Großveranstaltung, die von durchschnittlich ca. 1250 Studierenden belegt wird. Dabei sind die Teilnehmerzahlen im Sommersemester meist etwas kleiner als im Wintersemester: Mit den Lernraumteilnehmerzahlen im sogenannten „L^2P“ (siehe nächster Absatz) als Basis hat man z. B. 1267 Teilnehmer im WiSe 2012/2013, 1128 Teilnehmer im SoSe 2013, und aktueller 1357 Teilnehmer im WiSe 2016/2017, 1180 Teilnehmer im SoSe 2017.

Abbildung 2.1: Screenshot aus dem Lernraum zur Mathematik I, WiSe 16/17, im L^2P

Eine wichtige Einrichtung, in der die Studierenden aktuelle Informationen und Begleitmaterial zur Veranstaltung erhalten, ist der Online-Lernraum zur Veranstaltung (siehe Abbildung 2.1). Dieser stand im Zeitraum der Promotion im L^2P, der damaligen Online-Lernplattform der RWTH Aachen. Teil des Lernraums ist insbesondere eine eingebettete E-Learning-Umgebung basierend auf der Software Moodle, zum Stand Frühling 2018 in der Version 3.3.

Die verschiedenen Elemente der Veranstaltung werden im folgenden Unterabschnitt dargestellt.

Die Vorlesung und ihre Inhalte

Die Vorlesung findet in der Vorlesungszeit zweimal pro Woche für 90 Minuten statt. Sie soll den Studierenden die grundlegenden mathematischen Inhalte vermitteln, die zur Aneignung der weiteren bauingenieurspezifischen, später in Studium und Beruf auftauchenden Konzepte nötig sind. Die Inhalte der Vorlesung wurden entsprechend mit der Fakultät für Bauingenieurwesen abgestimmt; sie orientieren sich außerdem an gängigen Lehrwerken zur Mathematik für (Bau-)Ingenieure (selbst angesehen wurden [16]; [26]; [31]; [37]; [54]; [60]; [72]; [77]; [95]). Behandelt werden folgende Themen (vgl. die Inhaltsverzeichnisse der Skripte zu Mathematik I&II, [35] & [36]):

Mathematik I:

- Grundlagen (Mengen, Ungleichungen, komplexe Zahlen...)
- Folgen und Konvergenz
- Summation und Reihen
- Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit
- Potenzreihen und Hyperbelfunktionen
- Differentiation
- Integration

Mathematik II:

- Vektorräume (hauptsächlich $\mathbb{R}^n$)
- Lineare Gleichungssysteme und Matrizen
- Analytische Geometrie
- Lineare Eigenwertprobleme und Kegelschnitte
- Mehrdimensionale Analysis
- Gewöhnliche DGLen (linear 1. Ordnung, Bernoulli, separabel)
- Lineare DGLen höherer Ordnung
- Lineare Systeme von DGLen
- Numerische Lösung von DGLen

Die Präsentation der Inhalte sowohl im Skript als auch in der Vorlesung ist alltagssprachlicher als in der Fachmathematik. Die explizite Einteilung im Sinne von „Definition, Satz, Beispiel“ wird zwar vor allem im Skript auch genutzt, aber nicht immer streng durchgehalten. Es gibt deutlich mehr Fließtext: Neue Konzepte werden neben einer Definition oft mit anschaulichen Erklärungen eingeführt, Aufgabenbeispiele werden kleinschrittiger, rezeptorientierter und mit mehr Erläuterungen behandelt als in der Fachmathematik. Definitionen, Sätze sowie zugehörige Erläuterungen und Aufgabenbeispiele bilden die große Mehrheit des Inhalts. Der Schwerpunkt liegt klar auf Aufgabenbeispielen und möglichst anschaulichen Erklärungen. Beweise kommen selten vor.

Skript und Vorlesung bleiben weitgehend innermathematisch. Manchmal sind Aufgabenbeispiele oder Erklärungen aber durchaus Anwendungskontexten des Bauingenieurwesens entnommen, z. B. bei Schalldämmmaß, Kettenlinien, Schwingungsgleichung oder Höhenbestimmung ([35], S. 5-6, 19-20, 80; [36], S. 101-105). Die zur Vorlesung angemeldeten Studierenden erhalten kostenlos die Vorlesungsfolien und das zugehörige Skript in digitaler Form im L^2P-Lernraum zur Veranstaltung.

Der Entwicklung der Baumstrukturaufgaben hat durchgängig als Prämisse die Annahme zugrundegelegen, dass die (tradierte und im Laufe der Zeit maßvoll modifizierte) Zusammenstellung der Vorlesungsinhalte prinzipiell richtig ist und sinnvoll auf die späteren mathematischen Anforderungen in Studium und Beruf vorbereitet. Gleiches gilt für die Zusammenstellung der in Klausuren und Übungen genutzten Aufgabentypen, welche in den nächsten Unterabschnitten zu beschreiben sind.

Die Klausur und ihre Aufgabentypen

Nach Ende der Vorlesungszeit wird als Prüfungsleistung eine zweieinhalbstündige Klausur über den Inhalt des jeweiligen Semesters geschrieben – Mathematik I im März, Mathematik II im September. Zudem gibt es jedes Semester eine Wiederholungsklausur für den Stoff des jeweils anderen Semesters, Mathematik II für Wiederholer meist im Februar, Mathematik I für Wiederholer im August.

Die sechs großen Aufgaben der Klausur, jeweils unterteilt in mehrere meist nicht verbundene Teilaufgaben, sind grob den Inhaltsgebieten der Vorlesung zugeordnet. Insgesamt kommen zwei verschiedene Aufgabentypen vor, die vom Umfang her ungefähr gleich über die Klausur verteilt sind:

Rechenaufgaben Die Aufgabenstellung einer solchen Aufgabe – manchmal noch in mehrere Unteraufträge unterteilt – erfordert einen komplexen, mehrschrittigen Lösungsweg. Bei der Bearbeitung sollen alle Schritte nachvollziehbar und begründet aufgeschrieben werden. Bewertet wird der gesamte Rechen- und Argumentationsweg.

Praktisch immer besteht die Aufgabe im Durchführen eines Verfahrens: Untersuchen einer Reihe auf Konvergenz abhängig von $x \in \mathbb{R}$, Hauptachsentransformation einer Quadrik, Lösen eines Anfangswertproblems zu einer separablen Differentialgleichung, etc. Eine Beispiel-Aufgabenstellung ist:

> Für $\beta \in \mathbb{R}$ sei
>
> $$f_\beta(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(x), & x > 0 \\ \dfrac{\sin(\beta x)}{e^x - 1}, & x < 0. \end{cases}$$
>
> a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist f_β in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar? Geben Sie für diese Fälle die stetige Ergänzung $\tilde{f_\beta}$ vonf_β an.
>
> b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die stetige Ergänzung $\tilde{f_\beta}$ vonf_β differenzierbar?
>
> **Geben Sie den Rechenweg an!**

Ergebnisaufgaben Diese Aufgaben erfordern einen deutlich kürzeren Lösungsweg als der vorige Aufgabentyp. Aufgeschrieben und bewertet wird hier außerdem nur das Endergebnis und gegebenenfalls eine kurze zugehörige Begründung. Ergebnisaufgaben teilen sich nochmals auf in die folgenden zwei Untertypen:

Ergebniskästchen Hier ist nur das Endergebnis (oft das Resultat eines Algorithmus) gefragt, einzutragen in ein Feld. Bewertet wird nur, ob das eingetragene Ergebnis richtig oder falsch ist. Eine Beispiel-Aufgabenstellung ist:

> Durch die Kegelschnittgleichung
>
> $(\alpha+1)x_1^2+(\alpha+1)x_2^2+2(\alpha-1)x_1x_2+2\sqrt{2}x_1+6\sqrt{2}x_2-6=0, \quad \alpha\in\mathbb{R}$
>
> wird eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ beschrieben. Bestimmen Sie $\alpha\in\mathbb{R}$ so, dass es sich bei dieser Kurve um eine Parabel handelt.
>
> $$\alpha = \boxed{}$$

Wahrheitswertkästchen Hier ist danach gefragt, ob eine gegebene Aussage wahr oder falsch ist. Der Wahrheitswert wird in ein Kästchen eingetragen. Darunter steht ein Feld, in dem zusätzlich eine Begründung für die Wahl des Wahrheitswerts gegeben werden muss (was oft einen kurzen Rechenweg oder ein Gegenbeispiel bedeutet). Bewertet wird erst, wenn eine Begründung geschrieben worden ist; es fließen dann sowohl die Begründung selbst als auch der eingetragene Wahrheitswert in die Bewertung ein. Eine Beispiel-Aufgabenstellung ist:

> Beurteilen Sie den Wahrheitswert (**W** für „wahr“, **F** für „falsch“) folgender Aussage:
>
> Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch
>
> $$f_\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2+2x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, & (x_1,x_2)\neq 0 \\ 0, & (x_1,x_2)=0 \end{cases}$$
>
> ist im Punkt $(x_1,x_2)=(0,0)$ stetig.
>
> Wahrheitswert: $\boxed{}$
>
> **Geben Sie eine Begründung an!**
>
> $\boxed{}$

Freiwillige Übungselemente

Der Begleitbetrieb zur Vorlesung ist ein breitgefächertes Angebot freiwilliger Begleitelemente, deren Zusammenstellung im Verlauf der Jahre gelegentlich modifiziert wird. Die hier genannten Nutzerzahl-Schätzungen basieren hauptsächlich auf den Erfahrungen der Dozenten. Hinzu kommt eine einmalige SoSe-2015-Studierendenumfrage mit 95 Teilnehmern (hauptsächlich erstellt von Anne Hanrath des IGPM an der RWTH Aachen, unter Mithilfe des Autors); wegen der im Verhältnis zur Gesamthörerschaft geringen Umfrage-Teilnehmerzahl wird sie hier allerdings nur als ein schwaches Bestätigungsmoment hinzugezogen.

Vortragsübung Dies ist eine große Präsenzveranstaltung, die während der Vorlesungszeit mit 3 Wochenstunden (Mathematik I im WiSe) bzw. 2 Wochenstunden (Mathematik II im SoSe) stattfindet. Besucht wird die Vortragsübung je nach Woche von ca. 70%-90% der Studierenden. Um genügend Platz für die große Studierendenzahl zu bieten, wird die Vortragsübung jedoch auf zwei Gruppen aufgeteilt und an zwei Terminen inhaltlich identisch angeboten; einmal für diejenigen in den Studiengängen Bauingenieurwesen sowie Wirtschaftsingenieurwesen mit Fachrichtung Bau, einmal für diejenigen in den Studiengängen Umweltingenieurwesen sowie Mobilität und Verkehr. Inhalt der Vortragsübung ist das frontale Vorrechnen und Erläutern der Übungsaufgaben. Das umfasst auch kleine Beweise – etwa von wichtigen und häufig benutzten Ergebnissen wie der Dreiecksungleichung.

Übungsgruppen Diese Präsenzveranstaltungen von jeweils 90 Minuten Länge werden mehrfach wöchentlich angeboten und sind für kleinere Teilnehmergruppen gedacht. Insgesamt besuchen ungefähr 60% der Hörer irgendwann einmal eine der Übungsgruppen. Die grundsätzliche Idee dieses Angebots ist, dass die Studierenden unter Betreuung mehr Gelegenheit zum Besprechen individueller Fragen, zum eigenständigen Aufgabenlösen und/oder zum ruhigeren Überdenken der Lösungsschritte haben als in Vorlesung und Vortragsübung. Der Inhalt der Übungsgruppen besteht aktuell aus zwei Elementen: In einem Teil werden sogenannte **Präsenzübungen** ausgeteilt, welche sich hauptsächlich an Klausur-Ergebnisaufgaben und einfachen kurzen Rechenaufgaben orientieren. Sie werden zunächst kurz eigenständig bearbeitet und schließlich zusammen mit dem Assistenten besprochen. Im anderen Teil der Sitzung haben die Studierenden die Möglichkeit, dem Assistenten Detailfragen zu Musterlösungs-Videos zu stellen, die den Teilnehmern vorher online verfügbar stehen; die Aufgaben für diese Videos sind eigene Übungsaufgaben, die sich an den Klausuraufgaben orientieren.

Musterlösungs-Videos Für die Übungsgruppen (siehe vorigen Punkt) gibt es eigene, online einsehbare Übungsaufgaben, zu welchen den Studierenden auch Musterlösungs-Videos (per Dokumentenkamera von Assistenten aufgezeichnet) online zur Verfügung stehen. Da diese Videos schon allein für sich – ohne Besuch einer Übungsgruppe – eine wertvolle Lerngrundlage für die Studierenden darstellen können, sind sie hier als eigener Punkt genannt.

Baumstrukturaufgaben Seit dem WiSe 2012/2013 werden den Studierenden auf freiwilliger Basis die Baumstrukturaufgaben online zur Verfügung gestellt. Die Nutzeranzahl ist über die Semester recht variabel; der Anteil derjeniger, die wenigstens eine der Aufgaben bearbeiten, liegt je nach Semester zwischen 16% und 49% der Gesamthörerzahl. Die weiteren Details zu den Baumstrukturaufgaben sind in den restlichen Abschnitten dieser Dissertation beschrieben.

eTest-Aufgaben Noch vor der Entwicklung der Baumstrukturaufgaben hat es (von diesen gänzlich unabhängig) in der Moodle-Umgebung des Lernraums die „eTests“ als verpflichtende Aufgaben zur Prüfungszulassung gegeben (siehe detaillierte Beschreibung weiter unten). Sie sind als verpflichtendes Element weggefallen und ab dem WiSe 2015/2016 durch die „Wissensstandkontrollen“ (siehe ebenfalls weiter unten) ersetzt worden. Seitdem werden die eTests als zusätzliche freiwillige Übungsmöglichkeit angeboten. Genutzt werden sie seit dem WiSe 15/16 von je nach Semester 8-26% der Hörerschaft (siehe auch Tabelle 5.1).

Beratungsstunden Bei diesem Präsenzangebot steht vom Beginn der Vorlesungszeit bis zum Klausurtermin ein Raum zur Verfügung – je nach Semester und Zeitraum für 8-40 Stunden wöchentlich. In dieser Zeit sitzen dort ein oder mehrere studentische Hilfskraft-Tutoren, sodass Studierende bei Fragen zu Vorlesungsstoff oder Übungsaufgaben einfach ohne Termin vorbeikommen und die Fragen mit den Tutoren besprechen können. Die Anzahl der Nutzer pro Semester liegt bei rund einem Drittel der Hörerschaft.

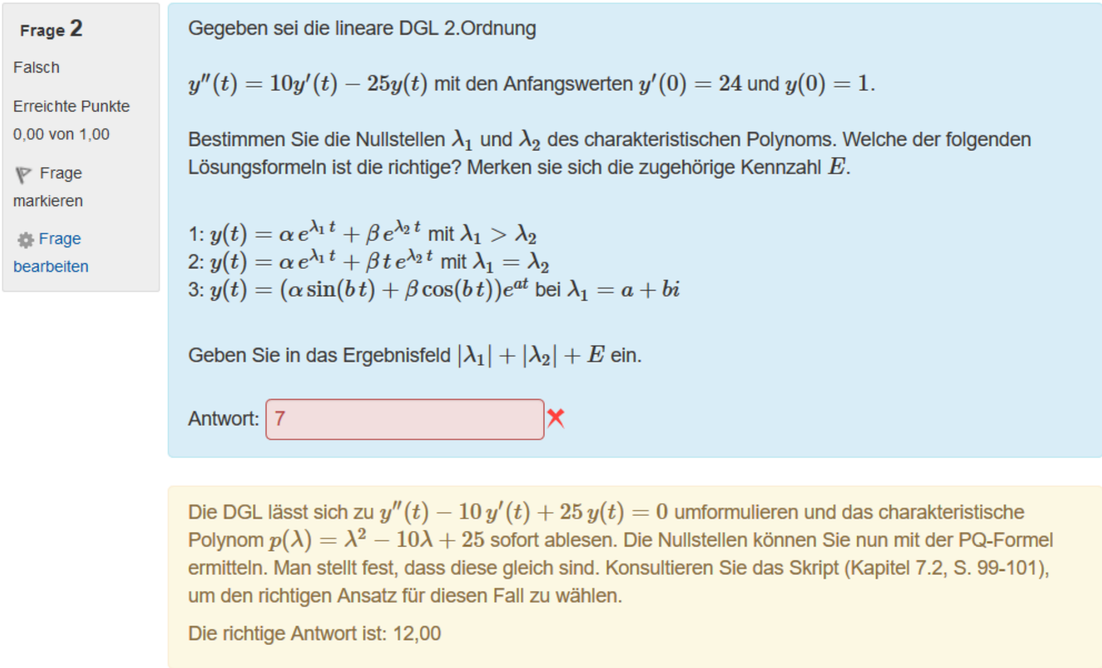
Schriftliche Hausaufgaben Die schriftlichen Hausaufgaben sind bis einschließlich SoSe 2015 angeboten worden, wobei sich ihre Anzahl pro Semester zwischen 3 und 6 bewegt hat. Genutzt wurden sie jeweils von rund 100-300 Studierenden, mit den niedrigeren Nutzungszahlen oft in der zweiten Hälfte des Semesters. Das Prinzip war wie folgt: Online und/oder per Aushang wurde die jeweilige Aufgabenstellung veröffentlicht – immer an den Klausur-Rechenaufgaben orientiert – und die interessierten Studierenden konnten diese selbst auf Papier lösen und ein bis zwei Wochen später abgeben. Die Abgaben wurden von studentischen Hilfskräften oder Assistenten korrigiert und den Studierenden anschließend zurückgegeben.

Pflichtelemente für die Klausurzulassung

Die bisher beschriebenen Übungsangebote sind freiwillig. Um aber auch eine extrinsische Motivation zum frühen Üben des Stoffs zu erzeugen – noch in der Vorlesungszeit, lange vor der Klausur – sind Pflichtelemente als Zulassungshürde eingeführt worden. Zuerst sind das die „eTests“ gewesen, danach und bis heute sind es die „Wissensstandkontrollen“. Um die Prüfungszulassung zu erlangen, müssen die Studierenden genügend von den Pflichtelement-Punkten erreichen. Bisher liegt diese Grenze bei ca. 50% der Gesamtpunktzahl; genauer müssen jeweils ca. 50% der Punkte in der ersten und in der zweiten Hälfte der Vorlesungszeit erreicht werden, damit die Zulassung nicht schon kurz nach der Hälfte des Semesterstoffs erreicht werden kann und danach die Motivation fehlt.

eTests Diese Online-Kurztests wurden bis einschließlich SoSe 2015 zur Prüfungszulassung genutzt. In der Vorlesungszeit war wöchentlich ein neuer eTest zum gerade behandelten Stoff zu bearbeiten, insgesamt meist 12-14 eTests pro Semester. Ein einzelner eTest besteht aus 4 Fragen zu ein bis zwei Teilgebieten, ein eTest-Titel lautet etwa „Integrationsregeln und Partialbruchzerlegung“. Die Fragen sind für jeden Nutzer randomisiert aus einem großen Fragenpool zusammengestellt, um Abschreibemöglichkeiten zu minimieren. Bei den meisten Fragen sind zusätzlich auch die Aufgabenstellungen zufällig erzeugt (über randomisierte Zahlenwerte). Jede Frage steht für sich und baut nicht auf Teilergebnissen anderer Fragen auf. Abgefragt wird üblicherweise das Endergebnis eines Standardverfahrens, Zwischenschritte oder -ergebnisse können nicht eingegeben und somit auch nicht bewertet werden. Anders als in den Klausuraufgaben sind die Terme oft leichter gewählt, und häufig werden einfachere Verfahren abgefragt, die in Klausuraufgaben nur ein Zwischenschritt einer größeren Aufgabe wären (z. B. Bestimmen eines einzelnen einfachen Grenzwerts ohne variables x im Term). Als Fragetypen möglich sind alle Fragetypen der Moodle-Test-Aktivität – am meisten genutzt werden bei den eTests aber Multiple-Choice und Zahlenwert-Eingabe, da dafür randomisierte Zahlenwerte in der Aufgabenstellung recht einfach realisierbar sind.

Der Nutzer bearbeitet die Fragen eines eTests einzeln, es gibt keine Verzweigungen, und sobald alle Lösungen eingetragen sind, bestätigt er die Abgabe des eTests. Direkt anschließend wird der eTest automatisiert bewertet und die Rückmeldung angezeigt – wieviele Punkte erreicht wurden, ob die einzelnen Fragen richtig oder falsch beantwortet wurden, und wie bei falscher Eingabe die richtige Antwort ausgesehen hätte. Bei falscher Antwort gibt es ein vorformuliertes Hilfsfeedback, etwa mit Hinweisen zum generellen Vorgehen. Eine Beispielfrage mit Feedback ist in Abbildung 2.2 zu sehen.



Frage 2

Falsch

Erreichte Punkte 0,00 von 1,00

Frage markieren

Frage bearbeiten

Gegeben sei die lineare DGL 2.Ordnung

$y''(t) = 10y'(t) - 25y(t)$ mit den Anfangswerten $y'(0) = 24$ und $y(0) = 1$.

Bestimmen Sie die Nullstellen λ_1 und λ_2 des charakteristischen Polynoms. Welche der folgenden Lösungsformeln ist die richtige? Merken sie sich die zugehörige Kennzahl E.

1: $y(t) = \alpha\, e^{\lambda_1 t} + \beta\, e^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_1 > \lambda_2$
2: $y(t) = \alpha\, e^{\lambda_1 t} + \beta\, t\, e^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_1 = \lambda_2$
3: $y(t) = (\alpha \sin(b\,t) + \beta \cos(b\,t))e^{at}$ bei $\lambda_1 = a + bi$

Geben Sie in das Ergebnisfeld $|\lambda_1| + |\lambda_2| + E$ ein.

Antwort: 7

Die DGL lässt sich zu $y''(t) - 10\,y'(t) + 25\,y(t) = 0$ umformulieren und das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25$ sofort ablesen. Die Nullstellen können Sie nun mit der PQ-Formel ermitteln. Man stellt fest, dass diese gleich sind. Konsultieren Sie das Skript (Kapitel 7.2, S. 99-101), um den richtigen Ansatz für diesen Fall zu wählen.

Die richtige Antwort ist: 12,00

Abbildung 2.2: Screenshot einer Beispiel-eTest-Frage mit Feedback, aus dem L^2P

Wissensstandkontrollen (im Laufe dieser Arbeit oft als WK oder WKs abgekürzt) Dieses Pflichtelement wird seit dem WiSe 2015/2016 für die Prüfungszulassung genutzt, es hat in dieser Funktion die eTests abgelöst. Es handelt sich um 30-minütige Anwesenheits-Kurzklausuren, die im Abstand von zwei bis drei Wochen geschrieben werden. Die meist vier Aufgaben einer WK – manchmal nochmals in Unteraufgaben unterteilt – fragen den in den vorigen Wochen behandelten Stoff ab und orientieren sich bzgl. der Typen von Aufgabenstellungen an den Klausuraufgaben. Zwei Beispielaufgaben sind:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = 10y(t)\frac{1}{5t}.$$

a) Bestimmen Sie die Funktion $f(t, x)$, die der Differentialgleichung zugeordnet ist, sowie deren maximalen Definitionsbereich D_f.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(t)$ der Differentialgleichung und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

Geben Sie den Rechenweg an!

Bestimmen Sie die Determinanten:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 39 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 39 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & \beta & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 39 & \beta & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = \boxed{} \quad \det(D) = \boxed{} \quad \det(E) = \boxed{}$$

2.2.2 Didaktische Herausforderungen in der Veranstaltung

Trotz der breitgefächerten Aufstellung des Begleitbetriebs sind darin verbesserungsfähige Aspekte gesehen worden. Die zugehörigen Überlegungen – hauptsächlich basierend auf Erfahrungswerten der Dozenten und eigenen Beobachtungen – haben 2012 zur Entscheidung geführt, ein neues Unterstützungskonzept zu entwickeln, und sind in ihren Kernideen im Folgenden darzustellen.

Individuelles Feedback

Insbesondere schwächere Lerner, die nur schwer eigenständig die verallgemeinerbare Struktur in Musterlösungen oder logische Fehler in eigenen Gedankengängen erkennen können, benötigen individuelles Feedback, welches ihnen zu eigenen Lösungen möglichst klausurartiger Aufgaben persönliche Fehler in Rechenweg oder Argumentation zurückmeldet und aufzeigt, warum und wie man anders vorgehen sollte. Grundsätzlich ist aus lernpsychologischer Sicht die Wichtigkeit von Rückmeldungen, nicht zuletzt als verstärkende Erfolgsbestätigungen, für den Lernprozess unumstritten (vgl. [83], S. 199).

Die meisten Übungselemente der Veranstaltung konnten allerdings nur schwer solche individuellen Rückmeldungen für den Großteil der Studierenden realisieren. Einige Elemente des Übungsbetriebs sind von vornherein frontal bzw. passiv „konsumierbar" gestaltet gewesen. Andere Angebote wiederum, die eigenständiges aktives Aufgabenlösen verlangt haben, sind von den Studierenden tendenziell wenig genutzt worden, oder sie haben einfachere Aufgabenstellungen behandelt, die nicht die volle Bandbreite von Prüfungsschwierigkeiten abgedeckt haben. Dadurch hat es einen Feedbackmangel bzgl. eigenständigen klausurnahen Aufgabenlösens gegeben, der bei schwächeren Studierenden dazu hat führen können, dass sie trotz Nutzung des Übungsbetriebs eigene fachliche

Fehlvorstellungen oder unzureichende Problemlösefähigkeiten zu spät erkannt haben, um darauf noch rechtzeitig reagieren zu können – etwa erst kurz vor, während oder nach der Klausur. In Klausuren konnten sie z. B. zu denen gehören, die falsche Lösungswege verfolgt, Lösungswege inkorrekt bzw. schwerverständlich argumentiert oder sich häufig verrechnet haben.

Wie hat die Feedback-Situation bei den verschiedenen Angeboten ausgesehen? Die frontalen Präsenzelemente – *Vorlesung*, *Vortragsübung*, *Übungsgruppen* – beinhalten naturgemäß wenig studentische Eigenaktivität abgesehen vom Mitdenken und somit auch kein nennenswertes persönliches Feedback.

Die *Präsenzübungen* im Rahmen der Übungsgruppen schaffen eine durchaus wertvolle Gelegenheit für studentische Eigenarbeit und anschließende Besprechung von Problemen und Fehlern. Sie decken allerdings weit überwiegend einfachere Aufgabenstellungen ab (z. B. eine simple Folge auf Konvergenz untersuchen, Eigenräume einer Matrix bestimmen, etc.) und können so nur wenig zur Problemlösekompetenz bei schwierigeren Rechenaufgaben zurückmelden. Ähnliches gilt für die *eTest-Aufgaben*. Deren Aufgabenstellungen haben meist deutlich einfachere Terme als die Klausuraufgaben. Hinzu kommt, dass bei den einzelnen eTest-Fragen ausschließlich das Endergebnis der Rechnung eingetragen und bewertet wird. Dadurch gibt es zwar die Rückmeldung „richtig“ oder „falsch“ zu diesem Endergebnis sowie bei falscher Antwort auch einen Hinweis darauf, wie man grundsätzlich die Aufgabe lösen kann; allerdings kann dabei nicht auf den benutzten Rechenweg Bezug genommen werden.

Die restlichen Angebote sind bzw. waren von ihrer Konzeption her durchaus feedbackstark: In den *Beratungsstunden* haben Studierende die Möglichkeit, in großzügigem Zeitrahmen Fragen zu eigenen Lösungsansätzen an studentische Tutoren zu stellen und ausführliche Rückmeldungen zu erhalten. Allerdings häuft sich die studentische Benutzung des Angebots hauptsächlich in den Wochen vor der Klausur, sodass das Feedback oft (zu) spät kommt. Die *schriftlichen Hausaufgaben* haben vor allem komplexe Rechenaufgaben vom Schwierigkeitsgrad der Klausur und darüber hinaus geboten, und haben durch die schriftliche Korrektur wertvolles und klausurnahes Feedback liefern können. Allerdings sind sie hauptsächlich von den ohnehin schon besseren Studierenden genutzt worden: Für mittlere und schwächere Studierende sind sie tendenziell nicht niedrigschwellig genug gewesen; sie haben keine Hilfestellung für diejenigen geboten, die weniger an den Teilfertigkeiten als an deren Zusammensetzung in komplexeren Aufgabenstellungen scheitern.

Die erst seit wenigen Semestern genutzten *Wissensstandkontrollen* sind 2012 noch kein Gegenstand der Überlegungen gewesen, seien hier aber ebenfalls erwähnt. Als Voraussetzung für die Klausurzulassung sind sie verpflichtend, und mit deren Korrektur (die ähnlich ausfällt wie zuvor für die schriftlichen Hausaufgaben) erhält jeder WK-Teilnehmer ein Feedback, welches im Fall von Fehlern konstruktiver rückmelden kann als etwa die eTests. Als Präsenz-Kurzklausuren sind sie recht nah an der Klausursituation. Allerdings erreichen die Aufgabenstellungen in den WKs nicht völlig das Niveau der Klausuraufgaben. Unabhängig von der Feedbacksituation stellt die Durchführung mehrerer Kurzklausuren pro Semester außerdem einen sehr hohen (personellen) Aufwand bzgl. Durchführung und Korrektur dar.

Effektives Lernen und eigenständiges Aufgabenlösen

Für die Mathematik mit ihren rein gedanklich-abstrakten Konstrukten ist es typisch, dass oft eigenständiges, (kognitiv) aktives Arbeiten mit dem Stoff eine Voraussetzung dafür ist, diesen in seinen Bedeutungen und Auswirkungen zu verstehen (vgl. auch das Prinzip aktiven Lernens sowie das operative Prinzip bei [96], S. 77 und 79-81; [42], S. 59-61). Das trifft schon für Aufgabenstellungen zu, die man rezepthaft lösen kann. Erst recht gilt es für die in der Mathematik häufigen Problemstellungen, bei denen man zum Finden geeigneter Lösungsansätze zuerst eine Phase gezielten „Ausprobierens“ benötigt. Die höhere Häufigkeit und das komplexere Ausmaß solcher heuristischer Phasen stellen einen wichtigen Unterschied zwischen Schul- und Hochschulmathematik dar und bedeuten für viele Studierende in den ersten Semestern eine schwierige Hürde. Hochschulübergreifend lässt sich in mathematischen Fächern insbesondere bei schwächeren Studierenden ein geringes Bewusstsein dafür erkennen, dass „Knobeln“ notwendig dazugehört. Es ist bei Teilnehmern in Mathematik-Serviceveranstaltungen eine weitverbreitete Überzeugung, dass man allein mit rezepthaftem (Auswendig-)Lernen genügend vieler gängiger Musterlösungen ausreichend auf Prüfungen vorbereitet wäre (vgl. [79], S. 399; je nach konkreter Veranstaltung kann vielleicht auch die dortige Aufgabenkultur eine solche Haltung teilweise bestätigen, siehe etwa Unterabschnitt 3.2.5).

Viel effektiver lernen diejenigen Studierenden, die sich nach dem Ansehen von Stoffgrundlagen und Beispiellösungen an das eigenständige Aufgabenlösen wagen. Aus lernpsychologischer Sicht ist das u. a. mit einer steileren Lernkurve sowie mit besser vernetzten und übertragbaren kognitiven Strukturen verbunden (vgl. auch [34], S. 71). Zudem kann man mit entsprechender Knobelerfahrung souveräner und blockadenbefreiter mit Klausursituationen umgehen, in denen man nicht sofort erkennt, welches Vorgehen bei einer Aufgabe zum Ziel führt.

Auch in der hiesigen Veranstaltung hat sich eine Knobelvermeidungs-Tendenz erkennen lassen: Es hat einen Anteil an Studierenden gegeben, die viel Fleiß in das Nachvollziehen fertig vorgegebener Lösungen investieren (entnommen aus frontalen Vortragsübungen, neuerdings auch aus Musterlösungs-Videos, etc.) und eigenständiges Knobeln bzw. Lösen von komplexen Rechenaufgaben dagegen vermeiden. Bei einigen dieser Lerner hat das tatsächlich zum Bestehen der Klausuren ausreichen können – etwa wenn die gelernten Musterlösungen zufällig sehr nah an den Termen in den Klausuraufgaben gewesen sind, oder wenn sehr begabte Teilnehmer es geschafft haben, allein aus nachvollzogenen Musterlösungen die korrekten und verallgemeinerbaren Gedankengänge zu abstrahieren und diese ohne viel vorige Übung in einer Klausur in eigene Aufgabenlösungen zu transferieren. Andere knobelvermeidende Lerner sind allerdings in der Prüfungssituation daran gescheitert, dass sie zu selten selbst eigenständig Aufgaben gelöst und somit nicht genügend Erfahrung gesammelt haben, wie man zielführende Lösungsansätze erkennt sowie warum und wie man dann welche einzelnen Lösungsschritte zusammensetzt (vgl. auch [21]). In Klausuren haben sie z. B. zu denen gehören können, die kaum Aufgaben oder nur kurze Ergebnisaufgaben bearbeitet haben, oder die in Rechenaufgaben wenig zielgerichtet auswendig gelernte Ansätze verfolgt haben und diese trotz eventuell offensichtlicher Nichteignung um jeden Preis zur Lösung bringen wollten. Wegen der engen Verknüpfung zwischen fehlender Aufgabenlöse-Erfahrung einerseits und fehlendem Feedback andererseits – schließlich lassen sich nur zu eigenen Aufgabenlösungen überhaupt Rückmeldungen geben – ist fehlende Aufgabenlöse-Erfahrung auch mit den im vorigen Feedback-Unterabschnitt genannten Klausurproblemen verbunden.

Der beschriebene Knobelvermeidungs-Effekt beim Üben ist in der Veranstaltung noch dadurch verstärkt worden, dass viele Übungsbetrieb-Elemente die Studierenden nur wenig dazu haben „drängen“ können, schwierigere klausurnahe Rechenaufgaben mit all ihren Problemlöse-Erfordernissen eigenständig zu bearbeiten. Insgesamt ließ sich beobachten: *Präsenzübungen* und die *eTests* zur Zeit ihrer Pflichtbearbeitung sind von vielen auch schwächeren Studierenden genutzt worden, behandeln aber großteils Aufgabenstellungen mit Schwierigkeitsgrad unter den Klausuraufgaben. *Frontale Vorrechenaufgaben* und *schriftliche Hausaufgaben* haben zwar schwierigere Rechenaufgaben mit „Knobelnotwendigkeit“ behandelt, sind aber hauptsächlich passiv nachvollzogen oder wegen fehlender Hilfestellungen nur von relativ wenigen Studierenden bearbeitet worden. Gleiches gilt neuerdings auch für die *Musterlösungs-Videos*.

Die sowohl Hilfestellungen bietenden als auch schwierigere Aufgaben behandelnden und damit eigentlich sehr wertvollen *Beratungsstunden* sind ebenfalls eher wenig besucht worden. Ein Grund dafür kann es gewesen sein, dass man vor dem Besuch möglichst selbst versucht haben sollte, Aufgaben zu lösen, um in der Beratung konkrete Fragen dazu stellen zu können. Das dürfte bei einigen Studierenden zu Hemmungen geführt haben, mit Fragen wie „Ich habe keine Ahnung, wie ich an diese Aufgabe herangehen soll, können Sie mir einen Hinweis geben?“ zu den Beratungsstunden zu gehen. Die auf S. 22 erwähnte Umfrage hat jedenfalls „Ich habe mich nicht getraut“ als einen verbreiteten Grund für die Nicht- bzw. Selten-Nutzung der Beratungsstunden bestätigt: Dies ist von 22 von 57 Beantwortern dieser Frage angekreuzt worden, nur Veranstaltungsüberschneidungen wurden mit 24 Ankreuzungen noch häufiger angegeben.

Hilfestellungen und Niedrigschwelligkeit zum Mindern von Überforderung

Trotz der positiven Effekte ist eigenständiges Aufgabenlösen kein für sich allein zielführendes Lernvorgehen. Wenn man die nötigen „Handwerkszeuge“ (noch) nicht kennt, kann man kaum von selbst überhaupt Lösungsansätze finden. Schwierigere Aufgaben zu lösen stellt dann eine Überforderung dar.

In der Tat haben Erfahrungen aus Präsenzveranstaltungen und Klausuren gezeigt, dass ein Teil der Studierenden in der Veranstaltung selbst von solchen Aufgabenstellungen überfordert gewesen ist, für die die nötigen Werkzeuge eigentlich schon im Stoff behandelt worden waren. Ein grobes empirisches Indiz dafür hat sich etwa in der auf S. 22 erwähnten Umfrage gezeigt: Bei der (wenn auch etwas suggestiven) Frage „Was hat Ihnen an den Zusatz-/Z*- oder Hausaufgaben am meisten Schwierigkeiten bereitet?“ – gemeint sind Gruppenübungs-Aufgaben und schriftliche Hausaufgaben – haben 75 von 95 Umfrageteilnehmern mindestens eine der Antwortmöglichkeiten „Ich wusste nicht, was genau ich machen sollte“, „Die Aufgaben waren zu schwer“ oder „Ich hatte keine hinreichenden Hilfsmittel, um die Aufgaben lösen zu können“ angekreuzt. Die letzte dieser drei Optionen haben allein 32 von 95 Umfrageteilnehmern bejaht. Sicherlich dürfte bei vielen der so antwortenden Personen die Überforderung bloß ein Gefühl gewesen sein, welches sie trotz bereits gut aufgebauter mathematischer Fähigkeiten nicht ganz loswerden konnten. Bei anderen hat sie aber aller Wahrscheinlichkeit nach auf echten Fähigkeitsmängeln basiert und einen relevanten Hemmfaktor für das Weiterkommen im Lernprozess und beim Aufbau der mathematischen Fähigkeiten dargestellt. Unter den schwächsten dieser letzteren Lerner hat man dann z. B. solche gehabt, die wegen fehlender Basisfertigkeiten gar nicht die Prüfungszulassung erhalten haben, die sich beim Lernen nur auf die einfachsten Aufgaben beschränkt haben, oder die in Klausuren nur wenige Aufgaben überhaupt bearbeitet und selbst zu diesen nur unvollständige Lösungen abgegeben haben.

Dem eigenständigen Aufgabenlösen sollte also in irgendeiner Form genug Wissensvermittlung bzw. -aneignung vorausgehen, optimalerweise auch für schwächere Lerner zugänglich und mit genügend Hilfestellungen versehen. An dieser Stelle wirken sich die in 2.1.1 genannten Veränderungen der Schüler- und Studierendenschaft aus: Was vor 20, 30 oder mehr Jahren bei Studienanfängern in Mathematik noch selbstverständlich als Vorwissen angenommen werden konnte, hat sich zumindest im Durchschnitt nach unten hin verlagert. Dadurch ist das Ausmaß an erforderlichen Hilfestellungen in Servicemathematik-Begleitangeboten gestiegen, sofern man weiterhin den Großteil der Studierenden auf ein ausreichend hohes Niveau bringen möchte. Der reine Vorlesungsstoff ist für die grundlegende Stoffvermittlung wichtig, reicht aber wegen des oft hohen Abstraktionsgrads für viele Lerner in mathematischen Fächern nicht allein aus, um sie fürs Aufgabenlösen zu wappnen. Aus diesem Grund haben sich neben Vorlesung und begleitenden schriftlichen Hausaufgaben in der Hochschul-Mathematiklehre traditionell auch erläuterte Beispiellösungen etabliert, welche vorgerechnet oder selbst durchgelesen werden und von den Lernern nachzuvollziehen sind. Das zweiteilige Vorgehen mit ausgearbeiteten Beispiellösungen und eigenständigem Problemlösen ist seit einigen Jahren auch im Rahmen der Cognitive-Load-Theorie unter dem Namen „Worked Examples“ bekannt (zu einer genaueren Darstellung siehe Unterabschnitt 3.2.3). Bei den Beispiellösungen ist darauf zu achten, dass sie den Vorkenntnissen der Lerner entsprechend ausgearbeitet sind, damit sie nicht selbst schon überfordern.

Im Übungsbetrieb ist das durchaus ein Knackpunkt gewesen: Frontal vorgerechnete Musterlösungen – hauptsächlich in der *Vortragsübung*, daneben teilweise auch in den *Übungsgruppen* und in der *Vorlesung* – haben wegen des Zeit- und Stoffdrucks durch die schiere Menge an Inhalten nicht immer so kleinschrittig erklärt werden können, wie es für einen Teil der Studierendenschaft nötig wäre.

Die erst seit einigen Semestern benutzten *Musterlösungs-Videos* haben vom Konzept her keinen Zeitdruck und bieten mehr Erklärungen; auch sie räumen allerdings bislang den ggfs. nötigen heuristischen Phasen vor der sauberen Musterlösung wenig Platz ein (siehe auch Abschnitt 3.2.3). Durch die *Übungsgruppen* wird das prinzipiell gelöst, da dort die Assistenten Fragen zu Musterlösungs-Videos mit genügend Zeit beantworten können. Allerdings bleibt auch dort die Hürde bestehen – ähnlich wie im vorigen Unterabschnitt schon zu den Beratungsstunden beschrieben – dass man schon relativ konkrete Fragen haben sollte, um sie mit Gewinn in Übungsgruppen stellen zu können.

Aufgaben klausurnahen Niveaus

Im Rahmen der vorigen Herausforderungen ist das Problem unterschätzten Klausurniveaus bereits erwähnt worden, aber als einer der zentralen Gedanken soll es einen eigenen kurzen Unterabschnitt erhalten.

Die bis vor einigen Semestern verpflichtenden *eTest-Aufgaben*, welche als Prüfungszulassung dienten, liegen vom Schwierigkeitsgrad her größtenteils deutlich unter den

Anforderungen von Klausuraufgaben. Durch den Prüfungszulassungscharakter haben dadurch einige Studierende fälschlicherweise den Eindruck gewinnen können, dass wer mit den eTest-Aufgaben die Klausurzulassung geschafft hat, auch schon genügend auf die eigentliche Klausur vorbereitet sei. Auch die *Präsenzübungen* sind einfacher als die komplexeren Klausuraufgaben. Wer dem genannten Fehlglauben aufgesessen ist und dabei die deutlich klausurnäheren Vortragsübungen oder schriftlichen Hausaufgaben als unnötig schwierig abgetan hat, hat dann leicht zu denjenigen gehören können, die in der Klausur nur die leichtesten (wenn überhaupt) Teilaufgaben lösen können und so die Bestehensgrenze nicht erreichen.

Die „mittleren" Studierenden als Hauptzielgruppe für Unterstützungsmaßnahmen

Die neue Unterstützungsmaßnahme sollte die zuvor beschriebenen Herausforderungen mindestens abmildern. Dafür ist auch zu klären gewesen, welche Teilgruppe der Studierenden als sinnvollste Zielgruppe anvisiert werden sollte. Die Überlegung war, dass sich bei den Teilnehmern der Veranstaltung grob drei Teilgruppen erkennen lassen:

- Am oberen Ende liegen diejenigen Studierenden, die von vornherein mit einer überdurchschnittlich guten Kombination aus Vorkenntnissen, Begabung und Fleiß bzw. Selbstmotivation in die Veranstaltung kommen, sodass sie keine besondere Unterstützung benötigen. Sie verfolgen tendenziell schon während des Semesters, mindestens aber in den Wochen vor der Prüfung ein effektives Lernen u. a. mit folgenden Elementen: Vorlesungsbesuch bzw. Skriptlesen, Besuch der Vortragsübung und im Anschluss eigenes Aufgabenlösen mit etwaiger Selbstkorrektur durch Musterlösungs-Videos oder Besuch von Übungsgruppen. Selbst ohne individuelles Feedback schaffen sie es, ihre eigenen Lösungen durch Abgleich mit ähnlichen aus der Vortragsübung ausreichend zu korrigieren und im Anschluss gute bis sehr gute Klausurleistungen zu erbringen. Das neue Unterstützungsangebot würden einige von ihnen wahrscheinlich auch nutzen, aber eher „nur" Verbesserungen von wenigen Notenstufen im ohnehin oberen Bereich erzielen.

- Am unteren Ende liegen diejenigen Teilnehmer der Veranstaltung, die sowohl schlechte Vorkenntnisse als auch große Mängel bei Begabung, Fleiß, Selbstmotivation und investierter Zeit haben, sodass selbst die Einführung von Unterstützungsmaßnahmen ihnen kaum zum Bestehen der Klausuren verhelfen könnte – da sie das Angebot nicht nutzen würden oder da selbst die Nutzung ihre großen Mängel nicht ausgleichen könnte. Sie nutzen tendenziell nur sehr selten die vielfältigen Angebote, oder aber sie haben trotz Nutzung zu große Probleme, daraus die relevanten mathematischen Konzepte für sich zu ziehen. Meist erreichen sie die Klausurzulassung bzw. in den Klausuren die Bestehensgrenze nicht. Bei diesen Studierenden würde die Einführung eines neuen Unterstützungsangebots vermutlich nur wenig ändern.

- In der „Mitte“ sind solche Studierenden gesehen worden, die prinzipiell sowohl ausreichende Vorkenntnisse und Basisfertigkeiten aus der Schule mitbringen als auch fleißig und motiviert für die Veranstaltung lernen, dabei allerdings eines oder mehrere der in den vorigen Unterabschnitten beschriebenen Probleme haben: Feedbackmangel, ineffektive Lernstrategien mit zuwenig eigenem Aufgabenlösen auf klausurnahem Niveau, oder Überforderung insbesondere durch schwierigere Rechenaufgaben. Dadurch besteht bei ihnen trotz ausreichender Basisfertigkeiten die Gefahr, dass sie wenig gute Klausurleistungen erbringen oder sogar die Klausur-Bestehensgrenze nicht erreichen. Wegen ihres Fleißes bzw. ihrer Selbstmotivation kann man annehmen, dass sie in der Tendenz offen für Unterstützungsangebote sein und viele von ihnen ein neues Angebot nutzen würden. Die Hoffnung ist gewesen, dass die Benutzung des neuen Unterstützungsangebots bei dieser Gruppe den größten Effekt haben würde: Hier könnte es den Unterschied zwischen bestanden und nicht bestanden oder zwischen einer unter- und überdurchschnittlichen Klausurleistung ausmachen.

Diese und vorige Überlegungen haben schließlich im Frühling 2012 den Anstoß zur Entwicklung eines neuen Unterstützungsangebots für die Veranstaltung gegeben, was zum Inhalt der folgenden Kapitel führt.

Kapitel 3

Konzeption der Baumstrukturaufgaben

Zum Reagieren auf die in Unterabschnitt 2.2.2 genannten Herausforderungen wurde im Frühjahr 2012 beschlossen – von Seiten der Dozenten der Veranstaltung „Mathematik I/II“ zusammen mit Vertretern der Fakultät für Bauingenieurwesen – dass ein Unterstützungsangebot konzipiert und im Übungsbetrieb der Veranstaltung eingesetzt werden sollte. Aus methodischer Sicht wurde ein online nutzbares E-Learning-Angebot favorisiert. Dafür sprachen schon rein organisatorische Gründe: Im bereits bestehenden Übungsbetrieb gab es mehrere verschiedene Präsenzelemente, die weitergeführt werden sollten. Ein dazu noch zusätzliches Präsenzangebot hätte für die Studierenden eher Verwirrungspotential gehabt und wäre für sie wohl auch rein zeitlich zuviel gewesen. Ähnliches galt für die schriftlichen Hausaufgaben. Für E-Learning-Material hat dagegen eine Reihe positiver Annahmen gesprochen:

- Es würde auf lange Sicht gut zu warten sein, bei verhältnismäßig wenig Personalaufwand und dennoch breiter Nutzbarkeit für die Hörerschaft der Veranstaltung.
- Die Studierenden würden E-Learning-Bearbeitung wegen der ortsunabhängigen Nutzbarkeit und der potentiell permanenten Online-Verfügbarkeit gut in ihrem persönlichen Zeitplan unterbringen können.
- Es ist vermutlich niedrigschwelliger, ein E-Learning-Angebot zu nutzen, als in eine Präsenzveranstaltung zu gehen oder bei schriftlichen Hausaufgaben eine saubere Lösung komplett selbstständig aufzuschreiben; man wird nicht beobachtet oder persönlich beurteilt und bekommt direkte Rückmeldungen und/oder Hilfen.

- E-Learning macht es Lernern einfacher, genau die Themen oder ggfs. nur Teile einer Aufgabe zu bearbeiten, bei denen sie persönlich Nachholbedarf sehen.
- Nicht zuletzt kann angesichts der Lebenswelt der heutigen Studierenden die Benutzung digitaler Angebote einfach im Rahmen der Gewohnheiten liegen und so ihre eigene Attraktivität besitzen.

Im Frühling 2012 wurde also das Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik beauftragt, im Austausch mit den Veranstaltungsdozenten ein solches E-Learning-Angebot – was dann die titelgebenden Baumstrukturaufgaben geworden sind – konzeptionell auszugestalten und auch technisch zur realisieren. Diese beiden Punkte, größtenteils durchgeführt von Personen des Lehr- und Forschungsgebiets Didaktik der Mathematik, bilden den Inhalt dieses und des nächsten Kapitels.

3.1 Zur grundsätzlichen Ausrichtung

3.1.1 Leitideen

Die Herausforderungen aus Unterabschnitt 2.2.2 ließen sich direkt in Forderungen für das zu entwickelnde E-Learning-Angebot übersetzen. Diese Punkte können als Leitideen verstanden werden, welche der gesamten Konzeption zugrundeliegen. Das Angebot sollte ...

... möglichst individuelles Feedback geben – sowohl zu Rechnungen, Argumentationen oder Entscheidungen des Nutzers als auch zum grundsätzlichen Lernstand.

... Gelegenheit zum Üben eigenständigen Aufgabenlösens bieten oder sogar zu effektivem Lernverhalten in diesem Sinne anregen.

... niedrigschwellig durch genügend Hilfestellungen und Zwischenschritte sein, wobei deren Ausmaß (Häufigkeit, Kleinschrittigkeit etc.) möglichst unterschiedlichen individuellen Bedürfnissen entgegenkommen sollte.

... dabei sehr wohl Aufgabenstellungen mit klausurähnlichem oder etwas darüberliegendem Schwierigkeitsgrad behandeln.

... möglichst die „mittleren“ Studierenden ansprechen.

Das E-Learning-Feld ist zunächst sehr weit und umschließt jegliches Lernen, das unter Benutzung eines digitalen Mediums stattfindet (vgl. z. B. [27], S. 8-10). Durch die Leitideen ließ sich das neue Format aber bereits etwas eingrenzen: Im Rahmen des Angebots sollten die Nutzer selbst Aufgaben zum Vorlesungsstoff lösen. Um Feedback zu bekommen, sollten sie ihre Ergebnisse in irgendeiner Form eingeben und dann Rückmeldungen dazu bekommen können, und zwar wie zuvor gefordert automatisiert. Es lief damit auf E-Learning-*Aufgaben* hinaus, wobei die genaue Form noch zu klären war. Wegen der Fokussierung auf Hilfestellung und Übung wurde außerdem entschieden, das Angebot rein freiwillig zu halten. (Zwischenzeitlich war durchaus überlegt worden, ob man die Studierenden irgendwie zum Üben eigenständigen Aufgabenlösens „verpflichten“ könnte. Das hatte sich als nicht sinnvoll realisierbar herausgestellt und wurde verworfen: Wöchentlich oder 14-tägig korrigierte schriftliche Hausaufgaben verpflichtend für grob 1000 Hörer wären personell kaum realisierbar; beim letztendlich beschlossenen Baumstruktur-Prinzip für das neue E-Learning sind die detaillierten mehrseitigen Aufgaben dagegen nicht randomisierbar und machen so durch die jeweils feste Aufgabenstellung ein „Abschreiben“ zu einfach.)

3.1.2 Allgemeine Lernhürden und didaktische Mittel zu deren Minderung

In einem weiteren Schritt wurden potentielle allgemeine Lernhürden insbesondere der Lerner mittleren Niveaus zusammengestellt und dazu jeweils überlegt, mit welchen didaktischen bzw. pädagogischen Mitteln man in E-Learning-Form darauf konstruktiv reagieren kann. Herausgearbeitet hat dies Prof. Johanna Heitzer in Form eines Konzeptpapiers (vgl. Anhang A; [63], S. 12; zum Begriff der Beweglichkeit des Denkens [39], S. 16) mit folgenden Punkten:

Zu geringe Fertigkeiten und Vorkenntnisse: Schwierigkeiten in Teilschritte zerlegen; die jeweils zugehörigen Teilfertigkeiten einzeln trainieren.

Zu geringe Motivation: Wo möglich, motivieren oder motivierend fragen; bisherige Erfolge rückmelden, auch im Kleinen; Schwierigkeitsgrad von Aufgaben so wählen, dass sie sowohl herausfordernd sind als auch Kompetenzerleben zulassen; bei Aufgaben den Sinn fürs spätere Berufsleben klarmachen; anleiten und disziplinieren; Lernfortschritt erfahrbar machen.

Zu geringe Sorgfalt, Gründlichkeit, Durchhaltevermögen: Rückmeldungen geben zum Lernstand, zum Lösungsstand einer Aufgabe, zu korrekt gelösten Teilschritten; auf Lücken bei Wissen und Fertigkeiten hinweisen; formal korrektes und vollständiges Schreiben explizit üben; Beachtung von Sonder- und Spezialfällen in Aufgaben einbauen; auch hier anleiten und disziplinieren; Schwierigkeitsgrad nach und nach steigern.

Zu geringer Überblick, zu große Anfangshürden: Überblicksfragen stellen; Überblicke geben; Verknüpfungen herstellen; Schwieriges in kleinere Teile zerlegen; Schwierigkeitsgrad nach und nach steigern; Lernstand rückmelden; bereits Gelerntes stabilisieren.

Zu geringe Beweglichkeit des Denkens: Verständnisfördernd fragen; Anschauung einbeziehen; Verknüpfungen zwischen Aufgaben, Sätzen, Verfahren herstellen; Lösungsstrategien thematisieren; Wechsel der Fragerichtung, z. B. Umkehrfragen stellen oder den Lerner diese selbst formulieren lassen; wichtige Fertigkeiten wiederholt üben.

Zu geringe Zielklarheit: Überblicksfragen stellen; Überblicke geben; den Nutzern rückmelden, was sie schon können und was sie noch lernen müssen; Verknüpfungen herstellen; zeigen, dass bzw. wie der gelernte Mathematikstoff in bauingenieurtechnischen Anwendungen nutzbar ist.

Für die meisten dieser Abhilfen wurde beschlossen, sie tatsächlich in den neuen E-Learning-Aufgaben umzusetzen. Das Aufzeigen von beruflicher Stoffanwendbarkeit bzw. des Sinns fürs spätere Berufsleben sollte jedoch nicht dazugehören: Zum einen hat das Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik nicht das dafür nötige Ingenieurwissen. Zum anderen beinhalten Anwendungen neben den rein mathematischen auch modellierungsbezogene Schwierigkeiten – dies kann zu Überlagerungen führen, welche schon bestehende Lern- oder Verständnisprobleme noch verstärken, vor allem, wenn viele Anwendungsbeispiele oder -aufgaben behandelt werden. Für die neuen E-Learning-Aufgaben wurde jedenfalls entschieden, auf ingenieurtechnische Anwendungen zu verzichten und sie rein innermathematisch zu halten.

3.1.3 Das Baumstruktur-Prinzip

Um die im vorigen Abschnitt genannten didaktischen Abhilfen auf Basis der Leitideen zu realisieren, musste ein passendes Format für die E-Learning-Aufgaben entwickelt werden. Grundsätzlich sollte das Angebot zwecks Niedrigschwelligkeit möglichst wenig oder keine Einarbeitung in das Format selbst benötigen.

Von Prof. Johanna Heitzer vom Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik und Dr. Andrea Offergeld vom Lehrstuhl A für Mathematik der RWTH Aachen wurden dazu mögliche Aufgabentypen zusammengestellt (vgl. Anhang A), zu welchen teilweise auch kurze konkrete Aufgabenbeispiele entwickelt wurden (vgl. Anhang B). Einige dieser Aufgabentypen waren: Fehler in vorgegebenen Rechnungen suchen; richtige von falschen Aussagen unterscheiden; Fallunterscheidungen aufzählen lassen; Benennen lassen, wodurch eine Aufgabe schwierig wird; nach Klassifizierung fragen, etwa von Lösbarkeitsfällen linearer Gleichungssysteme; Aufgaben mit „Baumstruktur", bei denen je nach Weg unterschiedliche Rückmeldungen/Hilfestellungen gegeben werden.

Abgesehen von Baumstrukturaufgaben handelte es sich bei allen diesen Vorschlägen letztlich um spezielle inhaltliche Ausformungen von Standard-Aufgabentypen, die in heutigen E-Learning-Systemen gängig sind. Gut lässt sich das an den entwickelten Aufgabenbeispielen in Anhang B erkennen. Zum Vergleich mit dem aktuellen Stand seien hier die gängigsten E-Learning-Standard-Aufgabentypen aufgelistet (welche z. B. in den weitverbreiteten Plattformen Moodle und Ilias vorkommen, vgl. [3] und [2]):

Multiple-Choice Der Nutzer muss in einer oder mehreren vorgegebenen Listen mit jeweils mehreren Einträgen bestimmte Einträge markieren.

String-Eingabefeld In ein oder mehrere Felder muss jeweils eine bestimmte Zeichenkette eingegeben werden.

Zahl-Eingabefeld Hier muss der Nutzer in ein oder mehrere Felder jeweils eine bestimmte Zahl eintragen, wobei die Auswertung ggfs. mit einer gewissen Toleranz ausgestattet sein kann.

Term-Eingabefeld In ein oder mehrere Eingabefelder muss der Nutzer jeweils einen mathematischen Ausdruck eintragen, welcher durch ein Computeralgebrasystem auf Korrektheit hin ausgewertet wird – etwa mittels Termäquivalenz oder Termauswertung an sehr vielen Stellen.

Lückentext Hier gibt es im Aufgabentext mehrere, ggfs. unterschiedliche Antwortfelder – meistens eine Kombination aus einigen oder allen Antwortmöglichkeiten der vorigen vier Fragetypen, bei der an unterschiedlichen Stellen im Aufgabentext unterschiedliche Fragetyp-Felder gesetzt sind.

Zuordnung Elemente einer Liste müssen Elementen einer zweiten Liste zugeordnet werden – was je nach Plattform etwa mittels Ziehen von Verbindungslinien oder mittels Auswahl aus Dropdown-Menüs realisiert sein kann.

Drag-and-Drop Text- oder Bildelemente müssen an bestimmte Stellen gezogen und dort „abgesetzt" werden.

Anordnung In einer speziellen Art von Drag-and-Drop-Frage müssen Text- oder Bildelemente in eine bestimmte Reihenfolge gezogen und „abgesetzt" werden.

Imagemap Der Nutzer muss an eine bestimmte Stelle in einem Bild oder in einem dynamischen Applet (etwa ein Funktionsgraph in einem scroll- und zoombaren Koordinatensystem) klicken.

Fragen mit Zufallswerten Je nach Plattform kann man bei bestimmten Fragetypen – etwa bei Multiple-Choice- oder Eingabefeld-Fragen – mittels Einflechtung von zufälligen (Zahlen-)Werten viele unterschiedliche Aufgabenstellungen aus einer einzelnen Frage erzeugen.

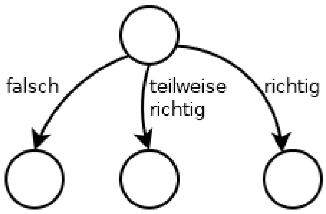


Abbildung 3.1: Struktur von Standard-Aufgabentypen

Trotz ihrer Varietät ist die Struktur dieser Standard-Fragetypen grundsätzlich ähnlich: Auf der Frageseite hat man einen *Aufgabentext*, ggfs. ergänzt durch Medien wie Bilder oder dynamische Applets, sowie separat oder an bestimmten Stellen im Aufgabentext die *Antwortelemente*, mit denen der Nutzer seine Antwort eingibt bzw. auswählt. Durch Klick auf einen Button sendet der Nutzer seine Antwort ab. Daraufhin wird diese automatisch ausgewertet, und dem Nutzer wird davon abhängig das direkte Feedback angezeigt – direkt auf der gleichen Seite oder auf einer einzelnen Folgeseite. Üblicherweise gibt es zwei oder drei verschiedene Feedbacks, für die Fälle falsch und richtig bzw. für die Fälle falsch, teilweise richtig und richtig, selten mehr Fälle. Oft beschränkt sich das Feedback genau auf diese Worte; manchmal werden aber tatsächlich längere Hinweistexte rückgemeldet, etwa mit Tipps zum Erreichen der richtigen Lösung oder mit Hinweisen auf den vermuteten Fehler, sofern ein solcher automatisch erkannt werden kann. Mehr als dieses einmalige Feedback lässt sich bei Standard-Fragetypen gängiger E-Learning-Systeme nicht realisieren. Nach dem Feedback wechselt man zu einem anderen E-Learning-Element, etwa einem Infotext oder einer anderen Aufgabe. Letztlich erhält man als Struktur eines einzelnen Standard-Aufgabentypen die Abbildung 3.1. Auf der Ebene der gesamten E-Learning-Umgebung ergibt sich ein Bild wie in Abbildung 3.2: Viele kurze Aufgaben stehen nebeneinander, oft eingebettet in Texte oder thematisch strukturierte Kategorien, und einige aktuellere Systeme können aus Nutzerangaben oder aus Ergebnissen bisher gelöster Aufgaben automatisiert entscheiden, welche Aufgaben dem Nutzer angezeigt werden und welche nicht.

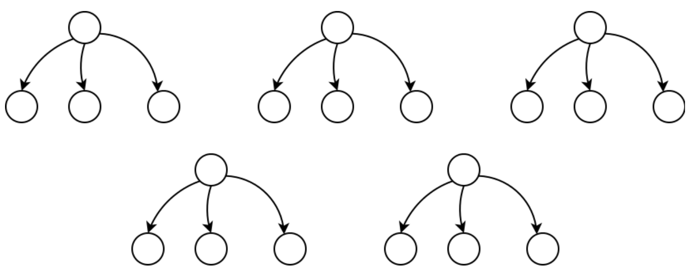


Abbildung 3.2: Aufstellung von Standardaufgaben in typischen E-Learning-Umgebungen

Anders als die obigen Standard-Aufgabentypen können Aufgaben mit Baumstruktur mehrere aufeinanderfolgende Schritte zulassen und diese nach Belieben miteinander verbinden. Dadurch lässt sich etwa nach einer falschen Antwort ein Feedback mit mehr Hilfestellung geben, vielleicht auf einer nächsten Seite teilweise vorrechnen, um dann z. B. den Benutzer den Rest rechnen und nochmals die Antwort eingeben zu lassen. Dadurch entsteht eine „Baumstruktur" bzw. wegen der freien Verbindungsmöglichkeiten effektiv vielmehr eine Graphenstruktur. Im Beispieldiagramm in Abbildung 3.3 sind Pfeile, die über die strenge Baumstruktur hinausgehen, gestrichelt eingezeichnet. Die Beispielstruktur ist hier klein gehalten; prinzipiell sind aber beliebig viele Unterseiten mit beliebigen Verbindungen möglich. Wegen seiner Griffigkeit haben sich die Begriffe „Baumstruktur" bzw. „Baumstrukturaufgabe" trotz leichter Ungenauigkeit bis heute beim damit befassten Personenkreis gehalten.

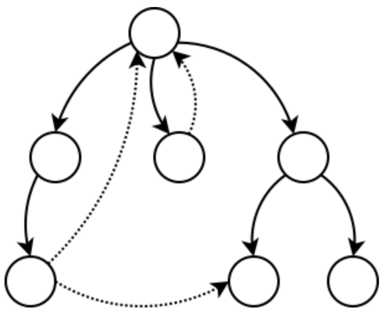


Abbildung 3.3: Beispiel einer kurzen „Baum"struktur

Die Baumstruktur war zunächst „nur" als ein weiterer Aufgabentyp neben den obigen Standardaufgabentypen geplant. In Absprache mit Prof. Johanna Heitzer und den Dozenten der Veranstaltung hatte sich das allerdings dahingehend verschoben, dass letztlich alle Aufgaben Baumstruktur aufweisen sollten: Dies ist als beste und teilweise einzige Möglichkeit gesehen worden, die Leitideen (vor allem individuelles Rückmelden, Anregung zum eigenständigen Aufgabenlösen und detaillierte Hilfestellungen, siehe Unterabschnitt 3.1.1) und die didaktischen Mittel zum Angehen von Lernhürden (etwa Schwierigkeiten in Teilschritte zerlegen, Rückmeldungen zu gelösten Teilschritten geben, anleiten und disziplinieren, Lösungsstrategien thematisieren etc., siehe Unterabschnitt 3.1.2) in E-Learning-Form zu realisieren. Insbesondere zum „treffsicheren" Eingehen auf Details des (individuellen) Lösungswegs – nicht nur auf Gesamtlösungsansatz und Endergebnis – hilft eine Struktur, die mehrseitig und verzweigt den Lösungsprozess zu einer Aufgabenstellung behandelt. Mit den Standard-Aufgabentypen, die nur aus Aufgabenstellung und Eingabe des Endergebnisses bestehen, ist das dagegen kaum möglich. (Das dürfte auch ein wichtiger Grund dafür sein, warum sich die eTests als nicht so hilfreich wie gewünscht erwiesen haben, siehe dazu Unterabschnitt 2.2.2.)

Damit war das Konzept für das neue E-Learning-Angebot im Wesentlichen auf dem Stand, auf dem es aktuell noch immer ist. Das Angebot sollte aus einer Reihe von Baumstrukturaufgaben (BSAs) bestehen, welche möglichst exemplarisch die (klausur-)typischen Aufgabenstellungen aus dem Vorlesungsstoff behandeln. In einer

BSA sollte der Nutzer jeweils zu einer solchen Aufgabenstellung den gesamten Löseprozess durchlaufen können – vom anfänglichen Ausprobieren bzgl. möglicher Lösungsansätze über das detaillierte Durchgehen des gewählten Ansatzes bis zum finalen Aufschreiben der „sauberen“ Lösung. Auf Frageseiten sollte der Nutzer Zwischenergebnisse eingeben oder Entscheidungen zum weiteren Weg treffen, auf Inhaltsseiten sollten Konzepte oder Lösungsschritte erklärt und ggfs. Hilfestellungen gegeben werden. Abhängig von eingegebenen Antworten bzw. Entscheidungen auf Frageseiten sollte man auf unterschiedliche Folgeseiten weitergeleitet werden, wodurch auf die Antworten bzw. Entscheidungen passend reagiert werden kann – etwa durch mehr Inhaltsseiten mit kleinschrittigeren Hilfestellungen nach einer falschen Antwort. Weiterhin sollten die Weiterleitungen zu Folgeseiten möglichst frei programmierbar sein, im Gegensatz zu Standardfragen mit ihrer Koppelung an die höchstens drei Fälle „falsch, richtig, teilweise richtig“. Auch sollte es möglich sein, als Nutzer ggfs. schon beherrschte Teillösungsschritte bewusst zu überspringen. All diese Eigenschaften einbeziehend war klar, dass es verglichen mit üblichen E-Learning-Aufgabensammlungen nur wenige BSAs geben würde. Dafür würden diese jedoch recht lang sein und aus vielen verbundenen Einzelseiten bestehen – mit den Aufgabenstellungen so komplex und passend gewählt, dass möglichst viele wichtige Gedankengänge, Problemfälle und Lösungsmöglichkeiten exemplarisch behandelt werden können. Insgesamt würde also das E-Learning-Angebot von der Art her aufgestellt werden wie in Abbildung 3.4, mit eher wenigen und dafür längeren Baumstrukturaufgaben.

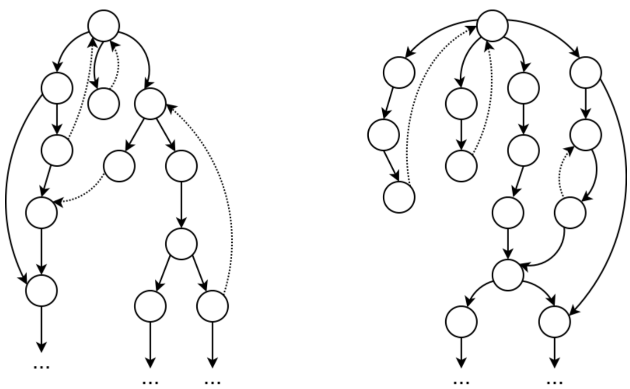


Abbildung 3.4: Aufstellung von Baumstrukturaufgaben im neuen E-Learning-Angebot

3.2 Theoretische Hintergründe zum BSA-Konzept

In das im vorigen Abschnitt beschriebene Grundkonzept der Baumstrukturaufgaben sind neben den bisherigen pragmatisch-didaktischen Überlegungen auch weitere Konzepte der (fach-)didaktischen Theorie miteingeflossen. Sie helfen bei der detaillierteren Konzeptbeschreibung sowie bei der theoretischen Einordnung der Baumstrukturaufgaben und sind in diesem Abschnitt darzustellen.

3.2.1 Programmiertes Lernen

Auch als programmierte Unterweisung, programmierter Unterricht bzw. im Englischen als Programmed Instruction oder Programmed Learning bezeichnet, stellt das programmierte Lernen insbesondere in der „verzweigten“ Form (siehe weiter unten) die ideelle Hauptgrundlage für die Baumstrukturaufgaben dar. Der Begriff des programmierten Lernens wurde u. a. vom Behavioristen B. F. Skinner eingeführt (vgl. dazu und zum Folgenden [59], S. 545 ff.), der seit den 1950er Jahren überlegt hatte, wie man in der Breite individuelles, direktes und häufiges Feedback für Lerner auf automatisierte Weise realisieren kann, ohne dass eine Lehrperson dies übernehmen muss – anders als etwa im Schulunterricht, wo (sehr viele) Lerner oft recht lange (mehrere Minuten oder Stunden bis Tage) auf Feedback warten müssen. Motiviert durch das Ausgangsproblem der effizienten Feedbackgebung (vgl. auch [29] für grundlegende Überlegungen zu Feedback in digitalen Kontexten) hatte sich daraus jedenfalls eine ganze Praxis- und Forschungsrichtung entwickelt, welche vor allem in den 1960er Jahren sehr aktiv war.

Programmiertes Lernen ist charakterisiert durch eine vorgefertigte Abfolge von Seiten, sogenannten „Frames“, die jeweils aus allen oder einigen der folgenden Elemente aufgebaut sind (vgl. [58], S. 3):

- ein (Einführungs-)Text
- eine Frage
- irgendeine Form von Antwortfeld, mit dem der Nutzer seine Antwort auf die Frage eingeben kann
- ein Feedback zur gegebenen Antwort (alternativ kann Feedback auch separat auf einem eigenen Folge-Frame gegeben werden)

Neben der Buchform wurden fürs programmierte Lernen insbesondere auch Maschinen bzw. Computer als Lernmedium ins Auge gefasst (vgl. [58], S. 4). Bei aller seitdem verstrichenen Zeit lässt sich doch die Ähnlichkeit zu heutigem E-Learning erkennen: Zwar wird der damalige Ansatz des programmierten Lernens heutzutage als überholt bewertet, u. a. wegen des überhöhten Anspruchs, damit große Teile des herkömmlichen Präsenzunterrichts und des Lernens schlechthin zu übernehmen (vgl. [62], S. 88 f). Das Design hintereinandergeschalteter Frames ist jedoch weiterhin formgebender Bestandteil von E-Learning-Aufgaben bzw. -Aufgabensets, ebenso wie die Idee des effizienten Automatisierens von Konzepteinführung, Übungsmöglichkeiten und Feedback weiter grundlegend für E-Learning-Umgebungen ist. In diesem Sinne, und mit heutzutage besonnenerer Einbindung in Lernsituationen, hat das programmierte Lernen bis heute Bestand (vgl. auch [62], S. 89; [59], S. 563).

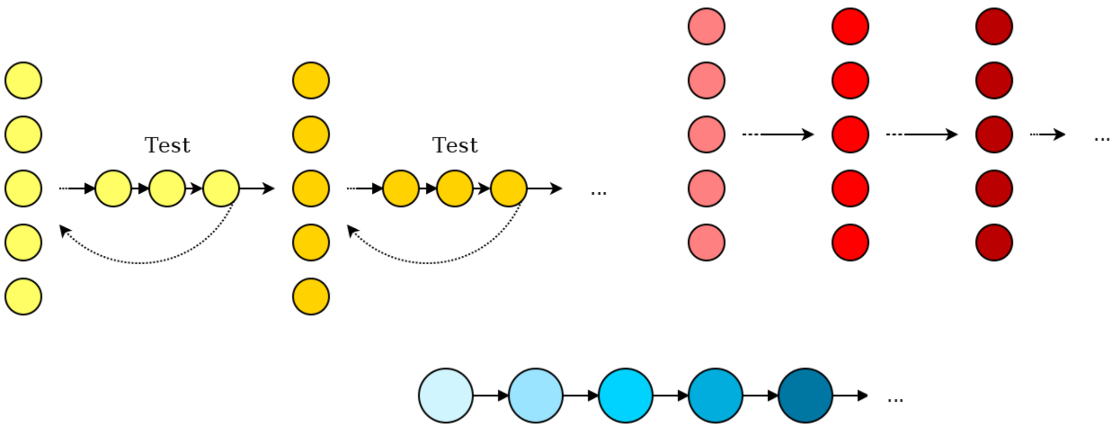


Abbildung 3.5: Verschiedene Arten von „linearem" programmiertem Lernen

Skinner selbst hatte bei seinem Ansatz vor allem grundlegende Rechen- und Kalkülfertigkeiten des Mathematik-(Grund-)Schulstoffs im Sinn, bei denen er wiederholtes Üben und ständiges Feedback im Sinne operanter Konditionierung als sinnvolles Lernvorgehen sah. Entsprechend war sein Ansatz hauptsächlich „linear": Für eine zu übende bzw. lernende Fertigkeit gibt es sehr viele kurze Einzelaufgaben-Frames, welche in mehrere Aufgabensets mit aufsteigendem Schwierigkeitsgrad gruppiert sind. Das Feedback bei jedem einzelnen Aufgaben-Frame beschränkt sich hauptsächlich auf richtig bzw. falsch. Hat man in einem Aufgabenset – oder bei einem Test zu diesem Aufgabenset, zusammengesetzt aus mehreren meist direkt hintereinandergeschalteten Kurzaufgaben – einen genügenden Prozentsatz (bei Skinner 95%, vgl. [59], S. 547) richtig beantwortet, kann man mit dem nächstschwierigeren Aufgabenset weitermachen. Die „Linearität" des Ansatzes lässt sich in Abbildung 3.5 erkennen, zusätzlich mit zwei Abwandlungen von Skinners Konzept: Die gelbe Struktur entspricht Skinners Konzept mit den hintereinandergeschalteten Aufgabensets, bei denen man zur Zulassung zum nächstschwierigeren Aufgabenset einen Test „bestehen" muss. Als rote Struktur ist die Abwandlung illustriert, bei der ebenfalls konsekutiv schwierigere Aufgabensets hintereinandergeschaltet sind, man jedoch zum Weiterkommen ins nächste Set „nur" einen genügenden Prozentsatz an Aufgaben im aktuellen Aufgabenset richtig beantworten muss. Die blaue Struktur schließlich ist eine der einfachstmöglichen Formen linearen programmierten Lernens, bei der schlicht einzelne Aufgaben hintereinandergeschaltet sind.

Skinners Ansatz sah einige weitere Elemente vor, die den „Drill"-Charakter der vorigen Strukturen etwas abmilderten. So könnte der Nutzer etwa bei Nichtbestehen eines Tests einige zusätzliche Hinweise erhalten. Zudem betonte er bezüglich des Gesamtaufbaus der Lernsysteme, dass die verschiedenen Lernelemente möglichst in einer sinngebenden Struktur anzuordnen seien; neben den Aufgabenset-Abfolgen als Übungselemente sollte es z. B. auch aufgabenfrei einführende (Text- und Bild-)Elemente oder rückblickende Sicherungselemente geben (vgl. [59], S. 550).

Möglicherweise u. a. wegen der relativ einfachen Programmierbarkeit, sowie der guten Anwendbarkeit mindestens bei Kalkülfertigkeiten, ist dieses „lineare" Prinzip bei den aktuellen E-Learning-Plattformen im Mathematikbereich weiterhin mit großem Abstand vorherrschend. Die möglichen Aufgabentypen haben sich zwischenzeitlich wie in Unterabschnitt 3.1.3 aufgelistet stark weiterentwickelt; auch die Strukturierungsmöglichkeiten zum Anordnen von Aufgaben(sets) innerhalb von Text-Bild-Medien-Umgebungen sind reichhaltiger geworden, zudem ist innerhalb von Aufgabensets eine randomisierte Zusammenstellung möglich. Es bleibt aber bis heute in der Mehrheit der Fälle so, dass eine einzelne Aufgabenstellung auch nur aus einem einzelnen Aufgaben-Frame mit Abfrage eines Endergebnisses besteht, und dass solche Aufgaben entweder einzeln hintereinandergeschaltet sind oder in Form eines Aufgabensets nebeneinanderstehen. (Dazu kann man sich z. B. die Plattformen OMB+, VEMINT oder MUMIE ansehen, vgl. die Weblinks in Unterabschnitt 2.1.2.)

Aufgabenstellungen, die sich über mehr als einen Frame erstrecken, sind hingegen selten zu finden (eine Plattform mit derartigen Aufgaben ist z.B. [1]). Das gilt erst recht, wenn diese mehreren Frames auch noch antwortabhängig verzweigt sein sollen – eine E-Learning-Umgebung mit solchen Aufgaben ist dem Autor im aktuellen Mathematikbereich – abgesehen von den eigenen Baumstrukturaufgaben – nicht bekannt. Dabei entstammt auch dieses Prinzip einer speziellen Version programmierten Lernens, welche möglicherweise wegen des größeren Erstellungsaufwands in der Praxis weniger Beachtung als Skinners Ansatz fand: Seit Ende der 1950er Jahre veröffentlichte Norman Crowder Ideen zu programmierten Lernsystemen mit antwortabhängiger Verzweigung, welche er als Branching Program oder Intrinsic Program bezeichnete (vgl. [59], S. 547 und S. 555). Dabei kann im Anschluss an Frage-Frames je nach gegebener Antwort unterschiedlich weitergeleitet werden. Ein Beispiel für eine durch derartige Verzweigung resultierende Struktur mit eingebetteten Testaufgaben nach Crowder ist in Abbildung 3.6

dargestellt. Für den zu übenden bzw. lernenden Stoff hatte Crowder, der im Militärausbildungsbereich gearbeitet hatte, anders als Skinner komplexe Fähigkeiten im Fokus, bei denen Entscheidungen auf Grundlage vielfacher Einzelerkenntnisse zu treffen sind und entsprechend unterschiedliche weitere Vorgehen gewählt werden müssen.

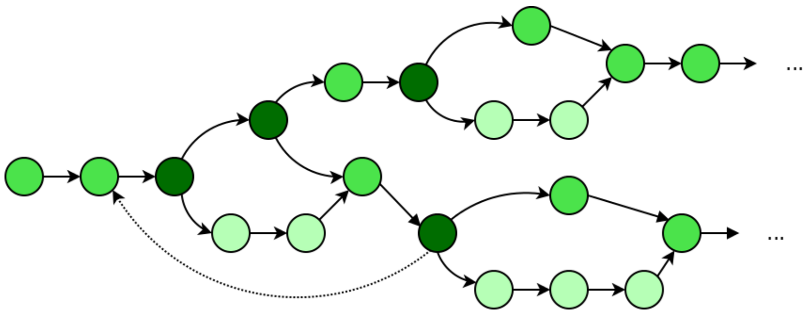


Abbildung 3.6: Beispielstruktur zu „verzweigtem“ programmiertem Lernen nach Norman Crowder

Mit dem verzweigten Ansatz nach Crowder lassen sich einige der Probleme programmierten Lernens vermeiden, die für dessen Überholtheit mitverantwortlich waren (vgl. zu einigen dieser Probleme auch [62], S. 95):

- Der lineare Ansatz eignet sich hauptsächlich zum Abbilden grundlegender, kurzschrittiger Fertigkeiten. Diese Tendenz lässt sich etwa bei den eTests in der beschriebenen Mathematik-I/II-Veranstaltung erkennen, bei denen es sich im Kern um lineare Programme handelt. Mithilfe von konsekutiv aufeinander bezogenen Frames kann man die Mehrschrittigkeit von Lösungsprozessen komplexer Aufgabenstellungen – wie sie in der Hochschulmathematik und auch schon im fortgeschrittenen Schulstoff auftreten – passender abbilden.

- Vor allem beim linearen Ansatz kann der Drillcharakter der Aufgaben zu einer unkritischen, nicht introspektiven Lernhaltung ungefähr folgender Art verführen: „Ich muss nicht groß darüber nachdenken, ob ich etwas falschmache und warum – sofern ich genügend Punkte in den Aufgaben erhalte, habe ich genug gelernt.“ Beim mehrseitigen, verzweigten Ansatz können mögliche Gedanken und Fehler expliziert thematisiert werden, die in mehrschrittigen Lösungsprozessen von Bedeutung sind, statt nur zu einem Endergebnis „richtig“ oder „falsch“ zurückzumelden.
  Ebenfalls zum Fördern einer bewusst-introspektiven Übungshaltung wird in jeder Baumstrukturaufgabe der Nutzer mithilfe einer Vorbemerkungs-Seite sowie gelegentlichen Hinweisen während des Aufgabenverlaufs daran erinnert, alle Schritte selbst auf dem Papier zu rechnen, Neues oder Unbekanntes nachzuschlagen und

bei Problemen bzw. Fehlern genau zu überlegen, wo der eigene Gedankengang zu modifizieren ist.

- Die beim linearen Ansatz meist nur aus einem einzelnen Frage-Frame bestehenden Aufgabenstellungen können zu der Haltung beitragen, dass es für jede Aufgabe immer das eine richtige bzw. beste Lösungsrezept gebe. Beim verzweigten Vorgehen lassen sich verschiedene Lösungswege bearbeiten und in ihren Vor- und Nachteilen thematisieren, was der genannten Haltung entgegenwirken kann.

Ein weiteres typisches Problem des programmierten Lernens – Trivialisierung und Einengung des Stoffs auf einfache, durchs Lernprogramm abprüfbare Aspekte – wird bei den Baumstrukturaufgaben schon allein dadurch vermieden, dass sie als eines von mehreren Übungselementen (letztlich in Blended-Learning-Manier) in den Gesamt-Präsenzbetrieb eingebunden sind. Dabei unterstreichen die völlige Freiwilligkeit, die Erläuterungen bei jedem auch kleineren Schritt sowie die zuvor genannte Vorbemerkungs-Seite bei jeder BSA, dass es nicht ums möglichst richtige Beantworten aller Zwischenfragen geht, sondern um das Nachvollziehen und das Anwendenkönnen der vielen fürs Aufgabenlösen relevanten Gedankengänge.

3.2.2 Adaptierbarkeit und (lokale) Adaptivität

E-Learning hat grundsätzlich das Problem der Rigidität: Eine Software hat keine Möglichkeit zur freien zwischenmenschlichen Kommunikation und Wahrnehmung, mit der sie merken könnte, ob der einzelne Lerner unter- oder überfordert ist, ob er zusätzliche Informationen benötigt, ob er einen bestimmten Stoff schon beherrscht und somit überspringen kann etc. Auch das Geben individuellen Feedbacks ist entsprechend schwierig. Seit den Anfängen programmierten Lernens bis hin zu heutigem E-Learning ist es deshalb eine zentrale Herausforderung, wie man die Software so programmieren kann, dass sie automatisiert und trotzdem möglichst passend auf den einzelnen Lerner im Hinblick auf Anforderungen und Feedback eingeht. Solche individuellen Anpassungsmöglichkeiten des Programms an die unterschiedlichen Lerner führen zu den Begriffen der Adaptierbarkeit und Adaptivität, englisch „adaptability“ und „adaptivity“ (vgl. [71]):

Als **adaptierbar** wird E-Learning bezeichnet, wenn der Nutzer die Möglichkeit hat, bewusst Aspekte der E-Learning-Umgebung zu modifizieren und damit das Programmverhalten zu ändern. Ein trivialerweise adaptierbarer Aspekt praktisch aller E-Learning-Umgebungen ist, dass der Nutzer auswählen kann, welche Aufgaben oder Aufgabenteile, welche inhaltlichen Kategorien, Hilfserläuterungen etc. er gerade ansehen bzw. bearbeiten möchte. Adaptierbar ist es etwa auch, wenn der Nutzer am Anfang einen

Schwierigkeitsgrad einstellen kann und das System dann automatisch anpasst, welche Aufgaben dem Nutzer angezeigt werden. Bei den Baumstrukturaufgaben ist es ein adaptierbarer Aspekt, dass der Nutzer an verschiedenen Stellen selbst explizit durch Klick auf einen zugehörigen Button entscheiden kann, welcher Rechenweg im Folgenden verwendet werden soll, oder ob er nach einer falschen Antwort nochmal zur Frage gehen oder lieber zu einem Hilfszweig gehen möchte etc. Insgesamt ist Adaptierbarkeit recht einfach zu realisieren und damit bei praktisch allen aktuellen E-Learning-Umgebungen in irgendeiner Form gegeben.

E-Learning ist **adaptiv**, wenn es ohne bewusstes Zutun des Nutzers automatisch das Programmverhalten im Hinblick auf individuelle Nutzerbedürfnisse modifiziert. Ein trivialerweise adaptiver Aspekt bei vielen aktuellen E-Learning-Aufgaben ist das unterschiedliche Direkt-Feedback je nach falscher, richtiger oder teilweise richtiger Antwort. Als weitere, detailliertere Ausgestaltung von Adaptivität findet man in der Literatur vor allem folgendes Konzept (vgl. z. B. [73], S. 183): Das E-Learning-System speichert während der Benutzung bestimmte Einzelheiten des Nutzers in Variablenform – etwa, welche oder wieviele Aufgaben der Nutzer korrekt bzw. falsch beantwortet oder wie oft er sich zusätzliche Hinweise anzeigen lässt – und ändert automatisch auf dieser Basis das weitere Programmverhalten, z. B. durch Anzeigen anderer Folgeaufgaben oder anderer Folge-Frames. In dieser Form ist Adaptivität ein immer wieder auftauchendes „Leitmotiv“ im E-Learning-Umfeld und wurde vielfach theoretisch detailliert ausgearbeitet, mit den Intelligent Tutoring Systems als einer der aktuelleren Spielarten (vgl. etwa [13]). Dabei kann Adaptivität auch andere Formen annehmen: Statt Nutzerverhalten in Variablen zu speichern, wird durch das antwortabhängig unterschiedliche Weiterleiten bei den Baumstrukturaufgaben (ebenso wie generell bei verzweigtem programmiertem Lernen) direkt auf Nutzerverhalten reagiert. Ein typischer Fall ist das Umleiten auf einen Weg mit mehr Seiten und kleinschrittigeren Hilfestellungen nach einer falschen Antwort auf eine Zwischenfrage. Innerhalb einer BSA kann die Verzweigung jedenfalls durchaus langfristige Auswirkungen auf den Verlauf haben, abhängig von der Länge der verlinkten Wege. Da das System aber keine Nutzerentscheidungen oder -eigenschaften in Variablenform speichert, sondern nur direkt im Anschluss an Frageseiten reagiert, wird dies im Rahmen dieser Arbeit als **lokale Adaptivität** bezeichnet.

Es ist anzumerken, dass Adaptierbarkeit und vor allem Adaptivität auch als „Aushängeschild“-Begriffe zum Bewerben neu entwickelter E-Learning-Produkte genutzt werden. (Das kann daran liegen, dass das Reagieren auf individuelle Lernerbedürfnisse ja gerade die Hauptschwachstelle von E-Learning gegenüber dem Lernen mit einer realen Lehrperson darstellt. Entsprechend wird mit dem Wort „Adaptivität“ gelegentlich versucht zu suggerieren, dass das jeweilige E-Learning diese Schwäche nicht habe und dem Lernen mit reellen Lehrpersonen ebenbürtig sei.) In der Literatur ebenso wie in Produktbeschreibungen liest man von teils beeindruckenden prinzipiellen technischen Möglichkeiten. In der Praxis ist die tatsächliche Adaptivität dann aber oft sehr beschränkt (vgl. auch [41], S. 3). In einigen Fällen wird zudem das Wort „adaptiv" etwas unklar so benutzt, dass es auch Adaptierbarkeit zu umfassen scheint (vgl. z. B. das sehr gut gemachte [1], in dem Adaptivität im hier beschriebenen Sinne mindestens in den Preview-Lektionen kaum bis gar nicht bemerkbar ist).

Insgesamt ist das Ausmaß der (lokalen) Adaptivität in den Baumstrukturaufgaben als im Vergleich überdurchschnittlich anzusehen; die verschiedenen möglichen Aufgabenverläufe unterscheiden sich bei vielen BSAs sehr deutlich voneinander.

3.2.3 Lernen mit Musterlösungen

Wie in Unterabschnitt 3.1.3 beschrieben, durchläuft eine BSA jeweils den gesamten Lösungsprozess zu einer Aufgabenstellung, aufgeteilt auf viele Einzelseiten und mehrere mögliche parallele Wege. Ungefähr ein Fünftel aller Seiten sind dabei Frageseiten, der Rest Inhaltsseiten (Genaueres zu den Seitentypen ab S. 58). Damit handelt es sich bei den Baumstrukturaufgaben letztlich um interaktives Lernen an Musterlösungen. Um ein solches Lernen mit Musterlösungen verständnisstiftend und echt fähigkeitsaufbauend zu gestalten – statt in rezepthaftes Auswendiglernen abzudriften, was selbst im Hinblick auf bloßes Klausurenbestehen nur bedingt hilfreich ist – sind mehrere Aspekte zu beachten, von denen einige im Folgenden dargestellt werden.

Worked Examples

Zunächst kann die Worked-Examples-Theorie als Teilgebiet der lernpsychologischen Cognitive-Load-Theorie einige Anhaltspunkte liefern. Worked Examples sind keine neue Methode; vielmehr ist damit jedwedes Lernen bezeichnet, bei dem als Lehrmittel eine Problemstellung sowie eine zugehörige Beispiellösung bzw. Lösungsanleitung gegeben sind (vgl. [17], S. 181-182). Beides zusammen bildet jeweils ein Worked Example. Sie werden zum Lernen sowohl von automatisierbaren Fertigkeiten als auch von strategischen Problemlösefähigkeiten vorgeschlagen (vgl. etwa [27], S. 224-226). Typischerweise wird das Durchsehen eines Worked Examples mit dem anschließenden eigenständigen Lösen eines anderen Problems von gleichem oder ähnlichem Typ kombiniert; das Worked Example sollte also möglichst exemplarisch aufzeigen, wie man allgemein Probleme dieses Typs lösen kann.

Kognitive Belastungen beim Lernen neuer Inhalte können nach der Cognitive-Load-Theorie unterschiedlich kategorisiert werden (vgl. [92], S. 258 ff.; [11], S. 8):

- Die dem Lernstoff **innewohnende Belastung** besteht allein in der Beschaffenheit des Lernstoffs selbst. Bei mathematischen Inhalten ist sie meist hoch, da die verschiedenen Konzepte rein abstrakter Natur sind, da sie wegen der komplexen Beziehungen zueinander kaum isoliert gelernt werden können (anders als zu einem gewissen Grad Fremdsprachen-Vokabeln), und da auf ihnen oft nach sehr speziellen Regeln vielfältig operiert werden muss.
- Die **äußere Belastung** ergibt sich durch die Art der Darbietung des Lernstoffs in einer Lehr-Lern-Situation. Abhängig z. B. von der Qualität von Texten, Gesagtem, Illustrationen etc., von der Anzahl und Darstellung passender Beispiele, von der Passung verschiedener Materialien zueinander usw. muss der Lerner unterschiedlich viel kognitive Arbeit für das Zusammenbringen der Informationsquellen zu einem sinnvollen Ganzen leisten.
- Die **lernbezogene Belastung** besteht beim Lernprozess selbst. Der Lerner muss den Lernstoff als eigenes kognitives Schema konstruieren und in seine bisherigen Wissensschemata integrieren.

Sowohl innewohnende als auch lernbezogene Belastung sind von Lehrpersonen bzw. Lernmaterial nicht änderbar; letztlich kann nur auf die äußere Belastung Einfluss genommen werden. Eine Hauptidee des Lernens anhand von Worked Examples ist die Reduktion von äußerer Belastung, sodass der Lerner seine kognitiven „Reserven“ weitgehend auf die lernbezogene Belastung fokussieren kann.

Für Worked Examples wurde experimentell untersucht, welche Zusammenstellungen in der Tendenz zu besseren Lernerfolgen führen. Ergebnisse dessen sind unter anderem die folgenden (vgl. [17], S. 191, S. 195):

- Innerhalb eines Worked Example:
  - Unterschiedliche Informationsquellen wie Text, Bilder, dynamische Applets, Gesprochenes etc. sollten so direkt wie möglich aufeinander bezogen sein, ggfs. mit expliziter Nennung des genauen Bezugs, sodass Wechsel vom einen zum anderen Informationselement möglichst wenig zusätzliche kognitive Belastung bedeuten.
  - Bei Lösungen, die aus mehreren Einzelschritten bzw. Teilzielen bestehen, hilft es, diese explizit zu benennen und auch visuell zu markieren und abzugrenzen. Das gilt umso mehr für komplexe Probleme.

  - Die Darstellung des Problems sollte den Lerner möglichst zum eigenen Nachdenken darüber anregen, welchen Sinn die einzelnen Schritte haben (vgl. [27], S. 231). Derartiges „Self-Explaining“ auf Seiten des Lerners wird mitunter sogar als absolut nötig für die Effektivität des Lernens mit Musterlösungen gesehen (vgl. [11], S. 9).

- Im Hinblick auf die Zusammenstellung mehrerer Worked Examples:
  - Es hilft, wenn pro Problemtyp mehr als ein Worked Example gegeben ist.
  - Beim Kombinieren mehrerer Worked Examples mit eigenständigem Problemlösen hat es sich als hilfreicher herausgestellt, direkt nach jedem Worked Example eine Problemstellung selbst zu lösen, anstatt zunächst viele Worked Examples in einem großen „Block“ durchzusehen und erst danach mehrere Probleme selbst zu lösen.

Insbesondere für Lerner am Beginn des Lernprozesses konnte mehrfach experimentell nachgewiesen werden, dass ein Durcharbeiten von Worked Examples mit anschließendem eigenständigen Aufgabenlösen effektiver ist, als sofort mit eigenständigem Aufgabenlösen anzufangen (vgl. [17], S. 183-184). Die Erkenntnisse der obigen Auflistung haben jedenfalls wie folgt Eingang in das Design der Baumstrukturaufgaben gefunden:

- Illustrationen, Erklärungen, Überlegungen etc. behandeln in den BSAs fast immer direkt den in dieser Aufgabe untersuchten Term, und es wird darauf geachtet, die entsprechenden Bezüge explizit zu nennen. (Dabei können diese Erklärungen durchaus noch exemplarisch über den konkreten Term hinausweisen.) Es wird nicht auf von der Aufgabenstellung unabhängige Terme verwiesen, um irgendeinen Punkt klarzumachen. Vor allem zu Beginn einer BSA wird jedoch oft einmal das allgemeine Vorgehen zu derartigen Aufgabenstellungen dargestellt; ein Beispiel sind die vier Schritte einer Partialbruchzerlegung (siehe Unterabschnitt 4.2.2).

- Wie schon beim vorigen Punkt erwähnt, wird kurz nach Beginn der meisten BSAs das generelle Vorgehen zu einer solchen Aufgabenstellung in seinen jeweiligen Teilschritten beschrieben. Bei den meisten dieser BSAs bilden diese Teilschritte zudem als explizite Links ein Seitenmenü, welches während der BSA-Bearbeitung permanent links im Browser angezeigt wird und mit dem man bei Bedarf direkt zum jeweiligen Aufgabenteil springen kann (siehe auch S. 67).

- Wann immer nötig oder möglich, werden Reflexionen zum Sinn der aktuellen Lösungsschritte entweder auf BSA-Inhaltsseiten explizit ausformuliert, oder der Lerner soll manchmal sogar eine eigene (Multiple-Choice-)Frageseite dazu beantworten.

- Nicht zu allen, aber zumindest zu einigen Aufgabenstellungen wurden zwei Baumstrukturaufgaben entwickelt. Dazu gehören etwa die beiden BSAs zu separablen Differentialgleichungen (siehe Unterabschnitte 4.3.7 und 4.3.8). Die BSA zu rekursiven Folgen (siehe Unterabschnitt 4.3.3) behandelt als einzige zwei Terme, die quasi „nebeneinander“ untersucht werden; dadurch wird das trotz deutlicher Termunterschiede analoge Vorgehen betont.

- Der letzte obige Punkt wird bei den BSAs dadurch abgedeckt, dass der Nutzer simultan zum Seiten-Durchlauf die Aufgabe auf dem Papier nebenher schriftlich lösen soll. Dazu wird der Nutzer auch durch die gelegentlichen Zwischenergebnis-Abfragen zwischendurch immer wieder angehalten; es wurde bei allen BSAs angestrebt, jeweils nach spätestens fünf Seiten vom Nutzer entweder ein Zwischenergebnis oder eine Entscheidung zum weiteren Vorgehen abzufragen. Dieses Verhältnis stellt nach eigenen und anderen Testdurchläufen einen guten Kompromiss zwischen Interaktivität, Bearbeitungsdauer und Entwicklungsaufwand dar.

Teilprozesse des Aufgabenlösens

Ruft man sich die vier Problemlöseschritte nach Pólya – Verstehen der Aufgabe, Ausdenken eines Plans, Durchführen des Plans, Rückschau (vgl. [75], S. 18 ff.) – ins Gedächtnis und betrachtet dann die Musterlösungen, welche Studierende in Mathematikvorlesungen typischerweise erhalten, so fällt folgendes auf: Meistens besteht die Musterlösung nur aus dem dritten Schritt, dem „Ausführen des Plans“, also dem sauberen Herunterschreiben der fertig durchdachten Lösung. Im Allgemeinen gehören zum Aufgabenlöseprozess aber auch die anderen Schritte, insbesondere der zweite Schritt „Ausdenken eines Plans“. Die im Studium gängigen Musterlösungen – mitgeschrieben in frontalen Präsenzveranstaltungen oder in schriftlicher Form den Studierenden zur Verfügung gestellt – sind also letztlich keine vollständigen Worked Examples im Sinne des vorigen Unterabschnitts. Diese fehlende Hilfestellung kann bei einem Teil der Studierenden dazu beitragen, dass sie die Notwendigkeit initialer Ausprobier-Phasen für den Aufgabenlöseprozess unterschätzen, dass sie sich trotz Durchgehen von Musterlösungen noch vom eigenständigen Aufgabenlösen überfördert fühlen können und/oder dass sie womöglich ineffektive, auf Auswendiglernen basierende Übungsstrategien verfolgen (siehe auch die Herausforderungen in Unterabschnitt 2.2.2).

Im Rahmen seiner Untersuchungen zum Lernen anhand von Musterlösungen unterteilt Christoph Ableitinger den Aufgabenlöseprozess noch etwas genauer in folgende Teilprozesse (vgl. [10], S. 94 ff.; [11], S. 13 ff.):

1. **Problembewusstsein schaffen**: Verstehen, was eigentlich genau gelöst bzw. gezeigt werden soll

2. **Klärung der Handlungsoptionen**: Sich klarmachen, welche prinzipiellen Herangehensweisen zum Ziel führen könnten

3. **Einen Zugriff herstellen, die Aufgabe handhabbar machen**: Den gegebenen Sachverhalt so darstellen, präparieren bzw. manipulieren, dass er für die möglichen Herangehensweisen aus dem vorigen Teilprozess überhaupt handhabbar wird

4. **Tricks**: Besondere Kniffe, die man z. B. zum Präparieren bzw. Manipulieren des gegebenen Sachverhalts einfach kennen muss, da man sonst nicht weiterkommt

5. **Anpassen oder Prüfen der Passung**: Wiederum den gegebenen Sachverhalt darstellen, präparieren bzw. manipulieren, und zwar hier so, dass die letztlich gewählte Herangehensweise angewendet werden kann; oder erkennen, dass der Sachverhalt von vornherein schon in einer Form vorliegt, bei der man die Herangehensweise ausführen kann

6. **Handwerk**: Das Anwenden von schon beherrschten Routinen, z. B. Kalkülnutzung, Ziehen einfacher Schlussfolgerungen, Anwendung bekannter Sätze

7. **Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen**: Das Aufschreiben von Erklärungen zu Rechenweg, Gedankengängen bzw. Argumentationen in der eigenen Lösung, sodass ein Dritter alles prinzipiell verstehen könnte

(Dabei kann man sehr grob den Punkt 1 mit Pólyas erstem Schritt identifizieren, die Punkte 2, 3, 4 und 5 mit Pólyas zweitem Schritt, und die letzten beiden Punkte mit Pólyas drittem Schritt. Pólyas vierter Schritt der Rückschau kommt nur implizit innerhalb dieser Punkte vor – er ist zwar fürs umfassendere Verständnis wichtig, jedoch für das akute Lösenkönnen und Klausurbestehen nicht so sehr wie die anderen Schritte.) Die Reihenfolge in der obigen Auflistung ist nicht als völlig fest zu verstehen, die Grenzen zwischen einzelnen Teilprozessen können manchmal fließend sein, und es kommen nicht bei jeder einzelnen Aufgabe alle dieser Teilprozesse vor. Über die Gesamtheit der typischen Aufgaben in Hochschul-Mathematikveranstaltungen hinweg trifft man jedoch tatsächlich mehrfach auf jeden dieser Teilprozesse.

Relevant für die Konzeption der Baumstrukturaufgaben ist jedenfalls, dass mehrere dieser Teilprozesse in den üblichen Musterlösungen in Hochschul-Mathematikveranstaltungen nicht vorkommen, obwohl sie integrale Teile des Aufgabenlöseprozesses sind (vgl. auch [10], S. 103; [11], S. 27 ff.). Das gilt insbesondere für die Teilprozesse 2, 3, 4, 5 und 7 aus der obigen Auflistung. Um den kompletten

Aufgabenlöseprozess abbilden zu können, werden in den BSAs also all diese Punkte explizit angesprochen.

3.2.4 Grundfertigkeiten beim Lösen komplexer Aufgaben

Mit dem Ausführen grundlegender Prozeduren wie Termumformungen, Gleichungsauflösen, Polynomdivision, Ableiten, einfaches Integrieren etc. – von denen die meisten schon im Schul-Mathematikunterricht behandelt worden sind – hat ein Teil der Studierenden zum Studienbeginn immer noch Probleme (vgl. [52]; siehe auch Unterabschnitt 2.1.1). Das Verfolgen der Inhalte im Vorlesungsbetrieb ist für diese Studierenden stark erschwert. Ausgehend von einer Unterscheidung konzeptuellen und prozeduralen Wissens – wobei sich ersteres auf „statische" Begriffe und ihre Beziehungen untereinander bezieht, letzteres auf das Ausführen von ein- oder mehrschrittigen Prozeduren (vgl. [14], S. 142) – unterteilen Altieri und Prediger das prozedurale Wissen etwas genauer (vgl. [14], S. 143; für eine generelle Ausdifferenzierung sowohl von prozeduralem als auch von konzeptuellem Wissen vgl. [91], S. 4-5):

Prozedurales Prinzipverständnis („procedural knowledge in mind") besteht darin, dass der Lerner weiß, wie ein Verfahren prinzipiell funktioniert und wie es in Beziehung zu mathematischen Konzepten bzw. Strukturen steht. Ein Beispiel für solches Prinzipverständnis auf Hochschulstoffebene etwa bei Hauptachsentransformationen sind die Einsichten, dass die zugehörige Matrix einer Quadrik stets symmetrisch sein muss, dass und warum sie deshalb immer orthogonal diagonalisierbar ist, dass man mit der orthogonalen Diagonalisierung das Koordinatensystem passend zu den Symmetrieachsen der Quadrik dreht usw. Ein Beispiel schulnäherer Ebene wären Polynomdivisionen, bei denen zum Prinzipverständnis die Einsichten gehören, warum das Verfahren funktioniert (wozu man sich etwa das Vorgehen mit Distributivgesetz beim Multiplizieren zweier Polynome zurück ins Gedächtnis rufen sollte), dass der entstehende Rest $R(x)$ zur Darstellung $P(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)}$ führt usw. Mit seinem vernetzenden Charakter liegt das Prinzipverständnis jedenfalls recht nah am konzeptuellen Wissen.

Prozedurale Nutzungsfertigkeit („procedural knowledge in use") bezeichnet dagegen das rein automatisierte, korrekte und rasche Durchführenkönnen von Prozeduren. Bei schwachen Studierenden werden anhaltende Mängel im Prinzipverständnis, verbunden mit Fehlvorstellungen, als eine Ursache dafür vermutet, dass viele von ihnen die Nutzungsfertigkeiten im ersten Studienjahr nur schwer ausbauen können. Das Prinzipverständnis wiederum lasse sich allerdings durch wiederholtes Anwenden im Rahmen komplexerer Aufgabenstellungen verbessern (vgl. [14], S. 145).

Die Konsequenzen für das Konzept der Baumstrukturaufgaben bestehen darin, dass die in den Aufgabenverläufen immer wieder notwendig vorkommenden einfachen Teilprozeduren explizit auf BSA-Seiten behandelt werden. Auf zugehörigen Frageseiten muss der Nutzer die jeweiligen Teilergebnisse selbst bestimmen und eingeben; alle Rechen- bzw. Umformungsschritte werden im Anschluss explizit aufgeschrieben, im Fall einer falschen Antwort mit zusätzlichen noch kleinschrittigeren Hilfestellungen über evtl. mehrere Seiten erstreckt.

3.2.5 Rechenkniffe und „Monsterterme"

In Service-Mathematikveranstaltungen, insbesondere im Ingenieurbereich, ist es durchaus üblich, für Übungs- und Klausuraufgaben öfter besonders komplizierte Terme zu verwenden – ein Umstand, der manchmal auch den Begriff „Kampfrechnen" motiviert hat. Neben historischen Ursachen kann dies dadurch begründet sein, dass gerade in technischen Anwendungskontexten schnell und oft komplizierte Terme entstehen, die man als Ingenieur zwecks Produktsicherheit eben genauso beherrschen muss und bei denen auf etwaige Sonderfälle zu achten ist, deren Übersehen zu ganz realen Gefahren führen kann (wie etwa Resonanzkatastrophen, vgl. [64], S. 52). Die besondere Kompliziertheit von Termen äußert sich dabei hauptsächlich auf zwei Arten (vgl. [64], S. 51-52):

Der Term kann erstens schlicht besonders umfangreich sein, also aus vielen Summanden, Faktoren, Funktionsverkettungen etc. bestehen, sodass das Bearbeiten mehr Zeit, Fleiß, Konzentration und anhaltende Korrektheit beim Kalkül erfordert – oder auch von vorn herein abschreckt und entmutigt. Ein Beispiel für einen solchen **„Monsterterm"** ist das Skizzieren aller $z \in \mathbb{Z}$ in der Gaußschen Ebene, die die folgende Bedingung erfüllen:

$$\frac{1}{2}(z\bar{z})\mathrm{Im}(z) \leq \left[\mathrm{Re}(z^2+\bar{z}^2)+2(\mathrm{Im}(z))^2\right]\mathrm{Re}\left(\frac{i}{z}\right),\ z\in\mathbb{C},\ z\neq 0 \text{ und}$$

$$\mathrm{Re}(z^2-4)+2(\mathrm{Re}(z))^2 \leq \mathrm{Im}(iz)\mathrm{Im}(i\bar{z}),\ z\in\mathbb{C}$$

Zweitens kann zum „Knacken" eines Terms im Sinne des Zugriff-Herstellens bzw. des Anpassens ein bestimmter **Rechenkniff** nötig sein, ganz bestimmte Umformungen, ohne die man bzgl. einer Lösung nicht oder nur sehr schwer weiterkommt (ganz wie bei Ableitingers Teilprozess der Tricks in Unterabschnitt 3.2.3). Ein Beispiel dafür ist der „Erweiterungstrick" am Anfang von

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-n}\;-\;n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)}{\sqrt{n^2-n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-n\right)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Bei einer Überbetonung von Aufgaben mit Rechenkniffen besteht die Gefahr, dass der Lernfokus der Studierenden sich weg vom eigenständigen knobelnden Aufgabenlösen und vom Verständnis der Prinzipien verschiebt, hin zum Auswendiglernen von Kniffen (vgl. [64], S. 55). In der studentischen Wahrnehmung kann dann eine Tendenz bestehen, Aufgabenlösen als das direkte Erkennen und Anwenden des jeweils einen richtigen Tricks misszuverstehen, statt als heuristisch gelenktes Durchdenken, Ausprobieren und Ausführen von Ansätzen, wofür man knobeln muss und Erfahrung im eigenständigen Aufgabenlösen benötigt. Auf affektiver Ebene kann eine Haltung entstehen, bei der man Mathematik als „unberechenbare Gemeinheit“ oder zumindest als „notwendiges Übel“ einordnet, prinzipiell bzgl. des eigenständigen Aufgabenlösen-Könnens resigniert, den Hochschulbetrieb als schikanös oder „aussiebend“ wahrnimmt o. ä.

Auch Aufgaben mit „Monstertermen“ können durch ihre schiere Größe einschüchtern und vom eigentlich wichtigen Verfahren ablenken. Um dem vorzubeugen, ist es vermutlich angebracht, auf einen genügend großen Anteil an „normalen“ Übungs- und Klausuraufgaben zu achten, bei denen der Schwerpunkt auf Verständnis und Anwendung des Standard-Vorgehens liegt und keine Kniff-Schwierigkeiten oder besonders große Terme davon ablenken.

Als Konsequenz des Vorherigen kommen in den Baumstrukturaufgaben nur selten Rechenkniffe oder „Monsterterme“ vor. Dort wo sie vorkommen, gilt jeweils Folgendes:

- Bei Rechenkniffen in den BSAs wird jeweils explizit mitgeteilt, dass es sich um einen solchen handelt, und dass man darauf nicht von selbst kommen muss. Zudem ist das Vorgehen mit Kniff fast nie die einzige Möglichkeit; fast immer kann der Nutzer auch ein „normales“ Vorgehen wählen. (Die Terme der BSAs sind so gesetzt, dass das möglich ist.) Beispiele sind die zweite BSA zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt oder die zweite BSA zu Betragsungleichungen, siehe Unterabschnitte 4.3.5 und 4.3.2.

- Auch bei ungewöhnlich großen Termen wird in den BSAs explizit darauf hingewiesen, dass ein ebensolcher vorliegt und dass man nicht grundsätzlich von derart großen Termen ausgehen muss. Hauptgrund für die Benutzung einiger großer Terme ist, dass für die abgedeckten Aufgabenstellungen nur auf diese Weise genug exemplarische Aspekte in die jeweils ein bis zwei zugehörigen BSAs eingebracht werden können.

3.3 BSA-Features im Überblick

Auf Basis aller vorausgehenden Überlegungen wurden die Baumstrukturaufgaben, mit wenigen leichten konzeptuellen Anpassungen im Verlauf der ersten Semester des Einsatzes, schlussendlich zum bis heute genutzten Stand entwickelt. Die Gestaltungsaspekte der Aufgaben sind im Folgenden festzuhalten, ggfs. mit explizitem Rückbezug zu den in den Abschnitten 3.1 und 3.2 vorgestellten Konzepten.

Technische Realisierung mit Moodle

Nachdem im Sommer 2012 das grobe BSA-Konzept feststand, war eine Software zum Realisieren der Aufgaben zu wählen. Die Entscheidung ist auf die freie E-Learning-Plattform Moodle gefallen, wofür es hauptsächlich zwei Gründe gibt: Zum einen ist eine eingebettete Moodle-Umgebung schon im RWTH-eigenen Online-Kurssystem L^2P enthalten, was sowohl Entwicklungsarbeit als auch Verfügbarmachung direkt im L^2P-Lernraum zur Veranstaltung Mathematik I/II möglich gemacht hat, in direkter „Nähe“ des restlichen Kursmaterials. Zum anderen ist Moodle eine der wenigen frei benutzbaren E-Learning-Plattformen, bei denen überhaupt antwortabhängige Verzweigung technisch umsetzbar ist. Das diesbezügliche Feature in Moodle ist die „Lektion“-Aktivität (siehe folgender Punkt). Die zum Zeitpunkt der Textverfassung genutzte Moodle-Version im L^2P ist die Version 3.3 (vgl. ggfs. auch die allgemeine Moodle-3.3-Dokumentation [7]).

Lektionen in Moodle: Verzweigte Abfolge von Inhalts- und Frageseiten

Eine „Lektion“-Aktivität in Moodle besteht hauptsächlich aus sogenannten Inhaltsseiten und Frageseiten, die sich durch ihre Art der Weiterverlinkung unterscheiden. (Es gibt noch andere mögliche Gestaltungselemente in Lektionen, die aber für die Baumstrukturaufgaben nicht relevant sind.) Genauer (vgl. [6]):

Auf **Inhaltsseiten** werden Text- und Bildelemente angezeigt; es sind auch andere Medienelemente wie etwa dynamische Applets möglich, was jedoch in den BSAs nicht genutzt wird. Der Aufgabenentwickler kann diesen Text-Bild-(Medien-)Körper völlig frei gestalten. In den BSAs werden hier Informationen zum Vorgehen gegeben, Teilrechnungen vorgerechnet, relevante Gedanken und Argumentationen ausformuliert, Sachverhalte z. B. geometrisch oder an Graphen illustriert, manchmal auch im Text schon Links zu anderen Seiten der BSA angegeben. Unterhalb des Text-Bild-Körpers befinden sich immer ein oder mehrere Buttons. Jeder davon verlinkt fest zu einer anderen Seiten der Lektion. Der Aufgabenentwickler bestimmt, wieviele Buttons es gibt, wohin sie verlinken, und wie sie beschriftet sind. Der Nutzer wiederum entscheidet bewusst durch Klick auf den Button, wie es weitergeht. In den BSAs ist das oft einfach der alleinige Button „Weiter“, der zur direkten Folgeseite verlinkt. Andere häufige Fälle sind: Neben dem „Weiter“-Button gibt es zusätzlich einen „Ich brauche mehr Hilfestellungen“-Button, der zu einem Parallel-Weg mit kleinschrittigeren Erläuterungen umleitet; oder der Nutzer muss sich für die nächsten Schritte zwischen verschiedenen Vorgehen entscheiden, wobei jeder Button zu einem anderen Vorgehen weiterleitet (siehe als Beispiel Abbildung 3.7).

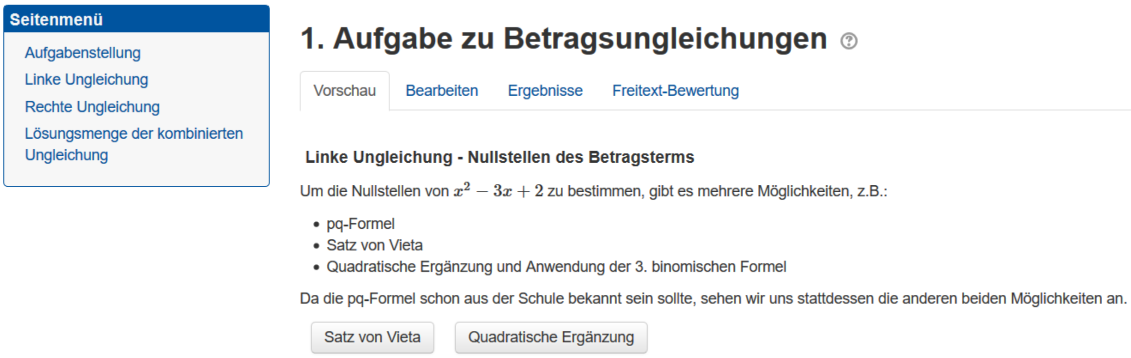


Abbildung 3.7: Screenshot einer Inhaltsseite mit zwei weiterführenden Link-Buttons, aus dem L^2P

Auf **Frageseiten** gibt es genau wie bei Inhaltsseiten einen vom Aufgabenentwickler frei gestaltbaren Text-Bild-Medien-Körper. Darin ist üblicherweise eine Frage formuliert. Unterhalb des Körpers liegt ein Feld mit Auswahl- bzw. Eingabemöglichkeiten zum Beantworten der Frage, sowie ganz unten ein Button „Einreichen“, mit dem der Nutzer seine Auswahl bzw. Eingabe ans System übergibt und von diesem automatisiert und antwortabhängig zu einer anderen Seite weitergeleitet wird. Das Auswahl- bzw. Eingabefeld ist je nach Fragetyp anders aufgebaut (siehe auch die Screenshots in den Abbildungen 3.8, 3.9 und 3.10):

- Bei einer **Multiple-Choice**-Frage ist eine Liste von Antwortmöglichkeiten gegeben. Abhängig davon, was der Aufgabenentwickler für diese Seite eingestellt hat, muss der Nutzer genau eine oder potentiell mehrere dieser Antwortmöglichkeiten ankreuzen. Bei ersterem kann jede einzelne Antwortmöglichkeit zu einer anderen Seite verlinken; bei letzterem gibt es eine Verlinkung für den Fall, dass genau die korrekten Antworten vollständig angekreuzt wurden, und eine andere Verlinkung für alle restlichen Ankreuzmuster.

- Bei einer **Kurzantwort**-Frage ist ein Eingabefeld gegeben, in welches der Nutzer eine Zeichenkette eingeben muss. Diese Eingabe-Zeichenkette wird nach Klick auf den „Einreichen“-Button mit vom Aufgabenentwickler vorformulierten Antwortmöglichkeiten – selbst Zeichenketten – verglichen, und bei Übereinstimmung wird der Nutzer entsprechend der zu dieser Antwortmöglichkeit gehörenden Verlinkung weitergeleitet. Der Vergleich läuft rein auf Zeichenbasis; dabei können die vom Aufgabenentwickler vorzuformulierenden Antwortmöglichkeiten als reguläre Ausdrücke erstellt werden, sodass ein einzelner Ausdruck durchaus mehrere verschiedene Zeichenketten „abfangen" kann (vgl. zu regulären Ausdrücken etwa [8]).

- Bei einer **Zuordnung**s-Frage sind zur Beantwortung mehrere Elemente auf der linken Seite aufgelistet; jedes dieser Elemente hat auf der rechten Seite ein zugehöriges Dropdown-Menü, welches seinerseits eine Liste von Zielelementen enthält, aus denen der Nutzer das jeweils zum linken Element passende auswählen muss. Ähnlich wie bei Multiple-Choice-Fragen mit mehreren anzukreuzenden Antworten gibt es auch hier nur zwei Verlinkungsfälle: Eine Verlinkung für den Fall, dass alle Zuordnungen korrekt sind, und eine andere Verlinkung für alle restlichen Auswahlmuster.

- Zudem sind bei Lektionen **Numerisch**-, **Wahr/Falsch**- und **Freitext**-Fragen möglich, welche aber in den BSAs nicht genutzt werden: Numerisch-Fragen haben genau wie Kurzantwort-Fragen ein Eingabefeld, in welches genau eine Dezimalzahl einzutragen ist; die Eingabe wird dann auf Gleichheit mit vom Aufgabenentwickler vorgegebenen einzelnen Zahlen oder auf das Liegen in vorgegeben Intervallen hin überprüft, woraufhin der Nutzer der zugehörigen Verlinkung entsprechend weitergeleitet wird. Da in den BSAs oft nicht nur eine einzelne Zahl, sondern Tupel von Zahlen als Teilergebnis abgefragt werden, und da dies im Numerisch-Fragentyp nicht möglich ist, sind all diese Fragen stattdessen mit dem Kurzantwort-Fragentyp realisiert. Wahr/Falsch-Fragen können problemlos als Multiple-Choice-Fragen realisiert werden und bieten als solche für den Aufgabenentwickler mehr Freiheit bei Formulierungen, weshalb bei den BSAs entsprechend verfahren worden ist. Bei Freitext-Fragen gibt der Nutzer in ein größeres Eingabefeld einen Text ein; die Eingabe wird nicht automatisiert überprüft, sondern ein Betreuer muss die eingegebenen Texte selbst lesen und manuell bewerten. Da dies nicht mit dem Prinzip automatisierten individuellen Feedbacks vereinbar ist, wurde in den BSAs auf Freitext-Fragen verzichtet.

Durch die von Nutzerentscheidungen und -antworten abhängigen Verzweigungen ergibt sich die namensgebende „Baumstruktur". Wie eine solche Struktur aussieht, erkennt man am besten in Verlaufsdiagrammen von BSAs (siehe dazu die Abschnitte 4.2 und 4.3).

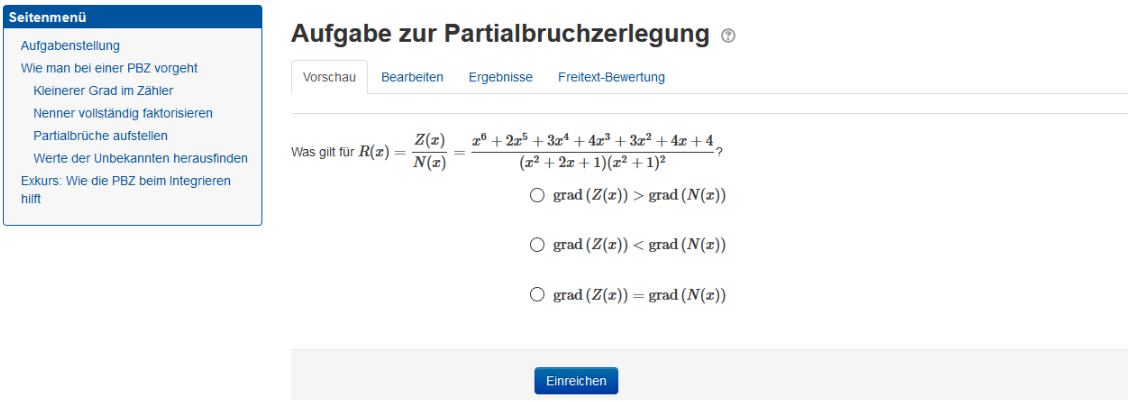


Abbildung 3.8: Screenshot einer Multiple-Choice-Frageseite, aus dem L^{2}P

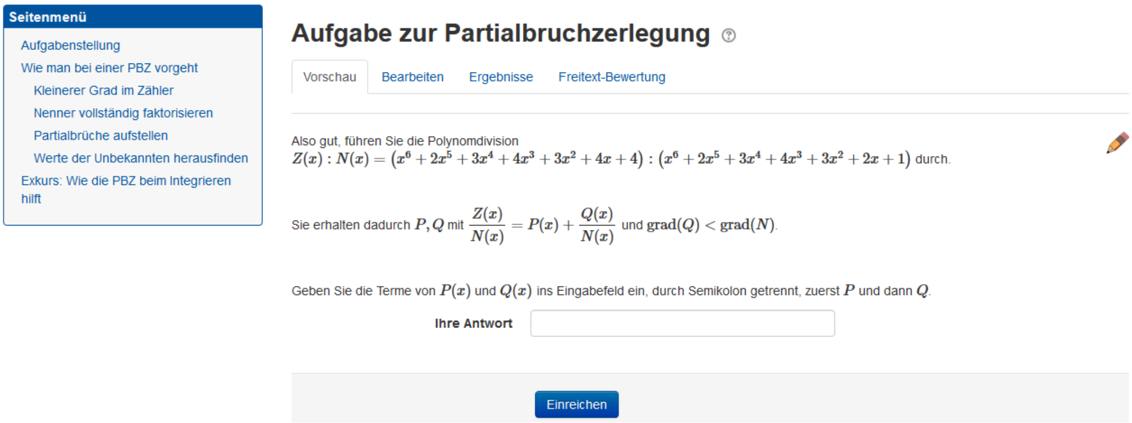


Abbildung 3.9: Screenshot einer Kurzantwort-Frageseite, aus dem L^{2}P

Adaptierbarkeit und lokale Adaptivität mit individuellen Rückmeldungen

Die Möglichkeiten für bewusste Nutzerentscheidungen zu Methodenwahl und weiterem Aufgabenverlauf in den BSAs sind ein Beispiel für Adaptierbarkeit; die antwortabhängigen Verzweigungen mit entsprechend individuell unterschiedlichen Rückmeldungen und Hilfestellungen sind ein Beispiel für (lokale) Adaptivität (siehe dazu Unterabschnitt 3.2.2). Dadurch lassen sich individuell passend Rückmeldungen zu Entscheidungen und gegebenen Antworten, zu bereits Geschafftem und noch zu Erledigendem geben (siehe Unterabschnitt 3.1.2, Punkte 2, 3 und 6).

Damit dies häufig genug der Fall ist, gibt es in den BSAs jeweils nach spätestens fünf konsekutiven Inhaltsseiten eine Frage- oder Inhaltsseite mit Nutzerentscheidung. Dadurch wird nicht zuletzt versucht, die Konzentration aufrechtzuhalten; bei längeren Ketten von Inhaltsseiten, in denen man wiederholt „Weiter“ klicken muss, würde die Neigung steigen, nicht mehr mitzudenken und die Seiten eher passiv zu durchlaufen.

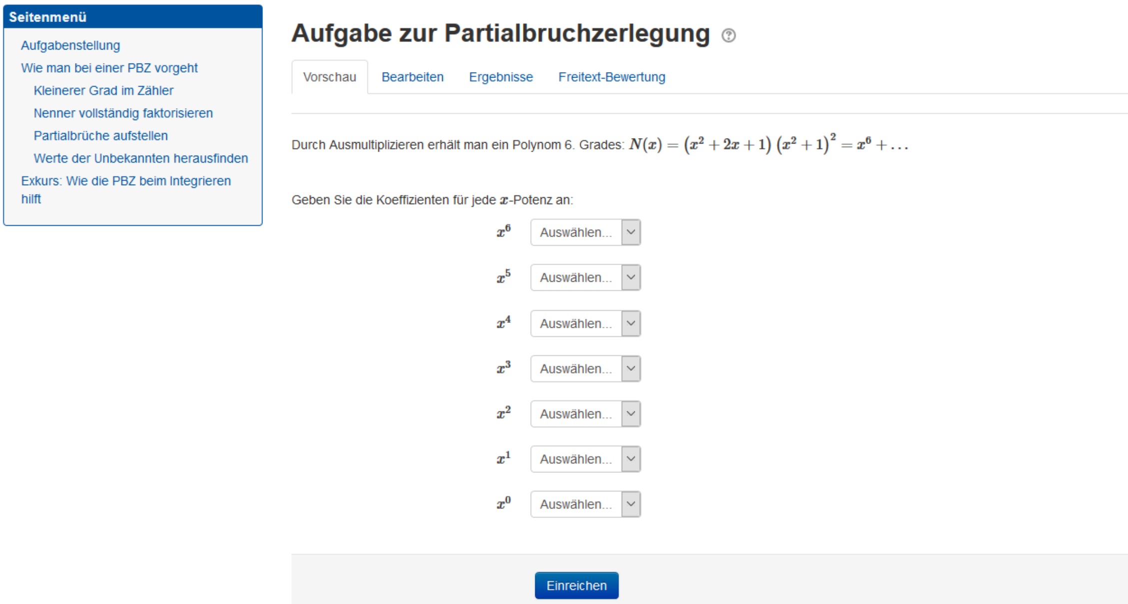


Abbildung 3.10: Screenshot einer Zuordnungs-Frageseite, aus dem L^{2}P

Behandlung aller Phasen des Lösungsprozesses

In den BSAs werden explizit auch nötige Nebenrechnungen, heuristische „Ausprobier"-Phasen und ggfs. mögliche Proben behandelt. Dabei wird jeweils explizit erwähnt, welche Teile Nebenrechnung sind, welche als reine Überlegungen nicht aufzuschreiben sind, oder welche zur eigentlichen „sauberen" Lösung aufgeschrieben werden müssen. Nicht zuletzt kann dies beim Verschaffen von Überblick helfen (siehe Unterabschnitt 3.1.2, Punkt 4).

Verschiedene mögliche Lösungswege

Wann immer möglich und angemessen, sind in den BSAs mittels Verzweigung verschiedene mögliche Methoden bzw. Lösungswege realisiert, die der Nutzer selber wählen kann oder auf die er nach Frageseiten passend geleitet wird. Meist erhält er danach auch die Möglichkeit, den/die anderen Lösungsweg(e) zu bearbeiten. Das hat zum einen schlicht informierenden Charakter und kann dem Nutzer beim Verschaffen von Überblick helfen (siehe Unterabschnitt 3.1.2, Punkt 4). Zum anderen kann es das Bewusstsein dafür schärfen, dass es nicht den einen richtigen Lösungsweg für jede Aufgabe gibt, und damit wiederum das Bewusstsein für die Wichtigkeit von Erfahrung in eigenständigem Aufgabenlösen (siehe Unterabschnitt 3.1.1).

Orientierung an aktuellen Forschungsergebnissen zur Gestaltung von E-Learning-Inhalten

Beim Design der einzelnen Inhalts- und Frageseiten werden aktuelle Forschungsergebnisse genutzt. Aus diesen Ergebnissen resultierende Prinzipien für lernfördernde Gestaltung sind gut zusammengefasst z. B. in [27] (das Inhaltsverzeichnis ist bereits sehr aussagekräftig); einige der in den BSAs genutzten Prinzipien sind die folgenden:

- Multimedialität: Wann immer möglich und sinnvoll, werden Veranschaulichungen (in den BSAs nur in Bildform) genutzt.
- Kontiguität: Veranschaulichungen befinden sich grundsätzlich in der Nähe des zu veranschaulichenden Wortes bzw. Satzes.
- Redundanzvermeidung und Kohärenz: Auf überflüssige, potentiell ablenkende Elemente wird verzichtet (siehe auch die Gestaltung von Worked Examples in Unterabschnitt 3.2.3). Eine einzelne Seite ist jeweils *einem* bestimmten Schritt oder Gedanken vorbehalten; alle Seiteninhalte beziehen sich strikt darauf. Der Bezug zum Gesamtzusammenhang wird klar und kurz gehalten. Insgesamt benötigt der Seiteninhalt möglichst wenig Scrollen.
- Persönlichkeit: Zur Verständlichkeit und besseren Identifizierbarkeit mit den Gedankengängen wird ein eher umgangssprachlicher Textstil verwendet (bei aller Genauigkeit der mathematischen Formulierungen). Der Ton ist durchgehend freundlich und konstruktiv gehalten – insbesondere auch bei Falsch-Rückmeldungen nach Frageseiten, die wann immer möglich aufzeigen, wo ein möglicher Fehler gelegen haben könnte und/oder was stattdessen zu einem richtigen Ansatz hilft.
- Denkschulung: Relevantes Denken bzgl. des gesamten Lösungsprozesses wird wann immer möglich explizit beschrieben und dem Lerner transparent gemacht.

Weitere Prinzipien, wie die Segmentierung großer Probleme in kleine schaffbare „Häppchen“, das Darbieten von Worked Examples, die wiederholte Abfrage von Grundfertigkeiten zum Üben, produktives Feedback und adaptive Nutzbarkeit wurden bereits an anderer Stelle im bisherigen Kapitel genannt.

Völlig freie Bearbeitung

Wie in Unterabschnitt 3.1.1 erwähnt, sind die Baumstrukturaufgaben wegen der Fokussierung auf Hilfestellung und Üben statt auf Abfragen von Leistung rein freiwillig konzipiert. Auch zeitliche Beschränkungen bei der Bearbeitung der BSAs gibt es seit dem

WiSe 13/14 keine. Die Aufgaben sind durchgehend zur Bearbeitung geöffnet; ein einzelner Versuch kann zwischendurch pausiert und beliebig später wieder fortgesetzt werden; und man kann jede Aufgabe beliebig oft wiederholen.

Schwierigkeitsgrad auf Klausurniveau oder leicht darüber

Die in den BSAs genutzten Aufgabenstellungen sind fast alle vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausur-Rechenaufgaben-Niveau oder leicht darüber angesetzt, etwa wenn der Term der Aufgabenstellung zum Einbeziehen möglichst vieler relevanter Aspekte etwas größer sein muss. Damit stellen die BSA-Aufgabenstellungen auf jeden Fall eine ausreichende Herausforderung für den Großteil der Studierenden dar.

Durch die vielen Hilfestellungen, je nach Nutzerantworten quantitativ unterschiedlich gestaffelt (siehe übernächster Punkt), wird andererseits versucht, Überforderung zu vermeiden und so die Durchhalte-Motivation der Nutzer aufrechtzuerhalten (siehe Unterabschnitt 3.1.2, Punkt 2).

Kleinschrittigkeit

In den BSAs werden auch sehr grundlegende Teilprozesse – wie etwa Ableiten, Polynomdivision, Lösen quadratischer Gleichungen – mit jedem Rechenschritt dargestellt, so wie man auch in einer Prüfung mangels Taschenrechner jede Rechnung komplett manuell durchführen muss. Der Nutzer erhält dadurch immer wieder die Gelegenheit zum Üben auch von Grundfertigkeiten im Kontext der komplexen Aufgabenstellungen (siehe Unterabschnitte 3.2.4 sowie 3.1.2, Punkt 1).

Hilfestellungen, vertiefende Erläuterungen, Illustrationen

Durch das antwortabhängige Verzweigen ist es möglich, im Falle falscher Antworten zusätzliche Hilfestellungen zu geben und noch kleinschrittiger durch Rechnungen oder Argumentationen zu gehen. Damit soll ein Überforderungsgefühl beim Lerner möglichst vermieden und so die Motivation, „am Ball zu bleiben“, möglichst aufrechterhalten werden (siehe Unterabschnitt 3.1.2, Punkt 2).

Sofern ohne größere Ablenkung bzw. Abschweifung vom Aufgabenverlauf realisierbar, werden für die jeweilige Aufgabenstellung relevante Konzepte gelegentlich durch „Was würde passieren, wenn...“-Überlegungen vertieft und verallgemeinert. Damit kann auch die Beweglichkeit des Denkens gefördert werden (siehe Unterabschnitt 3.1.2, Punkt 5).

Zudem werden an passenden Stellen im Verlauf der BSAs bildliche Illustrationen genutzt – Funktionsgraphen, Geraden und Ebenen im Raum in projizierter Schrägansicht, Mengen reeller Zahlen am Zahlenstrahl, etc. – wodurch simultan zum rechnerisch-formalen Vorgehen die Anschauung einbezogen werden kann (siehe Abbildung 3.11 sowie Unterabschnitt 3.1.2, Punkt 5; vgl. auch Anschauung als grundlegendes mathematikdidaktisches Prinzip, [42], S. 62-63). Mehrere dieser Illustrationen sind mithilfe der Software GeoGebra (https://www.geogebra.org) erstellt worden; siehe dazu auch den Abbildungsnachweis am Ende dieser Arbeit.

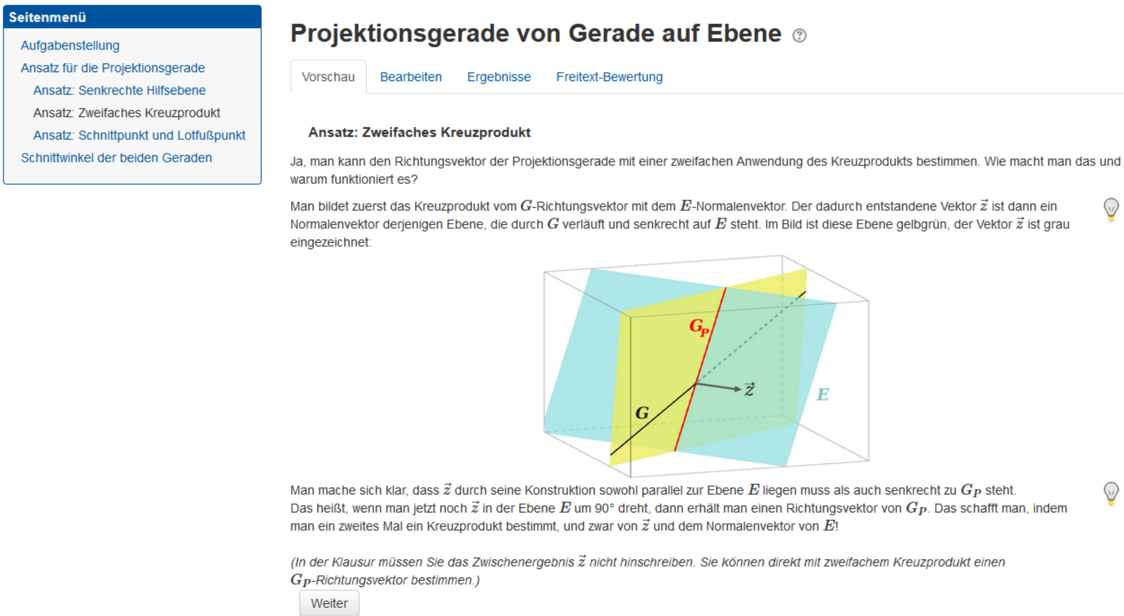


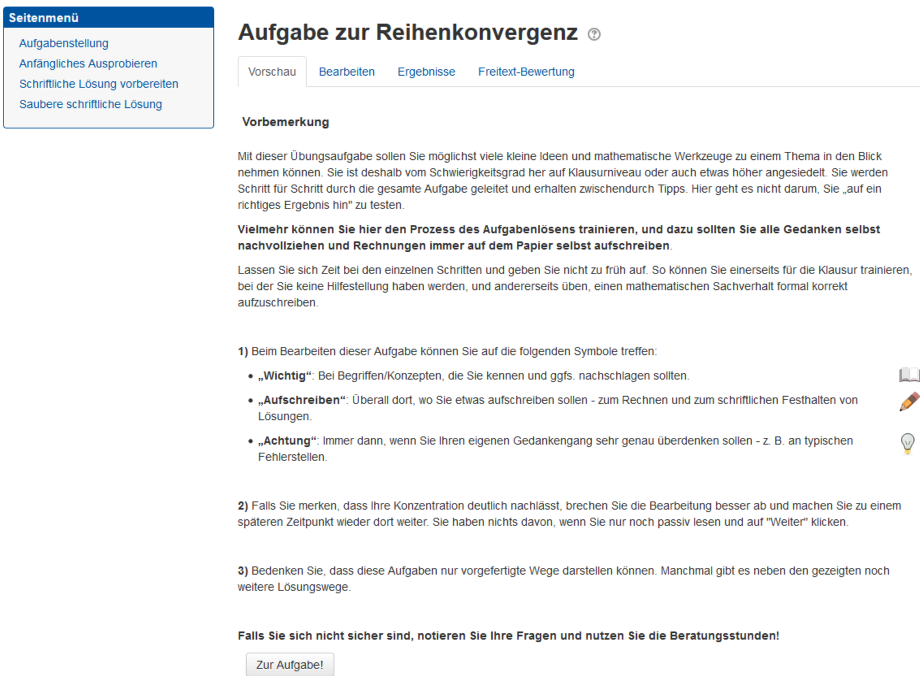
Abbildung 3.11: Screenshot einer Inhaltsseite zum Sinn eines Verfahrens zur senkrechten Projektion einer Geraden auf eine Ebene, aus dem L^{2}P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra

Hohe Seitenzahl und ca. halbstündige Bearbeitungsdauer

Durch Kleinschrittigkeit, Hilfestellungen, Behandlung aller Phasen sowie durch die Möglichkeit verschiedener Verfahren bzw. Lösungswege bestehen die meisten BSAs aus jeweils 50-100 Seiten. Dies führt zu einer Bearbeitungsdauer von je nach BSA ca. 20-40 Minuten. Da sich in einigen praktischen Durchläufen gezeigt hat, dass die Konzentration bei einer BSA nach ca. 30 Minuten deutlich nachlässt, sind insgesamt nur relativ wenige (zwei bis drei) längere BSAs zu ca. 40 Minuten entwickelt worden; die meisten dauern zur Bearbeitung jeweils 20-30 Minuten.

Vorbemerkungs-Seite

Um die Studierenden ans eigenständige Aufgabenlösen als einen Grundgedanken der BSAs zu erinnern (siehe Unterabschnitt 3.1.1), gibt es – neben der Ankündigung und Beschreibung des BSA-Angebots im Rahmen der Präsenzveranstaltungen – als erste Seite jeder Baumstrukturaufgabe eine immer identische „Vorbemerkung“. Darin wird das Konzept der schrittweisen erläuterten Bearbeitung des gesamten Lösungsprozesses einer typischen Aufgabenstellung kurz erläutert und expliziert, dass es nicht ums Abfragen von Leistung geht, weswegen es für einen möglich großen Lerneffekt nötig ist, alle Schritte aufzuschreiben und zuerst selbst zu versuchen, bevor man in der BSA weiterklickt (siehe Abbildung 3.12). Zudem werden die drei möglichen Randsymbole und ihre Bedeutung beschrieben (siehe auch nächsten Punkt).



Seitenmenü
Aufgabenstellung
Anfängliches Ausprobieren
Schriftliche Lösung vorbereiten
Saubere schriftliche Lösung

Aufgabe zur Reihenkonvergenz

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Wichtig“**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben“**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung“**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Zur Aufgabe!

Abbildung 3.12: Screenshot der in allen BSAs gleichen Vorbemerkungs-Seite, aus dem L^{2}P

Randsymbole

Als ikonische Aufforderungselemente, die den Aspekt des eigenständigen Nachdenkens und Problemlösens unterstreichen, gibt es in jeder BSA auf den meisten Seiten Randsymbole. Daneben dienen sie auch schlicht zur visuellen Auflockerung (wegen der rein innermathematischen inhaltlichen Ausrichtung enthalten die meisten BSA-Seiten notgedrungen hauptsächlich Text und Formeln). Die Randsymbole beziehen sich immer direkt auf Stellen im Text-Bild-Körper und sind jeweils auf der zugehörigen Höhe am rechten Rand sichtbar. Insgesamt gibt es drei verschiedene Symbole, siehe auch Abbildung 3.15:

- Das **aufgeschlagene Buch** wird immer dort angezeigt, wo der Nutzer einen Begriff, ein Konzept, einen Sachverhalt etc. nachschlagen soll, falls dieser bzw. dieses noch nicht bekannt oder nicht mehr präsent genug ist.
- Der **Bleistift** steht immer dort, wo der Nutzer etwas aufschreiben soll, ob Nebenrechnung oder abgeschlossene Lösungsschritte (sauber und ggfs. kommentiert). Damit stellt das Symbol eine visuelle Hilfe dar, um Aufzuschreibendes von bloß Durchzudenkendem zu unterscheiden – zusätzlich zu den expliziten Anmerkungen in den Seitentexten.
- Die **Glühbirne** wird an Stellen angezeigt, an denen besonders „scharf" aufgepasst und nachgedacht werden muss – etwa wegen häufiger Fehlvorstellungen an dieser Stelle, weil ein Sonderfall beachtet werden muss, oder da man an dieser Stelle mit einem Kniff leichter zu einem Ergebnis kommt als mit dem Standardvorgehen etc.

Seitenmenü

In fast allen BSAs wird während des gesamten Aufgabenverlaufs am linken Rand ein Seitenmenü angezeigt, in welchem die Hauptschritte des Lösungsprozesses permanent sichtbar aufgelistet sind und zudem als Direktlinks zum zugehörigen Aufgabenteil fungieren können (siehe Abbildung 3.13). Die Übersicht über die wesentlichen Lösungsschritte kann den Lernern beim Gewinnen von Überblick helfen (siehe die Unterabschnitte 3.2.3 zu Worked Examples sowie 3.1.2, Punkt 4) und bietet einen Erinnerungsanker, um einzelne Schritte nicht zu vergessen. Durch die Direktverlinkung zum jeweiligen Aufgabenteil kann der Nutzer zudem ggfs. Aufgabenteile überspringen, wenn er sie als schon beherrscht einschätzt.

Zusammenfassung am Ende der BSA

Auf der letzten Seite fast jeder BSA wird noch einmal der gesamte Lösungsprozess mit entstandenem Ergebnis zusammengefasst (siehe Abbildung 3.14). Die wesentlichen Schritte, die auch bei den meisten BSAs das Seitenmenü bilden (siehe voriger Punkt), werden dabei aufgelistet und jeweils in wenigen Worten beschrieben. Auch visuell ist eine möglichst klare Strukturierung der durchlaufenen Schritte angestrebt, um das „Haftenbleiben" im Gedächtnis und somit den Überblick zu unterstützen (siehe Unterabschnitt 3.1.2, Punkt 4).

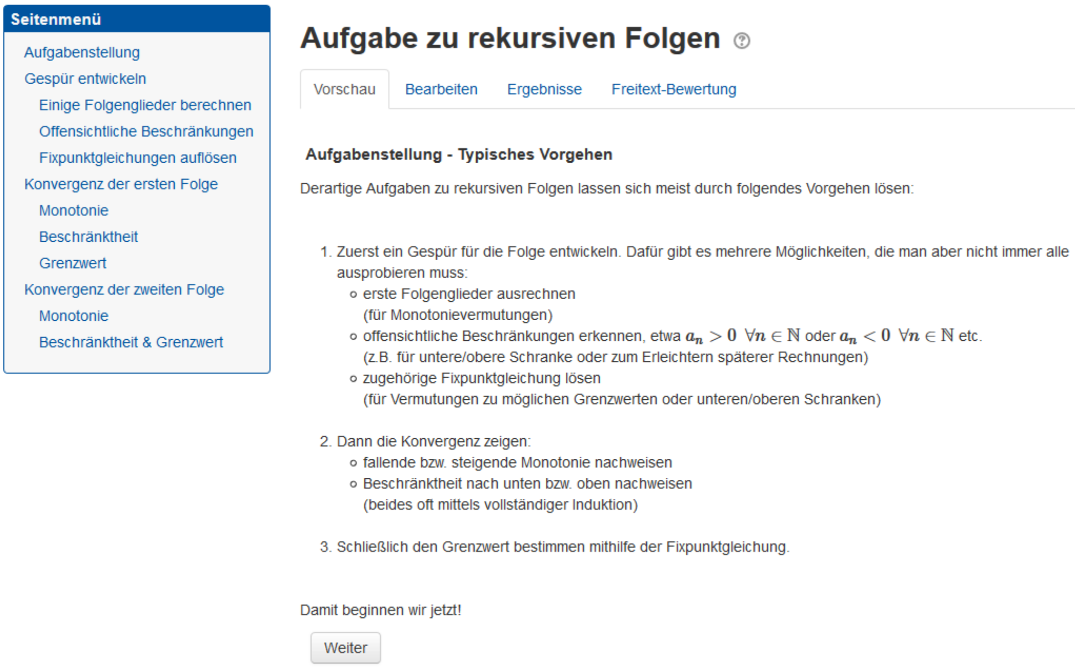


Abbildung 3.13: Screenshot einer BSA mit größerem Seitenmenü, aus dem L^2P

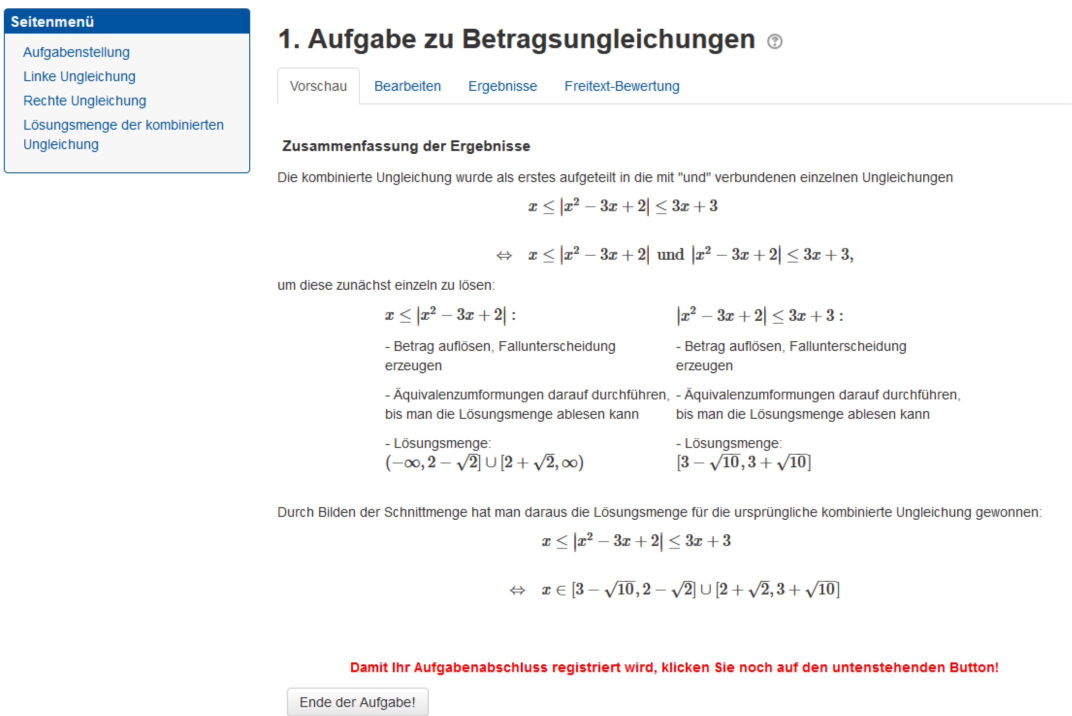


Abbildung 3.14: Screenshot einer Zusammenfassungs-Seite, aus dem L^2P

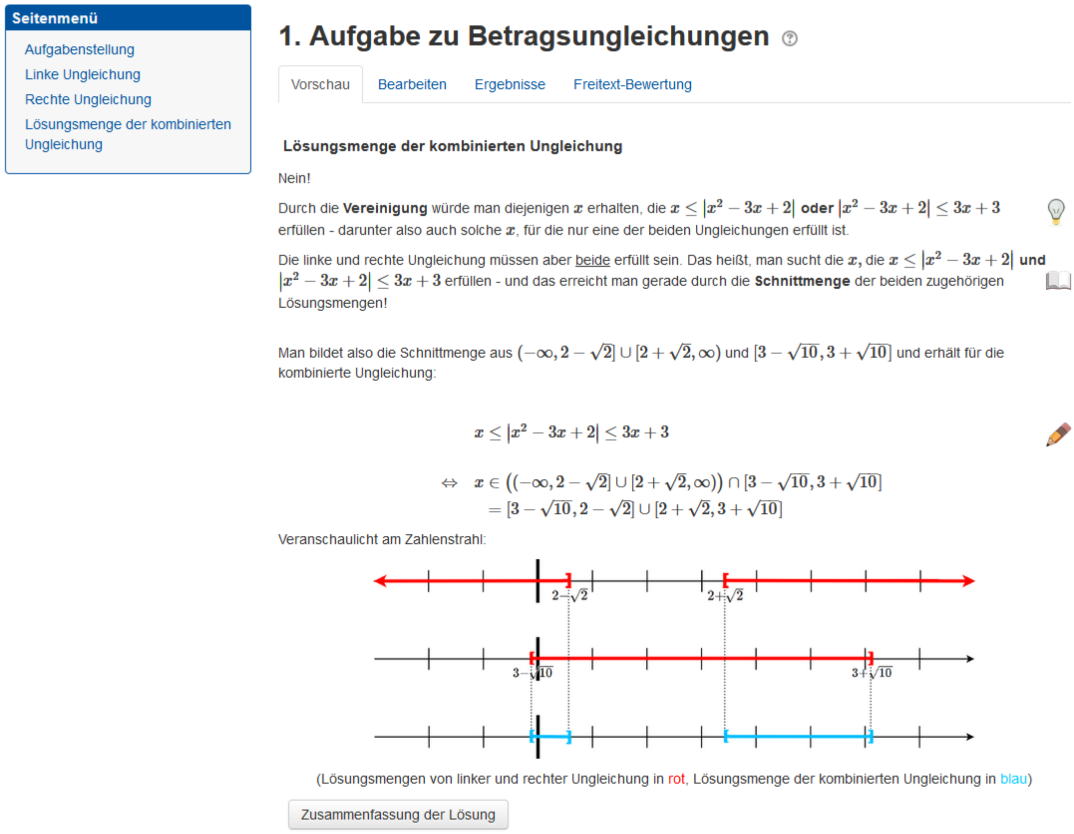


Abbildung 3.15: Screenshot einer Inhaltsseite mit allen drei Randsymbolen, aus dem L^{2}P

3.4 Zum Entwicklungsprozess der einzelnen BSAs

Die Entwicklung der einzelnen Baumstrukturaufgaben lässt sich in folgenden Schritten zusammenfassen:

1. Zuerst ist abzuwägen, welche Aufgabenstellungen überhaupt als BSA realisiert werden sollen. Als Grundlage dafür dienen insbesondere die folgenden beiden Punkte:
    - Erfahrungen aus Vorlesung, Vortragsübung, Übungsgruppen und Beratungsstunden (eigene und/oder die der Dozenten und Assistenten) dazu, bei welchen Themen bzw. Aufgabentypen vermehrt Schwierigkeiten auftreten
    - Abklärung mit den Dozenten, welche Themen am meisten Klausurrelevanz besitzen
2. Zu der gegebenen Aufgabenstellung aus dem vorigen Schritt sind die Aspekte herauszufinden, welche Studierenden Probleme bereiten können. Wege zum Herausfinden sind vor allem die folgenden:
    - Eigenes ausprobierendes Lösen vieler verschiedener Aufgaben mit einer solchen Aufgabenstellung
    - Wieder Erfahrungen aus Vorlesung, Vortragsübung, Übungsgruppen und Beratungsstunden (eigene und/oder die der Dozenten und Assistenten)
    - Mathematikdidaktische Literatur zu Hochschulstoff (insb. [11])
3. Zu den zusammengetragenen Schwierigkeiten der jeweiligen Aufgabenstellungen ist ein Term so zu erstellen, dass im Verlauf des zugehörigen Lösungsprozesses möglichst viele oder alle der Schwierigkeiten auftreten und behandelt werden können. Dabei sollte beachtet werden, dennoch mit dem Term einen klausurähnlichen oder leicht darüberliegenden Schwierigkeitsgrad nicht zu übersteigen (siehe Unterabschnitt 3.1.1). Diese Kompromissfindung zwischen Aspektvielfalt und Treffen eines angemessenen Schwierigkeitsgrads und Umfangs ist nicht einfach und erfordert vielfaches Durchdenken des Lösungsprozesses bei jeweils verschiedenen Ausgangstermen.
4. Zum Term aus dem vorigen Schritt ist eine Baumstrukturaufgabe zu entwerfen, welche die zusammengetragenen Schwierigkeiten behandelt und dabei die Überlegungen dieses Kapitels berücksichtigt.

5. Schließlich ist die entworfene Baumstrukturaufgabe als Moodle-Lektion zu realisieren.

6. Auch nach der Fertigstellung sind BSAs gelegentlich nach späterer Absprache mit Dozenten oder Assistenten in Teilen noch einmal zu revidieren/anzupassen, da durchaus manchmal Veränderungen am Stoff der Veranstaltung vorgenommen werden.

3.5 Die Ziele der BSAs zusammengefasst

Basierend auf den bisherigen Überlegungen in den Unterabschnitten 2.2.2 bis 3.4 lassen sich die übergeordneten Ziele des Baumstrukturaufgaben-Projekts zusammenfassen. Zu jedem der drei großen Ziele wird zudem festgehalten, mit welchen Mitteln das jeweilige Ziel (im Rahmen des Promotionsprojekts) verfolgt bzw. hinsichtlich seines Erreichens untersucht worden ist:

Das erste Ziel sind die **BSAs selbst als ein E-Learning-Produkt**, welches für die Studierenden inhaltlich hilfreich und gut nutzbar sein soll. Die leitenden Aspekte zur Entwicklung und Umsetzung der BSAs sind dabei im Wesentlichen die Inhalte aus Abschnitt 3.1 gewesen:

- Die Leitideen aus Unterabschnitt 3.1.1
- Das Aufgreifen der Lernhürden aus Unterabschnitt 3.1.2
- Das Baumstruktur-Prinzip aus Unterabschnitt 3.1.3

Daneben haben auch die theoretischen Aspekte aus Abschnitt 3.2 eine Rolle gespielt – jedoch vor allem als Hintergrund-„Inspiration“ oder im Kleinen an einzelnen Stellen des BSA-Entwicklungsprozesses, weshalb sie hier nicht im Fokus stehen. Die genannten drei Punkte sind kaum bis gar nicht objektiv quantifizierbar (abgesehen vom Ansprechen der „mittleren“ Studierenden, siehe dazu die unten folgenden Paragraphen). Zur Evaluation, inwieweit diese Punkte realisiert werden konnten, wurden deshalb die Nutzer per Umfrage nach ihrer Wahrnehmung befragt. Die Details bilden den Inhalt des Abschnitts 5.2.

Zweites Ziel ist eine **hohe Nutzungsquote der BSAs** unter den Studierenden. Verfolgt worden ist es durch die konsequente Einbringung der BSAs in den Übungsbetrieb der Veranstaltung Mathematik I/II, untersucht wird es schlicht anhand der BSA-Nutzungszahlen. Für die Wintersemester konnten außerdem anhand des ersten eTests bzw. der ersten Wissensstandkontrolle jeweils die „mittleren“ Studierenden eingruppiert und deren BSA-Nutzungsquote bestimmt werden. Die Details dazu stehen in den Abschnitten 5.1 und 5.4.

Das dritte Ziel besteht schließlich in einer erhofften **objektiv messbaren, positiven Wirkung der BSA-Bearbeitung** für die Studierenden. Für die Untersuchung dieses Ziels im Rahmen der Promotion ist hier etwas weiter auszuholen. In Idealvorstellung ist mit positiver Wirkung die Wirkung aufs Stoffverständnis der Studierenden gemeint. Das Merkmal Stoffverständnis muss jedoch irgendwie operationalisiert werden; dies führt zur Klausur als der im Wesentlichen einzigen, diesbzgl. umfassenden Messung, so dass letztlich hier unter positiver Wirkung die Wirkung auf die Klausurleistung zu verstehen ist. (Das Stellen eines eigenen separaten Tests wäre schon rein organisatorisch für die Studierenden nicht sinnvoll gewesen. Die über die Klausurleistung hinaus vermuteten „weichen“ positiven Wirkungen der BSA-Bearbeitung – etwa besserer Überblick bei komplexen Aufgabenstellungen, genauere Selbsteinschätzung, eigenständigeres Lernverhalten etc. – konnten nur mit der oben genannten „weichen“ Studierendenumfrage abgedeckt werden.) Es wird also die Klausur am Ende jedes Semesters als „harter Test“ dafür angenommen, in welchem Ausmaß der Stoff der Veranstaltung verstanden und im Umgang beherrscht wird. Als Zielgröße für die erhoffte positive Wirkung der Baumstrukturaufgaben ergibt sich deshalb schlicht die Klausurpunktzahl. (Die Klausur*note* wäre u. a. wegen der Abstufung ...; 3,7; 4,0; 5,0 ein unnötig grober Marker für statistische Untersuchungen.) Die Grundannahme, dass die Klausur ein valider Test für das Verständnis des Vorlesungsstoffs ist, wird in dieser Arbeit nicht in Frage gestellt und legitimiert sich u. a. durch das historische Zusammenwirken von Ingenieur- und Mathematik-Institutionen bei der Veranstaltungskonzeption und durch das fortwährende Einbringen langjähriger Erfahrungen durch die beteiligten Personen. Ein bloßer Vergleich der Klausur-Notenspiegel von Semestern vor bzw. seit Einführung der BSAs kommt für die Leistungsevaluation nicht in Frage, da fast zeitgleich mit der Einführung der BSAs auch andere Veränderungen vorgenommen wurden: Es werden seit WiSe 2012/2013 in der Tendenz weniger rechenknifflastige, große Terme in Klausur und Übungen eingebaut als vorher (vgl. auch Unterabschnitt 3.2.5), und seit dem SoSe 2013 besteht ein Teil der Klausur aus Ergebnisaufgaben (siehe 2.2.1). Zudem führen je nach Jahr u. a. unterschiedliche Numerus-Clausus-Grenzen ohnehin zu nicht miteinander vergleichbaren Studierenden-Kohorten. Zur Untersuchung wurden deshalb letztlich grob die folgenden Schritte gewählt (weitere Details und Ergebnisse dazu werden in den Abschnitten 5.3 und 5.4 beschrieben):

- Korrelation zwischen der Anzahl bearbeiteter BSAs und der erreichten Klausurpunktzahl
- Vergleich der Durchschnitts-Klausurpunktzahlen von BSA-Nutzern und BSA-Nichtnutzern nach Eingruppierung in verschiedene Leistungsgruppen anhand eines Vortests

Zusammengefasst ergibt sich damit folgende Übersicht der Ziele des BSA-Projekts mit zugehörigen Umsetzungs- bzw. Untersuchungsmitteln in Tabelle 3.2:

Ziel	**Umsetzungs- bzw. Untersuchungsmittel**
BSAs als E-Learning-Produkt	Zur Umsetzung: • Leitideen aus Unterabschn. 3.1.1 • Aufgreifen der Lernhürden aus Unterabschn. 3.1.2 • Baumstruktur-Prinzip aus Unterabschn. 3.1.3 Zur Untersuchung: • Wiederholte BSA-Nutzerumfrage
Hohe Nutzungsquote der BSAs	Zur Umsetzung: • Einbringung der BSAs in den Übungsbetrieb • Bewerbung des Instruments in den Veranstaltungen (mit semesterabhängig schwankender Intensität) Zur Untersuchung: • Erhebung der BSA-Nutzungsquoten unter der Gesamt-Hörerschaft pro Semester • Erhebung der BSA-Nutzungsquoten speziell unter den „mittleren“ Studierenden in den ausgewählten Wintersemestern
Positive Wirkung der BSA-Bearbeitung	Zur Untersuchung: • Korrelation zwischen der Anzahl bearbeiteter BSAs und der erreichten Klausurpunktzahl • Vergleich der Durchschnitts-Klausurpunktzahlen von BSA-Nutzern und -Nichtnutzern nach Eingruppierung in verschiedene Leistungsgruppen durch einen Vortest

Tabelle 3.2: Ziele der BSA-Entwicklung in tabellarischer Form, jeweils mit Umsetzungs- und/oder Untersuchungsmitteln auf der rechten Seite

Kapitel 4

Die realisierten Baumstrukturaufgaben

Nachdem zuvor die konzeptionellen Leitgedanken und angestrebten Ziele der BSA-Entwicklung beschrieben wurden, soll dieses Kapitel nun den Ist-Zustand der entwickelten und eingesetzten Baumstrukturaufgaben möglichst detailliert darlegen. Dabei sind auch die vielen didaktischen Überlegungen im Kleinen bzgl. der jeweiligen mathematischen Aufgabenstellung nachzuzeichnen, die bei jeder einzelnen BSA angefallen sind und die letztlich ein wesentliches Merkmal des Produkts sowie der Arbeit am Projekt überhaupt darstellen.

Nach der Auflistung der aktuell bestehenden und genutzten BSAs im ersten Abschnitt folgt der Hauptabschnitt dieses Kapitels, die Beschreibung dreier Baumstrukturaufgaben im vollen Detail. Für einen schnellen Einblick dürften bei jeder BSA das Ablaufdiagramm und die Tabelle mit den didaktischen Abhilfen die relevantesten Punkte sein. Da auch die anderen Aufgaben einige erwähnenswerte Charakteristika aufweisen, werden im letzten Abschnitt des Kapitels noch alle restlichen selbstentwickelten oder -modifizierten BSAs jeweils in Kurzform mit Aufgabenstellung, Ablaufdiagramm und Tabelle didaktischer Abhilfen beschrieben.

4.1 Auflistung aller entwickelten BSAs

Auf Grundlage der in Kapitel 3 beschriebenen Überlegungen und speziell anhand der in Abschnitt 3.4 genannten Schritte wurden ab Spätsommer 2012 die Baumstrukturaufgaben in Moodle entwickelt. Die Entwicklung der ersten BSAs wurde bis zum Frühjahr 2014 hauptsächlich von Dr. Andrea Offergeld unter Mithilfe des Autors getätigt, ab dem April 2014 schließlich allein vom Autor. Einige frühe fertigentwickelte BSAs sind im Verlauf der weiteren Semester aus dem Fundus entfernt worden, da sich zwischenzeitlich einige Vorlesungsthemen und die Aufgabenkultur geändert haben; andere BSAs wurden aus dem gleichen Grund zwar nicht entfernt, aber vom Autor modifiziert. Zum Stand April 2018 bestehen folgende Baumstrukturaufgaben, wobei die normalgedruckten Aufgaben die hauptsächlich von Dr. Andrea Offergeld entwickelten sind, die unterstrichenen Aufgaben ursprünglich hauptsächlich von Dr. Andrea Offergeld entwickelt und später vom Autor komplett umgeändert, sowie unterstrichen und fettgedruckt die allein vom Autor entwickelten Aufgaben:

Mathematik I:

- **Betragsungleichung 1**
- Betragsungleichung 2
- Menge komplexer Zahlen in der Ebene 1
- Menge komplexer Zahlen in der Ebene 2
- Folgengrenzwert
- **Rekursive Folgen**
- **Reihenkonvergenz**
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit 1
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit 2
- Kurvendiskussion
- Bestimmte Integration
- **Partialbruchzerlegung**

Mathematik II:

- Lineares Gleichungssystem
- **Analytische Geometrie**
- Hauptachsentransformation einer 3D-Quadrik
- **Separable Differentialgleichung 1**
- **Separable Differentialgleichung 2**
- **Lineare DGL höherer Ordnung**
- **2×2-System linearer DGLen**

4.2 Beschreibung ausgewählter selbstentwickelter BSAs

In den folgenden Unterabschnitten sind von den selbstentwickelten Baumstrukturaufgaben drei ausgewählte im Detail zu beschreiben. Ausgewählt wurden sie unter dem Gesichtspunkt, möglichst wesentliche didaktische Charakteristika der entwickelten BSAs beispielhaft aufzuzeigen: So zeigt die BSA zur Reihenkonvergenz, wie heuristische Trial-and-Error-Überlegungen bzw. Nebenrechnungen als wichtiger Teil des Lösungsprozesses ganz explizit behandelt werden; die BSA zur Partialbruchzerlegung ist ein Beispiel für eine BSA, in der abstrakte, aber rezeptartig lösbare Strukturen möglichst nachvollziehbar erklärt und durchgearbeitet werden, sowohl bzgl. der Gesamtschritte als auch innerhalb von Teilschritten; die BSA zur analytischen Geometrie steht exemplarisch für die Benutzung von Visualisierungen, die das rechnerisch-algebraische Vorgehen mit den jeweiligen Entsprechungen im Anschauungsraum zu verbinden suchen. Bei allen BSAs werden verschiedene denkbare Lösungswege und Gedankengänge der Nutzer miteinbezogen. Die Struktur der folgenden Detailbeschreibungen ist bei jeder der drei BSAs wie folgt:

Fachliche Aspekte und Einordnung in den Lernstoff Hier wird knapp der relevante fachliche Hintergrund zum Hineindenken ins Thema dargestellt, gefolgt von einer kurzen Beschreibung, in welcher Form das Thema im Vorlesungs-, Übungs- und Prüfungsbetrieb vorkommt.

Didaktische Herausforderungen des Themas Aus didaktischer Sicht werden Schwierigkeiten, Fehlvorstellungen, Herausforderungen etc. beschrieben, die Lerner im Lernprozess zu dem Thema haben können. Die meisten Beobachtungen entstammen eigenen mehrjährigen Erfahrungen im Begleitbetrieb zur Veranstaltung „Mathematik I/II“ sowie in anderen Fach- und Service-Mathematikveranstaltungen.

Die konzipierten Abhilfen in der BSA In Tabellenform wird aufgelistet, wie die jeweilige BSA die didaktischen Herausforderungen aus dem vorigen Punkt aufgreift. Dabei beschränkt sich die Tabelle auf aufgabenspezifische Punkte. Die in Kapitel 3 beschriebenen allgemeinen didaktischen Gestaltungselemente kommen prinzipiell in allen BSAs vor und werden deshalb in der Tabelle nicht mehr explizit aufgelistet.

Ablauf der zugehörigen BSA Hier wird der Ablauf der jeweils zum Thema gehörigen BSA beschrieben, chronologisch von der Aufgabenstellung auf der ersten Seite bis zur Ergebniszusammenfassung am Ende. Ein Ablaufdiagramm dient dabei zur besseren Übersicht. Da die Vorbemerkungs-Inhaltsseite bei jeder BSA identisch vorgeschaltet ist und nicht zur eigentlichen Aufgabe gehört, wird sie in den Diagrammen jeweils weggelassen. Inhaltsseiten sind in den Diagrammen weiß gehalten. Frageseiten sind farbig markiert: Blau für Multiple-Choice-Fragen, grün für Kurzantwort-Fragen, violett für Zuordnungs-Fragen.

Zusätzlich zur Beschreibung in den folgenden Abschnitten sind zu allen selbstentwickelten BSAs die vollständigen Seitensätze in Anhang D zu finden. Aus Lesersicht kann sich deren (ggfs. abschnittweises) Ansehen z. B. jeweils nach Durchlesen der Abhilfen-Tabellen lohnen; zum Verständnis der folgenden Abschnitte ist das aber nicht unbedingt notwendig.

4.2.1 BSA zur Reihenkonvergenz

Folgende Aufgabenstellung ist für die Reihenkonvergenz-BSA gewählt worden:

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}$$
konvergiert, absolut konvergiert, divergiert.

Fachliche Aspekte und Einordnung in den Lernstoff

Die Konzepte der Reihe sowie der Reihenkonvergenz bilden die formale Antwort auf die Frage, was beim Aufsummieren unendlich vieler Summanden passiert. Die Formalisierung besteht darin, eine Reihe als Folge zu definieren, deren n-tes Folgenglied jeweils die Summe der ersten n der unendlich vielen Summanden ist (vgl. z. B. [47], erster Teil, S. 145 ff.): Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine beliebige reelle oder komplexe Folge. Dann bezeichnet man

$$r_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

als n-te Partialsumme und die Folge

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

der n-ten Partialsummen als Reihe. Die a_i werden dabei auch als Reihenglieder bezeichnet. Ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, so sagt man, dass die Reihe konvergiert. Den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) =: \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

nennt man Wert der Reihe. Oft schreibt man von vornherein einfach „die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$“, selbst wenn Konvergenz bzw. Divergenz noch gar nicht geklärt ist, um die etwas umständliche Folgenschreibweise zu vermeiden. Es ist leicht einzusehen, dass auch beliebige andere ganze Zahlen als Start-Index anstelle von $i = 0$ genutzt werden können.

Reihen sind also letztlich spezielle Folgen. Allerdings ergeben sich durch die spezielle Gestalt als Folge von Partialsummen Besonderheiten beim Konvergenzverhalten, bei den Kriterien zur Untersuchung auf Konvergenz bzw. Divergenz und bei der Bestimmung des Reihenwertes:

Relevant ist etwa das Konzept der absoluten Konvergenz einer Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, welche dann gegeben ist, wenn sogar $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert. Aus der absoluten Konvergenz folgt immer die bedingte Konvergenz, die Umkehrrichtung gilt im Allgemeinen nicht. Bei absolut konvergenten Reihen bleibt der Reihenwert bei beliebiger Umordnung der Reihenfolge der a_i gleich; bei konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihen lässt sich dagegen zu jedem beliebigen $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ immer eine Umordnung der a_i finden, sodass die umgeordnete Reihe gegen a konvergiert bzw. bestimmt divergiert.

Zum Nachweis der Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen gibt es verschiedene Kriterien, von denen die gängigsten die folgenden sind (vgl. [47], erster Teil, S. 152-173):

Notwendiges Kriterium Grundsätzlich ist es zur Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ notwendig, dass die Glieder a_n eine Nullfolge bilden. Dies wird oft schlicht als notwendiges Kriterium, Trivialkriterium o. ä. bezeichnet. Die Bedingung ist nicht hinreichend; man kann mit diesem Kriterium nur Divergenz zeigen.
Bekanntestes Beispiel für eine Reihe, deren Glieder eine Nullfolge bilden und die trotzdem divergiert (mit bestimmter Divergenz gegen $+\infty$, sie wächst also über jede positive Grenze), ist die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

Majoranten/Minoranten-Kriterium Wenn es eine konvergente reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gibt mit $|a_n| \leq b_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$, dann konvergiert die (reelle oder komplexe) Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
Wenn es eine divergente reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gibt mit $a_n \geq b_n \geq 0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$, dann divergiert auch die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Quotientenkriterium Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ oder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} q < 1$ für ein festes reelles q, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ oder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} q > 1$ für ein festes reelles q, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
Für den Fall, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ oder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ gilt, aber der erste Punkt oben nicht erfüllt ist, lässt sich aus dem Quotientenkriterium keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz der Reihe ableiten.

Wurzelkriterium Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ oder $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} q < 1$ für ein festes reelles q, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ oder $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} q > 1$ für ein festes reelles q, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Für den Fall, dass $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ oder $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ gilt, aber der erste Punkt oben nicht erfüllt ist, lässt sich aus dem Wurzelkriterium keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz der Reihe ableiten.

Leibnizkriterium Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ab irgendeinem $n_0 \in \mathbb{N}$) monotone Nullfolge (entweder fallend oder steigend), so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Reihen bilden einen der Standard-Hauptthemenblöcke in Analysis I sowie in Höhere-Mathematik-Erstsemester-Vorlesungen – entsprechend auch hier in Mathematik I. Dort werden sie ungefähr in der „Mitte“ der Vorlesungszeit behandelt - nach den Grundlagen und Folgen, noch vor der Stetigkeit sowie Differential- und Integralrechnung. Das Thema wird recht extensiv und mit vielen Übungsaufgaben behandelt, zuerst ohne und später mit variablem x in den Reihengliedern a_n. Potenzreihen und Konvergenzradien (durch die das Reihenkonzept innerhalb der Analysis zu weiterer Bedeutung und Tragweite gelangt) kommen später nach dem Stetigkeits-Themenblock vor, wenn auch etwas weniger extensiv.

In Übungs- und Klausuraufgaben zum Thema ist meist eine Reihe auf Konvergenz bzw. Divergenz zu untersuchen – oft mit einer meist reellen Variable x, etwas weniger häufig auch ohne. Konkrete Grenzwerte von Reihen sind seltener zu bestimmen als etwa bei Folgen. Wenn es gefragt ist, muss man typischerweise die gegebene Reihe durch ein wenig Umformen auf eine Reihe mit schon bekanntem Grenzwert zurückführen, etwa die für reelles $-1 < q < 1$ konvergente *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ oder $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ für beliebiges reelles x.

In Reihenkonvergenz-Aufgaben kommen viele Schwierigkeiten des Erstsemester-Analysisstoffs zusammen, für deren Überwindung Studienanfänger typischerweise viel Gewöhnung benötigen – insbesondere die verschiedenen Arten von Abschätzungen mit ihren jeweils eigens zu beachtenden Besonderheiten bei den verschiedenen Konvergenzkriterien (mehr Details zu diesem und weiteren Punkten im nächsten Unterabschnitt). Bei den gängigen Klausuraufgaben zur Mathematik I gehören die Reihenkonvergenz-Aufgaben tendenziell zu den „technischsten“ und werden entsprechend merklich seltener und mit weniger Erfolg bearbeitet als andere.

Didaktische Herausforderungen des Themas

Ausprobier-Phasen sind ein wichtiger Bestandteil von Reihenkonvergenz-Untersuchungen, mehr als bei vielen anderen Aufgabentypen im ersten Semester (vgl. auch [11], S. 60 ff.). Das betrifft die Einschätzung des Verhaltens des Reihenglied-

Terms im Unendlichen – vor allem wenn der Term ein variables x enthält – sowie eng damit verbunden die Wahl eines passenden Konvergenz- bzw. Divergenz-Kriteriums. Es ist für Lerner im ersten Semester typisch, dass sie nicht auf Anhieb das Verhalten korrekt einschätzen und auch nicht sofort ein passendes Kriterium finden können, sodass Trial-and-Error-Phasen praktisch unvermeidlich sind. Beides wird in den folgenden Punkten näher beschrieben. Dieser Knobel-Notwendigkeit steht jedenfalls die in Unterabschnitt 2.2.2 beschriebene verbreitete Tendenz unter Lernern gegenüber, für jede Aufgabe ein passendes Schema erkennen und dann rigide danach die Aufgabe lösen zu wollen. Solche Studierenden können sich von Reihenkonvergenz-Aufgaben auf Klausurniveau leicht überfordert fühlen und schon aufgeben, wenn etwa das zuerst gewählte Kriterium nicht oder nicht direkt zum Ziel führt.

Das **Verhalten des Reihenglied-Terms im Unendlichen** einzuschätzen, ist in verschiedener Hinsicht komplexer als bei Folgen:

- Eine Reihe über einem Produkt zweier Terme lässt sich im Allgemeinen nicht einfach als Produkt zweier Reihen „auseinanderziehen". Stattdessen gilt das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j}$, sofern beide Reihen links vom Gleichheitszeichen konvergieren und wenigstens eine der beiden absolut konvergiert (vgl. [47], S. 182 ff.). Dadurch lässt sich das Verhalten einer Reihe nicht so direkt aus dem Verhalten der Einzelteile des Reihenglied-Terms herleiten, wie es bei bestimmten Folgen mithilfe der Grenzwertsätze möglich ist.

- Hinzu kommt noch – bei Reihen mit variablem x – dass man erkennen muss, welche unterschiedlichen Fälle für x sich sinnvoll unterscheiden lassen. Erfahrene Lerner können manchmal schon beim Anblick des Reihenglied-Terms sinnvolle Fallunterscheidungen für x vermuten. Ansonsten ergeben sich die Fälle für x typischerweise im Verlauf der Anwendung eines Konvergenz- bzw. Divergenz-Kriteriums, wenn man bestimmte Abschätzungen, Umformungen o. ä. vornehmen möchte und dazu spezielle Bedingungen an x stellen muss.

- Ohnehin reicht es bei Reihen nicht aus, nur das Verhalten des Reihenglied-Terms an sich einzuschätzen: Wegen des notwendigen Kriteriums bildet dieser in den gegebenen Aufgaben üblicherweise eine Nullfolge. Vielmehr muss zusätzlich eingeschätzt und untersucht werden, ob dieser Term auch schnell genug gegen 0 läuft, damit die Reihe konvergiert. Eben dazu dienen die verschiedenen Konvergenz- bzw. Divergenz-Kriterien, deren Auswahl beim nächsten Punkt zu erläutern ist.

Bei grundlegenden Fällen können einfache **Heuristiken zur Konvergenzkriterien-Wahl** direkt funktionieren:

- Mit dem Majoranten- bzw. Minoranten-Kriterium lässt sich die Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen zeigen, die sich nur durch unwesentliche Teilterme – beschränkte Faktoren, konstante Summanden etc., die sich „wegschätzen“ lassen – von bekanntermaßen konvergenten bzw. divergenten Reihen unterscheiden. So kann man etwa bei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ die Abschätzung $\left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2}$ vornehmen und erhält mit der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und dem Majorantenkriterium die (absolute) Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

- Das Quotientenkriterium funktioniert bei einigen Reihen mit Bruchterm, bei denen sich in $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ Teilterme „profitabel“ wegkürzen, z. B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ mit $\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n}\right| = \left|\frac{3}{n+1}\right| < 1$ für $n \geq 3$.

- Das Wurzelkriterium funktioniert bei einigen Reihen mit in n-ter Potenz stehendem Reihenterm, sodass die Potenz durch Bildung von $\sqrt[n]{|a_n|}$ wegfällt, etwa $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ mit $\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$.

- Mit dem Leibnizkriterium lässt sich bei alternierenden Reihen der Art $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ leicht die Konvergenz zeigen, wenn die a_n eine offensichtlich monotone Nullfolge bilden.

Bei weniger „trivialen“ Reihenkonvergenz-Aufgaben, wie sie in späteren Übungs- und Klausuraufgaben üblich sind – etwa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}$ in der hiesigen BSA – geht das nicht mehr so direkt. Will man gleich am Anfang einer solchen Aufgabe erkennen, ob und ggfs. für welche x die Reihenglieder schnell genug gegen Null konvergieren und mit welchem Kriterium man das zeigen könnte, benötigt man einen Erfahrungs- und Wissensschatz an Reihen, von denen man die Konvergenz bzw. Divergenz bereits kennt oder nachgewiesen hat. Mit solchen Erfahrungen ist es dann möglich, dem Reihenglied-Term seine „ausschlaggebenden“ Merkmale anzusehen. Oft gibt es etwa störende Summanden, Faktoren usw., bei denen man bereits sagen kann, dass sie für das Verhalten im Unendlichen z. B. wegen Beschränktheit oder zu langsamen Wachstums unwesentlich sind, oder die man im Zuge der Anwendung eines Kriteriums hilfreich abschätzen kann. Selbst mit einem solchen Erfahrungsschatz kommt man aber oft um ein Ausprobieren nicht herum, und umso mehr gilt dies, wenn man noch keinen großen Erfahrungsschatz hat.

Sobald es um nicht-triviale Reihen geht, ist bei Reihenkonvergenz-Untersuchungen oft eine recht hohe **Flexibilität im Aufstellen von Abschätzungen** nötig. Das ist kein Alleinstellungsmerkmal dieses Themas und gilt ebenso z. B. bei Epsilon-Delta-Stetigkeitsnachweisen. Dennoch ist es unbedingt erwähnenswert, da das Aufstellen von Abschätzungen für die Lerner oft völlig neu ist. Es ist aus dem Schulunterricht nicht bekannt – Ungleichungen über einfache Vergleiche wie $-19 < 5$ hinaus kommen im Schulfach Mathematik meist nicht mehr vor und werden z. B. in den Bildungsstandards gar nicht genannt (vgl. [84]; [86]; [87]). Viele Lerner können sich erst spät in den ersten ein bis zwei Semestern an das Vorgehen gewöhnen. Unterschiede zu bisher Bekanntem liegen etwa in folgenden Aspekten:

- Bei Abschätzungen benötigt man spezielle „Kalkül-Regeln". Bei den Termumformungen im Schulkontext waren solche Kalkül-Regeln etwa die Distributivgesetze, Rechenregeln für Brüche usw., welche alle einigermaßen ausgiebig im Verlauf der Schulzeit geübt worden sind. Bei Abschätzungen sind es dagegen hauptsächlich Regeln, die man erst im Studium kennenlernt und für die man entsprechend weniger Zeit zum Einüben erhält. Das reicht von grundlegenden Regeln wie „Wenn man im Nenner einen positiven Summanden wegfallen lässt, wird der Term als Ganzes größer" über bekannte Ungleichungen wie die Dreiecksungleichung bis hin zu speziellen Ungleichungen, etwa $|\sin(x)| \leq |x|$ oder die Bernoullische Ungleichung.

- Abschätzungen werden typischerweise als „offener" als Term- und Äquivalenzumformungen, Ableitungsbestimmung etc. wahrgenommen. Bei letzteren ist meist vergleichsweise klar, welche Operation bzw. Umformung man auf welche Teilterme anwenden möchte. Bei Abschätzungen gilt das weniger: Oft könnte man prinzipiell alle Teilterme als Ansatzpunkt für Abschätzungen nehmen. Auch, wie fein oder grob man abschätzt, welche bekannten Ungleichungen man ggfs. zum Abschätzen benutzt usw., ist prinzipiell völlig freigestellt.

- Abschätzungen sind im Gegensatz zu Gleichungen „asymmetrisch". Innerhalb einer Abschätzungskette darf man entweder nur aufsteigen oder nur absteigen; es ist ein durchaus anzutreffender Fehler bei Studierenden, dass erst nach oben und später nach unten abgeschätzt wird oder umgekehrt.

- Abschätzungen können in „Sackgassen" führen, wenn man etwa zu grob abschätzt oder einen wichtigen Teilterm „wegschätzt". Dann muss man ggfs. einen oder mehrere Schritte zurückgehen und von dort wieder alternativ weiterversuchen. Für Term- und Äquivalenzumformungen und viele andere typische Schul-(Kalkül-)Stoffe gilt das in dieser Strenge nicht (durchaus aber z. B. beim Integrieren von Funktionen, und dort besonders für die Substitution).

- Bei Abschätzungen ist es oft hilfreich, „von hinten her" bzw. „vom Ziel her" zu denken, etwa um zu grobes Abschätzen schnell zu erkennen und zu vermeiden, sowie um besser zwischen sinnvollen und nicht sinnvollen Abschätzungen abwägen zu können. Ein solches Denken vom Ziel her ist nicht nur bei Abschätzungen, sondern allgemein bei der Konstruktion von Beweisen bedeutsam (vgl. etwa [88], S. 199).

Bei Reihenkonvergenz-Untersuchungen kommen meistens mehrere **verschiedene Grenzwertprozesse** vor, die von Lernern durchaus „im Eifer des Gefechts" verwechselt werden können:

- der Prozess $\sum_{k=0}^{n} a_k$ mit $n \to \infty$: die eigentliche Reihe
- der Prozess a_k mit $k \to \infty$: die Folge der Reihenglieder
- die Prozesse $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ oder $\sqrt[k]{|a_k|}$ mit $k \to \infty$: Hilfsfolgen für die Anwendung von Quotienten- bzw. Wurzelkriterium

So kann es etwa passieren, dass ein Lerner beim Quotientenkriterium $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ldots = \frac{1}{k}$ bestimmt und dann falsch argumentiert, dass ja die Reihe $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$ als harmonische Reihe divergiert und deshalb auch $\sum_{k=0}^{n} a_k$ nicht konvergieren könne.

Ohnehin sind eine größere Zahl von **Einzelheiten bei den Konvergenzkriterien** zu beachten. Deren Wichtigkeit wird üblicherweise bereits in der Vorlesung, der Vortragsübung und/oder in Übungsgruppen erwähnt. Trotzdem werden diese Einzelheiten gelegentlich vergessen, weswegen sie auch in der BSA angesprochen werden. Zu diesen zählen etwa folgende Aspekte:

- Beim Majorantenkriterium wird $|a_n| \leq b_n$ gezeigt, wobei die a_n auch negativ sein können; beim Minorantenkriterium ist dagegen $a_n \geq b_n$ zu zeigen und die a_n müssen nicht-negativ sein.
- Für Konvergenz beim Quotienten- und Wurzelkriterium reicht es nicht aus, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ bzw. $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Vielmehr muss man für diese Hilfsfolgen zeigen, dass sie $\leq C$ sind für ein festes reelles $C < 1$ und fast alle $k \in \mathbb{N}$.
- Beim Leibnizkriterium für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ reicht es nicht aus, nur nachzuweisen, dass die a_n eine Nullfolge bilden – das sieht man leicht, indem man etwa $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ einsetzt, die $(-1)^n$ sich alle wegheben und die divergente harmonische Reihe übrigbleibt. Man braucht auch die fallende Monotonie der a_n (ohne Beschränkung der Allgemeinheit, da der Vorfaktor einer alternierenden Reihe auch als $(-1)^{n+1}$ und als Reihenglied $-a_n$ statt a_n gewählt werden kann). Dies wird durchaus gelegentlich von Studierenden vergessen.

Die konzipierten Abhilfen in der BSA

Herausforderung	**Abhilfe**
Wichtigkeit von Ausprobier-Phasen verdeutlichen	Die der BSA zugrundeliegende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ ist so gewählt, dass für einen Großteil der Lerner nicht sofort ein erfolgversprechendes Konvergenzkriterium ersichtlich ist; dadurch wird zielgerichtetes Ausprobieren nötig. Die Texte auf den anfänglichen Seiten der BSA nennen explizit, dass bei der vorliegenden Aufgabe (und überhaupt bei Aufgaben zur Reihenkonvergenz) typischerweise ausprobiert werden muss bzgl. passender x-Fallunterscheidung und Konvergenzkriterien. Die Ausprobier-Phase bildet den ersten großen Aufgabenteil und hat im linken Seitenmenü den eigenen Punkt „Anfängliches Ausprobieren“. (Sie könnte in Pólyaschem Sinne dem zweiten Problemlöse-Schritt des Ausdenkens eines Plans zugeordnet werden.) Davon abgegrenzt bildet andererseits das Verfassen der sauberen Lösung den zweiten großen Abschnitt der BSA, ebenfalls mit eigenem Seitenmenü-Punkt. (Dies könnte dem dritten Problemlöse-Schritt des Ausführens des Plans zugeordnet werden.) Auch wird der Lerner schlicht aufgefordert, zuerst selbst Kriterien auszuprobieren und einen möglichen Ansatz zu finden, bevor im weiteren Verlauf die Kriterien einzeln behandelt werden.
Verhalten des Reihenglied-Terms im Unendlichen einschätzen	Beim Ausprobieren der einzelnen Konvergenzkriterien in der BSA wird der Nutzer angehalten, den Reihenglied-Term direkt beim ersten Ansehen mental „in seine Einzelteile zu zerlegen“ und zu überlegen, wie sich diese für $k \to \infty$ verhalten, ob sie beschränkt sind, ob sie für verschiedene x ganz unterschiedliches Verhalten haben, ob sie im Vergleich zu anderen Teilen stärker oder schwächer wachsen usw.

	Auf den darauffolgenden Seiten werden dem Nutzer explizit und beispielhaft „sinnvolle“ Gedanken erklärt, die man sich direkt beim Ansehen des Reihenglied-Terms machen kann. So sollte man sich etwa daran erinnern, dass die Terme x^{2k} bzw. x^{6k} je nach $\lvert x\rvert < 1$, $x = 1$, $x = -1$, $\lvert x\rvert > 1$ unterschiedliches Verhalten haben und wie dieses Verhalten aussieht, dass $\lvert\sin(x)\rvert \leq 1\ \forall x$ und $\lvert\sin(x)\rvert \leq \lvert x\rvert$ möglicherweise nützlich für eine Abschätzung des Sinusterms im Nenner sind etc. Als kleine Unterstützung dieser Ausführungen werden an einigen Stellen die relevanten bzw. ausschlaggebenden Teilterme innerhalb des Gesamtterms rotgefärbt. Der Ausgangsterm der BSA ist zudem so gewählt, dass sowohl Abschätzungen gegen eine geometrische Reihe (beim Majorantenkriterium für $\lvert x\rvert > 1$ bzw. $\lvert x\rvert < 1$) als auch gegen eine harmonische Reihe (beim Minorantenkriterium für $\lvert x\rvert = 1$) vorkommen und der Nutzer so mit den zwei wichtigsten Vergleichs-Reihen (erneut) konfrontiert wird.
Heuristiken zur Konvergenz-kriterien-Wahl vermitteln	Nach der Aufforderung, selbst Kriterien auszuprobieren und im besten Fall schon eine erfolgversprechende Herangehensweise zu finden, kann der Nutzer zwischen den wichtigsten möglichen Ausprobierwegen auswählen. Dazu gehören sowohl Majoranten-, Minoranten-, Quotienten-, Wurzel- und Leibnizkriterium als auch die Fallunterscheidung für x. Bei jedem dieser Wege werden die zugehörigen Überlegungen explizit detailliert beschrieben: So wird etwa erklärt, dass das Quotientenkriterium meistens nur dann lohnend zum Ziel führen kann, wenn sich im Ausdruck $\left\lvert\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\rvert$ etwas wegkürzen lässt und der Ausdruck so auf ein handhabbares Maß vereinfacht werden kann. In der BSA ist das mit $\left\lvert\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)(k+x^{2k})}{\sin\left(x^{6k}\right)(k+1+x^{2k+2})}\right\rvert$ z. B. nicht der Fall, sodass zum Verwerfen des Quotientenkriteriums geraten wird.

Flexibilität im Aufstellen von Abschätzungen fördern	Zunächst werden im Ausprobier-Abschnitt der BSA die groben Vorschätzungen aufgestellt. So verhält sich etwa für $\lvert x\rvert > 1$ und $k \to \infty$ der Reihenglied-Term $\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ grob so wie $\frac{1}{x^{2k}}$, da der Betrag des Sinusterms durch 1 beschränkt ist und k ein gegenüber x^{2k} vernachlässigbares Wachstum aufweist; man kann deshalb in diesem Fall vermutlich eine konvergente Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}}$ (oder sehr ähnlich) finden. Durch diese groben Vorschätzungen werden jedenfalls die Abschätzungs-Ziele klargemacht, mit denen der Nutzer dann weiß, wohin abzuschätzen ist bzw. von welchem Vergleichswert aus man „von hinten“ denken muss. Bei einigen Abschätzungsketten werden mehrere denkbare Abschätzungsmöglichkeiten im Sinne von „was passiert, wenn...“ explizit „durchgespielt“. Dabei kommen insbesondere auch zu grobe Abschätzungen vor, mit denen man „über das Ziel hinausschießen“ würde, sodass sie verworfen werden müssen und andere Möglichkeiten zu wählen sind. Man denke bei diesem Punkt auch an den Aspekt der Beweglichkeit des Denkens, siehe Unterabschnitt 3.1.2. In der BSA werden alle Sachverhalte, die im Rahmen von Abschätzungen benutzt werden (Ungleichungen, Funktionseigenschaften, etc.), explizit genannt. Durch das Bleistift-Randsymbol wird außerdem implizit darauf hingewiesen, dass diese Sachverhalte – etwa als Kurzbemerkungen an Kleiner- bzw. Größer-Gleich-Zeichen – bei eigenen schriftlichen Lösungen immer dazugeschrieben werden sollten, wenn man sie benutzt. Auf einigen Frageseiten muss der Nutzer aus zwei möglichen Ungleichungen die für die jeweilige Abschätzungskette zielführendere auswählen. Speziell dazu, warum man auch Terme unter einer Wurzel abschätzen kann – wegen der (strengen) Monotonie der Wurzelfunktion – gibt es eine eigene Frageseite im letzten Drittel der BSA.

	Der Reihenterm der BSA ist so gewählt, dass man im Fall $\lvert x\rvert = 1$ den Reihenglied-Term $a_k = \frac{\sin(1)}{k+1}$ erhält und bei der Anwendung des Minorantenkriteriums die Abschätzung $a_k = \frac{\sin(1)}{k+1} \geq \frac{\sin(1)}{k+k} = \frac{\sin(1)}{2k} = \frac{\sin(1)}{2} \cdot \frac{1}{k}$ benutzen muss. Dieser Standard-„Trick" gehört zum Grundwerkzeug für Abschätzungen und sollte allen Lernern bekannt sein.
Die verschiedenen Grenzwertprozesse verdeutlichen	Der Term der BSA wurde so gewählt, dass verschiedene Konvergenzkriterien zum Erfolg führen – Majoranten- oder Wurzelkriterium für $\lvert x\rvert \neq 1$, Minorantenkriterium für $\lvert x\rvert = 1$. Diese bilden entsprechend eigene Verzweigungen im Aufgabenverlauf; auch die anderen, bei dieser Reihe ungeeigneten Kriterien werden in eigenen Zweigen detailliert behandelt. Dadurch spielen in dieser Aufgabe alle drei Arten von Grenzwert-Prozessen zu Reihen eine Rolle zum Erreichen der Lösung und werden in unterschiedlichen Kontexten besprochen: Bei Majoranten- und Minorantenkriterium die eigentliche Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Reihenglied-Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, bei Wurzel- und Quotientenkriterium wieder die eigentliche Reihe sowie die Hilfsfolge $\left(\sqrt[k]{\lvert a_k\rvert}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left(\left\lvert\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\rvert\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Bezüglich des Vorigen wird in Formulierungen in der BSA jeweils darauf geachtet, dass der Bezug zur Art des Grenzwert-Prozesses möglichst klar wird.
Einzelheiten bei den Konvergenzkriterien klarmachen	Auf die oben genannten Einzelheiten wird an entsprechenden Stellen in der BSA explizit hingewiesen – jeweils als Erinnerung, dass... ... es bei der Anwendung des Quotienten- oder Wurzelkriteriums nicht ausreicht, bloß $\left\lvert\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\rvert < 1$ bzw. $\sqrt[k]{\lvert a_k\rvert} < 1\ \forall k \in \mathbb{N}$ zu zeigen. ... man beim Majorantenkriterium $\lvert a_k\rvert$ mit Betragsstrichen nach oben abschätzen muss. ... man andererseits beim Minorantenkriterium keine Betragsstriche um $\lvert a_k\rvert$ setzen darf.

	Überhaupt ist der Reihenterm der Aufgabe so gewählt, dass im Rahmen der verschiedenen Fälle von x mehrere Kriterien-Aspekte vorkommen – sowohl der Fall $\left\lvert \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rvert \overset{k\to\infty}{\to} 1$ als auch $\sqrt[k]{\lvert a_k \rvert} \overset{k\to\infty}{\to} q < 1$, und sowohl das Majoranten- als auch das Minorantenkriterium.

Ablauf der BSA

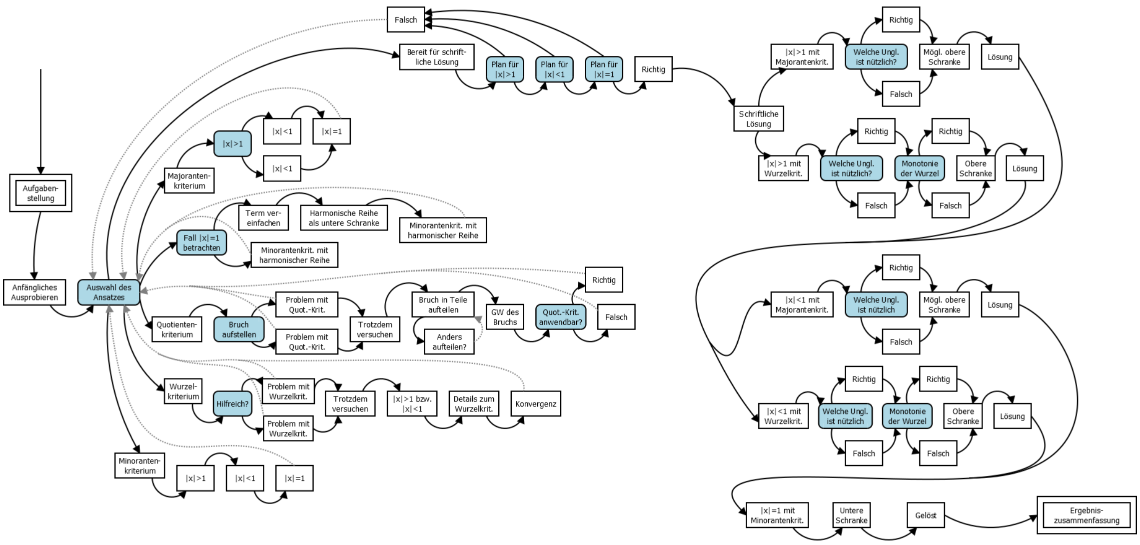
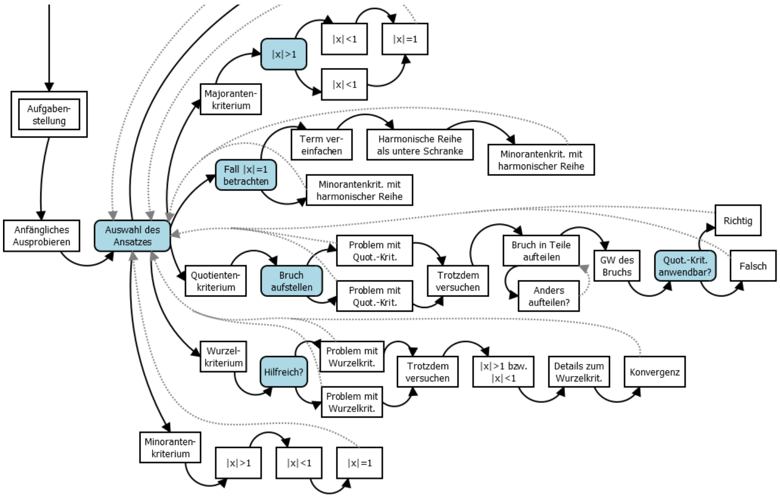


Abbildung 4.1: Ablaufdiagramm der BSA zur Reihenkonvergenz

Das Diagramm in Abbildung 4.1 veranschaulicht den Ablauf der BSA. Man erkennt grob drei Abschnitte: Links den ersten großen Aufgabenteil, in dem die verschiedenen Konvergenzkriterien ausprobiert werden; mittig oben einen kurzen Abschnitt, in dem mit einer kurzen Reihe von Frageseiten der durch Ausprobieren gewonnene, detailliert auszuführende Plan kurz zusammengefasst werden soll; und rechts den zweiten großen Aufgabenteil, in dem dieser gefasste Plan für die Lösung sauber im Detail ausformuliert und durchgerechnet wird. Dies sind auch (neben dem anfänglichen Punkt „Aufgabenstellung“) die drei eigentlichen Punkte im linken Seitenmenü.



Links oben liegt der Knoten zur ersten Seite der BSA mit der Aufgabenstellung. Auf der zweiten Seite darunter wird allgemein zu Reihenkonvergenz-Aufgaben beschrieben, dass man fast immer erst eine anfängliche Ausprobier-Phase zum Finden passender Fallunterscheidungen und Konvergenzkriterien benötigt, an die sich dann das saubere Aufschreiben der eigentlichen Lösung anschließt.

Darauf folgt die erste Frageseite der BSA, auf der der Nutzer aufgefordert wird, zunächst Ansätze selbst zu versuchen und ein paar Schritte weit zu rechnen, um dann einen Ansatz auszuwählen, der erfolgversprechend erscheint:

- Die im Diagramm am weitesten oben dargestellte Auswahlmöglichkeit ist das Majorantenkriterium. Auf der ersten Seite dazu wird der Nutzer aufgefordert, genau zu überlegen, warum er bei diesem Reihenterm auf die Idee kommt, das Majorantenkriterium zu benutzen. Auf der darauffolgenden Frageseite wird beschrieben, dass man bei $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}$ wegen des „prominenten" und für passendes x stärker als k wachsenden Teilterms x^{2k} im Nenner sowie wegen des durch 1 beschränkten Zählers vermuten kann, dass sich die Reihe für $|x| > 1$ ungefähr so verhält wie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}}$ und somit konvergiert. Auf derselben Seite wird der Nutzer zum Überlegen und Durchrechnen aufgefordert, wie es sich stattdessen im Fall $|x| < 1$ verhält, und er muss schließlich auswählen, ob er dafür Konvergenz oder Divergenz annimmt. Auf der Falsch- bzw- Richtig-Folgeseite wird dann erklärt: Wenn man wie zuvor den Zähler grob durch 1 abschätzt und daran denkt, dass x^{2k} für $|x| < 1$ gegen 0 geht, könnte man zwar auf den ersten Blick Divergenz wie bei der harmonischen Reihe vermuten – allerdings wäre diese Abschätzung des Zählers viel zu grob, vielmehr läuft für $|x| < 1$ der Zähler $\sin\left(x^{6k}\right)$ wegen $|\sin(y)| \leq |y|$ ausreichend schnell gegen Null, man kann deshalb vermutlich doch gegen eine geometrische Reihe als konvergente Majorante abschätzen. Auf der letzten Seite dieses Zweigs folgt dann der Hinweis, dass noch der Fall $|x| = 1$ übrigbleibt, und dazu wird der Nutzer zurück zur anfänglichen Auswahlseite geleitet.

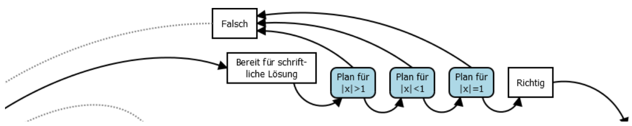
- Die im Diagramm direkt darunterliegende Auswahlmöglichkeit ist das Betrachten des Falls $|x| = 1$. Auf einer Frageseite wird der Nutzer zunächst aufgefordert, den Reihenglied-Term zu vereinfachen und sich dann zu überlegen, ob die Reihe in diesem Fall konvergiert oder divergiert. Wählt er richtigerweise aus, dass die Reihe divergiert, so gelangt er auf eine längere Inhaltsseite: Dort wird die Antwort als richtig bestätigt und genauer erklärt, dass man für $x = \pm 1$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1)}{k+1}$ erhält, welche bis auf den unerheblichen Summanden 1 im Nenner eine harmonische Reihe ist und somit divergieren dürfte. Wählt der Nutzer stattdessen fälschlicherweise aus, dass die Reihe konvergieren würde, so wird er in einen anderen Zweig geleitet – dort wird das gleiche erklärt, allerdings aufgeteilt auf mehrere Seiten, sodass der Nutzer nach jedem Teilergebnis zuerst zum eigenen Überlegen aufgefordert werden kann, was sich daraus folgern lässt.

- Der nächste Ausprobier-Zweig behandelt das Quotientenkriterium. Als erstes wird der Nutzer zum Ausrechnen von $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ aufgefordert. Auf der folgenden Frageseite soll er dann entscheiden, ob der entstandene Ausdruck $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)\left(k+x^{2k}\right)}{\sin\left(x^{6k}\right)\left(k+1+x^{2k+2}\right)}\right|$ für eine erfolgversprechende Anwendung des Quotientenkriteriums spricht. Auf der Falsch- bzw. Richtig-Folgeseite wird erklärt, dass dieser Bruchausdruck weder kürzbar ist noch dass sich anderweitig dafür leicht ein Grenzwert für $k \to \infty$ bestimmen ließe, sodass das Quotientenkriterium hier als nicht sinnvoll einzustufen ist. Der Nutzer kann dann entweder zurück zur Ansatz-Auswahlseite springen oder weiter versuchen, das Quotientenkriterium anzuwenden. Bei letzterem wird auf der Folgeseite der Ansatz durchgespielt, den Bruchausdruck in mehrere Einzelbrüche aufzuteilen, deren Grenzwertverhalten man hoffentlich besser einschätzen kann. In der BSA werden diesbzgl. die zwei denkbarsten Aufteilungen vorgerechnet und bei beiden erklärt, dass sich trotzdem kein Grenzwert aus den Aufteilungen bestimmen lässt – weder für $|x| > 1$ noch für $|x| < 1$. Schließlich soll der Nutzer noch für $|x| = 1$ den Ausdruck $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ bestimmen und per Frageseite angeben, ob man aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{k+2} \stackrel{k\to\infty}{\to} 1$ mit dem Quotientenkriterium Konvergenz oder Divergenz folgern kann (dies ist nicht der Fall). Da das Quotientenkriterium also in keinem Fall zu einem Ergebnis geführt hat, wird der Nutzer danach zurück zur Auswahl anderer Ansätze geleitet.

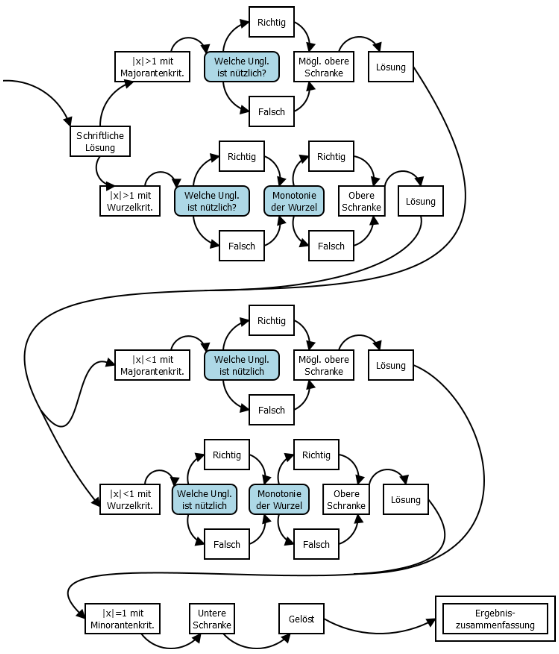
- Das Wurzelkriterium ist ein weiterer in der BSA bearbeitbarer Ansatz. Wie schon beim Quotientenkriterium soll der Nutzer auch hier zunächst selbst den Ausdruck $\sqrt[k]{|a_k|}$ bestimmen und auf der folgenden Frageseite entscheiden, ob der entstehende Ausdruck $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}\right|}$ für eine „reibungslose“ Anwendung des Wurzelkriteriums spricht. Auch hier wird dann eher von der Benutzung dieses Kriteriums abgeraten, da sich die äußere k-te Wurzel nicht ohne Weiteres mit einer k-ten Potenz unter der Wurzel „weghebt“ und man deshalb vor einer Anwendung des Wurzelkriteriums voraussichtlich einiges an (Abschätzungs- und/oder Umformungs-)Arbeit aufwenden muss. Der Nutzer kann sich dann entweder zum Zurückspringen zur Ansatz-Auswahl entscheiden oder es noch weiter mit dem Wurzelkriterium versuchen. In letzterem Fall wird der Nutzer aufgefordert, sich den Term unter der Wurzel nochmal genau anzusehen und zu überlegen: Gibt es Einzelteile im Term, die für das Wachstum bei $k \to \infty$ unerheblich sind und man sie deswegen „wegschätzen“ kann? Lässt sich dadurch eher ein Ausdruck erreichen, aus dem man leicht die k-te Wurzel ziehen kann? Auf der Folgeseite wird dies für die Fälle $|x| > 1$ und $|x| < 1$ im Detail ausgeführt, mit den groben Schätzungen $\sqrt[k]{|a_k|} \approx \frac{1}{x^2}$ in ersterem und $\sqrt[k]{|a_k|} \leq x^4$ in letzterem Fall. Der Nutzer soll zuerst wieder selbst überlegen, was sich mit dem Wurzelkriterium daraus folgern lässt, und auf der nächsten Seite wird dem Nutzer die Folgerung der Konvergenz detailliert begründet dargestellt. Schließlich wird zwecks Betrachtung des übriggebliebenen Falls $|x| = 1$ zurück zur Ansatz-Auswahlseite geleitet.

- Der letzte auswählbare Ansatz ist das Minorantenkriterium. Auf ein paar aufeinanderfolgenden Inhaltsseiten wird hier beschrieben, warum es in den meisten Fällen ($|x| > 1$ sowie $|x| < 1$) wohl nicht passend ist. Die Ausführungen orientieren sich direkt an denjenigen zum Majorantenkriterium (siehe oben). Schließlich wird der Nutzer zurück zur Ansatz-Auswahlseite geleitet.

- Sobald der Nutzer sich für das Aufschreiben der Lösung bereit sieht, kann er auswählen, dass er mit dem anfänglichen Ausprobieren fertig ist und eben mit der eigentlichen sauberen Lösung anfangen kann. Er wird dann zum nächsten Abschnitt der BSA geleitet, der im folgenden Paragraphen beschrieben wird.



Bevor es ans eigentliche Aufschreiben der Lösung geht, sollen zunächst die Ergebnisse der vorigen Ausprobierphase rekapituliert werden. Der Nutzer wird kurz daran erinnert, dass alles bisher Aufgeschriebene Nebenrechnungen waren und als solche markiert werden sollten. Dann soll er auf drei hintereinandergeschalteten Frageseiten für die Fälle $|x| > 1$, $|x| < 1$ sowie $|x| = 1$ auswählen, ob die Reihen konvergieren oder divergieren und mit welchem Kriterium man das jeweils zeigen kann. Bei einer falschen Antwort wird auf eine kurze Falsch-Rückmeldungs-Seite und von dort zurück zum vorigen Aufgabenteil geleitet; der Nutzer soll die betroffenen Fälle bzw. Konvergenzkriterien noch einmal genau ansehen.



Hat der Nutzer die drei Frageseiten des vorigen „Intermezzos" richtig beantwortet, so geht es endlich ans Aufschreiben der sauberen Lösung. Zum klareren Auseinanderhalten, was aufzuschreiben ist und was nur Anmerkungen der BSA sind, wird ersteres in normaler und letzteres in kursiver Schrift dargestellt.

Hier wird einfach Fall für Fall in der Reihenfolge $|x| > 1$, $|x| < 1$, $|x| = 1$ vorgegangen. Bei den ersten beiden dieser Fälle wählt der Nutzer jeweils zuerst aus, ob er dafür das Majoranten- oder das Wurzelkriterium benutzt, und wird entsprechend in einen eigenen Zweig dafür geleitet. Bei beiden Kriterien muss jeweils zum genauen Abschätzen eine Ungleichung auf den Sinusterm im Zähler angewendet werden, und zu diesem Zweck soll der Nutzer auf einer Frageseite jeweils aus zwei Ungleichungen die sinnvolle auswählen. Bei falsch gewählter Ungleichung wird explizit „durchgespielt", wie die Abschätzung mit dieser Ungleichung weitergehen würde und warum es damit nicht funktioniert. Speziell bei den Zweigen zum Wurzelkriterium wird der Nutzer als Erinnerung (es wurde schon zuvor auf einer Inhaltsseite im Rahmen des anfänglichen Ausprobierens kurz erwähnt) per Multiple-Choice gefragt, warum man überhaupt unter der Wurzel abschätzen darf, obwohl außen ja noch die Wurzel ist. Als letztes wird der Fall $|x| = 1$ mit seiner Abschätzung nach unten gegen die divergente Minorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ im Detail aufgeschrieben. Dabei gibt es keine Frageseiten; jedoch ist die Argumentation wieder auf mehrere Inhaltsseiten aufgeteilt, und vor einem Sprung zur nächsten Seite hat der Nutzer jeweils die Gelegenheit, den anstehenden Schritt zuerst eigenständig zu rechnen. Auf der letzten Seite der BSA werden schließlich noch einmal alle wesentlichen Schritte der BSA mit Teilergebnissen kurz zusammengefasst.

Insgesamt ist bei dieser BSA auffällig, dass der Nutzer meist trotz falscher Antwort weiterkommt – bis auf den kurzen Mittelteil, in dem zu zeigen ist, dass man die zuvor gelesenen bzw. erarbeiteten Gedanken mindestens korrekt einordnen und wiedergeben kann. Dies hat hauptsächlich den Grund, dass Reihenkonvergenz-Aufgaben zu den technischsten in Mathematik I gehören und entsprechend problematisch für einige Lerner sind, weshalb es hier möglichst wenig unüberwindbare und potentiell abschreckende Hürden geben sollte (siehe auch Unterabschnitt 3.1.1 zur Niedrigschwelligkeit).

4.2.2 BSA zur Partialbruchzerlegung

Folgende Aufgabenstellung ist für die Partialbruchzerlegungs-BSA gewählt worden:

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung der gebrochenrationalen Funktion R mit

$$R(x) = \frac{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Fachliche Aspekte und Einordnung in den Lernstoff

Als reelle Partialbruchzerlegung (PBZ) einer reellen gebrochenrationalen Funktion R bezeichnet man die Darstellung von $R(x)$ als Summe von einer Polynomfunktion $P(x)$ und von Brüchen der Form $\frac{A_i}{(x-u)^i}$ und $\frac{B_j x + C_j}{(x^2+vx+w)^j}$, wobei für den quadratischen Ausdruck im Nenner des letzteren Bruches $v^2 - 4w < 0$ gilt, dieser also im Reellen irreduzibel ist. Brüche dieser Form heißen Partialbrüche (vgl. zum Vorigen und Folgenden z. B. [47], zweiter Teil, S. 106 ff.). Genauer: Jede reelle gebrochenrationale Funktion R mit

$$R(x) = \frac{Q(x)}{(x-u_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-u_m)^{r_m} \ \cdot \ (x^2+v_1x+w_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+v_nx+w_n)^{s_n}}$$

mit vollständig faktorisiertem Nenner $N(x)$ hat eine Darstellung

$$R(x) = P(x) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{ij}}{(x-u_i)^j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+v_ix+w_i)^j}, \quad A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R},$$

genannt (reelle) Partialbruchzerlegung von R. Die reelle PBZ ist eindeutig (ebenso wie die komplexe PBZ, die hier jedoch nicht besprochen wird) und liefert somit eine Normalform für gebrochenrationale Funktionen.

Gebrochenrationale Funktionen lassen sich in der Darstellung als PBZ – also als Summe von einem Polynom und von Partialbrüchen – leicht integrieren. Wegen der Linearität des Integrierens erhält man das Gesamtintegral direkt als gewichtete Summe der einzelnen Polynom- und Partialbruch-Integrale, wobei letztere wie folgt bestimmbar sind:

- $\int \frac{A}{x-u} \, \mathrm{d}x = A \cdot \ln|x-u| + c, \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{A}{(x-u)^n} \, \mathrm{d}x = \frac{-A \cdot (x-u)^{-(n-1)}}{n-1} + c, \ c \in \mathbb{R}$, für $n \geq 2$
- $\int \frac{Bx + C}{x^2+vx+w} \, \mathrm{d}x = \frac{B}{2} \cdot \ln|x^2+vx+w| + \frac{2C - vB}{\sqrt{4w-v^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+v}{\sqrt{4w-v^2}}\right) + c, \ c \in \mathbb{R}$

- Für den letzten Fall lässt sich nur eine rekursive Formel angeben, wieder sei $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+vx+w)^n}\,\mathrm{d}x = \quad & -\frac{B}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+vx+w)^{n-1}} \\ & + \frac{C-\frac{vB}{2}}{(4w-v^2)(n-1)} \cdot \frac{2x+v}{(x^2+vx+w)^{n-1}} \\ & + \frac{2C-vB}{4w-v^2} \cdot \frac{2n-3}{n-1} \cdot \int \frac{Bx+C}{(x^2+vx+w)^{n-1}}\,\mathrm{d}x + c,\ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Meist wird die PBZ im Kontext der Integration in Mathematikvorlesungen der ersten Semester behandelt, etwa in Analysis I oder II, aber oft eben auch in Serviceveranstaltungen für Ingenieure oder Naturwissenschaftler. Beweise zu Existenz und Eindeutigkeit der PBZ benutzen jedoch keine Ideen der Analysis; u. a. gibt es Beweise mit vollständiger Induktion (vgl. [19]), mit Mitteln der linearen Algebra oder stärker verallgemeinerbar mit etwas Ringtheorie und dem Euklidischen Algorithmus (vgl. zu den letzten beiden Möglichkeiten [25]). Dieser nicht-analytische Hintergrund ist möglicherweise ein Grund dafür, dass in Analysis-Vorlesungen auch in der Fachmathematik manchmal auf einen Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der PBZ verzichtet wird (vgl. etwa das Vorlesungsskript [47]). Die PBZ bleibt hier vor allem ein Mittel zum Zweck des Integrierens.

In Mathematik I wird die PBZ erst gegen Ende der Vorlesungszeit behandelt, auch hier im Kontext der Integration. In diesem Kontext ist sie eines der illustrativen Elemente dazu, dass schon einfachste Funktionen oft nur schwierig und mit speziellen Methoden geschlossen zu integrieren sind – wenn sie es denn überhaupt sind.

Während in Übungsaufgaben meist schwierigere bzw. größere gebrochenrationale Funktionen mit vollem Rechenweg in PBZ überführt werden sollen, tritt die PBZ bei Klausuren meistens als Ergebniskästchen-Aufgabe auf. Typischerweise sehen Aufgaben dazu so aus, dass zu einer gegebenen gebrochenrationalen Funktion die Partialbruchzerlegung oder eine Stammfunktion ins Ergebniskästchen einzutragen ist – wobei in letzterem Fall die Partialbruchzerlegung „nur“ in der Nebenrechnung benötigt wird.

Didaktische Herausforderungen des Themas

Unter anderem wegen der späten Lage im Semester können Studierende dazu neigen, die PBZ als Randthema zu betrachten, welches für die Klausur eher als letztes oder gar nicht geübt wird. Auch mag gegen Ende der Vorlesungszeit – etwa wegen sich häufender Klausurvorbereitungen – einfach die Aufnahmefähigkeit einiger Studierender für letzte Vorlesungsinhalte abnehmen. Jedenfalls ist es ein Thema, welches auffällig viele Studierende in Klausuren nicht bearbeiten, obwohl es fast immer in diesen vorkommt. Erstes Ziel beim Thema PBZ ist es also, bei den Studierenden für die **Aufmerksamkeit für das Thema** zu sorgen. Das gilt umso mehr, da es im Vergleich zu vorigem Stoff (Reihen, Stetigkeit, Integration) ein relativ einfaches Thema ist. Entsprechend wird die PBZ in verhältnismäßig großem Ausmaß im Übungsbetrieb behandelt, obwohl sie nur eines der vielen Integrationsthemen ist. Sie kommt in allen freiwilligen Angeboten in oft mehreren Aufgaben sowie meist in der letzten Wissensstandkontrolle vor.

Als nächstes ist es nötig, die durchaus unübersichtliche allgemeine **PBZ-Formel in verständlichere Form** zu bringen. Schließlich bildet diese Formel den Einstiegspunkt, den viele Studierende mit dem Thema PBZ assoziieren. Es ist also das Schema klarzumachen, zu welchem Faktor welche Summanden mit welchen Exponenten aufgestellt werden müssen; bereits dies ist ein Punkt, der unter Umständen von Tutoren nicht ausreichend vorbereitet wird (wie in einer anderen Mathematik-Serviceveranstaltung erlebt). Man sollte auf folgende und ähnliche Fragen eine Antwort geben können: Wieso stellt man für $\frac{\dots}{\dots \cdot (x+1)^2 \cdot \dots}$ die beiden Partialbrüche $\frac{A}{x+1}$ und $\frac{B}{(x+1)^2}$ auf, aber für $\frac{\dots}{\dots \cdot (x^2+1) \cdot \dots}$ nur den einen Partialbruch $\frac{Cx+D}{x^2+1}$? Warum muss der Zähler in $\frac{B}{(x+1)^2}$ konstant sein, in $\frac{Cx+D}{x^2+1}$ jedoch ein linearer Term in x? Diese Fragen können nicht allein mit dem Grad des Nenners erklärt werden, wie es einige Studierende hier manchmal fälschlicherweise versuchen. Man muss stattdessen beachten, welchen Grad der gerade betrachtete irreduzible Faktor im Nenner hat. Das Prinzip ist letztlich simpel:

- Für jeden irreduziblen *linearen* Faktor im Nenner mit Vielfachheit r – man hat dann die Form $\frac{\dots}{\dots \cdot (x-u)^r \cdot \dots}$ – stellt man die Summanden $\frac{A_1}{(x-u)^1} + \dots + \frac{A_r}{(x-u)^r}$ auf, insgesamt r Stück. Der Exponent in den Summanden läuft von 1 bis r.
- Für jeden irreduziblen *quadratischen* Faktor im Nenner mit Vielfachheit s – man hat dann die Form $\frac{\dots}{\dots \cdot (x^2+vx+w)^s \cdot \dots}$ – stellt man die Partialbrüche $\frac{B_1x+C_1}{(x^2+vx+w)^1} + \dots + \frac{B_sx+C_s}{(x^2+vx+w)^s}$ auf, insgesamt s Stück. Der Exponent in den Summanden läuft von 1 bis s.

Die Passung dieses Schemas hängt damit zusammen, dass die Polynome $N(x)/(x-u)^i,\ N(x)/(x^2+vx+w)^j,\ x \cdot N(x)/(x^2+vx+w)^j \in \mathbb{R}[x]$ eine Basis des Vektorraums der reellen Polynome vom Grad kleiner als grad(N) bilden, wobei $N(x)$ das Nennerpolynom ist (vgl. [25]). In der BSA wird dieser Hintergrund nicht erläutert, da dies zu sehr von dem eigentlichen Auftrag ablenken würde und Inhalte der linearen Algebra erst in Mathematik II vorgesehen sind. Zur Verdeutlichung des Schemas bietet es sich jedenfalls an, in Übungsaufgaben nicht nur einfache Fälle zu behandeln (die Vielfachheiten der irreduziblen Faktoren im Nenner sind allesamt 1, oder es gibt keine irreduziblen quadratischen Faktoren im Nenner, etc.). Eine verständliche Erklärung der Formel hat jedenfalls auch den möglichen Nebeneffekt, die etwaige Hemmschwelle von Studierenden bzgl. der Beschäftigung mit dem Thema PBZ abzumildern.

Neben dem Verständnis der PBZ-Formel selbst ist ein **Überblick über die Schritte der PBZ** nötig. Dazu gehört auch die Einsicht, dass jeder Schritt auf dem vorigen aufbaut und somit keiner davon ausgelassen oder „auf später verschoben werden kann". Die Schritte einer PBZ sind im Allgemeinen:

1. Kleineren Grad im Zähler herstellen (durch Abspaltung des ganzrationalen Teils)
2. Nenner im verbliebenen Bruchausdruck vollständig faktorisieren
3. Passend zum Nenner die Partialbrüche aufstellen
4. Werte der Unbekannten in den Zählern herausfinden

Am Ende steht natürlich das Einsetzen der herausgefundenen Werte in die Partialbruch-Summe und somit das finale Angeben der PBZ, was aber in der BSA nicht zu den vier „großen" Schritten gezählt wird. Ist der Überblick über die Schritte nicht ausreichend vorhanden, kann dies bestimmte Fehler begünstigen: So wird durchaus manchmal der erste Schritt vergessen, und die Partialbrüche werden direkt für rationale Funktionen aufgestellt, bei denen der Zählergrad noch größer gleich dem Nennergrad ist. Das führt in einer Prüfungssituation mindestens zu Zeitverlust, bis man nach der Multiplikation mit dem Nenner auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens merkt, dass die Polynomausdrücke nicht auf beiden Seiten denselben Grad haben. Wird dies nicht bemerkt und trotzdem weitergerechnet, führt es zu falschen Ergebnissen. Ferner kann es passieren, dass unnötigerweise der Zähler der Ausgangsfunktion faktorisiert wird, was wieder Zeitverlust bedeutet. Selten wird schließlich der Nenner nicht vollständig faktorisiert, sodass etwa ein vermeintlich irreduzibler Faktor wie $\left(x^2 + 4x + 3\right)$ stehenbleibt. Dies führt zu einer falschen Partialbruch-Aufstellung und anschließend zu einer Sackgasse im Rechenweg oder zu einem falschen Endergebnis.

Das **Bestimmen der Werte der Unbekannten erfordert Erfahrung**; dieser letzte Schritt ist der arbeitsreichste Teil einer PBZ. Zudem gibt es hier recht unterschiedliche Herangehensweisen. Nach dem Multiplizieren der Gleichung mit $N(x)$, also

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{Q(x)}{N(x)} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{ij}}{(x-u_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+v_ix+w_i)^j} \\ \Leftrightarrow \qquad Q(x) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{ij}\cdot N(x)}{(x-u_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{(B_{ij}x + C_{ij})\cdot N(x)}{(x^2+v_ix+w_i)^j} \in \mathbb{R}[x], \end{aligned}$$

muss man sich entscheiden, ob man

- die rechte Seite komplett ausmultipliziert, nach den x^i-Potenzen zusammenfasst, schließlich die x^i-Koeffizienten der linken und rechten Seite gleichsetzt und das entstehende lineare Gleichungssystem in den Unbekannten löst (Koeffizientenvergleich),
- verschiedene, möglichst geschickt gewählte Werte für x in die Terme auf beiden Seiten einsetzt (oft u. a. die Nullstellen des Nenners $N(x)$), wodurch sich ebenfalls ein System linearer Gleichungen in den Unbekannten ergibt, mit dessen Lösung man die Werte der Unbekannten erhält (Einsetzen verschiedener x-Werte), oder
- ein Mischvorgehen aus den vorigen beiden wählt. (Es gibt außerdem auch noch andere Verfahren, die aber insbesondere in den ersten Semestern üblicherweise keine Rolle spielen.)

Welche Eigenarten die Verfahren haben und wann diese sich vor- bzw. nachteilig auswirken, kann man meist erst nach konzentriertem Durchrechnen mehrerer Aufgaben einschätzen. Bei sehr kleinen Ausgangstermen ist der Unterschied oft noch gering und die Wahl des Verfahrens bloß eine „Geschmacksfrage“. Je größer der Ausgangsterm ist, desto deutlicher werden die jeweiligen Schwierigkeiten:

- Beim Koeffizientenvergleich wird das anfängliche Umordnen der rechten Seite extrem aufwendig, allerdings ist das daraus resultierende LGS vergleichsweise dünn besetzt und damit einfacher zu lösen. Zudem verläuft hier alles rein schematisch, man muss „nur“ den Überblick über die teils sehr großen Terme behalten.
- Beim Einsetzen verschiedener Werte für x kommt es dagegen auf deren geschickte Wahl an, wofür ebenfalls Erfahrung nötig ist. Gibt es nur lineare irreduzible Faktoren, reichen meist deren Nullstellen aus, und es fällt recht viel weg; sobald quadratische irreduzible Faktoren vorkommen, fallen weniger Terme weg, und mit der x-Wert-Wahl kann man nur noch versuchen, große und „krumme“ Zahlen möglichst zu vermeiden. Zudem wird das resultierende LGS ebenfalls aufwendig zu lösen,

da es dann recht voll besetzt ist und potentiell eben große und „krumme“ Zahlen enthält.

Den Studierenden muss klar sein, dass **PBZ und Bestimmung einer zugehörigen Stammfunktion nicht untrennbar zusammengehören**. Dieser Punkt klingt selbstverständlich, aber es kommt etwa bei Ergebniskästchen-Aufgaben in Klausuren oder Wissensstandkontrollen durchaus vor, dass Studierende statt der gefragten PBZ gleich eine Stammfunktion ins Kästchen eintragen (womit man dann keine Punkte bekommt).

Zum Beherrschen von PBZ-Aufgaben gehören neben dem Vorangegangenen auch einige **Basisfertigkeiten**, die nicht immer als gegeben vorausgesetzt werden können:

- Für den ersten Schritt (kleineren Grad im Zähler herstellen) muss man im Allgemeinen eine **Polynomdivision** durchführen und deren Ergebnis interpretieren können. Das sind durchaus zwei unterschiedliche Dinge. Wird Polynomdivision in der Schule behandelt, bezeichnet man oft bei $q(x) = p(x) \cdot n(x) + r(x)$ den Summanden $r(x)$ als den Rest, im Einklang mit der Division mit Rest bei ganzen Zahlen. Der im Rahmen der PBZ relevante „Rest“ ist jedoch der Ausdruck $\frac{r(x)}{n(x)}$ in der für $n(x) \neq 0$ äquivalenten Gleichung $\frac{q(x)}{n(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{n(x)}$. Dies haben Lernende manchmal nicht „auf dem Schirm“, auch wenn die Verbindung durch Äquivalenzumformung natürlich schnell herzustellen ist; man muss es jedenfalls einmal gesehen haben. Zudem ist Polynomdivision an sich oft gar kein Schulstoff (mehr).

- Bei der Nennerfaktorisierung muss man **Polynome faktorisieren** können. Dass dies nicht als allgemeine Fertigkeit für beliebige Nennerpolynome erwartet werden kann, ist klar; ab Grad 5 gibt es dafür mit dem Satz von Abel-Ruffini keine allgemeine Formel. Aufgaben können aber sehr wohl einfache, seit der Schulzeit gängige Faktorisierungen fordern: Ausklammern, ganze Zahlen um 0 herum probeweise einsetzen, binomische Formeln anwenden (etwa bei $x^4 - 1$), $z = x^i$ substituieren (etwa bei $x^4 - 3x^2 + 2$), etc. Auch wenn dies mindestens teilweise zu den Schulkenntnissen gehört, kann man nicht davon ausgehen, dass es für alle Studierenden selbstverständlich ist.

- Beim Bestimmen der Werte der Unbekannten ist die rechte Seite der Gleichung oft lang und in viele Summen und Produkte verschachtelt; Terme der Schulzeit sind praktisch nie so lang. Vor allem, wenn man sich für das Koeffizientenvergleich-Verfahren entscheidet, muss man diesen Ausdruck noch mehrfach umformen. Dies erfordert eine **vielfache Anwendung des Distributivgesetzes sowie hohe Genauigkeit und Konzentration**, deutlich stärker als bei den schulischen Anforderungen.

- Egal ob man als Verfahren für die Werte der Unbekannten den Koeffizientenvergleich oder das x-Werte-Einsetzen wählt, man muss auf jeden Fall ein **lineares Gleichungssystem lösen**, in der BSA mit sechs Unbekannten. Ganz allgemein ergeben sich schon bei „kleinen“ gebrochenrationalen Funktionen schnell lineare Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten, vor allem, wenn es quadratische irreduzible Faktoren im Nenner gibt. Für den Schulstoff sind jedoch nur lineare Gleichungssysteme bis 3×3 gängig. Dies ist mindestens als potentielle Quelle für Überforderungen im Hinterkopf zu behalten.

Die konzipierten Abhilfen in der BSA

Herausforderung	**Abhilfe**
Aufmerksamkeit für das Thema PBZ schaffen	Hier soll zum einen schlicht die Existenz der BSA einen Beitrag leisten. Zum anderen wird am Anfang der BSA bei der Aufgabenstellung explizit erwähnt, dass die PBZ mit ihrer Formel kompliziert aussehen mag, sie in (Prüfungs-)Aufgaben jedoch zu den „dankbaren“ Themen zählt, da sie praktisch immer rein schematisch durchgeführt werden kann.
PBZ-Formel in verständlichere Form bringen	Die Formel wird dargestellt als $$\frac{A_{11}}{(x-u_1)^1} + \ldots + \frac{A_{1r_1}}{(x-u_1)^{r_1}} \quad + \quad \ldots$$ $$+\frac{A_{m1}}{(x-u_m)^1} + \ldots + \frac{A_{mr_m}}{(x-u_m)^{r_m}}$$ $$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+v_1x+w_1)^1} + \ldots + \frac{B_{1s_1}x+C_{1s_1}}{(x^2+v_1x+w_1)^{s_1}} \quad + \quad \ldots$$ $$+\frac{B_{n1}x+C_{n1}}{(x^2+v_nx+w_n)^1} + \ldots + \frac{B_{ns_n}x+C_{ns_n}}{(x^2+v_nx+w_n)^{s_n}} \quad ,$$

	was zwar immer noch mit vielen Indizes überfordern kann, aber zumindest das Schema etwas klarer macht bzgl. der Frage, zu welchem Faktor welche Summanden mit welchen Exponenten aufgestellt werden müssen. Zusätzlich wird das Schema in Worten beschrieben (so wie oben). Die in der BSA zu untersuchende Funktion R mit $$R(x) = \frac{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)^2} = \frac{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2}$$ ist außerdem so gewählt, dass es im Nenner sowohl einen linearen als auch einen quadratischen Faktor mit Vielfachheit größer als 1 gibt. Unter dieser Bedingung ist der Nenner wiederum „minimal“ gehalten; höhere Exponenten, ein x-Summand im irreduziblen quadratischen Faktor, größere Zahlen usw. würden allesamt zu einer noch deutlich komplizierteren Unbekannten-Bestimmung in Schritt 3 führen, als sie es in der BSA mit sechs Unbekannten ohnehin schon ist.
Überblick über die Schritte der PBZ schaffen	Kurz nach Beginn der BSA werden die vier Schritte (siehe oben) auf einer eigenen Inhaltsseite detailliert beschrieben. Zusätzlich sind die vier Schritte während der ganzen BSA im linken Seitenmenü als Navigationspunkte sichtbar. Die in der BSA zu untersuchende Funktion R mit $$R(x) = \frac{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)^2} = \ldots = 1 + \frac{2x + 3}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2}$$ ist zudem so gewählt, dass jeder Schritt tatsächlich eigene Arbeit erfordert. Es muss sowohl zunächst der Polynomanteil abgespalten als auch der Nenner noch weiter faktorisiert werden, bevor es ans eigentliche Aufstellen der Partialbrüche gehen kann.

Erfahrung beim Bestimmen der Unbekannten sammeln	Beim vierten und längsten PBZ-Schritt ermöglicht die BSA das Durchlaufen der beiden wichtigsten Möglichkeiten (Koeffizientenvergleich und x-Werte-Einsetzen). An mehreren Stellen, an denen Vor- oder Nachteile des gewählten Verfahrens explizit beschrieben sind, gibt es auch einen Link zum jeweils anderen Verfahren, sodass der Nutzer das andere ggfs. ausprobieren kann. Die in der BSA zu untersuchende Funktion hat den Nenner $(x^2+2x+1)(x^2+1)^2 = (x+1)^2(x^2+1)^2$, was zu sechs Unbekannten führt, deren Werte bestimmt werden müssen. Die daran anschließende Unbekanntenbestimmung ist langwierig genug, um bzgl. des Aufwands deutliche Unterschiede zwischen den beiden Verfahren zu erkennen. Als Grundlage für beide Verfahren erhält man nach den ersten Schritten die Gleichung $$\begin{aligned} 2x+3 = \; & A\cdot(x+1)\left(x^2+1\right)^2 \;+\; B\cdot\left(x^2+1\right)^2 \\ & +(Cx+D)\cdot(x+1)^2\left(x^2+1\right) \;+\; (Ex+F)\cdot(x+1)^2 . \end{aligned}$$ Für den Term der BSA stellt sich das Einsetzen von x-Werten als die aufwendigere Methode heraus: Es ergibt sich zwangsläufig ein fast vollbesetztes LGS mit teilweise großen Koeffizienten, welches deshalb und wegen der sechs Unbekannten von Hand sehr mühsam zu lösen ist. Beide Verfahren werden auf eigenen Seiten genau erläutert. Insbesondere wird beim Einsetzen von x-Werten beschrieben, welche x-Werte generell strategisch sinnvoll zum Einsetzen sind und warum.
PBZ- und Stammfunktions-Bestimmung voneinander trennen	Die Aufgabenstellung der BSA verlangt nur die Partialbruchzerlegung. Erst nachdem diese im weiteren Verlauf der BSA abgeschlossen ist, wird explizit darauf hingewiesen, dass die PBZ oft im Kontext der Integration von gebrochenrationalen Funktionen vorkommt. Daran schließt sich in der BSA ein Exkurs an, in dem man die in Partialbrüche zerlegte Funktion noch integrieren kann, sofern man dies denn üben möchte.

<table>
<tr><td>Basisfertigkeit Polynomdivision angemessen behandeln</td><td>Für den ersten Schritt – in dem der „ganzrationale“ Polynomanteil als Summand abgespalten werden soll, um eine echt-gebrochenrationale Funktion mit größerem Nennergrad als Zählergrad zu erhalten – lassen sich in der BSA sowohl Polynomdivision als auch „genaues Hinsehen“ als Ansatz auswählen. Bei letzterem nutzt man aus, dass der Zähler und der ausmultiplizierte Nenner ähnliche Gestalt haben und man direkt folgendes sehen kann:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1} \\ &= \frac{\left[x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1\right]+2x+3}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1} \\ &= 1+\frac{2x+3}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1} \end{aligned}$$

Bei der Polynomdivision werden auf einer eigenen Seite sowohl die Division selbst als auch der Umgang mit dem Rest kurz dargestellt.</td></tr>
<tr><td>Basisfertigkeit Polynomfaktorisierung angemessen behandeln</td><td>Der Nutzer muss selbst beantworten, ob der Nenner $(x^2+2x+1)(x^2+1)^2$ schon faktorisiert ist oder nicht. Abgefragt bzw. aufgefrischt wird in diesem Fall der Umgang mit den binomischen Formeln.</td></tr>
<tr><td>Basisfertigkeit Distributivgesetz & Genauigkeit angemessen behandeln</td><td>Beim Nenner-Ausmultiplizieren im ersten PBZ-Schritt (ganzrationalen Teil abspalten) wird mehrfach das Distributivgesetz angewendet. Per Frageseite wird der Nutzer dazu bewegt, den Nenner selbst auf Papier auszumultiplizieren. Gibt er dabei eine falsche Antwort an, wird auf der Folgeseite das Distributivgesetz explizit erwähnt und ein kleiner Teil vorgerechnet, worauf der Nutzer dann nochmal selbst weiterrechnen soll.</td></tr>
</table>

	Das Ausmultiplizieren und Umformen der rechten Seite von der mit dem Nenner multiplizierten PBZ-Gleichung wird auf mehreren Seiten kleinschrittig dargestellt. Dabei wird das Ergebnis der letzten Umformung (wo man die Vorfaktoren zu den x^i zusammenfasst) auf einer Frageseite vom Nutzer abgefragt.
Basisfertigkeit LGS-Lösen angemessen behandeln	Wählt man als Nutzer in der BSA bei der Unbekanntenbestimmung den Koeffizientenvergleich, kann man das resultierende LGS entweder mit dem Gauß-Algorithmus oder manuell lösen. Bei beiden Vorgehensweisen werden im Nachhinein alle Zwischenschritte noch einmal genau erläutert.

Ablauf der BSA

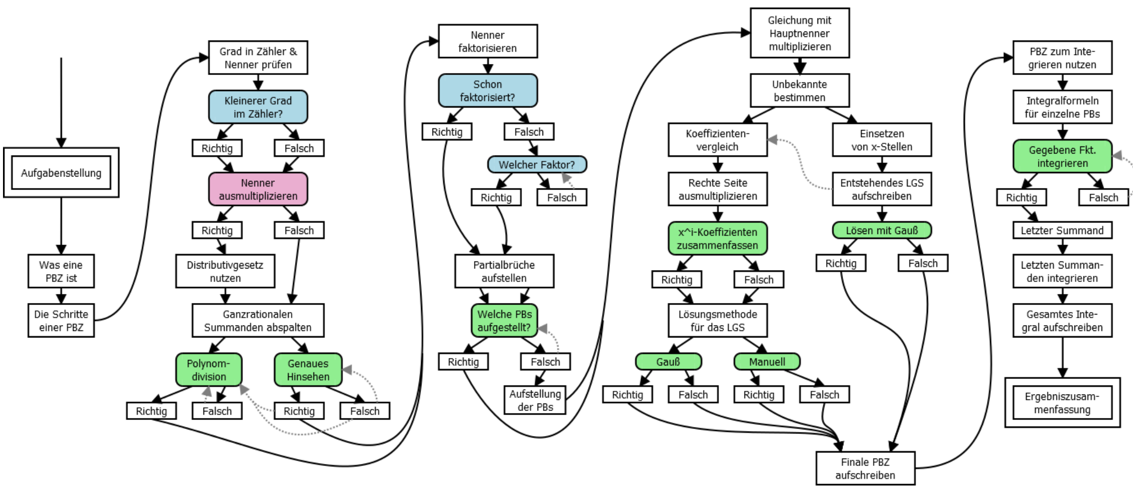
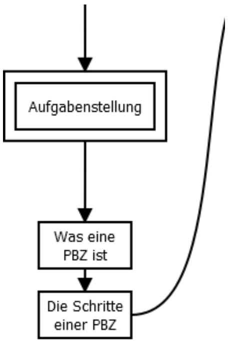
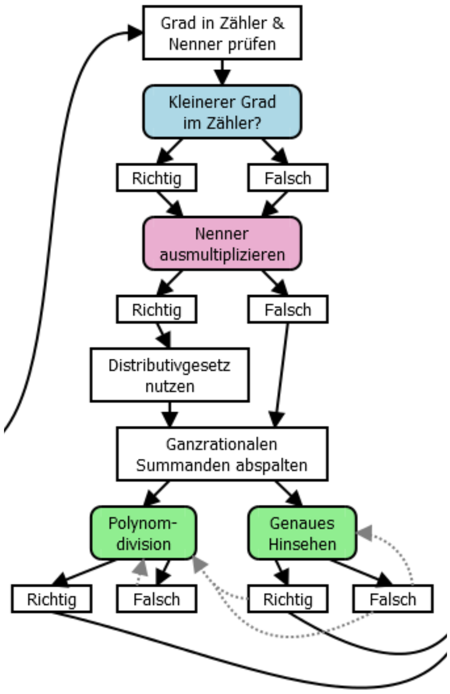


Abbildung 4.2: Ablaufdiagramm der BSA zur Partialbruchzerlegung

Das Diagramm in Abbildung 4.2 veranschaulicht den Ablauf der BSA. In den fünf „Säulen“ des Diagramms kann man grob die vier Schritte der PBZ sowie den Exkurs Integration am Ende wiedererkennen, auch wenn nicht jede Säule genau einem Schritt entspricht.



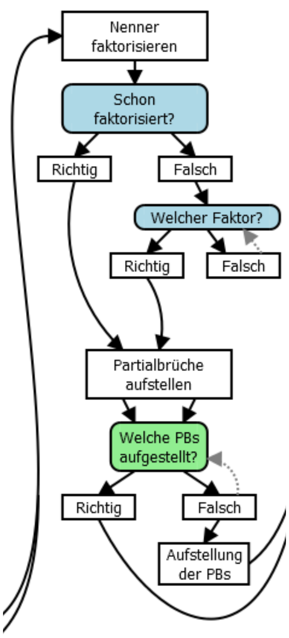
In der ersten Säule ganz links sind die drei einführenden Inhaltsseiten zu sehen. Die erste Seite davon nennt die Aufgabenstellung mit einigen mutmachenden Anmerkungen (siehe die obige Abhilfentabelle zu dieser BSA); auf der zweiten wird grob das Prinzip der PBZ mit schematischem Aufbau der Partialbrüche beschrieben und der Nutzen für die Integration gebrochenrationaler Funktionen genannt; die dritte Seite beschreibt detailliert die vier allgemeinen Schritte der PBZ.



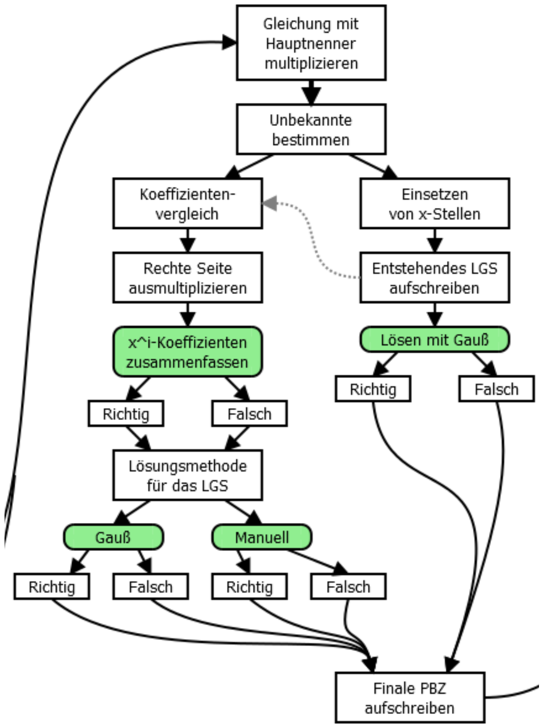
Danach beginnt der eigentliche Lösungsprozess. Da zu einer rezeptartigen PBZ-Bestimmung wie hier keine heuristische Anfangsphase nötig ist, kann man direkt mit dem schriftlichen Lösen beginnen. Die zweite Säule des Diagramms zeigt also die Seiten des ersten PBZ-Schritts: Zähler- und Nennergrad-Vergleich mit anschließendem Abspalten des ganzrationalen Anteils. Die Inhaltsseite ganz oben führt in diesen ersten Schritt ein; auf der folgenden Multiple-Choice-Frageseite wird der Nutzer gefragt, ob der Nennergrad echt kleiner, gleich oder echt größer als der Zählergrad ist. Bei falscher Antwort wird weitergeleitet zu einer Inhaltsseite, auf der explizit beschrieben wird, wie sich der Grad eines als Produkt gegebenen Polynom als Summe der beiden Polynomfaktor-Grade ergibt.

Man erhält jedenfalls, dass Zähler- und Nennergrad gleich sind und dass man deshalb noch den ganzrationalen Anteil abspalten muss. Dazu muss man zuerst den Nenner ausmultiplizieren (der Zähler ist von Anfang an ausmultipliziert gegeben); als Ergebnis davon soll der Nutzer auf einer Zuordnungs-Frageseite den x-Potenzen ihre reellen Koeffizienten zuordnen. Die Ausmultiplizier-Rechnung wird dann abhängig von richtig oder falsch gegebener Antwort entweder kurz oder ausführlicher mit Erläuterung und Zwischenschritt dargestellt.

Nachdem Zähler und Nenner ausmultipliziert sind, kann schließlich der ganzrationale Anteil abgespalten werden. Auf einer Inhaltsseite dazu wird zunächst darauf hingewiesen, dass Zähler und Nenner auffällig ähnliche Gestalt haben und deshalb die Polynomdivision eventuell nicht die einzige Möglichkeit darstellt (siehe die Abhilfentabelle); der Nutzer entscheidet sich an dieser Stelle, ob er als Vorgehen die Polynomdivision oder das „genaue Hinsehen" wählt. Abhängig von dieser Entscheidung wird er auf die zugehörige Kurzantwort-Frageseite geleitet, wo der Anfang der Rechnung knapp vorgegriffen wird und der Nutzer dann den ganzrationalen Anteil sowie den nach Abspaltung übrigbleibenden Zähler eingeben soll (siehe zu den gefragten Termen wieder die Abhilfentabelle). Antwortet man hier falsch, wird man je nach gewähltem Zweig vor der Rückführung zur Frage darauf hingewiesen, dass man die Polynomdivision nochmal genau nachschlagen muss bzw. dass sie im Zweifelsfall das sicherere Mittel ist, mit optionalem Link zurück zum Vorgehen mit Polynomdivision.



Die dritte Säule des Diagramms enthält den zweiten (oben, Nenner-Faktorisierung) und dritten PBZ-Schritt (unten, Partialbruch-Aufstellung). Wieder gibt es eine kurze Einführungs-Inhaltsseite, diesmal gefolgt von einer Multiple-Choice-Frageseite, auf der der Nutzer angeben soll, ob der Nenner $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)^2$ bereits fertig faktorisiert vorliegt oder nicht. Antwortet der Nutzer hier falsch, wird er darauf hingewiesen sowie auf die binomischen Formeln aufmerksam gemacht, und soll dann auf einer erneuten Frageseite angeben, welcher der Faktoren $(x^2 + 2x + 1)$ und $(x^2 + 1)^2$ noch weiter faktorisierbar ist. Ist der Nenner fertig faktorisiert, können schließlich die Partialbrüche aufgestellt werden. Auf einer Inhaltsseite wird erneut das Schema dafür gezeigt. Darauf folgt eine Kurzantwort-Frageseite, auf der der Nutzer einige Kenngrößen zu den aufgestellten Partialbrüchen abgefragt wird. Bei falscher Antwort wird der Nutzer darauf hingewiesen, dass dieser Schritt für die PBZ zentral ist und möglichst selbständig gelöst werden sollte. Der Nutzer geht danach entweder zurück zur Frage oder – wenn er selbst absolut nicht weiterkommen sollte – auf eine Folgeseite, auf der die Partialbruch-Aufstellung detailliert vorgerechnet wird.



In der vierten Säule ist schließlich der vierte und letzte PBZ-Schritt abgebildet, das Herausfinden der Werte der Unbekannten. Nach einer einleitenden Inhaltsseite und einer Darstellung der Verfahren (in der BSA nur Koeffizientenvergleich und Einsetzen von x-Werten) muss sich der Nutzer für eins dieser Verfahren entscheiden und wird in den entsprechenden Zweig geleitet.

Beim Koeffizientenvergleich muss man zuerst die rechte Seite der PBZ-Gleichung komplett ausmultiplizieren, was einfach auf einer Inhaltsseite vorgerechnet wird. Als nächstes fasst man diese nun sehr vielen Summanden zu vollständigen x^i-Koeffizienten zusammen; diese werden auf einer Kurzantwort-Frageseite abgefragt. Schließlich ergibt sich daraus ein lineares Gleichungssystem, für welches die BSA wiederum zwei mögliche Lösungsmethoden anbietet – Gauß-Algorithmus oder „manuelles“ Lösen mit Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren etc. Letzteres ist bei derart großen LGS wie hier zwar eher unangemessen, wird aber dennoch angeboten, da es zumindest bei kleineren PBZ-Aufgaben mit kleineren LGS durchaus gängig ist. Bei beiden Verfahren soll der Nutzer zunächst komplett selbst rechnen und auf einer Kurzantwort-Frageseite die herausgefundenen Werte eintragen. Bei korrekter Antwort wird dies kurz mit einer möglichen Muster-Rechnung rückgemeldet; bei falscher Antwort sieht der Nutzer zu dieser noch einige zusätzliche Erläuterungen.

Auf der einleitenden Inhaltsseite zum Einsetzen von x-Werten werden die typischen Überlegungen fürs Auswählen der x-Werte beschrieben: Nenner-Nullstellen zuerst nutzen und, falls diese nicht ausreichen, einfach einzusetzende x-Werte wählen, bei denen möglichst nur betragsmäßig kleine und/oder ganze Koeffizienten resultieren. Die BSA gibt hier die Nenner-Nullstelle -1 und als weitere Stellen $0, 1, -2, 2, -3$ vor, also einfach ganze Zahlen um 0 herum (freiere Auswahl der Stellen wäre nicht realisierbar). Das entstehende LGS ist notgedrungen dichtbesetzt und damit auf dem Papier schwer zu lösen, was dem Nutzer auf einer eigenen Inhaltsseite erklärt wird, zusammen mit dem Rat, deshalb eher doch zum Koeffizientenvergleich als Verfahren zu springen (siehe Abbildung 4.3). Wird der jetzige Weg dennoch weiter verfolgt, soll der Nutzer das LGS per Gauß-Algorithmus lösen („manuelles“ Lösen wie oben wäre hier wegen der dichten

Besetzung viel zu kompliziert) und die so bestimmten Werte für die Unbekannten auf einer Kurzantwort-Frageseite eintragen. Wie oben folgt auch hier auf die Frageseite eine Muster-Rechnung für den Gauß-Algorithmus, welche im Fall der falschen Antwort noch mit detaillierteren Erklärungen zu jedem Schritt versehen ist.

Schließlich bleibt am Ende nur noch das Einsetzen der Werte in die Partialbruch-Summe. Der Nutzer wird zuerst aufgefordert, dies auf dem Papier zu tun, auf der letzten Inhaltsseite dieses Schritts wird dann das Ergebnis dessen – die fertige PBZ – angegeben. Dabei wird explizit auch darauf hingewiesen, dass man nicht vergessen sollte, den anfangs abgespaltenen ganzrationalen Summanden dazuzuschreiben.

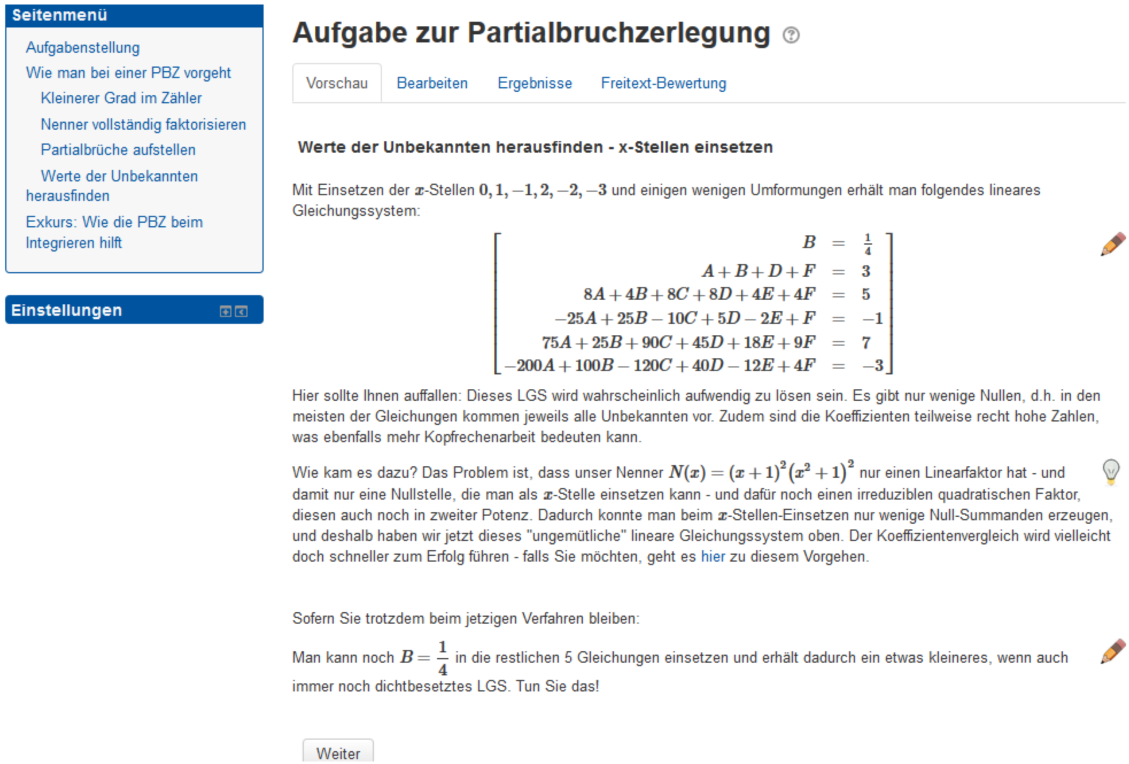
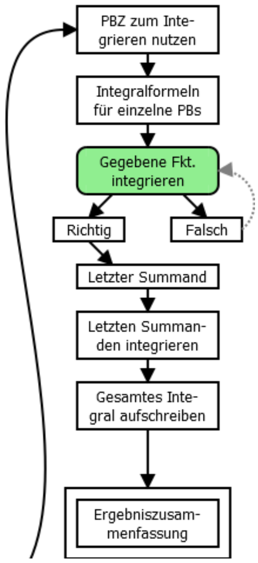


Abbildung 4.3: Inhaltsseite zu einem dichtbesetzten LGS in der BSA zur PBZ, Screenshot aus dem L²P



Visualisiert in der fünften und letzten Säule des Diagramms folgt als Exkurs ein letzter BSA-Teil, in dem man noch schaut, wie man mithilfe der PBZ die Ausgangsfunktion R integrieren kann. Auf der einleitenden Inhaltsseite dazu wird expliziert, dass PBZ und Stammfunktions-Bestimmung nicht untrennbar zusammengehören (siehe die obige Abhilfentabelle). Es folgt eine Beschreibung der Integralformeln für Partialbrüche, wobei hier die rekursiven Formeln weggelassen werden, da die Partialbrüche in der BSA ohne diese integriert werden können. Auf einer Kurzantwort-Frageseite soll der Nutzer dann mithilfe der genannten Formeln alle bis auf einen Summanden auf dem Papier integrieren und als Ergebnis einige Kenngrößen dazu eingeben. Der letzte Summand $\dfrac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2}$ wird anschließend auf einigen Inhaltsseiten per Zähler-Summe-Auseinanderziehen, Substitution und Formelsammlungs-Standardintegral integriert, wobei dem Nutzer immer erst auf einer nächsten Seite Hinweise bzw. die Lösung gezeigt werden, sodass dieser die Gelegenheit zum eigenen Rechnen hat. Auf der letzten Seite der BSA werden schließlich alle Ergebnisse der gelösten Aufgabe stichpunkthaft rekapituliert.

4.2.3 BSA zur analytischen Geometrie

Folgende Aufgabenstellung ist für die BSA zur analytischen Geometrie gewählt worden:

Gegeben sei die Ebene $E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4\right\}$ und die Gerade $G = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \vec{x} = (1,0,1)^T + t\,(-1,2,1)^T \, , \, t \in \mathbb{R}\right\}$. Bestimmen Sie die Projektionsgerade G_P, die durch die orthogonale Projektion von G auf E entsteht. Geben Sie außerdem den Bogenmaß-Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden G und G_P an, und zwar den kleineren der beiden möglichen Winkel.

Fachliche Aspekte und Einordnung in den Lernstoff

Das Teilgebiet der analytischen Geometrie ist dadurch gekennzeichnet, dass geometrische Fragestellungen mithilfe von rechnerisch-algebraischen Methoden gelöst werden, typischerweise unter Nutzung eines Koordinatensystems. Die in der Veranstaltung behandelte analytische Geometrie stimmt im Wesentlichen mit denjenigen Inhalten überein, die auch schon unter demselben Namen einen Teil des Oberstufen-Schulstoffs im Fach Mathematik ausmachen. Stoffliche Voraussetzungen dafür bilden die Grundlagen der Vektorrechnung, lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit, Norm eines Vektors, Abstand zwischen zwei Vektoren, Standardskalarprodukt (welches als $\vec{x} \cdot \vec{y}$ oder als $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ geschrieben wird) und Orthogonalität von Vektoren zueinander, sowie das Lösen linearer Gleichungssysteme (LGS), was im Veranstaltungsskript größtenteils in vorherigen Kapiteln behandelt wird (vgl. [36]). Die analytische Geometrie umfasst im Veranstaltungsskript im Wesentlichen folgende Inhalte:

Geraden: Eine Menge $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ mit festen $\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^n$. Die hier genutzte Darstellung wird auch als Parameterform oder Parameterdarstellung bezeichnet; $\vec{a}$ heißt auch Stützvektor, $\vec{v}$ Richtungsvektor. Die Parameterform ist nicht eindeutig.

Winkel zwischen Vektoren: Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos\left(\dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}\right)$. Es gilt $0 \leq \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) \leq \pi$, d. h. von den beiden möglichen Winkeln zwischen zwei Vektoren wird hiermit immer der kleinere berechnet.

Schnittmengen und Abstände von Geraden: Die Schnittmenge zweier Geraden $G_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{v}, \quad s \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{y} = \vec{b} + t \cdot \vec{w}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ wird über Gleichsetzen von $\vec{a} + s \cdot \vec{v} = \vec{b} + t \cdot \vec{w} \;\Leftrightarrow\; s \cdot \vec{v} - t \cdot \vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$, Auflösen des entstehenden LGS nach s, t und anschließendes Einsetzen von s in G_1 bzw. t in G_2 bestimmt. Abhängig von der Lösungsmenge des LGS kann man drei Fälle unterscheiden: Leerer Schnitt bei echt parallel oder windschief liegenden Geraden; Schnitt in genau einem Punkt; oder unendlich viele Schnittpunkte bei übereinstimmenden, „aufeinanderliegenden“ Geraden.

Zum Bestimmen des Abstands zwischen einem Punkt $\vec{p}$ und einer Geraden $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v},\ \ t \in \mathbb{R}\}$ hilft es, zuerst die zugehörige orthogonale Projektion von $\vec{p}$ auf G zu bestimmen, den sogenannten Lotfußpunkt von $\vec{p}$ auf G. Dieser ist gegeben durch $\vec{l} = \vec{a} + \frac{(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$, was man auf unterschiedlichen Wegen herleiten kann. Den Abstand von $\vec{p}$ zu G erhält man jedenfalls z. B. mit Ausrechnen von $|\vec{l} - \vec{p}|$; man kann zeigen, dass im $\mathbb{R}^3$ der Abstand bei Kreuzprodukt-Verwendung direkt bestimmbar ist mittels $\frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ (wodurch man dann keine Information zum Lotfußpunkt erhält).

Bei der Frage nach dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden $G_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{v},\ \ s \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{y} = \vec{b} + t \cdot \vec{w},\ \ t \in \mathbb{R}\right\}$ ist es wieder sinnvoll, zuerst die beiden Punkte $\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{v}, \vec{y} = \vec{b} + t \cdot \vec{w}$ auf G_1 bzw. G_2 zu bestimmen, die den kürzesten Abstand voneinander haben. Deren Verbindungsvektor muss orthogonal zu beiden Richtungsvektoren sein, also $(\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{v} = 0$ und $(\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{w} = 0$. Das führt zu einem LGS, welches man wieder nach s, t auflösen kann. $|\vec{x} - \vec{y}|$ liefert schließlich den Abstand zwischen beiden Geraden.

Kreuzprodukt: Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

und hat u. a. folgende Eigenschaften: Es ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$; das Kreuzprodukt ist alternierend, also $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$; und es ist bilinear, also $(s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}) \times \vec{c} = s \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + t \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ und $\vec{c} \times (s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}) = s \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig, erhält man mit der erstgenannten Eigenschaft, dass das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zu beiden Ausgangsvektoren orthogonal ist; sind andererseits $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig, folgt mit der zweiten und dritten Eigenschaft $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Ebenen: Für feste, linear unabhängige $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ungleich 0 (Richtungsvektoren) sowie ein beliebiges festes $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ (Stützvektor) bezeichnet man $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w},\ \ s, t \in \mathbb{R}\}$ als eine Ebene im $\mathbb{R}^n$ in Parameterform oder Parameterdarstellung. Auch hier ist die Parameterform nicht eindeutig. Speziell im $\mathbb{R}^3$ kann man zweidimensionale Ebenen auch in der sogenannten (ebenfalls nicht eindeutigen) Koordinatenform oder Koordinatendarstellung $E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d\right\}$ für feste $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ darstellen. Dabei bildet der Koeffizienten-Vektor $(a, b, c)^T$ immer einen Normalenvektor zur Ebene.

Hat man eine Ebene $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}, \quad s,t \in \mathbb{R}\}$ in Parameterform gegeben und möchte diese in eine Koordinatenform überführen, kann man einen beliebigen zu E senkrechten Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmen – etwa $n := \vec{v} \times \vec{w}$ – und erhält die Darstellung $E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}\right\}$, die auch als Normalenform oder Normalendarstellung bezeichnet wird. (Der Unterschied zur Koordinatenform liegt letztlich nur in der Schreibweise.) Wählt man überdies $\vec{n}$ so, dass $|\vec{n}| = 1$ und $\vec{a} \cdot \vec{n} \geq 0$ gilt, erhält man die eindeutige sogenannte Hessesche Normalform der Ebene, bei der $\vec{a} \cdot \vec{n}$ genau der Abstand der Ebene vom Ursprung ist.

Hat man andererseits eine Ebene in Koordinatenform gegeben und möchte diese in Parameterform überführen, gibt es verschiedene Möglichkeiten, die hier nicht im Detail dargestellt werden sollen; ein einfacher Weg ist es, irgendeinen in der Ebene liegenden Punkt z. B. durch Probieren oder durch Setzen zweier Koordinaten auf 0 zu finden, und anschließend zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene zu bestimmen, indem man mit zwei beliebigen unterschiedlichen Vektoren jeweils das Kreuzprodukt mit dem durch die Koeffizienten gegebenen Normalenvektor bildet (und die beiden entstehenden Vektoren noch auf lineare Unabhängigkeit überprüft).

Bzgl. der Schnittmengen zweier Ebenen im $\mathbb{R}^3$ gibt es drei Fälle: Die Ebenen liegen echt parallel mit leerer Schnittmenge; die Ebenen schneiden sich in einer Geraden; oder die Ebenen stimmen überein, liegen also „aufeinander“. Hat man beide Ebenen in Parameterform und will deren Schnittmenge bestimmen, kann man ganz analog wie beim obigen Schnittverfahren zweier Geraden auch hier die beiden rechten Seiten gleichsetzen und das entstehende LGS lösen. Hat man beide Ebenen in Koordinatenform, kann man einfach das aus beiden Koordinatengleichungen bestehende LGS lösen. Ist dagegen die eine Ebene in Parameterform, die andere in Koordinatenform, ist das wohl einfachste Vorgehen, die Komponenten der Form $x_i = a_i + s \cdot v_i + t \cdot w_i$ aus der Parameterform für x_i in der Koordinatenform einzusetzen und die entstehende Gleichung nach einer der beiden Unbekannten aufzulösen (wenn allerdings die Ebenen parallel liegen, verschwinden beide Unbekannten, und die Gleichung ist unlösbar oder tautologisch).

Schnitte von Geraden und Ebenen: Auch hier können im $\mathbb{R}^3$ wieder drei Fälle eintreten: Die Gerade liegt echt parallel zu Ebene, mit leerer Schnittmenge; die Gerade schneidet die Ebene in genau einem Punkt; oder die Gerade liegt ganz in der Ebene, mit unendlich vielen Schnittpunkten. Lösungsverfahren sind ganz analog wie beim vorigen Punkt möglich – mit Gleichsetzen, wenn neben der Gerade auch die Ebene in Parameterform ist, oder mit Einsetzen der Vektorkomponenten der Geraden in die x_i der Ebenen-Koordinatenform.

Die beschriebenen Themen der analytische Geometrie sind für $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ zu großen Teilen bereits Oberstufen-Schulstoff, auch wenn einzelne Aspekte nicht verpflichtend dazugehören – im aktuellen NRW-Oberstufen-Kernlehrplan ist etwa die Koordinatenform von Ebenen nur im Leistungskurs und das Schneiden zweier Ebenen gar nicht vorgeschrieben (vgl. [67]). Jedenfalls wird dann zur Auffrischung bzw. zum Ausbau der oben beschriebenen Kenntnisse die analytische Geometrie in Mathematik II in der ersten Veranstaltungshälfte neben den Grundlagen von Vektor- und Matrixrechnung behandelt, noch vor den Themen Eigenwerte, Diagonalisierung und Hauptachsentransformation, welche die erste Veranstaltungshälfte abschließen.

Auch wenn geometrische Aufgaben in dieser Art und Einfachheit nur selten in tatsächlicher bautechnischer Tätigkeit auftauchen mögen, bildet die (analytische) Geometrie doch eine wichtige Begriffs- und Anschauungsbasis u. a. für die vielen bautechnischen Problemstellungen, bei denen gerichtete Kräfte in die Modellierung eingehen (vgl. dazu etwa [78]).

Angesichts dessen, dass das Thema teils schon in der Schule behandelt worden ist und dass man die Aufgabenlöseprozesse hier als intuitiv anschaulicher und weniger abstrakt vermuten kann (im Gegensatz etwa zu einer Hauptachsentransformation), ist es überraschend, dass die Klausuraufgabe zu Vektorrechnung und analytischer Geometrie in drei von vier untersuchten Sommersemestern die punktemäßig am schwächsten gelöste der ersten drei Klausuraufgaben gewesen ist. (Die letzten drei Klausuraufgaben behandeln dagegen den Themenkomplex Differentialgleichungen.) Die diesbezüglichen didaktischen Überlegungen sind Thema des nächsten Unterabschnitts.

Didaktische Herausforderungen des Themas

Eine erste Hürde bei Aufgabenstellungen der analytischen Geometrie – erkennbar gewesen bei einem Teil der Studierenden vor allem in Beratungsstunden, aber auch in Klausurkorrekturen – ist die Fähigkeit, die eigenen **Gedankengänge durchgängig geometrisch-anschaulich nachzuvollziehen und zu stützen**. Es gibt bei diesem Themengebiet eine Fülle an „fertigen“ Formeln zur streng-schematischen Berechnung verschiedener geometrischer Größen wie dem Schnittpunkt einer Geraden in Parameterform mit einer Ebene in Koordinatenform, dem Abstand eines Punktes von einer Ebene in Koordinatenform usw. (vgl. z. B. Formeln für den $\mathbb{R}^3$ in [93], S. 28-29). Das kann zusammen mit der „Rezept“-Neigung eines Teils der Studierenden (siehe Unterabschnitt 2.2.2) dazu führen, dass man bei Aufgaben zur analytischen Geometrie keine Lösungsansätze sieht, wenn die Formelsammlung nicht gerade eine Formel für genau das in der Aufgabenstellung Gefragte bietet. Dieses Problem ist im nächsten Punkt genauer zu erläutern.

Während z. B. Aufgaben zur Partialbruchzerlegung oder zur Hauptachsentransformation von Quadriken in relativ gleichbleibende Schritte eingeteilt werden können, deren grobe Abfolge und typisch auftretenden Einzelheiten sich im Vorhinein lernen und trainieren lassen, sind in der analytischen Geometrie **Aufgaben oft offener bzgl. des Lösungswegs**. Meist muss man mindestens die „fertigen" Formeln aus der Formelsammlung noch anschauungsgeleitet passend kombinieren; und oft genug hat man solche Formeln gar nicht verfügbar, wenn etwa die Benutzung einer Formelsammlung nicht möglich ist oder sie nicht genau die für die Aufgabenstellung nötigen Formeln enthält. Das gilt z. B. für die Aufgabe in der BSA, eine Gerade senkrecht auf eine Ebene zu projizieren: Die Formelsammlung [93] etwa hat dazu keine Direkt-Formel, auch wenn es möglich wäre, eine solche herzuleiten. Spätestens in so einem Fall muss man also eigenständig einen Lösungsweg mithilfe der oben bei den fachlichen Aspekten genannten, grundlegenden Berechnungen „zusammenbasteln"; dazu ist ein sicheres Verständnis der Zusammenhänge zwischen algebraischer Darstellung und den geometrischen Entsprechungen sowie überhaupt eine flexible geometrische Anschauung nötig (siehe voriger Punkt). Gerade in der analytischen Geometrie, wie sie in der Veranstaltung vorkommt, lassen sich jedenfalls praktisch alle Problemstellungen mit geometrisch-anschaulichen Überlegungen auf ganz elementare Berechnungen – Schnitte durch Lösen von LGS bestimmen, Länge eines Vektors berechnen, Kreuzprodukte oder Skalarprodukte bestimmen o. ä. – herunterbrechen. Dass man mit anschaulichen Überlegungen und an sich sehr „einfachen", elementaren Rechnungen die Problemstellungen lösen kann, ist durchaus eine Besonderheit der analytischen Geometrie, wenn man an andere abstrakte Themengebiete wie Reihenkonvergenz denkt.

Mit dem obigen Punkt zur geometrisch-anschaulichen Stützung der Gedankengänge ist verwandt, dass der Löseprozess bei Aufgaben aus der analytischen Geometrie oft ein **Verständnis der Zusammenhänge zwischen algebraischer Darstellung und zugehörigen geometrischen Entsprechungen** erfordert. So können etwa Fehler entstehen, wenn Voraussetzungen zur Anwendung einer Formel nicht korrekt beachtet werden: Gelegentlich ist z. B. in Lösungen zu sehen, dass für den Lotfußpunkt $\vec{l}$ von einem Punkt $\vec{p}$ auf eine Ebene E fälschlicherweise die Formel $\vec{l} = \vec{p} + (d - \vec{n} \cdot \vec{p})\vec{n}$ genutzt wird, selbst wenn die Ebene $E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{n} = d\right\}$ nicht in Hessescher Normalform gegeben ist. Fragt sich ein Lerner dagegen beim Benutzen der Formel, ob sich deren Ergebnis durch andere Skalierung des Normalenvektors $\vec{n}$ ändert – zu diesem Gedanken kann man kommen, wenn man über die Verbindung zwischen algebraischer Operation und der geometrischen Entprechung nachdenkt – merkt man schnell, dass bei dieser Formel ein korrigierender Faktor fehlt, wenn der Normalenvektor nicht auf Länge 1 standardisiert ist. Ein ähnliches Problem ist es, wenn zwar korrekt mit passend ausgewählten Mitteln gerechnet wird, aber mit (Teil-)Ergebnissen der Rechnung nicht umgegangen werden kann.

Gelegentlich sind bei Klausurkorrekturen Lösungen aufgefallen, bei denen die jeweiligen Studierenden z. B. beim Schnitt einer Ebene in Koordinatenform mit einer anderen Ebene in Parameterform offenbar nicht die geometrische Bedeutung dessen verstanden haben, wenn man ein Ergebnis wie $t = 2u - \frac{1}{7}$ für die beiden Richtungsvektoren-Parameter t, u erhält. An dieser Stelle sind diese Lösungen dann typischerweise abgebrochen oder haben manchmal erst noch unnachvollziehbare Schritte wie $u = 0$ zu setzen verfolgt, um dann danach abzubrechen.

Auch wenn die Rechnungen bei analytischer Geometrie an sich recht einfach sind – bei den hier behandelten Objekten bleibt es üblicherweise beim Lösen linearer Gleichungssysteme – macht gerade auch diese rechnerische Gleichförmigkeit ein **sicheres Kalkül mit überblickendem Rechnen** nötig. Gerade bei der Benutzung des Gauß-Algorithmus für LGS schleichen sich oft unbemerkt Fehler ein, die je nach Aufgabenstellung auch mehr oder weniger den Rest des Löseprozesses verzerren können.

Die didaktischen Herausforderungen fallen hier recht allgemein aus, was auch mit den vielen unterschiedlichen Möglichkeiten für Aufgabenstellungen bei analytischer Geometrie zusammenhängt. Die folgende Tabelle mit Abhilfen geht dagegen genauer auf die Details ein, die sich speziell bei dieser Aufgabenstellung ergeben.

Die konzipierten Abhilfen in der BSA

Herausforderung	Abhilfe
Gedankengänge geometrisch-anschaulich nachvollziehen und stützen	Die drei in der BSA behandelten Lösungsansätze zum Bestimmen der senkrechten Projektion einer Geraden $$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$ auf eine Ebene $$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \right\}$$ – Bilden der G enthaltenden und auf E senkrecht stehenden Hilfsebene H mit anschließendem Schneiden von E und H, Bilden des „zweifachen“ Kreuzprodukts $(\vec{x} \times \vec{n}) \times \vec{n}$ mit $\vec{x}$ als dem G-Richtungsvektor und $\vec{n}$ als dem E-Normalenvektor sowie Bestimmen des Schnittpunkts von G mit E und eines Lotfußpunkts von G auf E mit anschließendem Aufstellen der Geraden durch diese beiden Punkte – werden jeweils durch mithilfe der GeoGebra-3D-Ansicht erstellte Visualisierungen eingeführt und erklärt (siehe auch Screenshots bei der Ablaufbeschreibung dieser BSA weiter unten). Der Lösungsansatz mit dem zweifachen Kreuzprodukt ist hervorzuheben, da er von den drei genannten der am wenigsten intuitive ist; in Beratungsstunden konnte man bei mehreren Studierenden beobachten, dass sie das Vorgehen so für die Problemstellung Projektionsgerade auf Ebenen irgendwo gesehen hatten, jedoch nicht erklären konnten, warum es überhaupt funktioniert. Entsprechend angemessen erschien es bei der Aufgabenerstellung, gerade auch diesen Ansatz anschaulich zu erklären.

	Über die Einführung der drei Lösungsansätze hinaus werden im gesamten Aufgabenverlauf immer wieder Argumentationsschritte mit Visualisierungen untermauert, meist erstellt mit GeoGebra. Teils ohne GeoGebra erstellt ist die Veranschaulichung für die Frage am Ende der BSA, ob der mittels $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\lvert\vec{x}\rvert\cdot\lvert\vec{y}\rvert}\right)$ errechnete Winkel zwischen den Richtungsvektoren von G und der Projektionsgeraden auch schon der kleinere Winkel *zwischen den beiden Geraden* ist, oder ob man dafür den Winkel $\pi - \alpha$ nehmen muss (siehe dazu wieder den Screenshot bei der Ablaufbeschreibung weiter unten).
Mit bzgl. des Lösungswegs offeneren Aufgaben umgehen können	Zunächst ist die Aufgabenstellung mit der senkrechten Projektion einer Geraden auf eine Ebene so gewählt, dass sie tatsächlich relativ offen ist. Weder im Vorlesungsskript noch in den üblichen Formelsammlungen findet man dafür eine direkte Formel. Das Vorgehen mit zweifachem Kreuzprodukt zum senkrechten Projizieren eines (Richtungs-)Vektors auf eine Ebene kann durchaus bei einzelnen Übungsangeboten vorkommen; aber selbst wenn man dies kennt, muss man noch einen Stützvektor für die Projektionsgerade finden und beides zur Projektionsgeraden zusammensetzen, sodass zumindest ein (geringer) Rest an Offenheit bleibt. Auch die Frage *speziell nach dem kleineren* Schnittwinkel der beiden Geraden dürfte für die meisten keine Standardfrage sein, bei der sie schon rein rechnerisch wüssten, wie sie zu lösen wäre; man muss sich also selbst den Unterschied zwischen den möglichen Winkeln zwischen zwei Vektoren und den möglichen Schnittwinkeln zweier sich schneidender Geraden mit geometrischem Vorstellungsvermögen klarmachen. Ansonsten sind die Terme der Aufgabenstellung so gewählt, dass einerseits keine übermäßig „krummen“ Berechnungen im Lösungsweg nötig werden und somit nicht von der eigentlichen Problemlösung ablenken, sowie dass andererseits die Objekte dennoch den möglichst „allgemeinen“ Fall wiedergeben, also dass nicht viele Nullen in den verschiedenen Stütz-, Richtungs- und Normalenvektoren die Rechnungen ungewöhnlich vereinfachen.

	Wie schon bei anderen BSAs sollen auch hier die mehreren möglichen Lösungswege verdeutlichen, dass es nicht darum geht, für alle denkbaren Aufgabentypen jeweils das eine passende Gesamtrezept zu kennen, sondern darum, je nach Aufgabenstellung die elementaren Werkzeuge bzw. Rechnungen flexibel und anschauungsgeleitet einzusetzen und zu kombinieren. Dabei spaltet sich der Weg sowohl für die weiter oben genannten drei großen Lösungsansätze auf als auch innerhalb dieser drei Stränge an zwei Stellen, an denen der Schnittpunkt von G und E bestimmt wird; bei letzterem kann man entscheiden zwischen komponentenweisem Einsetzen mit Auflösen des entstehenden LGS oder Anwendung einer Direkt-Formel. Gelegentlich werden heuristische Überlegungen – die beim Lösen offenerer Aufgaben grundsätzlich hilfreich bis nötig sind – explizit beschrieben oder abgefragt: Bei einer Frageseite zu Beginn des Hilfsebene-Aufstellen-Ansatzes (siehe auch Anfang dieser Tabelle) soll der Nutzer erkennen, dass sich mit G in Parameterform und E in Koordinatenform viel schneller die Parameterform als die Koordinatenform von H bestimmen lässt, indem man nur noch den Normalenvektor von E als Richtungsvektor an G „hinzufügen" muss; beim Kreuzprodukt-Ansatz wird beschrieben, dass man als Stützvektor für die Projektionsgerade am besten den Schnittpunkt von G und E wählt, da dieser am schnellsten bestimmbar ist.
Verständnis von Zusammenh. zw. algebraischer & geometrischer Ebene fördern	Über den ganzen Verlauf der BSA hinweg werden, wann immer möglich, Verbindungen zwischen den algebraisch-rechnerischen Operationen und den zugehörigen geometrischen Entsprechungen explizit erklärt oder auch in Fragen aufgegriffen. So muss der Nutzer z. B. beim Hilfsebenen-Ansatz an der Stelle, wo man den Schnitt von H in Parameterform mit E in Koordinatenform berechnet und mit komponentenweisem Einsetzen $2(1-t+2u)-3(2t-3u)+1(1+t+u)=4 \;\Leftrightarrow\; \ldots \;\Leftrightarrow\; t=2u-\frac{1}{7}$

erhält, auf einer Frageseite auswählen, was aus diesem Zwischenergebnis $t = 2u - \frac{1}{7}$ zu folgern ist. Auf den direkten Folgeseiten wird dann erklärt, dass dies genau das Verhältnis ist, in dem man die Parameter t, u in der Gleichung der Hilfsebene

$$H = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

zueinander wählen muss, um Punkte in der Schnittgeraden von E und H zu erhalten.

Beim Ansatz mit dem zweifachen Kreuzprodukt wird ergänzend zur Illustration kleinschrittig erklärt, dass durch das erste Kreuzprodukt vom G-Richtungsvektor mit dem E-Normalenvektor – die ja eine zu E senkrechte und zu G parallele Ebene aufspannen – ein Vektor entsteht, der sowohl parallel zu E als auch auch senkrecht zur der gesuchten Projektionsgerade G_P sein muss. Bildet man mit diesem Vektor noch einmal das Kreuzprodukt mit dem E-Normalenvektor, muss der Ergebnisvektor dann zwangsweise parallel sowohl zu E als auch G_P sein, womit ein Richtungsvektor der Projektionsgeraden gefunden ist.

Beim dritten Ansatz wird für den Lotfußpunkt zuerst eine Lotgerade erstellt; zum Schneiden mit E setzt man diese komponentenweise in die Ebenengleichung ein und erhält

$$2 + 4t + 9t + 1 + t = 4 \;\Leftrightarrow\; \ldots \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{14}.$$

An dieser Stelle wird wieder explizit beschrieben, dass dieser Wert für t hier den Vorfaktor angibt, mit dem man den Lotgeraden-Richtungsvektor auf den Lotgeraden-Stützvektor addieren muss, um den Lotfußpunkt zu erhalten. Damit soll der Nutzer dann den Lotfußpunkt berechnen.

An Stellen, an denen der Nutzer den Schnittpunkt von G gegeben durch $\vec{x} = \vec{l} + t \cdot \vec{r}$, $t \in \mathbb{R}$ und E gegeben durch $\vec{x} \cdot \vec{n} = d$ mit der direkten Formel

$$\vec{s} = \vec{l} + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{l}}{\vec{n} \cdot \vec{r}} \vec{r}$$

	ausrechnet, wird darauf hingewiesen, dass diese Formel passenderweise auch nur dann gültig ist, wenn Gerade und Ebene sich in einem Punkt schneiden; ist dagegen G parallel zu E und liegt entweder ganz in E oder hat einen leeren Schnitt, dann muss $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ sein und der Nenner in der Formel ist nicht definiert. An mehreren Stellen im BSA-Verlauf wird daran erinnert, dass man den Richtungsvektor einer Geraden beliebig skalieren kann, ohne dass sich die Gerade dadurch ändert. Der berechnete Winkel $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\lvert\vec{x}\rvert \cdot \lvert\vec{y}\rvert}\right) \approx 0,869 \leq \frac{\pi}{2}$ zwischen den Richtungsvektoren von G und G_P ist auch bereits der kleinere Schnittwinkel zwischen den Geraden, da er kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist (die beiden benachbarten Schnittwinkel zweier Gerade ergänzen sich immer zu π bzw. $180°$). Auf den letzten Seiten der BSA wird aber noch in „Was wäre, wenn..."-Manier durchgespielt, was bzgl. des Schnittwinkels passieren würde, wenn der Richtungsvektor von G nicht als $(-1, 2, 1)^T$, sondern mit Vorfaktor -1 als $(1, -2, -1)^T$ in die Winkelberechnung eingegangen wäre. Dann hätte man als Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\beta \approx 2,2725$ erhalten – den größeren der beiden möglichen Geraden-Schnittwinkel – und müsste entsprechend $\alpha = \pi - \beta \approx 0,869$ rechnen, um den gefragten kleineren zu erhalten.
Sicheres Kalkül mit überblickendem Rechnen fördern	Wie weiter oben in dieser Tabelle beschrieben, hat ein didaktisches Hauptaugenmerk bei dieser BSA auf dem Lösen offener(er) Aufgabenstellungen gelegen. Auch wenn das Kalkül hier somit nicht im Vordergrund steht, sind die Objekte der BSA jedoch mit möglichst wenig Nullen gewählt, sodass die Rechnungen zumindest nicht übermäßig vereinfacht werden. Es ist darauf geachtet worden, alle Rechnungen kleinschrittig darzustellen, sodass der Lerner im Falle eines Rechenfehlers diesen durch Vergleich genau in seiner Rechnung verorten kann. Ein Beispiel dafür ist die Berechnung des zweifachen Kreuzprodukts beim zweiten Ansatz.

Ablauf der BSA

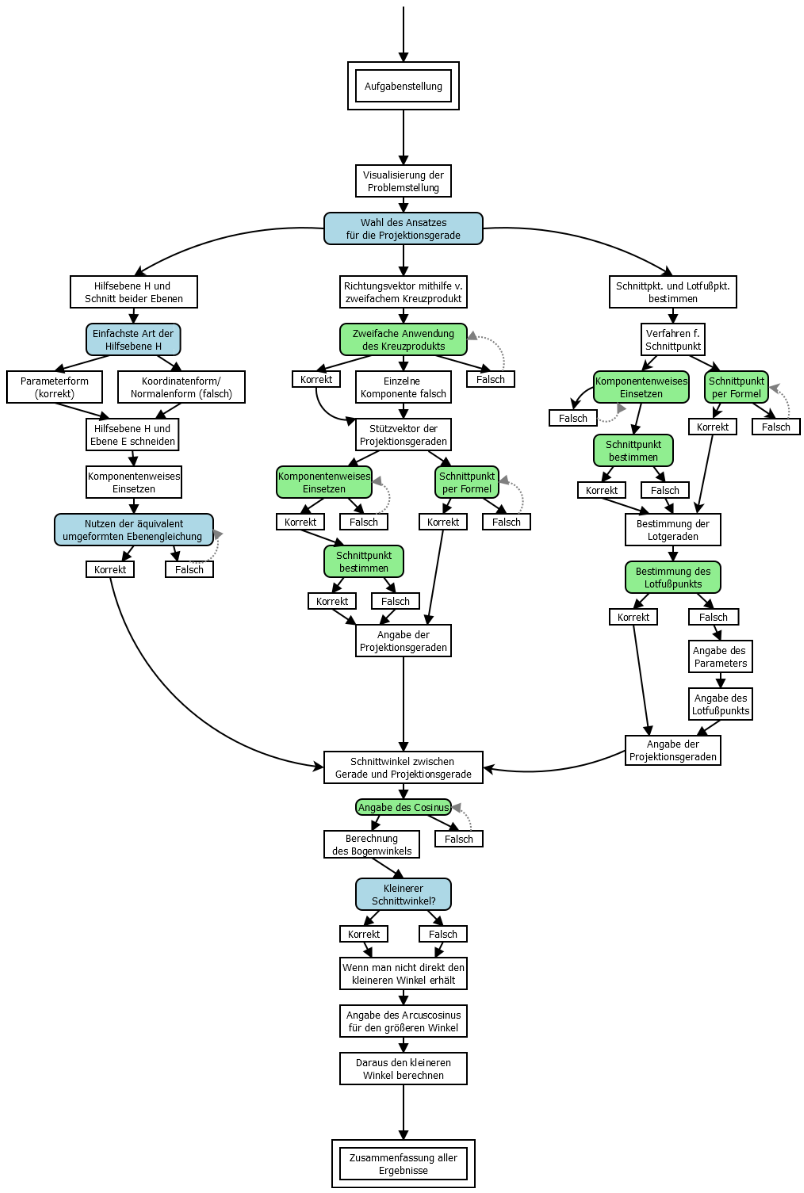
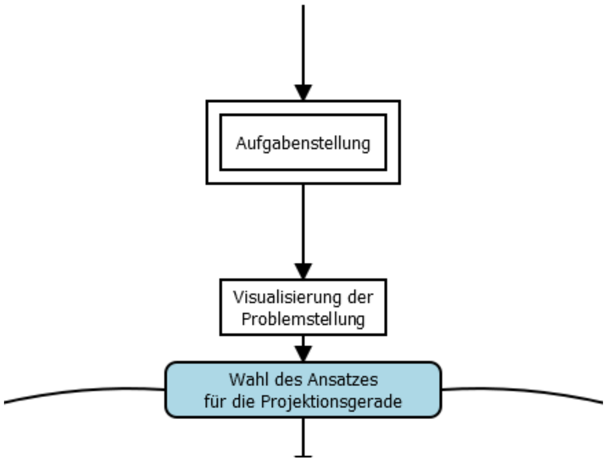


Abbildung 4.4: Ablaufdiagramm der BSA zur analytischen Geometrie

Das Diagramm in Abbildung 4.4 veranschaulicht den Ablauf der BSA. Man erkennt ganz oben ein paar einleitende Seiten, die sich darunter in die drei „großen" Ansätze zum Bestimmen der Projektionsgeraden aufspalten. Für das Berechnen des Schnittwinkels der beiden Geraden kommen die Wege auf den letzten Seiten der BSA wieder zusammen.

Auf der ersten Seiten der BSA wird die Aufgabenstellung genannt. Es folgt eine Seite, auf der diese Problemstellung mithilfe der GeoGebra-3D-Ansicht visualisiert wird, um von Anfang an zum bildlich-geometrischen Vorstellen anzuregen (siehe Abbildung 4.5). Auf der nächsten Seite wählt der Nutzer dann aus den drei beschriebenen Ansätzen seinen selbst verfolgten aus, wodurch sich der weitere Weg in drei Stränge aufspaltet.



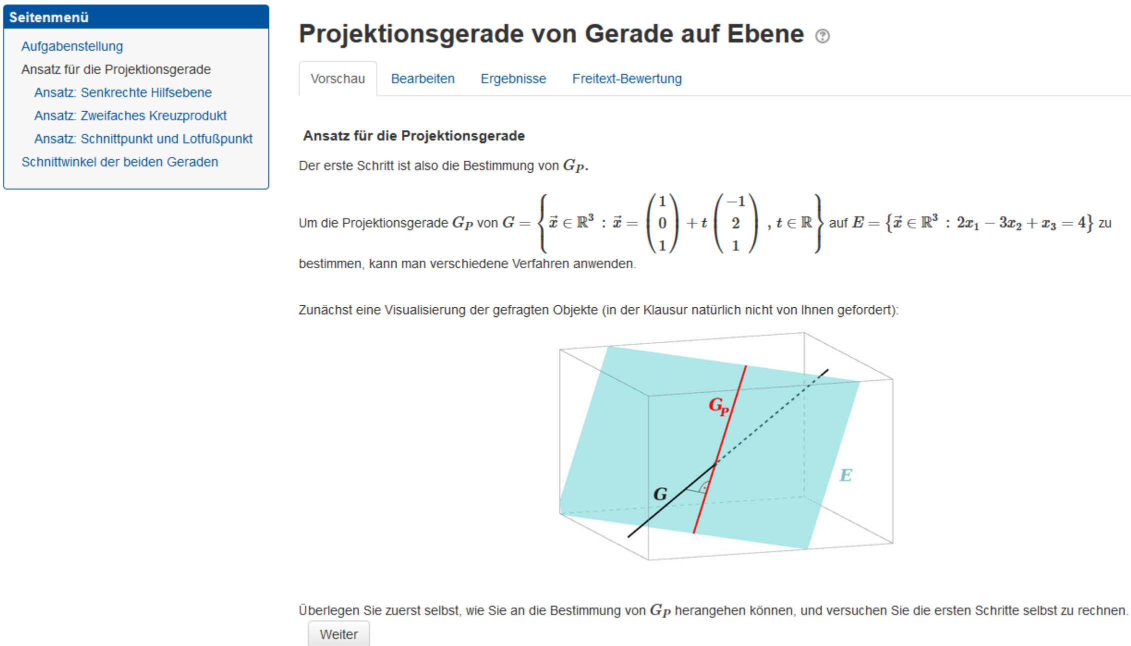
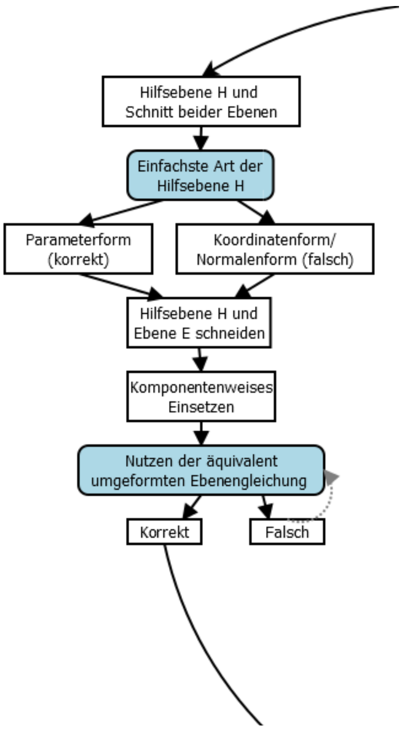
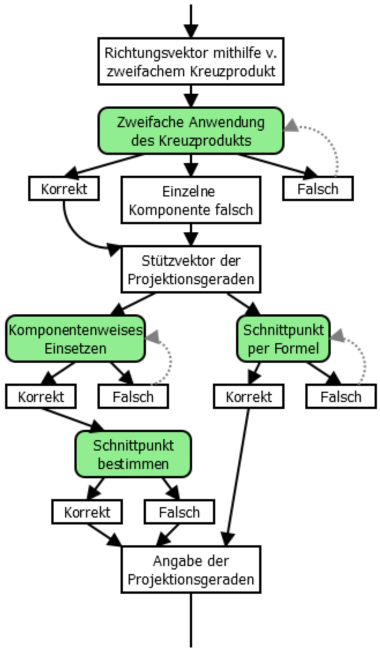


Abbildung 4.5: Inhaltsseite mit Visualisierung der Problemstellung am Anfang der BSA, Screenshot aus dem L²P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra



Der linke Weg im Diagramm bildet den Ansatz ab, bei dem die durch G laufende und auf E senkrecht stehende Hilfsebene H bestimmt und danach mit E geschnitten wird. Nach der groben Erklärung und Visualisierung des Ansatzes auf der ersten Seite dieses Wegs (siehe Abbildung 4.6) soll der Nutzer per Multiple-Choice auswählen, ob H besser in Koordinaten- oder Parameterform bestimmt werden kann. In direkter Folge wird per Inhaltsseite dargestellt, wie die Parameterform bestimmt wird, und der Nutzer aufgefordert, zum Schneiden von E und H zuerst H komponentenweise in E einzusetzen. Auf der nächsten Seite wird die entstehende Gleichung genannt und erklärt, dass man nun noch zum Parameter t oder u auflösen muss; der Nutzer soll nach t auflösen. Auf einer folgenden Multiple-Choice-Frageseite ist dann auszuwählen, wie man mit diesem Ergebnis umgeht: $t = 2u - \frac{1}{7}$ direkt in die Parameterform von H einsetzen oder (als falsche Antwort, die bei einigen Studierendenlösungen gesehen worden ist) zuerst noch $u = 0$ setzen. Die Folgeseite gibt entsprechend Rückmeldung und eine Darstellung, wie man daraus abschließend die Schnitt- und damit die Projektionsgerade bestimmt, im Falle der falschen Antwort mit einem zusätzlichen Erklärungssatz.

Abbildung 4.6: Inhaltsseite mit Visualisierung des Hilfsebenen-Ansatzes, Screenshot aus dem L^{2}P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra



Der mittlere Weg im Diagramm stellt den Ansatz dar, bei dem das zweifache Kreuzprodukt $(\vec{x} \times \vec{n}) \times \vec{n}$ gebildet wird, wobei $\vec{x}$ den durch die Parameterform gegebenen Richtungsvektor von G und $\vec{n}$ den durch die Koordinatenform von E gegebenen Normalenvektor bezeichnet. Nach der anfänglichen Erklärung und Visualisierung des Ansatzes (siehe Abbildung 4.7) wird der Nutzer aufgefordert, das zweifache Kreuzprodukt selbst auszurechnen und auf einer Kurzantwort-Frageseite den resultierenden Vektor einzugeben. Bei einem gänzlich falschen Ergebnis wird der Nutzer zum Nachschlagen des Kreuzprodukts und erneutem Rechnen aufgefordert; ist das Ergebnis nur um den Vorfaktor -1 „falsch“, wird erklärt, dass der Nutzer vermutlich beim ersten Kreuzprodukt die Reihenfolge der Argumente vertauscht hat – was aber prinzipiell ebenfalls funktioniert, da es hier ja um einen beliebig skalierbaren *Richtungsvektor* für die Projektionsgerade geht.

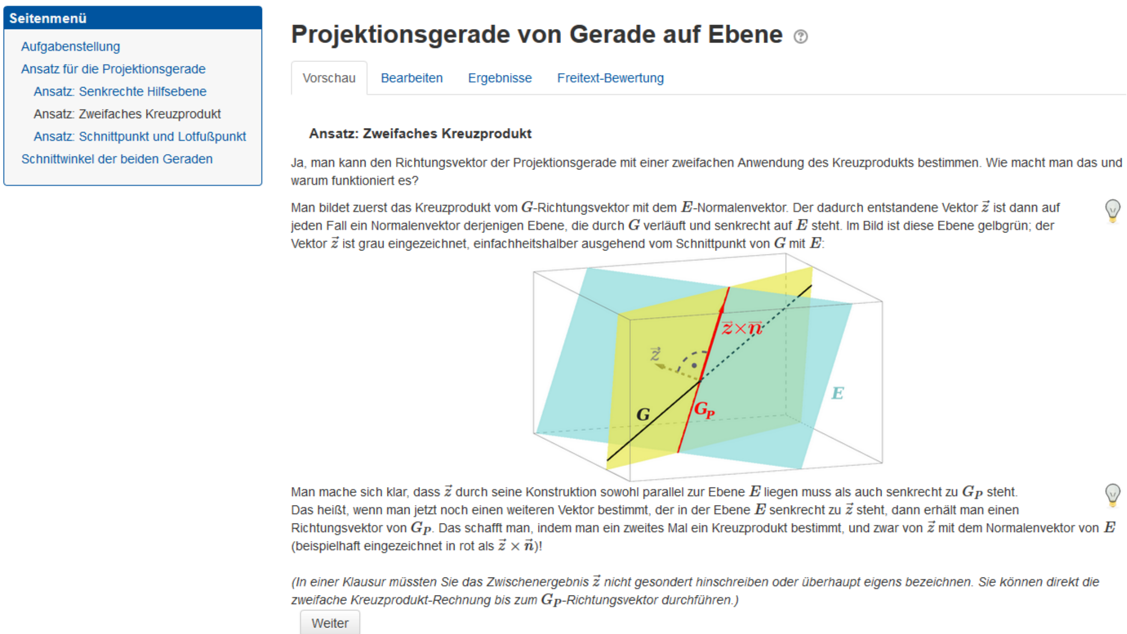
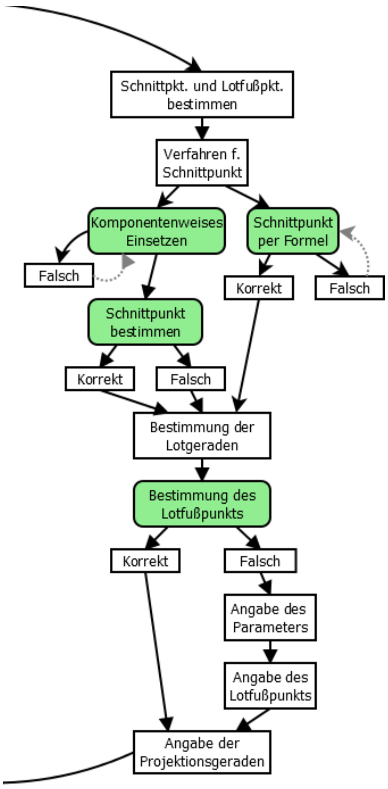


Abbildung 4.7: Inhaltsseite mit Visualisierung des Kreuzprodukt-Ansatzes, Screenshot aus dem L^2P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra

Nach dem Richtungsvektor ist noch ein Stützvektor für die Projektionsgerade zu bestimmen. Auf einer Inhaltsseite wird zunächst beschrieben, dass man einfachheitshalber den Schnittpunkt von G und E als Stützvektor für G_P nehmen kann, da dieser ja auf jeden Fall auf G_P liegen muss und so ziemlich am einfachsten zu bestimmen sein dürfte (etwa verglichen mit Lotfußpunkten). Der Nutzer kann dazu dann zwischen dem „herkömmlichen" komponentenweisen Einsetzen mit anschließendem Lösen der Gleichung oder dem Berechnen per Direkt-Formel auswählen, wodurch sich der Weg nochmals im Kleinen aufgabelt. Bei der Direkt-Formel gibt es „nur" eine Kurzantwort-Frageseite, auf welcher der Nutzer den Schnittpunkt direkt eingeben soll, mit darauffolgender Richtig- oder Falsch-Rückmeldung. Beim komponentenweisen Einsetzen soll zunächst per Kurzantwort der durch Lösen der entstehenden Gleichung herausgefundene Wert für den Parameter t eingetragen werden, auf einer weiteren Frageseite dann der Schnittpunkt, den man damit erhält. Beide Wege kommen abschließend auf einer gemeinsamen Inhaltsseite zusammen, auf welcher die Projektionsgerade angegeben wird.



Der rechte Weg im Diagramm bildet den Ansatz ab, bei dem man den Schnittpunkt von G und E und einen Lotfußpunkt von G auf E berechnet und somit zwei Punkte auf G_P erhält, sodass die Gerade durch beide die Projektionsgerade sein muss (zur Veranschaulichung in der BSA siehe Abbildung 4.8). Als erstes wird der Schnittpunkt bestimmt; die Seiten-Abfolge ist hier dieselbe wie schon beim Kreuzprodukt-Ansatz, mit Aufspaltung in komponentenweises Einsetzen oder Direkt-Formel jeweils mit den zugehörigen Frageseiten. Es folgt die Bestimmung eines Lotfußpunkts. Dazu wird zunächst erklärt, dass man von irgendeinem Punkt auf G (der nicht der Schnittpunkt mit E ist) die Lotgerade auf E fällen muss, und dass man als Ausgangspunkt dafür am einfachsten den aus der Parameterform bekannten G-Stützvektor nimmt. Die durch „Anhängen" des direkt ablesbaren E-Normalenvektors entstehende Lotgerade wird auf der Folgeseite dargestellt, und der Nutzer soll dann den Lotfußpunkt als deren Schnittpunkt mit E ausrechnen und in Kurzantwort-Form eingeben. Bei korrekter Antwort gibt es eine kurze Korrekt-Rückmeldung, andernfalls wird dem Nutzer die Bestimmung dieses Punkts mit komponentenweisem Einsetzen nochmal detailliert über mehrere Inhaltsseiten vorgerechnet. Jedenfalls wird im Anschluss daran der Nutzer aufgefordert, mit der Kenntnis von Schnittpunkt und Lotfußpunkt nun die Gerade G_P durch diese zu bestimmen, was ihm auf der letzten Inhaltsseite dieses Ansatzes dann im Detail erklärt und vorgerechnet wird (einer der beiden Punkte als Stützvektor und Bilden des Verbindungsvektors von einem zum anderen Punkt als im Weiteren beliebig skalierbarer Richtungsvektor).

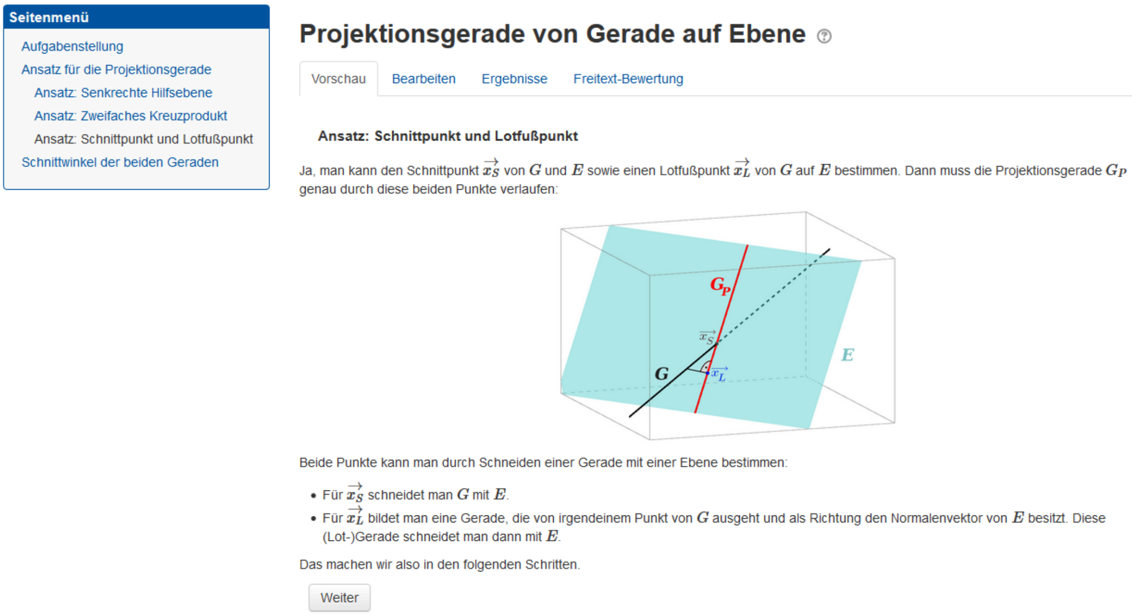
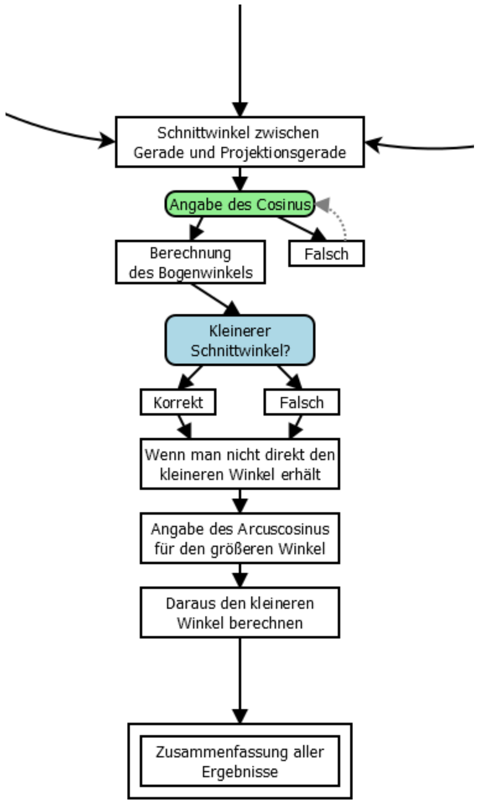


Abbildung 4.8: Inhaltsseite mit Visualisierung des Schnittpunkt-Lotfußpunkt-Ansatzes, Screenshot aus dem L²P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra



Im letzten Teil der BSA ist der kleinere der beiden möglichen Schnittwinkel zwischen G und der Projektionsgeraden G_P zu bestimmen. Die einleitende Inhaltsseite dazu erklärt zunächst den Sachverhalt mit Illustration und nennt die Formeln $\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$ sowie $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}\right)$ für den Winkel zwischen zwei Vektoren. Daraufhin wird der Nutzer aufgefordert, den ersteren Wert für die Richtungsvektoren der beiden Geraden auszurechnen und als Kurzantwort einzugeben; im Falle einer falschen Antwort wird der Anfang der Rechnung auf eigener Seite vorgerechnet und der Nutzer zum Fertigrechnen auf die Frageseite zurückgeleitet. Auf der nächsten Multiple-Choice-Frageseite wird der Wert $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}\right) \approx 0,869$ ausgerechnet und erklärt, wie ein mit dieser Formel errechneter Winkelwert generell mit dem Schnittwinkel zwischen den beiden zugehörigen Geraden zusammenhängt (siehe auch Abbildung 4.9). Der Nutzer soll per Multiple-Choice angeben, ob der errechnete Winkel schon der kleinere zwischen den beiden Geraden ist (was zutrifft).

Bevor die BSA abschließt, wird aber noch über drei Inhaltsseiten (und mit weiterer Illustration) dargestellt, was passiert, wenn der G-Richtungsvektor als $(1, -2, -1)^T$ statt $(-1, 2, 1)^T$ in die Winkelberechnung eingegangen wäre. In diesem Fall würde man einen Winkel β größer als $\frac{\pi}{2}$ zwischen den beiden Vektoren erhalten und müsste entsprechend $\alpha = \pi - \beta$ als den kleineren Winkel zwischen den beiden Geraden bestimmen. Danach folgt schließlich die Zusammenfassung aller Ergebnisse als letzte Seite der BSA.

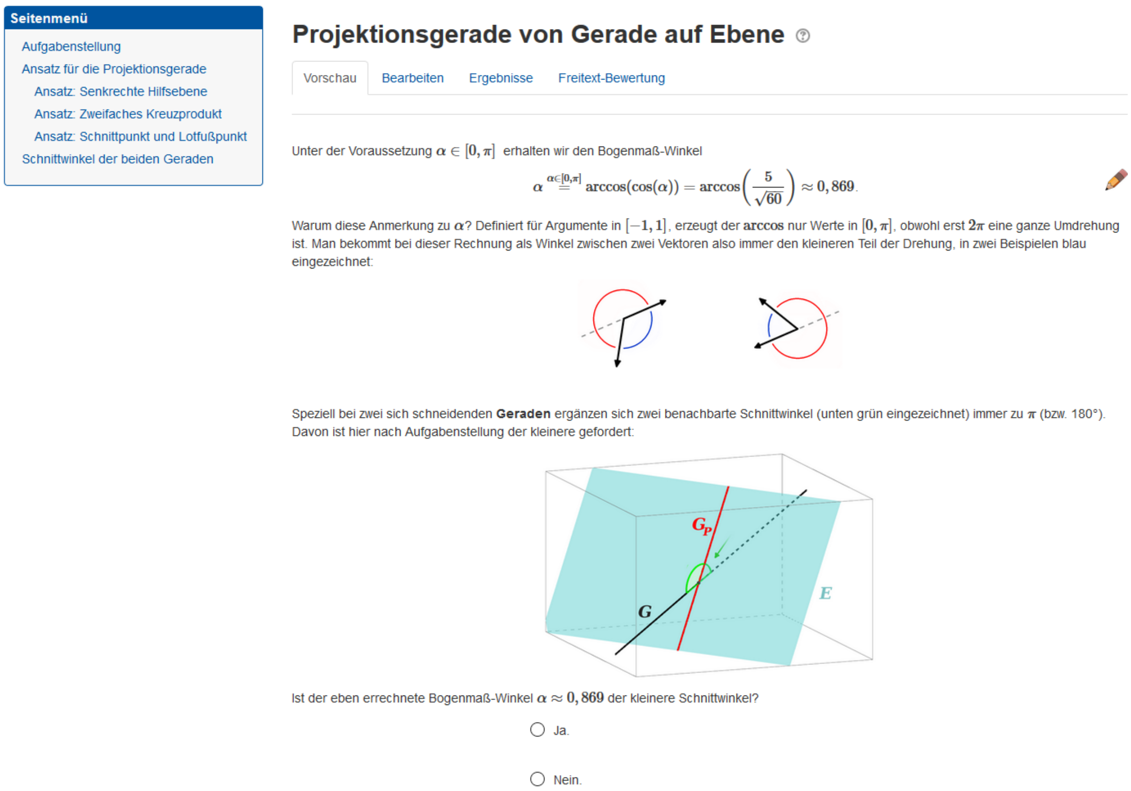


Abbildung 4.9: Frageseite mit Illustrationen zum kleineren Schnittwinkel zweier Geraden, im Unterschied zum Winkel zwischen zwei Vektoren, Screenshot aus dem L²P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra

4.3 Überlegungen zu den weiteren selbstentwickelten BSAs

Wichtige Eigenheiten der BSA-Realisierung sind bereits im vorigen Abschnitt anhand der drei Beispielaufgaben dargestellt worden. Auch bei den anderen BSAs ist die didaktische Aufbereitung des jeweiligen Stoffs es jedoch wert, mindestens grob beschrieben zu werden. Das geschieht in diesem Abschnitt. Meist wird hier wieder die Tabellenform mit didaktischen Herausforderungen in der linken und den BSA-Abhilfen in der rechten Spalte genutzt; sind bei einer BSA dagegen nur wenige Aspekte zu erwähnen, bleibt es bei einem einfachen kurzen Fließtext-Abschnitt.

4.3.1 Erste BSA zu Betragsungleichungen

Hier ist die mehrfache Ungleichung $x \leq |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$ zu lösen. Dies ist eine vergleichsweise einfache Betragsungleichung, u. a. da es keine mehrfach verschachtelten Beträge gibt sowie da die Ausdrücke (insbesondere innerhalb des Betrags) bloß polynomiell und dabei maximal quadratisch sind. Es handelt sich damit um eine der wenigen BSAs, die *nicht* leicht über dem Klausur-Schwierigkeitsniveau angesiedelt sind.

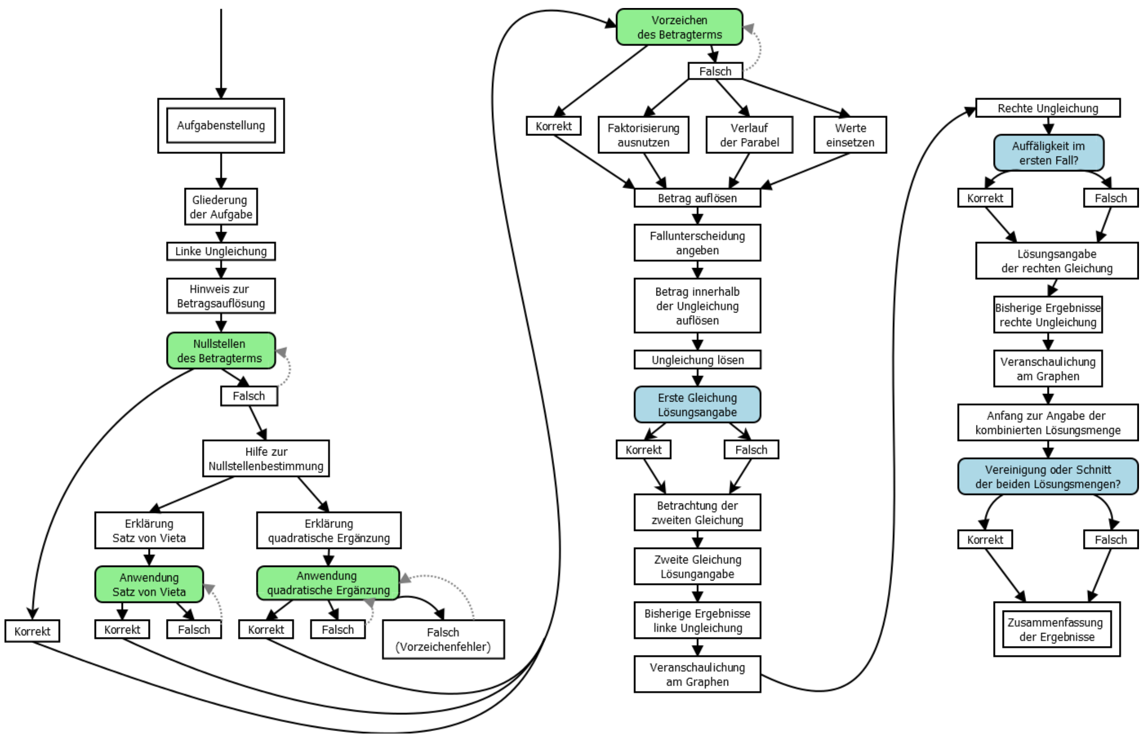


Abbildung 4.10: Ablaufdiagramm der ersten BSA zu Betragsungleichungen

Herausforderung	**Abhilfe**
Betragauflösen mit zugehöriger Fallunterscheidung verständlich machen & veranschaulichen	Ein häufig beobachteter Fehler bei Betragsungleichungs-Aufgaben ist, dass die x-Fallunterscheidung nicht entsprechend der Nullstellen des (üblicherweise stetigen) Terms innerhalb der Betragsstriche vorgenommen wird, sondern fälschlicherweise anhand anderer, manchmal auch scheinbar wahlloser Kriterien. Bei einigen Lernern beobachtet man z. B., dass sie unabhängig von der genauen Gestalt des Betragsterms immer die Fallunterscheidung $x \geq 0$ und $x < 0$ durchführen und dann im Term, um den man die Betragsstriche entfernt, im ersten Fall x und im anderen $-x$ stehenlassen. Vermutlich fehlt bei diesem Fehler inhaltliches Verständnis dafür, wie eine Fallunterscheidung überhaupt zum Wegfallen der Betragsstriche führen kann. Um dieses Verständnis zu fördern, wird in der BSA zunächst das Prinzip hinter dem Betragauflösen explizit beschrieben: Man muss zuerst herausfinden, für welche x der Term innerhalb der Betragsstriche nicht-negative bzw. negative Werte annimmt. Für alle ersteren x kann man dann die Betragsstriche wegfallen lassen, bei letzteren x muss man den Term innerhalb des Betrags insgesamt mit -1 multiplizieren, um die Betragsstriche wegfallen lassen zu können. Sofern der Term innerhalb des Betrags stetig ist, sind die Nullstellen dieses Terms genau die Stellen, an denen sich das Vorzeichen überhaupt ändern kann, sodass dies die Kandidaten für Grenzen bei der Fallunterscheidung sind. Speziell zum Betragauflösen bei einem quadratischen Term werden alle gedanklichen Schritte kleinschrittig explizit beschrieben und mittels mehrerer möglicher Wege durchgespielt, sowohl beim Bestimmen der Nullstellen des quadratischen Terms (pq-Formel, Satz von Vieta, quadratische Ergänzung) als auch beim Bestimmen des Vorzeichenverhaltens (Werte einsetzen, sich Parabelverlauf vorstellen, die Faktorisierung $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ ausnutzen).

	Unterstützend zu beiden vorigen Punkten wird die Auswirkung der Betragsbildung visuell am Funktionsgraphen illustriert (siehe Abbildung 4.11 unter der Tabelle) – das ist hier problemlos möglich, da die Terme einfach gewählt sind und keine verschachtelten Beträge vorkommen.
Korrektes Äquivalenzumformen mit Fallbeachtung fördern	Bei den Äquivalenzumformungen, die auf das Betragauflösen folgen, kann man sowohl beim Kalkül als auch beim logischen Einbeziehen von Fallbedingungen (etwa „$(x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10}) \leq 0$, falls $x \leq 1$ oder $x \geq 2$“) öfters Fehler beobachten. Vor allem beim letzteren Problem sind neben Flüchtigkeits- und Kalkülfehlern auch Verständnisprobleme zu vermuten. All dies soll in der BSA durch kleinschrittige Darstellung der Umformungen zumindest gemildert werden. Dabei wird mindestens auf Inhaltsseiten zuerst zum eigenen Lösen der einzelnen Schritte aufgefordert und dann auf Folgeseiten die weitere Rechnung gezeigt, gelegentlich sogar der Nutzer per Multiple-Choice nach Überlegungen zum Fallbedingungs-Einbeziehen gefragt.
Lösungsmengen korrekt kombinieren können	Auch beim Kombinieren von Teil-Lösungsmengen kann man immer wieder Fehler beobachten, vor allem bzgl. Verwechseln von Schnitt und Vereinigung. Die Aufgabenstellung der BSA ist mit der mehrfachen Ungleichung so gewählt, dass tatsächlich ein Kombinieren von Teil-Lösungsmengen nötig ist. Um das Zustandekommen der Lösungsmengen verständlicher zu machen und mit passenden Vorstellungen zu belegen, wird es in der BSA sowohl mit Worten beschrieben als auch anhand der Funktionsgraphen (siehe Abbildung 4.12) bzw. am Zahlenstrahl (siehe Abbildung 4.13) veranschaulicht.

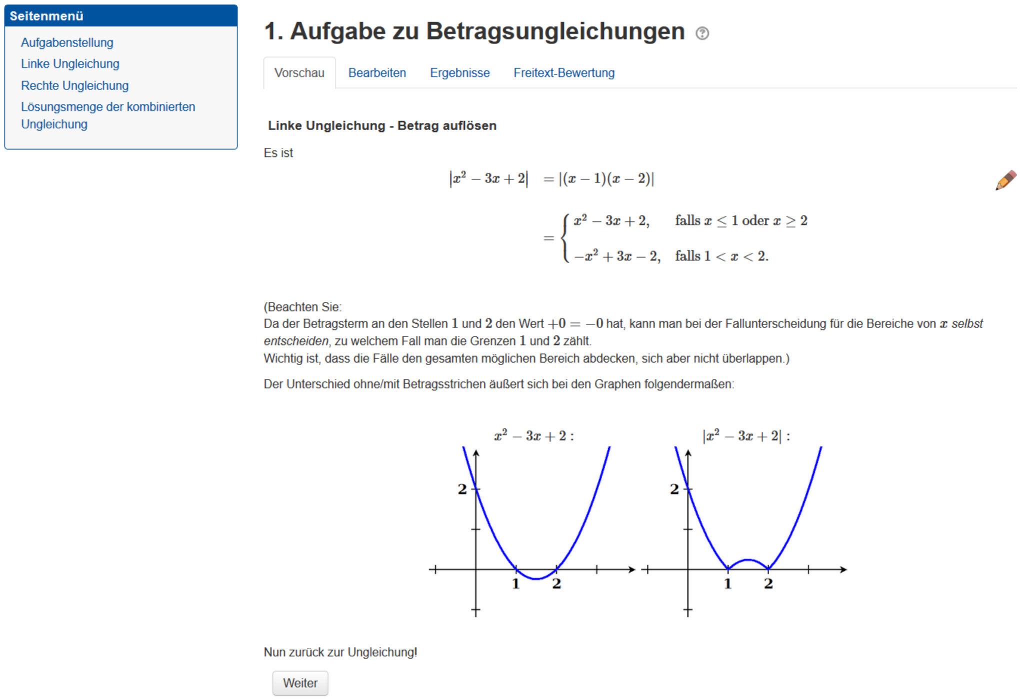


Abbildung 4.11: Inhaltsseite mit Illustration zur Auswirkung der Betragsbildung auf einen quadratischen Term, Screenshot aus dem L²P

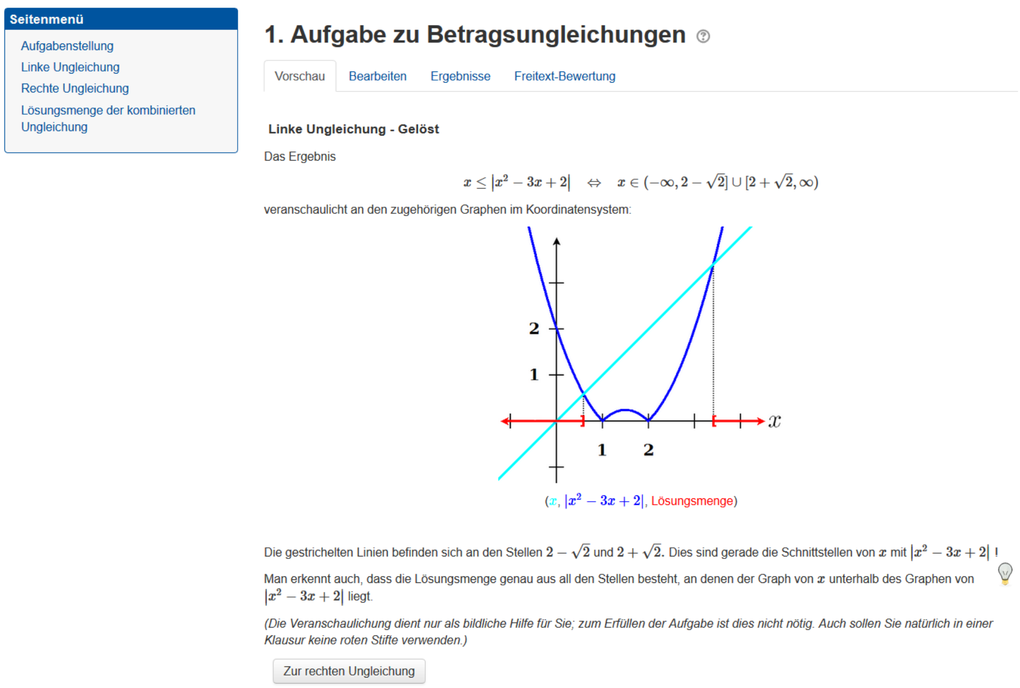


Abbildung 4.12: Inhaltsseite mit Illustration zum Zustandekommen der Teil-Lösungsmenge zur linken Ungleichung $x \leq |x^2 - 3x + 2|$, Screenshot aus dem L²P

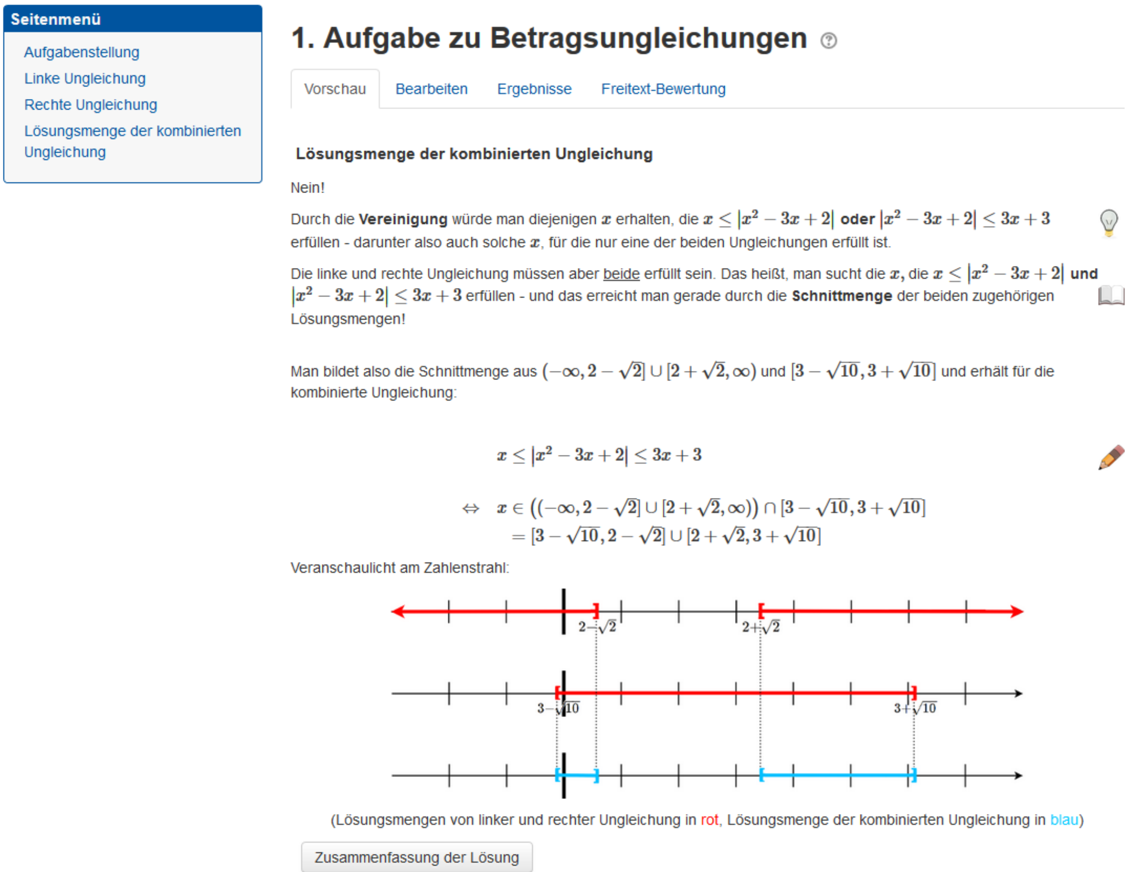


Abbildung 4.13: Inhaltsseite mit Illustration zum Kombinieren der Teil-Lösungsmengen zur Gesamt-Lösungsmenge, Screenshot aus dem L²P

4.3.2 Zweite BSA zu Betragsungleichungen

Hier ist die Ungleichung $\frac{|x-2|}{|x+1|} \geq \frac{|x-1|}{|x+3|}$ für $x \neq -3, -1$ zu lösen. Die vorige BSA mit den einfacheren Termen ist vor allem auf das Ausbilden bzw. Fördern von Grundvorstellungen und Grundfertigkeiten ausgerichtet gewesen; in dieser zweiten Betragsungleichungs-BSA wird dagegen ein schwierigerer Fall durchgespielt, bei dem „Brute-Force“-Betragauflösen nicht der einfachste Weg zur Lösung ist und man stattdessen versuchen sollte, die Ungleichung zunächst anders zu manipulieren. (Im Speziellen macht man es sich hier einfacher, wenn man am Anfang beide Seiten der Ungleichung quadriert und so die Beträge wegfallen.)

In der BSA sind beide genannten Wege möglich, sodass der Lerner den Aufwand vergleichen kann: Beim sofortigen Betragauflösen sind viele Fälle zu unterscheiden und es entsteht beim Lösen der mehreren entstehenden Ungleichungen viel Rechenaufwand, den man gewissenhaft und langwierig durcharbeiten muss; beim anderen Weg wird mentales Durchspielen bzw. Vorgreifen von möglichen „raffinierteren“ Umformungen gefragt (und ggfs. ein wenig trainiert).

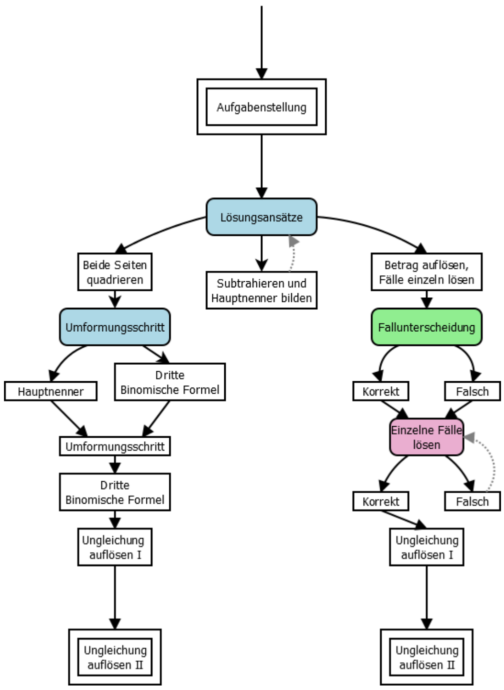


Abbildung 4.14: Ablaufdiagramm der zweiten BSA zu Betragsungleichungen

4.3.3 BSA zu rekursiven Folgen

In dieser BSA sind die zwei durch $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ und $b_1 = 19,\ b_{n+1} = \sqrt{5+4b_n}$ gegebenen rekursiven Folgen auf Konvergenz zu untersuchen und ggfs. der jeweilige Grenzwert zu bestimmen.

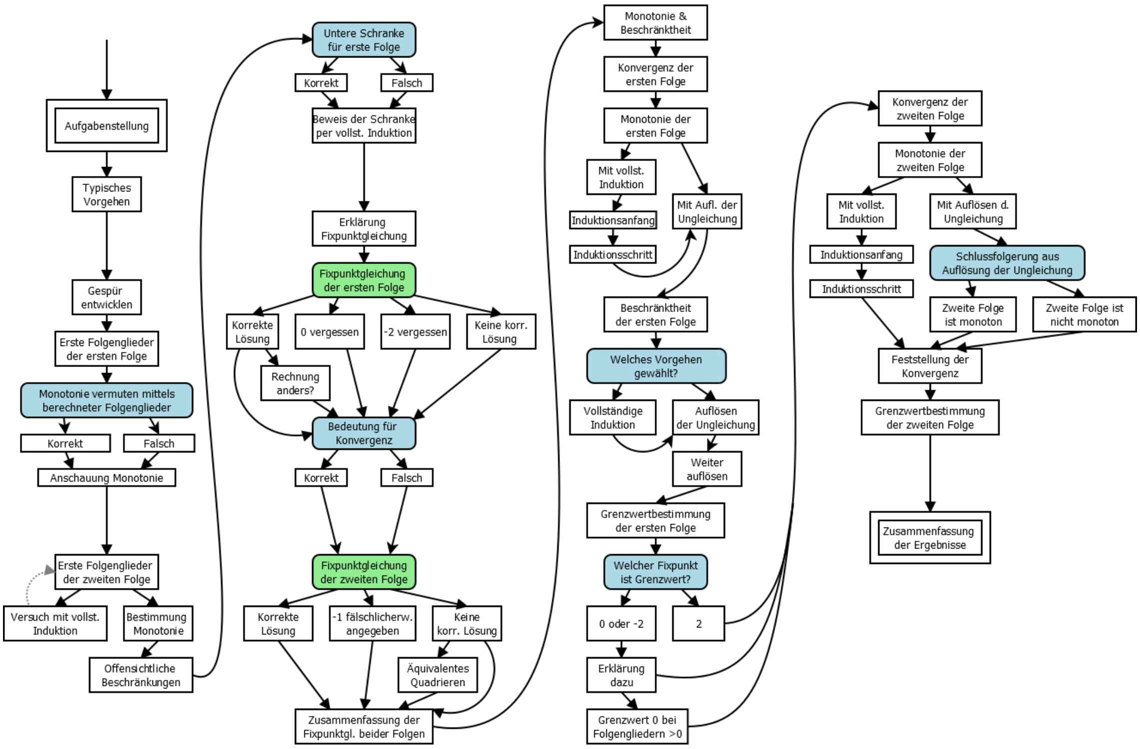


Abbildung 4.15: Ablaufdiagramm der BSA zu rekursiven Folgen

Herausforderung	**Abhilfe**
Heuristische Anfangsphase bei Aufgaben zu rekursiven Folgen verdeutlichen	Im Kontext von Mathematik-Erstsemesterveranstaltungen wird das Vorgehen bei rekursiven Folgen gelegentlich etwas verkürzt als „Zuerst Monotonie und Beschränktheit zeigen, dann Grenzwert mithilfe der Fixpunktgleichung bestimmen“ beschrieben. Dieser Merksatz lässt einige Details unerwähnt, mit denen man aber bei Aufgaben dieses Typs umgehen können muss – insbesondere, wie man sich überhaupt zwischen fallender bzw. steigender Monotonie entscheidet und eine untere bzw. obere Schranke findet. Zum Klären dieser Details ist der erste Teil der BSA für eine anfängliche heuristische Phase reserviert, die nötig ist, um „ein Gespür für die jeweilige Folge zu entwickeln“. Sie besteht im Wesentlichen aus dem expliziten Berechnen einiger erster Folgenglieder, dem Feststellen möglicher offensichtlicher Beschränkungen (oft so etwas wie $c_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$), und möglichst auch schon dem Lösen der Fixpunktgleichungen (hier $a = \frac{8a}{a^2+4}$ sowie $b = \sqrt{5+4b}$), da man daraus neben den potentiellen Grenzwerten auch Kandidaten für untere bzw. obere Schranken erhält. Die genannten heuristischen Schritte werden in der BSA jeweils direkt abwechselnd hintereinander für beide Folgen durchgespielt, wodurch verdeutlicht werden kann, dass auch die heuristische Anfangsphase aus oft recht gleichartig abzuarbeitenden Schritten besteht.
Korrekte Argumentation bzgl. Grenzwertexistenz fördern	Auch wenn es in der Vorlesung und anderen Präsenzveranstaltungen meistens angesprochen wird, kann man dennoch manchmal beobachten, dass Lerner fälschlicherweise allein aus der Lösbarkeit der Fixpunktgleichung die Konvergenz der Folge folgern und dabei einfach die von allen Lösungen am plausibelsten erscheinende als Grenzwert wählen. Zur Vorbeugung dieses Fehlverständnisses gibt es nach dem Lösen der Fixpunktgleichungen in der BSA eine Multiple-Choice-Frage dazu, was aus der Lösbarkeit der Fixpunktgleichung gefolgert werden kann – mit entsprechender Erklärung bei falscher Antwort.

Zwei Nachweismöglichkeiten für Monotonie bzw. Beschränktheit	Bei den typischen Aufgabenstellungen zu rekursiven Folgen gibt es für den Nachweis von Monotonie bzw. Beschränktheit hauptsächlich jeweils zwei Vorgehensweisen: Eine Möglichkeit ist vollständige Induktion, etwa mit Induktionsvoraussetzung $b_n \geq b_{n+1} = \sqrt{5 + 4b_n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, sodass im Induktionsschritt $b_{n+1} = \sqrt{5 + 4b_n} \geq \sqrt{5 + 4b_{n+1}} = b_{n+2}$ zu zeigen ist – was hier wegen der Monotonie der Wurzelfunktion fast trivial ist. Eine andere Möglichkeit ist direktes Lösen der zugehörigen Ungleichung, etwa $a_n \leq a_{n+1} \overset{\text{Def.}}{=} \frac{8a_n}{a_n^2+4} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_n \in [0, 2]$. So explizit wird das nicht immer erwähnt, sodass es einigen Studierenden in einer Klausursituation passieren kann, dass sie mit ihrer gewählten Methode nicht weiterkommen und gar nicht daran denken, dass man dann am besten einfach zur anderen Methode wechseln kann. Die BSA beschreibt explizit die beiden Methoden und klärt diesbezüglich auf. An entsprechenden Stellen soll auch der Nutzer per Multiple-Choice-Antwort entscheiden, welche Methode jeweils erfolgversprechend ist; stellt sich die Wahl auf folgenden Seiten als problematisch heraus, wird der Ansatz verworfen und stattdessen auf die andere Methode verwiesen.

4.3.4 Erste BSA zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt

Hier ist die durch $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x \sin x}, & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{3}{x} - \frac{3}{\tan x}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ gegebene Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Nullpunkt zu untersuchen.

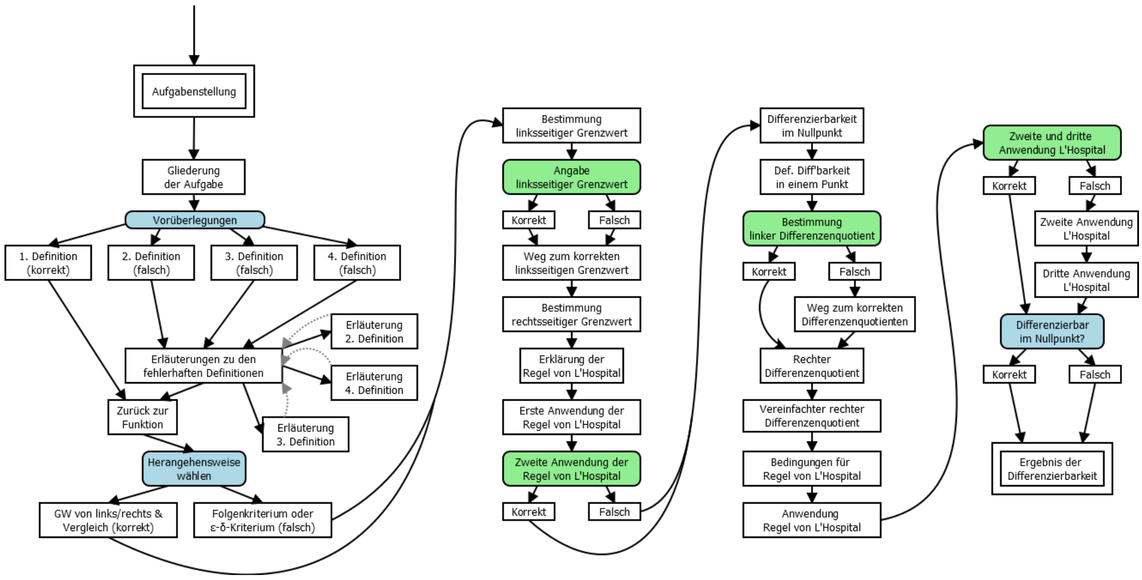


Abbildung 4.16: Ablaufdiagramm der ersten BSA zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt

Herausforderung	**Abhilfe**
Axiomatisches Stetigkeitskonzept wiederholen	Ein Fokus liegt in dieser BSA zunächst auf dem Stetigkeitsbegriff an sich. Unabhängig vom zu untersuchenden Funktionsterm nennt eine einleitende Multiple-Choice-Frage verschiedene Charakterisierungen von Stetigkeit, wobei in dreien von vier kleine Fehler sind. Der Nutzer soll alle korrekten Charakterisierungen auswählen; bei falscher Auswahl wird er auf passende Folge-Inhaltsseiten geleitet, auf denen jeweils erklärt wird, welches Detail der jeweiligen Stetigkeits-Charakterisierung falsch gewesen ist oder gefehlt hat.
Techniken für Grenzwerte bei Sinus-Kosinus-Termen in Brüchen kennen und anwenden	Als Hauptmethode zum Bestimmen von (einseitigen) Funktionsgrenzwerten von Bruchtermen wird in dieser BSA an den meisten Stellen die Regel von L'Hospital benutzt, und deren Anwendung exakt vorgeführt. An einer Stelle wird jedoch auch dargestellt, wie man den Grenzwert $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ manchmal zur Grenzwertbestimmung von Bruchtermen mit Sinusausdrücken nutzen kann.

4.3.5 Zweite BSA zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt

In dieser BSA wird die durch $f_\beta(x) = \begin{cases} \frac{\sinh^2(2x)}{x}, & x < 0 \\ \frac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)}, & x > 0 \end{cases}$, $\beta \in \mathbb{R}$ gegebene parameterabhängige Funktion auf stetige Ergänzbarkeit und ggfs. die stetig ergänzte Funktion auf Differenzierbarkeit im Nullpunkt untersucht – jeweils in Abhängigkeit von β.

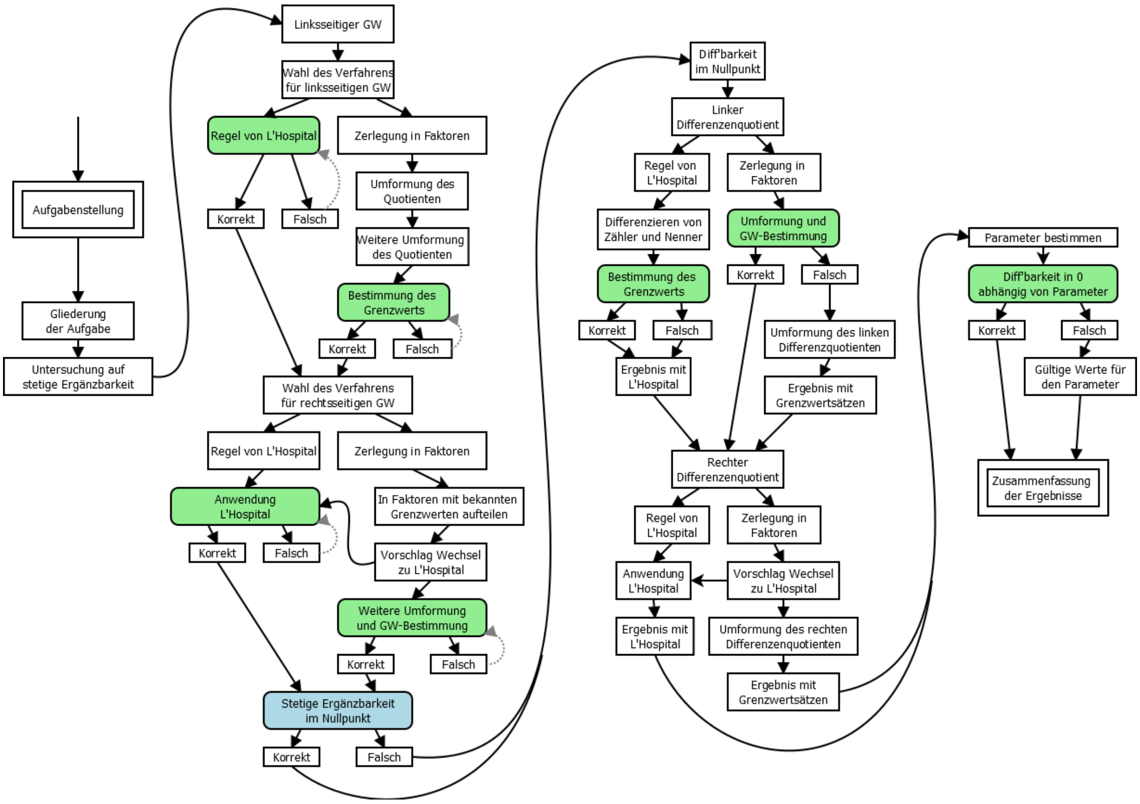


Abbildung 4.17: Ablaufdiagramm der zweiten BSA zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt

Herausforderung	**Abhilfe**
Sicheren Umgang mit komplizierteren Termen fördern	Während in der vorigen BSA noch eher das grundlegende Vorgehen im Fokus stand, geht es hier vor allem um rechnerische Feinheiten sowie darum, auch mit komplizierteren Termen (etwa mit Parameter im Funktionsterm so wie hier) sicher umgehen zu können. Zum einen werden hier wieder alle Rechnungen – die je nach Wahl des Nutzers ausgedehnte L'Hospital-Nutzung oder Grenzwerte der Art $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ o. ä. benutzen können – sehr kleinschrittig explizit mit den zugehörigen Überlegungen dargestellt. An einer späteren Stelle der BSA, wo ein zu untersuchender Ausdruck u. a. durch Bildung des Differenzenquotienten recht unübersichtlich geworden ist, wird dieser durch Farbgebung mit rot, blau und schwarz in übersichtliche Teilausdrücke unterteilt, wobei der Grenzwert des Gesamtausdrucks sich aus den Grenzwerten der Teilausdrücke herleiten lässt (siehe Abbildung 4.18). Im optimalen Fall wird dadurch der Lerner auch generell dazu angeregt, Ausdrücke mental in möglichen Unterteilungen wahrzunehmen zu versuchen.
Techniken zum Umgang mit Grenzwerten von Brüchen gegeneinander abwägen können	Die gleichen zwei Methoden wie schon in der vorigen BSA werden auch hier dargestellt, allerdings kann der Nutzer hier zwischen beiden auswählen und vergleichen. Zudem wird auf Inhaltsseiten explizit beschrieben, an welchen Einzelheiten man erkennen kann, wann das eine oder andere Vorgehen erfolgversprechender ist.
Axiomatisches Stetigkeits- und Differenzierbarkeitskonzept festigen	Die zu untersuchende Funktion stellt sich in der BSA als für alle reellen β stetig ergänzbar heraus, jedoch nur für bestimmte einzelne β differenzierbar. Die Berechnungen, für welche β der links- und rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten übereinstimmen, liefern eine weitere Facette zum Festigen des axiomatischen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitskonzepts.

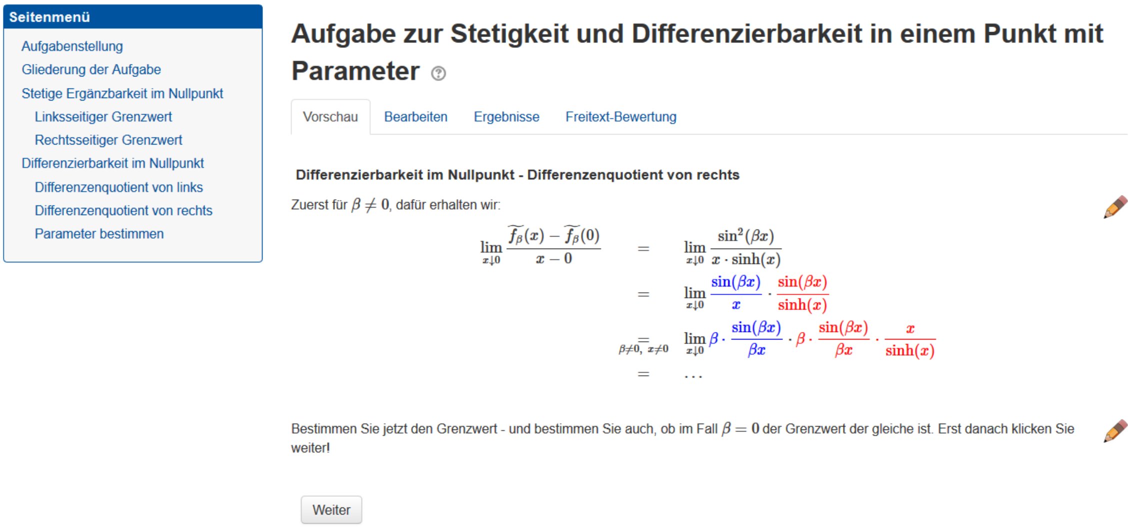


Abbildung 4.18: Inhaltsseite mit eingefärbten Teilausdrücken zur Verdeutlichung der Einteilung, Screenshot aus dem L^{2}P

4.3.6 Allgemeine Bemerkung zum Themenblock Differentialgleichungen

Ein Hauptproblem bei Klausuraufgaben zum gesamten Themenblock Differentialgleichungen ist, dass sie schlicht weniger bearbeitet werden – die Bearbeitungszahlen der jeweils zweiten Hälfte von Mathematik-II-Klausuren fallen meist deutlich geringer aus als die der ersten Hälfte. Eine mögliche Vermutung ist, dass diejenigen Studierenden, die diese Aufgaben nicht oder nur sehr wenig bearbeiten, sich vom Themengebiet Differentialgleichungen in wesentlichen Teilen überfordert fühlen und schon Hemmungen haben, sich überhaupt konzentriert durch den Stoff zu arbeiten – im Sinne von: „Das ist so kompliziert, da werde ich sowieso nicht durchblicken."

Tatsächlich sind die Sätze von Peano und von Picard-Lindelöf zur Existenz und Eindeutigkeit von DGL-Lösungen recht abstrakt, die Methoden zum Lösen bestimmter DGL-Typen oft eher unintuitiv. Arbeitet man sich aber einmal durch den Stoff, merkt man, dass sich die typischen Aufgabenstellungen alle im Wesentlichen rezeptartig lösen lassen. Das gilt für die Benutzung des Satzes von Picard-Lindelöf bei separablen DGLen ebenso wie für die jeweiligen Methoden zum Bestimmen von Lösungsgesamtheiten oder Anfangswertproblem-Lösungen für die verschiedenen behandelten DGL-Typen.

Entsprechend ist es didaktisches Hauptanliegen in allen BSAs zu diesem Themenblock, die für den jeweiligen DGL-Typ relevanten „Rezepte" durch übersichtliche explizite Beschreibung sowie exemplarisches „Durchexerzieren" anhand der gegebenen Aufgabenstellung dem Nutzer greifbar zu machen.

4.3.7 Erste BSA zu separablen Differentialgleichungen

In dieser BSA ist die Differentialgleichung $y'(t) = \cos(t) \cdot \sin^2(y(t))$ gegeben. Dazu sollen zunächst der Definitionsbereich sowie alle stationären Lösungen bestimmt werden. Anschließend ist zu dieser DGL das Anfangswertproblem (AWP) $y(0) = \frac{\pi}{2}$ auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu untersuchen sowie im Falle der Existenz eine Lösung dazu anzugeben.

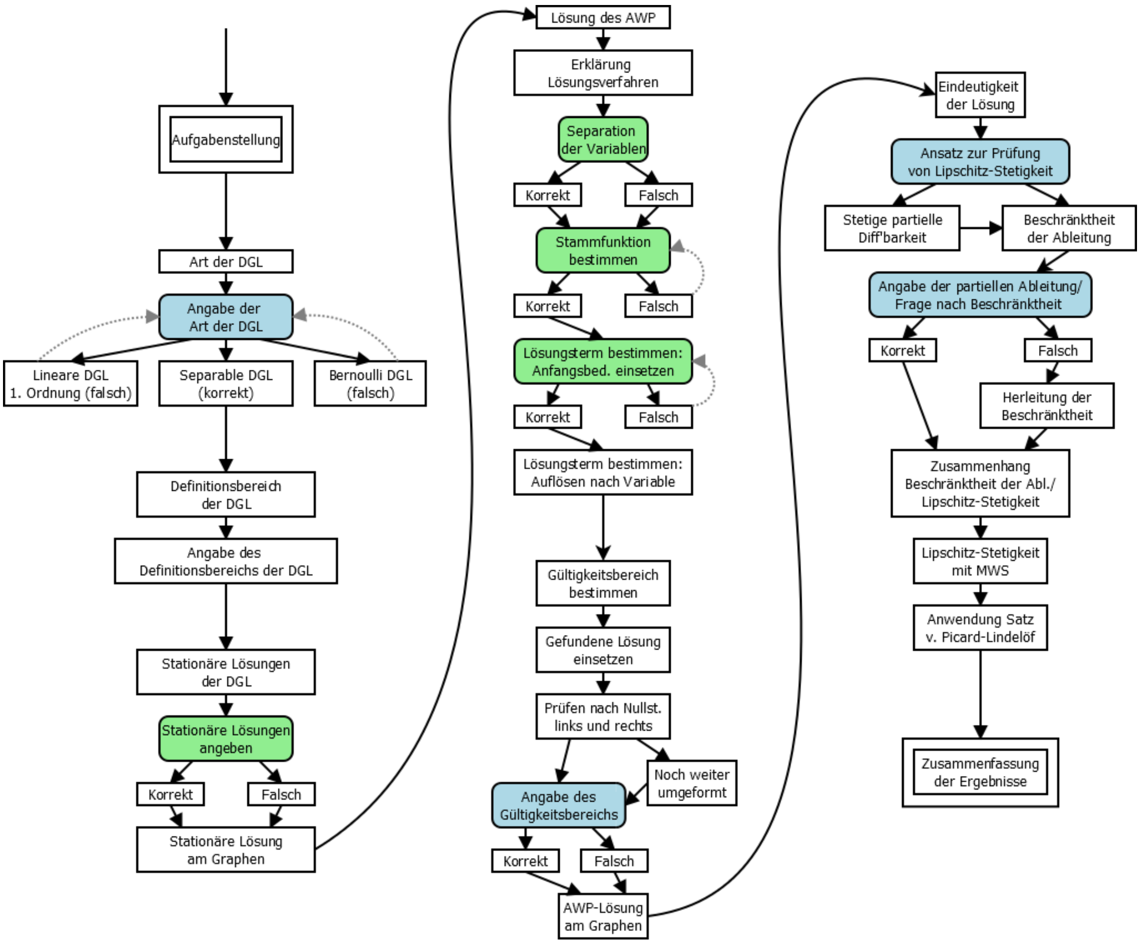


Abbildung 4.19: Ablaufdiagramm der ersten BSA zu separablen Differentialgleichungen

Herausforderung	Abhilfe
Bei einer gegebenen DGL den Typ erkennen	Muss man bei irgendeiner Problemstellung oder in einer Klausuraufgabe eine DGL lösen, so ist üblicherweise nicht von vornherein bekannt oder angegeben, um welchen „DGL-Typ“ es sich handelt bzw. ob und ggfs. welches Lösungsverfahren es dafür gibt. Man muss dies selbst erkennen. Die hier gegebene DGL ist separabel; der Name „Gewöhnliche Differentialgleichung 1“ dieser BSA im L²P-Lernraum ist aber so gewählt, dass er nicht den Typ der behandelten DGL verrät. Zu Anfang der BSA wird der Nutzer dann per Multiple-Choice gefragt, um welchen DGL-Typ es sich handelt. Bei einer falschen Antwort (z. B. „lineare DGL erster Ordnung“) wird auf einer zugehörigen Rückmeldungs-Seite im Detail erklärt, warum es sich nicht um den gewählten DGL-Typ handelt.
Prinzip der Separation der Variablen verinnerlichen und selbst herleiten können	Es ist nicht ganz leicht, die Lösung eines AWP $y'(t) = \omega(t) \cdot g\left(y(t)\right),\ y(t_0) = y_0$ für $g\left(y(t)\right) \neq 0$ rein aus dem Gedächtnis auf die Gleichung $\int \frac{1}{g(y(t))}\ \mathrm{d}y = \int \omega(t)\ \mathrm{d}t$ zurückzuführen. Um ein fehleranfälliges Erinnern als reine Formel im Notfall überflüssig zu machen sowie das begriffliche Verständnis der Separation der Variablen auszubauen, wird in der BSA bei der anfänglichen Beschreibung die Methode informell hergeleitet. Mit Nutzung der Leibniz-Notation $y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ erhält man grob $$\begin{aligned} & y'(t) &&= \omega(t) \cdot g\left(y(t)\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &&= \omega(t) \cdot g\left(y(t)\right) \\ \overset{g(y(t))\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{g\left(y(t)\right)} &&= \omega(t) \\ \Leftrightarrow\quad & \int \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{g\left(y(t)\right)}\ \mathrm{d}t &&= \int \omega(t)\ \mathrm{d}t + c \ \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{g\left(y(t)\right)}\ \mathrm{d}y &&= \int \omega(t)\ \mathrm{d}t + c \ \text{ für ein } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

	Das c wird nur zur Verdeutlichung dazugeschrieben, obwohl es implizit bereits in den unbestimmten Integralen „steckt"; so kann bereits an dieser Stelle der BSA darauf hingewiesen werden, dass später bei der Auflösung der Gleichung nach $y(t)$ das c wichtig sein wird. Außerdem wird angemerkt, dass man links einen nur von y und rechts einen nur von t abhängigen Ausdruck hat, wodurch sich der Name „Separation der Variablen" erklärt. Man erkennt auch, dass wegen der in der Äquivalenzumformung genutzten Bedingung die Gültigkeit der gefundenen AWP-Lösung in beide Richtungen nur solange gegeben ist, wie $g(y(t)) \neq 0$ gilt.
Entsprechungen zwischen rechnerischer und anschaulicher Ebene verdeutlichen	Grundsätzlich ist es mit bildlichen Vorstellungen zu Differentialgleichungen schon in einfachsten Fällen wie in dieser BSA recht „vertrackt", wobei sich abstrakte Schwierigkeiten u. a. daraus ergeben, dass man Veränderlichkeit sowohl in t als auch in $y(t)$ hat. Um die Vorstellungen dazu anschaulich zu unterstützen, werden in der BSA Lösungen zu verschiedenen AWPs und stationäre Lösungen der DGL (siehe Abbildung 4.20) sowie speziell die in der Aufgabenstellung gefragte AWP-Lösung (siehe Abbildung 4.21) in Richtungsfeldern veranschaulicht.
Lipschitz-Stetigkeit im Zusammenhang mit dem Satz von Picard-Lindelöf sehen	In der Veranstaltung werden im wesentlichen zwei Wege dargestellt, wie man bei einer DGL der Form $y'(t) = f(t,y)$ die Lipschitz-Stetigkeit von $f(t,y)$ in y etwas einfacher zeigen kann als allein mit der Definition: Ist $f(t,y)$ partiell differenzierbar nach y mit zugehöriger *beschränkter partieller Ableitung* für alle $y \in \mathbb{R}$, dann ist $f(t,y)$ global Lipschitz-stetig in y; oder aber ist $f(t,y)$ auf einem *abgeschlossenen und beschränkten Rechteck* stetig partiell differenzierbar nach y, dann ist $f(t,y)$ Lipschitz-stetig in y auf diesem Rechteck. Will man die globale Version des Satzes von Picard-Lindelöf (wie er in der Vorlesung behandelt wird) anwenden und globale Eindeutigkeit der gefundenen Lösung zeigen, muss man vorher die globale Lipschitz-Stetigkeit von $f(t,y)$ in y nachgewiesen haben – dafür kommt also nur die erste der beiden beschriebenen Methoden in Frage. Reicht einem dagegen die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf und somit die lokale Eindeutigkeit der Lösung aus, kann ggfs. auch die zweite Methode für die Lipschitz-Stetigkeit zielführend sein.

	Zu ebendiesem Sachverhalt gibt es in dieser BSA eine Multiple-Choice-Frageseite, auf der der Nutzer entscheiden soll, welche Methode zum Nachweis der Lipschitz-Stetigkeit hier vorzuziehen ist. Die hier gefundene Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ gültig und kommt entsprechend für eine Untersuchung auf globale Eindeutigkeit in Frage; deshalb ist hier der Ansatz über die globale Beschränktheit der partiellen Ableitung nach y vorzuziehen, womit man ggfs. den Satz von Picard-Lindelöf in seiner globalen Version anwenden kann. Auf der Folgeseite wird dies je nach richtiger oder falscher Auswahl passend zurückgemeldet.

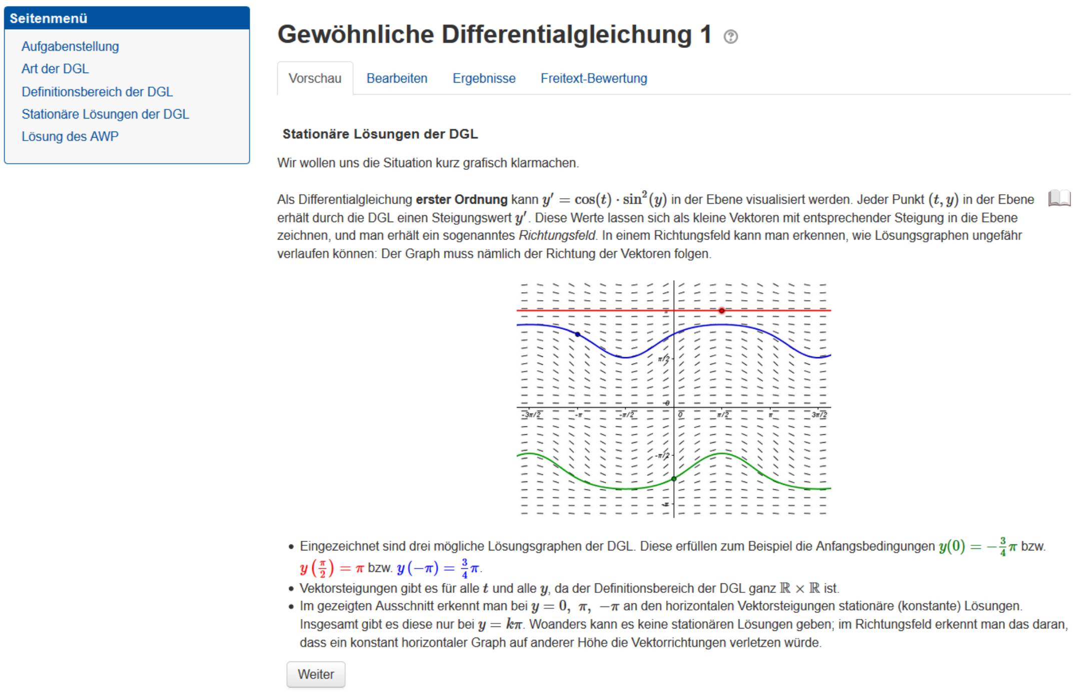


Abbildung 4.20: Inhaltsseite mit Richtungsfeld und eingezeichneten Lösungen für verschiedene AWP, Screenshot aus dem L^{2}P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra

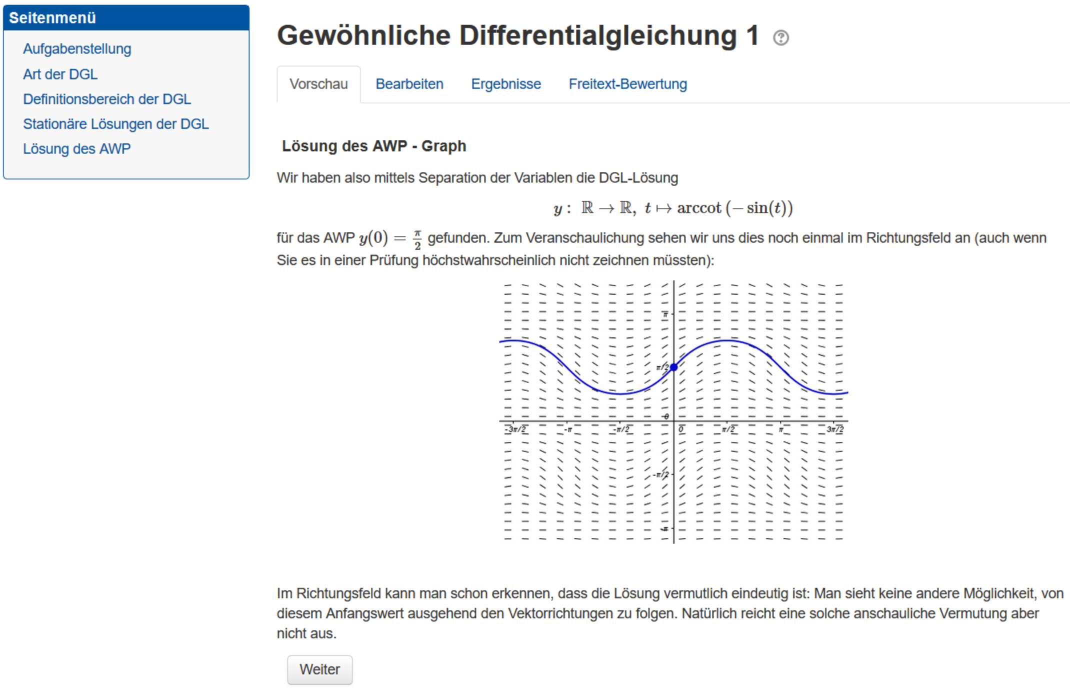


Abbildung 4.21: Inhaltsseite mit Richtungsfeld und eingezeichneter gefundener AWP-Lösung, Screenshot aus dem L^2P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra

4.3.8 Zweite BSA zu separablen Differentialgleichungen

Hier ist die Differentialgleichung $y'(t) = \frac{\pi}{2} e^{2t} \cdot \sqrt{1-(y(t))^2}$ auf den Definitionsbereich, stationäre Lösungen sowie auf die Existenz von Lösungen zum zugehörigen AWP $y(0) = 0$ zu untersuchen. Diese BSA ist also ähnlich aufgebaut wie die zuvor beschriebene; allerdings sind der Term der DGL und das AWP diesmal so gewählt, dass die gefundene Lösung sich als nicht auf ganz $\mathbb{R}$, sondern nur auf $(-\infty, \frac{\ln(3)}{2})$ gültig herausstellt. Dieser im Vergleich zur vorigen Aufgabe neue und mit etwas schwierigerer Rechnung verbundene Sachverhalt wird – neben anderen ähnlichen Veranschaulichungen im Verlauf der BSA – wieder anhand eines Richtungsfelds illustriert, in dem der Graph der gefundenen Lösung ab $t = \frac{\ln(3)}{2}$ sichtlich die Vektorrichtungen „verletzt“ (siehe Abbildung 4.23).

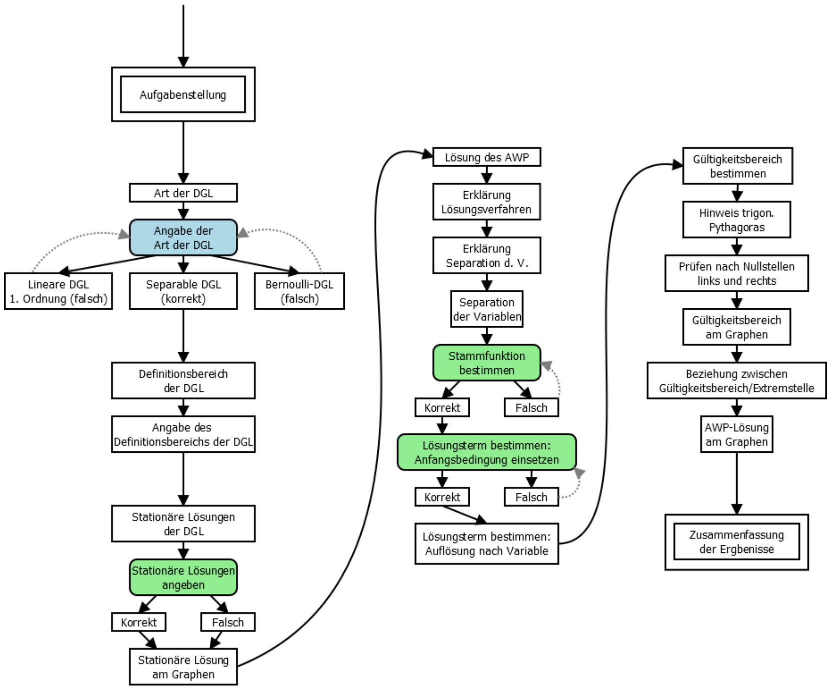
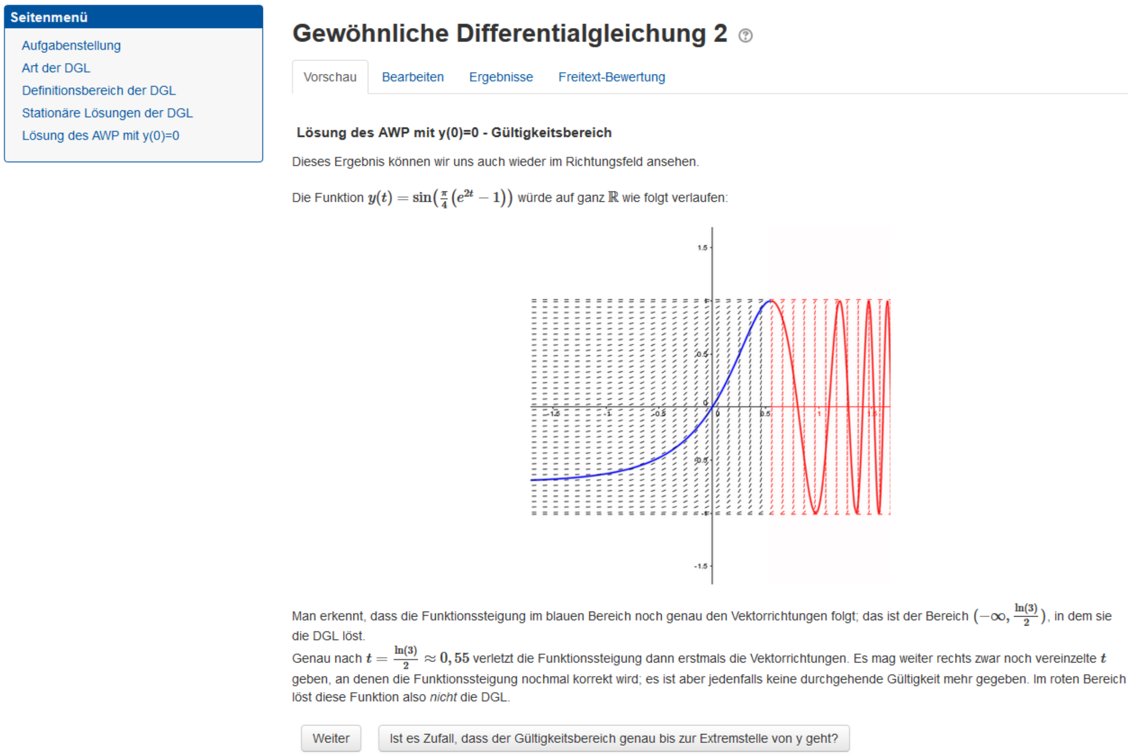


Abbildung 4.22: Ablaufdiagramm der zweiten BSA zu separablen Differentialgleichungen



Seitenmenü

Aufgabenstellung

Art der DGL

Definitionsbereich der DGL

Stationäre Lösungen der DGL

Lösung des AWP mit y(0)=0

Gewöhnliche Differentialgleichung 2

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Dieses Ergebnis können wir uns auch wieder im Richtungsfeld ansehen.

Die Funktion $y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t} - 1\right)\right)$ würde auf ganz $\mathbb{R}$ wie folgt verlaufen:

Man erkennt, dass die Funktionssteigung im blauen Bereich noch genau den Vektorrichtungen folgt; das ist der Bereich $\left(-\infty, \frac{\ln(3)}{2}\right)$, in dem sie die DGL löst.

Genau nach $t = \frac{\ln(3)}{2} \approx 0,55$ verletzt die Funktionssteigung dann erstmals die Vektorrichtungen. Es mag weiter rechts zwar noch vereinzelte t geben, an denen die Funktionssteigung nochmal korrekt wird; es ist aber jedenfalls keine durchgehende Gültigkeit mehr gegeben. Im roten Bereich löst diese Funktion also *nicht* die DGL.

Weiter | Ist es Zufall, dass der Gültigkeitsbereich genau bis zur Extremstelle von y geht?

Abbildung 4.23: Inhaltsseite mit Richtungsfeld, wobei die eingezeichnete gefundene AWP-Lösung ab dem rotgezeichneten Bereich nicht mehr gültig ist, Screenshot aus dem L^{2}P, Illustration erstellt mithilfe der Software GeoGebra

4.3.9 BSA zu linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung

In dieser BSA soll die Lösungsgesamtheit der DGL $y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}$ sowie die Lösung des zugehörigen AWP $y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = \frac{1}{2}$ bestimmt werden. Solche linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit einer relativ simplen Inhomogenität (mehr dazu in der folgenden Tabelle) sind ein Beispiel für rezeptartig lösbare DGLen wie in Unterabschnitt 4.3.6 beschrieben. Entsprechend wird in dieser BSA wieder ein didaktischer Schwerpunkt aufs Verdeutlichen des „Rezepts“ gelegt.

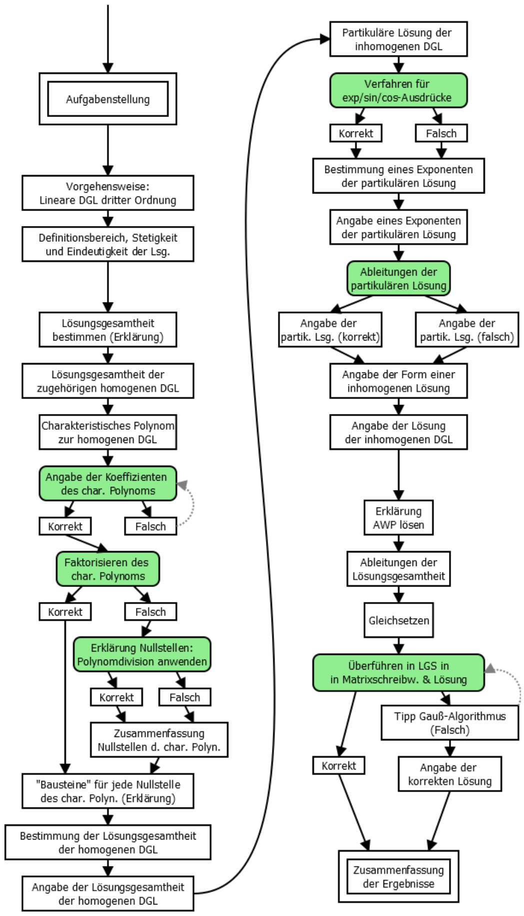


Abbildung 4.24: Ablaufdiagramm der BSA zu linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung

<table>
<tr><th>Herausforderung</th><th>Abhilfe</th></tr>
<tr><td>Lösungsschritte im Großen überblicken können</td><td>Am Anfang der BSA wird das grobe Vorgehen bei einer DGL dieser Art schlicht als Auflistung dargestellt:

• Definitionsbereich der DGL sowie Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des AWP klären
• Lösungsgesamtheit der DGL bestimmen
  – Lösungsgesamtheit der homogenen DGL bestimmen
  – Partikuläre Lösung bestimmen
  – Zusammensetzen der Lösungsgesamtheit
• Anfangswertproblem lösen

Zu Beginn des Abschnitts „Lösungsgesamtheit der DGL bestimmen“ gibt es eine eigene Inhaltsseite, die im Detail darstellt, dass bei inhomogenen linearen DGLen höherer Ordnung alle Funktionen der Lösungsgesamtheit die Form $y = y_p + y_h$ haben, wobei y_p eine beliebige aber feste Lösung der gegebenen inhomogenen DGL ist und y_h eine der unendlich vielen Lösungen der zugehörigen homogenen DGL (bei der man die Inhomogenität weglässt).</td></tr>
</table>

„Rezepte“ für die Einzelschritte kennen und anwenden	Erster Schritt in Richtung Lösungsgesamtheit ist das Bestimmen aller Lösungen zur zugehörigen homogenen DGL $y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 0$. Nach zwei Frageseiten, auf denen der Nutzer das charakteristische Polynom zur homogenen DGL und dessen Faktorisierung $(\lambda + 1)(\lambda - 3)^2$ angeben muss – mit jeweils sehr kleinschrittigen Hilfswegen zu allen Einzelschritten im Falle einer falschen Antwort – wird detailliert erklärt, wie man aus dem faktorisierten charakteristischen Polynom die Lösungen der homogenen DGL ablesen kann: Jede reelle Nullstelle a mit Vielfachheit p bekommt als „Baustein“ die Summe $\gamma_0\, t^0 e^{at} + \gamma_1\, t^1 e^{at} + \ldots + \gamma_{p-1}\, t^{p-1} e^{at},\ \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1} \in \mathbb{R}$, und durch Addition all dieser „Bausteine“ von jeder Nullstelle erhält man alle Lösungen der homogenen DGL. Anhand des gegebenen Terms wird dies dann exemplarisch dargestellt. Dabei ist der Term in der BSA einerseits so gewählt, dass hier keine komplexen Nullstellen vorkommen, da sie trotz Darstellung im Vorlesungsskript in den Aufgaben meistens nicht auftauchen. Andererseits ist der Term so gewählt worden, dass zumindest eine Nullstelle Vielfachheit größer als 1 hat, um die Baustein-Zusammensetzung durchspielen zu können; eine größere Vielfachheit wäre zwar dafür noch besser gewesen, hätte aber die vorige Faktorisierung und spätere Rechnungen in der Aufgabe unnötig verkompliziert.

Beim Bestimmen der partikulären Lösung y_p kommt die Inhomogenität $2e^{3t}$ ins Spiel. Für beliebige Inhomogenitäten ist das Bestimmen einer partikulären Lösung nicht trivial (vgl. [36], S. 108); ist die Inhomogenität jedoch ein Polynom oder ein spezieller exp-sin-cos-Mischterm, gibt es einfachere Verfahren. Hier wurde ein exp-Term gewählt, da das Verfahren für eine exp-sin-cos-Mischterm-Inhomogenität etwas komplizierter ist als das für Polynom-Inhomogenitäten und somit für ein exemplarisches Durchspielen in der BSA vorzuziehen ist. Die Inhomogenität hätte sogar noch allgemeiner von der Form $e^{\kappa t} \cdot (b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t))$ gewählt werden können; allerdings wären dadurch wieder die späteren Rechnungen auf ein für eine BSA unpassendes Maß verkompliziert worden, weshalb darauf verzichtet wurde. Jedenfalls ist eine eigene Frageseite in der BSA genau dafür reserviert, dass der Nutzer angeben muss, ob und ggfs. wie $\kappa, \omega, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ zu wählen sind, um die Inhomogenität in die genannte Form zu bringen (mit korrekter Antwort $\kappa = 3,\ \omega = 0,\ b_2 = 2,\ b_1 \in \mathbb{R}$ beliebig).

Nach dem „Rezept“ aus dem Vorlesungsskript weiß man, dass y_p die Form $t^r e^{\kappa t} \cdot (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) = c_2 \cdot t^r e^{3t}$ haben muss. Es sind also noch r und c_2 zu bestimmen. Auf einer Inhaltsseite wird erklärt, warum man besser zuerst r bestimmt, und dass r gegeben ist durch die Vielfachheit der Nullstelle $k + i \cdot \omega$ im charakteristischen Polynom von zuvor, bzw. 0 falls $k + i \cdot \omega$ gar keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Damit erhält man $r = 2$. Anschließend wird noch c_2 bestimmt, indem die Ableitungen von $y_p = c_2 \cdot t^2 e^{3t}$ ausgerechnet und in die DGL eingesetzt werden. Die entstehende Gleichung (mit sehr langen Termen) lässt sich nach c_2 auflösen. Ebendies wird vom Nutzer gefordert, den Wert für c_2 soll er auf einer Kurzantwort-Frageseite eingeben; im Falle einer falschen Antwort kommt er auf eine Hilfsseite, auf der im Detail dargestellt wird, wie man die Gleichung aufstellt und diese nach c_2 auflöst.

	Zur gefundenen Lösungsgesamtheit $y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t) = \frac{1}{4}\,t^2\,e^{3t} + \alpha_1\,e^{-t} + \alpha_2\,e^{3t} + \alpha_3\,t\,e^{3t},\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, ist dann noch das AWP zu lösen. Dies geschieht per Ausrechnen der Ableitungen von $y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t)$, Einsetzen der Werte des AWP und schließlich Lösen des entstehenden linearen Gleichungssystems. Das letztere wird wieder vom Nutzer gefordert, der die Werte für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ auf einer Kurzantwort-Frageseite eingeben soll. Bei einer falschen Antwort wird der Rechenweg kleinschrittiger vorgestellt.
Grundlegende Fertigkeiten nutzen und üben	Aufgaben zu linearen DGLen höherer Ordnung erfordern in recht hohem Maße die Beherrschung von Grundfertigkeiten: Nullstellen eines Polynoms bestimmen, ggfs. mit Polynomdivision, konzentriertes Lösen von großen Gleichungen, wiederholtes Ableiten, Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme. Wie zuvor beschrieben, werden diese in der BSA jeweils per Frageseiten vom Nutzer gefordert und ggfs. kleinschrittig dargestellt.

4.3.10 BSA zu homogenen linearen Systemen von DGLen

Hier ist die Lösungsgesamtheit des DGL-Systems $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$ zu bestimmen.

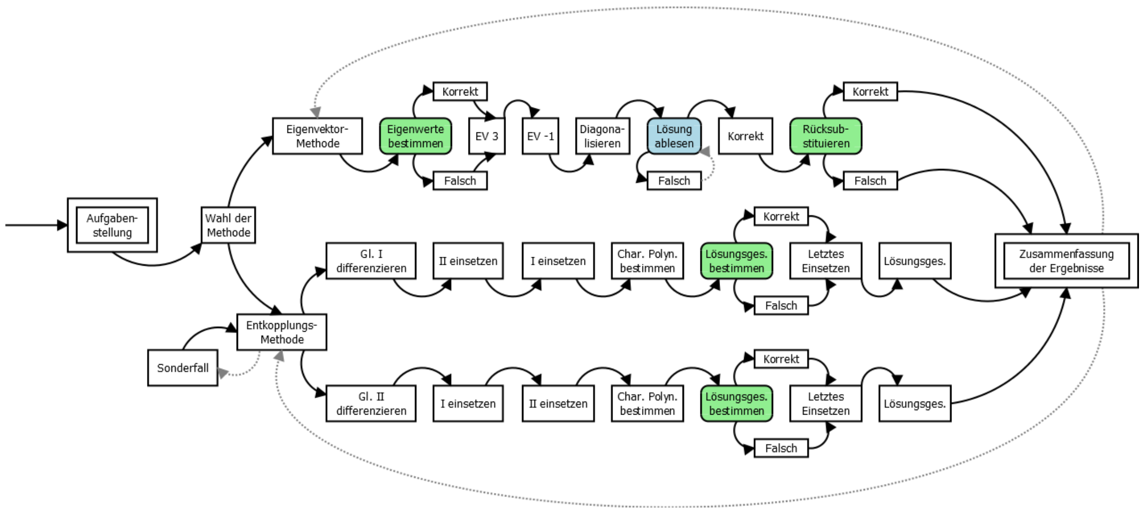


Abbildung 4.25: Ablaufdiagramm der BSA zu homogenen linearen Systemen von DGLen

Herausforderung	Abhilfe
Die beiden Lösungsmethoden anwenden und gegeneinander abwägen können	Zum Lösen eines homogenen linearen 2×2-DGL-Systems wie in dieser Aufgabe lernen die Studierenden in der Veranstaltung zwei Verfahren kennen: Erstens hat man die Eigenvektormethode, die nur bei Diagonalisierbarkeit des Systems möglich ist, bei der das DGL-System durch Basiswechsel auf Diagonalgestalt gebracht wird und die Lösungsgesamtheit dann einfach durch additives Zusammensetzen aus den Lösungen der Einzel-Gleichungen zu erhalten ist. Zweitens hat man die Entkopplungsmethode, bei der man durch geschicktes Differenzieren der Einzelgleichungen und abwechselndes Einsetzen das DGL-System auf eine einzelne lineare DGL höherer Ordnung überführt. (In der Literatur wird manchmal auch die erste Methode als Entkopplungsmethode bezeichnet, vgl. etwa [69], S. 448; hier werden die Ausdrücke aus dem Vorlesungsskript der Veranstaltung genutzt.) In der BSA werden beide Methoden durchgespielt, mit expliziten Bemerkungen am Anfang, wann sich welche Methode eignet. Zu Beginn entscheidet sich der Nutzer für eine der beiden, kann jedoch nach Abschluss der Methode kurz vor Ende der BSA die andere Methode durchgehen, um auch hierüber etwas zu lernen und den Aufwand vergleichen zu können. Speziell bei der Entkopplungsmethode wird explizit beschrieben, dass es – wenn wie hier beide Gleichungen sowohl y_1 als auch y_2 enthalten – egal ist, welche der beiden Gleichungen man fürs anfängliche Differenzieren auswählt. Es können dann auch beide Möglichkeiten als eigene Wege durchgespielt werden, und man sieht, dass beide völlig analog ablaufen. Auf einer eigenen Inhaltsseite wird außerdem als Gedankenspiel ein anderslautendes DGL-System genannt, bei dem es nicht egal ist, welche Gleichung man fürs anfängliche Differenzieren auswählt, und warum das dort so ist.

	Am Ende der Entkopplungsmethode erhält man die Lösungsgesamtheit $$\begin{aligned} y_1(t) &= \alpha \cdot (-5) \cdot e^{3t} + \beta \cdot (-1) \cdot e^{-t}, \\ y_2(t) &= \alpha \cdot e^{3t} + \beta \cdot e^{-t}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$ Es wird explizit darauf hingewiesen, dass α und β in beiden Gleichungen übereinstimmen müssen; um das besser zu sehen, empfiehlt sich die Schreibweise $$\vec{y} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Grundlegende Fertigkeiten nutzen und üben	Wie schon bei der vorigen BSA ist auch beim Lösen von linearen DGL-Systemen eine Reihe von Grundfertigkeiten und Grundwissen nötig: Bei der Eigenvektormethode das charakteristische Polynom einer Matrix bestimmen, Eigenvektoren bestimmen und die zugehörige Basiswechsel-Matrix aufstellen, die Lösungen der grundlegenden DGL $y'(t) = \alpha \cdot y(t),\ \alpha \in \mathbb{R}$ kennen; bei der Entkopplungsmethode der „manuelle“ Umgang mit linearen Gleichungen und das Faktorisieren von Polynomen.

4.4 Abschließende Bemerkungen zu den BSAs aus didaktischer Sicht

Sicherlich sind die einzelnen Baumstrukturaufgaben für ihr jeweiliges Thema nicht „didaktisch erschöpfend“. Als Beispiele dafür: In der zweiten BSA zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit hätte man noch die Schwierigkeit ansprechen können, dass es sich beim Term der Aufgabe letztlich um eine Funktionenschar handelt, und dass die Lerner somit einerseits die Veränderlichkeit in x und andererseits die Abhängigkeit von β im Blick haben müssen. Denkbar wären etwa Illustrationen des Funktionsgraphen für verschiedene β im Koordinatensystem – optimalerweise so, dass sich die stetige Ergänzbarkeit für alle $\beta \in \mathbb{R}$ und die Differenzierbarkeit nur für $\beta \in \{-2, 2\}$ erkennen lässt. Bei den BSAs zu linearen DGLen höherer Ordnung und zu homogenen linearen Systemen von DGLen hätte man – ebenso wie in den beiden BSAs zu separablen DGLen – wieder die Anschauung mithilfe von Richtungsfeldern und darin eingezeichneten Lösungen hinzuziehen können. Ein vollständiges Einbringen aller denkbaren didaktischen Mittel und Wege in jeder einzelnen BSA wäre möglicherweise auch übermäßig aufwendig aus Entwicklersicht sowie potentiell mental ermüdend für Aufgabennutzer.

Andererseits ist beim Lesen dieses Kapitels vielleicht bereits aufgefallen, dass – teils über die in Kapitel 3 beschriebenen Konzepte hinaus – einige stoffübergreifende didaktische Vorgehensweisen immer wieder in den BSAs auftauchen. Dazu zählen etwa folgende:

- Ermöglichen und „Durchspielen“ verschiedener Lösungswege, die ggfs. auch in Bezug auf Zielerreichung, Schnelligkeit, Aufwand etc. miteinander verglichen werden (etwa in den BSAs zur Reihenkonvergenz, zur Partialbruchzerlegung, zur analytischen Geometrie, der zweiten zu Betragsungleichungen, u. a.)

- Anregen oder Auffordern zum eigenständigen Lernen und Üben – einschließlich Ansatzfinden, Rechnen auf Papier, Nachschlagen etc. (praktisch in jeder BSA)

- Konstruktives Feedback gerade auch bei Fehlern, im Sinne von „Dein Ansatz war richtig, aber wahrscheinlich hast du diesen Aspekt übersehen“, „Dieses Vorgehen ist hier vermutlich nicht das beste, aber wir können ausprobieren, was beim weiteren Verfolgen passiert“, „Dieses Konzept solltest du noch einmal genauer nachschlagen/ansehen/üben“ usw. (ebenfalls in praktisch jeder BSA)

- Explizites Behandeln von Ausprobier- bzw. Nebenrechnungs-Phasen (etwa in den BSAs zur Reihenkonvergenz und zu rekursiven Folgen)

- Kleinschrittige Darstellung der gesamten Rechen- und Argumentationswege – ohne große Lücken, bei denen sich Nutzer fragen könnten, was an diesem Punkt im Lösungsprozess passiert oder zu tun ist (in praktisch jeder BSA)
- Aufzeigen von Gesetzmäßigkeiten, von rezepthaft lösbaren Aufgabenteilen, überhaupt von nützlichem Metawissen bzgl. des Lösens bestimmter Aufgabentypen (etwa in den BSAs zur Partialbruchzerlegung, zu rekursiven Folgen, zu den verschiedenen DGLen, u. a.)
- „Was wäre, wenn...?“- Fragen, bei denen man überlegen muss, was sich am Lösungsweg ändert, wenn man den Ausgangsterm etwas manipuliert (etwa in den BSAs zur analytischen Geometrie und zu homogenen linearen Systemen von DGLen).
- Grafische Veranschaulichungen zu Rechen- oder Argumentationsschritten, Termen, geometrischen Sachverhalten etc., ggfs. mit Aufzeigen der Verbindungen zwischen beiden Ebenen (etwa in den BSAs zur analytischen Geometrie, zu Betragsungleichungen, zu separablen DGLen, u. a.)
- Benennen, was für die schriftliche Lösung aufzuschreiben ist (in den meisten BSAs)
- ...

Im Ganzen liegt aus Sicht des Autors ein „runder“ Aufgabenpool vor – in dem Sinne, dass, wer wenigstens ein paar BSAs benutzt, auch mit den meisten oder allen oben aufgelisteten Aspekten in Berührung kommt. Dies allein kann bereits eine positive Wirkung auf das Verständnis oder auf weiteres Lernverhalten haben. Die genauere Evaluation der BSA-Nutzung ist jedenfalls Thema des folgenden Kapitels.

Kapitel 5

Nutzung und Evaluation

Anhand von anonymen, im Rahmen der Veranstaltung erhobenen Daten ist über die Semester die Baumstrukturaufgaben-Nutzung statistisch ausgewertet worden. Dieses Kapitel erläutert das Vorgehen dazu und stellt die Auswertungs-Ergebnisse vor. Die vier nachfolgenden Abschnitte dieses Kapitels entsprechen den wesentlichen Teilen der Untersuchung (siehe auch die Punkte unter „Zur Untersuchung“ in der Tabelle im Abschnitt 3.5):

- Zur Untersuchung der Nutzungsquote der BSAs sind die BSA-Nutzungszahlen pro Semester erhoben worden, sowohl unter der Gesamt-Hörerschaft als auch speziell unter den „mittleren“ Studierenden in den ausgewählten Wintersemestern.
- Zur Untersuchung der BSAs als E-Learning-Produkt ist am Ende jedes Sommersemesters eine an die BSA-Nutzer gerichtete Studierendenumfrage durchgeführt worden.
- Als ein Teil der Untersuchung zur Wirkung von BSA-Bearbeitung sind Korrelationen zwischen Aufgabenbearbeitung und erreichter Klausurpunktzahl berechnet und miteinander verglichen worden.
- Der andere Teil der Untersuchung zur Wirkung von BSA-Bearbeitung hat darin bestanden, die Durchschnitts-Klausurpunktzahlen von BSA-Nutzern und BSA-Nichtnutzern nach voriger Eingruppierung in Leistungsgruppen durch einen Vortest miteinander zu vergleichen.

5.1 Daten und Zahlen zur Nutzung der BSAs im Kurs

In diesem Abschnitt wird zunächst beschrieben, wie die BSAs im Übungsbetrieb der Veranstaltung eingesetzt worden sind und wie die Rahmenbedingungen für BSA-Nutzung ausgesehen haben, um danach die Nutzungszahlen pro Semester im Detail darzustellen und daraus Folgerungen zu ziehen. Für einen schnellen Einblick können geneigte Leser direkt zu letzterem springen; die Tabelle mit den Nutzungszahlen sowie die anschließenden Beobachtungen finden sich ab S. 165.

5.1.1 Einflechtung der BSAs in den Übungsbetrieb

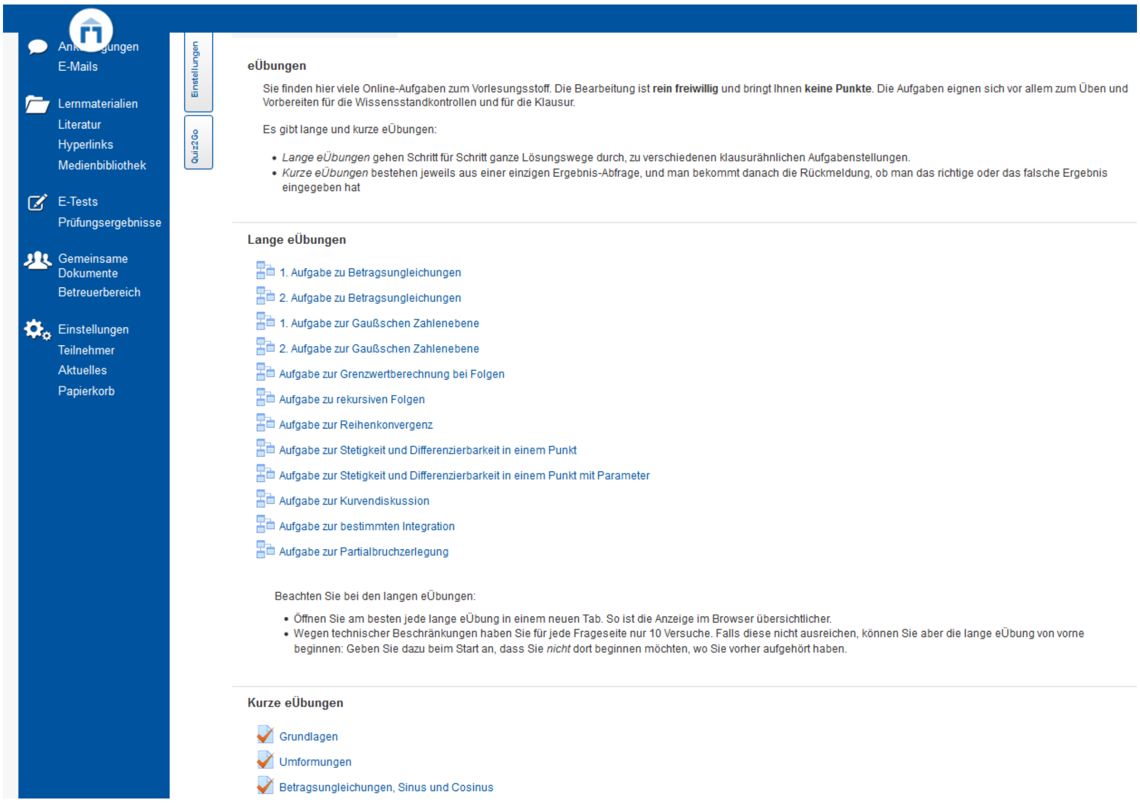


Abbildung 5.1: Screenshot der BSA-Übersicht im L²P-Lernraum zum WiSe 16/17, als „lange eÜbungen", mit den nun freiwilligen eTests weiter unten als „kurze eÜbungen"

Seit ihrer ersten Freischaltung im WiSe 2012/2013 sind die BSAs durchgehend ein rein freiwilliges Angebot geblieben: Im ersten Jahr ihrer Nutzung – WiSe 2012/2013 und SoSe 2013 – wurden die BSAs noch nach und nach im Verlauf der Vorlesungszeit für die Studierenden geöffnet. Im Zwei-Wochen-Takt wurde mal eine freiwillige schriftliche Hausaufgabe zum Lösen auf Papier veröffentlicht, mal eine neue BSA zum freiwilligen Bearbeiten am Computer freigeschaltet. Einige Wochen vor der Klausur wurden dann auch alle restlichen BSAs als Angebot zum Üben geöffnet. Seit dem WiSe 2013/2014 stehen jedoch einfach immer vom Anfang des Semesters an alle BSAs im L^2P-Lernraum permanent zur freiwilligen Nutzung offen. Und während die Studierenden zumindest in einzelnen Semestern mal mit schriftlichen Hausaufgaben, mal mit bestimmten eTests Bonuspunkte für die eigene Klausurnote erhalten konnten, hat es für die BSA-Bearbeitung nie eine derartige extrinsische Motivation gegeben.

Die Information über das BSA-Angebot erhalten die Studierenden hauptsächlich auf zwei Wegen: Zum einen auf dem Gesamt-Informationsblatt zur Veranstaltung, welches ab Beginn des Semesters sowohl ausgehängt als auch im L^2P-Lernraum zum Download verfügbar ist, zum anderen als mündliche Hinweise in Präsenzangeboten. In den Semestern, in denen die eTests noch für die Klausurzulassung verpflichtend waren, wurden ca. 1 Monat vor der Klausur auch individualisierte Rundmails an die Studierenden verschickt, falls sie bei bestimmten Themen im eTest nur wenige Punkte erzielt hatten, mit dem Hinweis, dass sie ihre Kenntnisse mithilfe der jeweils passenden BSAs ausbauen könnten.

Die Bezeichnung der BSAs innerhalb der Veranstaltung hat sich im Verlauf der Semester etwas geändert. Der Name „Baumstrukturaufgabe", welcher das Alleinstellungsmerkmal der antwortabhängigen Verzweigung betont, ist immer nur von den Projektbeteiligten und etwa für Forschungspublikationen genutzt worden. Für die Studierenden sollte der Name dagegen nur das digital gestützte, eigenständige Aufgabenlösen betonen. In den ersten Semestern wurde dafür die Bezeichnung „eHAs" bzw. „elektronische Hausaufgaben" gewählt, in Anlehnung an die schriftlichen Hausaufgaben und in Abgrenzung von den eTests, die mehr zum Abfragen von Grundkenntnissen als zum Aufbau von Wissen oder Verständnis des Stoffs konzipiert worden sind. Seit die Wissensstandkontrollen die eTests zur Klausurzulassung abgelöst haben und die eTest-Aufgaben neben den BSAs freiwillig zum Üben im L^2P-Lernraum verfügbar sind (siehe auch Abbildung 5.1), wird dagegen übergreifend für die beiden digitalen Angebote die Bezeichnung „eÜbungen" genutzt, wobei „lange eÜbungen" für die BSAs und „kurze eÜbungen" für die eTests steht. Der Hauptgrund für diese Bezeichnung besteht darin, dass die Studierenden ohnehin mit einer Vielzahl verschiedener freiwilliger oder verpflichtender Übungselemente konfrontiert sind, weshalb die Bezeichnungen so einfach und zusammenfassend wie möglich gewählt werden sollten.

5.1.2 Nutzungszahlen im Verlauf der Semester

Ein erster Teil der BSA-Evaluation besteht in der Untersuchung, in welchem Ausmaß das Angebot genutzt worden ist. Die relevantesten Zahlen und Vergleichswerte dazu sind weiter unten in Tabelle 5.1 zusammengefasst, mit folgenden Gesichtspunkten:

- Die **Größe der Grundgesamtheit** im jeweiligen Semester.
- Der **Anteil an BSA-Nutzern**, also denjenigen, die mindestens eine BSA geöffnet aber nicht notwendigerweise bis ganz zum Ende bearbeitet haben.
- Der Anteil an Studierenden, die **mindestens eine BSA bis zum Ende bearbeitet** haben.
- Der Anteil derjeniger, die **die Hälfte der in diesem Semester verfügbaren BSAs geöffnet** haben (bei ungerader BSA-Gesamtzahl wird die Hälfte nach oben abgerundet).
- Der Anteil derjeniger, die **alle in diesem Semester verfügbaren BSAs** geöffnet haben.
- Die **Größe der Gruppe der mittleren Studierenden** im jeweiligen Semester (mehr dazu siehe weiter unten in diesem Unterabschnitt).
- Der Anteil der **BSA-Nutzer unter den mittleren Studierenden**, wobei auch hier die nicht bis zum Ende bearbeiteten BSAs dazugezählt werden.
- Ab dem WiSe 15/16 der **Anteil an Nutzern der freiwilligen eTests**, also denjenigen, die mindestens einen eTest geöffnet haben. Für die Semester davor sind diese Werte unvergleichbar höher und nur wenig interessant, da zu der Zeit die eTests verpflichtend zur Klausurzulassung waren. In der Tabelle sind diese Werte deshalb nicht angegeben.

Die Prozentwerte sind zu ganzen Zahlen gerundet. Bezüglich der jeweiligen Grundgesamtheit ist zu beachten:

- Für die Semester WiSe 12/13 und SoSe 13 besteht die Grundgesamtheit aus allen im jeweils zugehörigen L^2P-Lernraum registrierten Studierenden. Hinzu kommen jedoch Datensätze von einigen „Ausreißern“, die z. B. ohne im Lernraum registriert zu sein trotzdem an der Klausur teilgenommen haben.
- Ab dem WiSe 13/14 besteht die Grundgesamtheit jeweils aus allen in diesem Semester zur Veranstaltung angemeldeten Studierenden. Wieder kommen Datensätze einiger „Ausreißer“ hinzu, die etwa ohne Veranstaltungs-Anmeldung Übungsangebote bearbeitet und/oder an der Klausur teilgenommen haben.

	WiSe 12/13	**SoSe 13**	**WiSe 13/14**	**SoSe 14**	**WiSe 14/15**	**SoSe 15**	**WiSe 15/16**	**SoSe 16**	**WiSe 16/17**	**SoSe 17**
Größe Grundgesamtheit	1267	1128	1297	892	1220	1061	1328	1190	1372	1200
Anteil Nutzer mind. 1 BSA	41%	35%	49%	23%	27%	19%	42%	26%	25%	16%
Anteil Nutzer mind. 1 BSA bis zum Ende	–	–	43%	19%	23%	13%	28%	17%	18%	7%
Anteil Nutzer d. Hälfte aller BSAs d. jew. Semesters	–	–	18%	17%	16%	12%	18%	12%	7%	5%
Anteil Nutzer aller BSAs d. jew. Semesters	–	–	8%	13%	5%	6%	7%	1%	1%	2%
Anteil Nutzer mind. 1 eTest	–	–	–	–	–	–	26%	19%	19%	8%
Größe d. Gruppe d. „mittl. Stud."	–	–	–	–	417	–	288	–	203	–
Anteil Nutzer mind. 1 BSA unter „mittl. Stud."	–	–	–	–	32%	–	51%	–	33%	–

Tabelle 5.1: Nutzungsquoten der BSAs im Verlauf der Semester

In den bisherigen Semestern liegt der Anteil der BSA-Nutzer zwischen 16% und 49% der Grundgesamtheit. Das sind recht starke Unterschiede; neben generellen menschlichen Schwankungen der Studierendenschaft kann ein Grund dafür darin gelegen haben, dass das Ausmaß, in dem Lehrpersonen der Veranstaltung auf die BSAs aufmerksam gemacht haben, je nach Semester unterschiedlich gewesen ist.

Angesichts dessen, dass die Baumstrukturaufgaben völlig freiwillig sind und keinerlei Bonuspunkte bringen, sind diese Nutzungsquoten jedenfalls bereits ein durchaus positives Resultat. Nennenswert ist auch der Vergleich mit den Nutzerzahlen der eTests ab WiSe 15/16, da diese seitdem nur noch freiwillig im L^2P-Lernraum zum Üben zur Verfügung stehen, genau wie die Baumstrukturaufgaben. Versteht man analog zu vorher die eTest-Nutzer als diejenigen, die wenigstens einen eTest irgendwann einmal im Semester geöffnet haben, so erkennt man in der Tabelle bei jedem Semester (je nach Semester teils deutlich) geringere Nutzerzahlen als bei den BSAs.

Von Interesse ist auch die BSA-Nutzungsquote speziell unter den „mittleren Studierenden"; schließlich sind diese konzeptionell als eine Hauptzielgruppe der Baumstrukturaufgaben anvisiert worden. Operationalisiert wurde das Konzept der „mittleren Studierenden" im WiSe 14/15, WiSe 15/16 und im WiSe 16/17 mithilfe der Punktzahl im ersten eTest bzw. in der ersten Wissensstandkontrolle, welche sich beide durch ihr hauptsächliches Abfragen von Schulmathematik-Kenntnissen und -Fertigkeiten für eine Voreinstufung der Studierenden eignen. Anhand der Punktzahl im ersten eTest bzw. in der ersten WK wurden die Datensätze der Hörerschaft in mehrere Punktegruppen unterteilt, und die Gruppe mit „mittleren" Punktzahlen im ersten eTest bzw. in der ersten WK wird (was natürlich vereinfachend ist) als die Gruppe der mittleren Studierenden verstanden. Unter diesen kann man wiederum den Anteil der BSA-Nutzer bestimmen. (Weitere Details zur Gruppierung im Unterabschnitt 5.4.1.) Zu diesem Aspekt ist jedenfalls festzuhalten, dass in der Tat der BSA-Nutzeranteil unter den mittleren Studierenden wie erhofft noch etwas höher liegt als in der Gesamthörerschaft – und zwar in allen drei untersuchten Semestern.

Die Werte in der obigen Tabelle sind jeweils Gesamtwerte für das jeweilige Semester. Aber auch innerhalb der einzelnen Semester lassen sich Auffälligkeiten erkennen, die sich seit dem BSA-Start im WiSe 2012/2013 in einem recht konsistenten Nutzungsmuster der BSAs ausdrücken: Während der Vorlesungszeit werden die BSAs durchaus bereits von Studierenden bearbeitet, üblicherweise mit recht gleichmäßig verteilter Nutzung ab dem Zeitpunkt, zu dem das Thema im Übungsbetrieb behandelt wird. Bei den meisten BSAs konzentriert sich der eigentliche Großteil der Nutzungen dann jedoch in den ca. sechs bis acht vorlesungsfreien Wochen vor der Klausur. Als Beispiel aus dem WiSe 16/17: Zur Reihenkonvergenz-BSA wurden während der Vorlesungszeit 52 Versuche registriert, in der vorlesungsfreien Zeit vor der Klausur 108 Versuche. (Man beachte, dass die Nutzerzahlen noch leicht unter diesen Anzahlen liegen, da einige Personen mehr als einen Versuch in der jeweiligen BSA öffnen.)

5.2 Umfrage zur studentischen Rezeption der BSAs

Dieser Abschnitt zur BSA-Nutzer-Umfrage stellt zunächst die Gedanken dar, die bei der Entwicklung des Fragebogens eingeflossen sind; der Fragebogen selbst ist ab S. 168 zu sehen. Der nächste Unterabschnitt beschreibt zusammenfassend die Umfrageergebnisse aus den insgesamt fünf Durchläufen, jeweils mit Überlegungen dazu, wie die Werte zustandegekommen sein könnten; für einen schnellen Einblick sind die reinen Prozentzahlen auch direkt in den Fragebogen eingetragen, zu finden ab S. 172. Die wesentlichen Folgerungen aus den Umfrageergebnissen werden schließlich ab S. 180 zusammengefasst.

5.2.1 Entwicklung des Fragebogens

Um zu untersuchen, inwieweit die Leitideen und Lernhürden aus den Unterabschnitten 3.1.1 bzw. 3.1.2 umgesetzt wurden und wie das Baumstruktur-Konzept von den Studierenden bewertet wird, wurde im SoSe 13 ein Fragebogen erstellt, mit welchem seitdem (mit nur wenigen, geringfügigen Änderungen der Fragen) jedes Sommersemester eine Studierendenumfrage durchgeführt worden ist.

Während im SoSe 13 die Umfrage noch am Ende der Vorlesungszeit in einer Vortragsübung in Papierform gestellt wurde, ist sie in allen nachfolgenden Semestern ausschließlich online durchgeführt worden. Zwar haben sich dadurch die Teilnehmerzahlen deutlich verringert, allerdings ist so ein deutlich passenderer Zeitpunkt für die Umfrage wählbar, nämlich kurz nach der finalen Mathematik-II-Klausur am Ende des Sommersemesters.

Die aktuelle Zusammenstellung der Fragen ist im Folgenden kurz zu beschreiben. Die Druckversion des Fragebogens mit der aktuellen Formulierung ist in den Abbildungen 5.2 und 5.3 zu sehen.

Fragebogen zu den langen eÜbungen in Mathematik I/II

Diese anonyme, freiwillige Umfrage soll die Nützlichkeit speziell der *langen eÜbungen* überprüfen, welche in den L^2P-Lernräumen zu "Mathematik I/II" freiwillig angeboten wurden. Alle Fragen beziehen sich auf diese *langen* eÜbungen.

Durch Ihre Beantwortung leisten Sie einen wichtigen Beitrag zur Verbesserung des Angebots. Der gesamte Fragebogen erfordert höchstens 5 Minuten. Sie können natürlich auch einzelne Fragen unbeantwortet lassen. Vielen Dank!

Allgemeine Angaben

Wie häufig haben Sie Übungs- und Vorlesungs-Anwesenheitsveranstaltungen genutzt?

- fast nie ☐
- gelegentlich ☐
- meistens ☐
- praktisch immer ☐

Wieviele der langen eÜbungen haben Sie insgesamt bearbeitet? (In Mathematik I und II.)

- keine ☐
- nur wenige ☐
- die meisten ☐
- alle ☐

Wie haben Sie die langen eÜbungen bearbeitet? (Mehrere Antworten möglich.)

- nur teilweise bearbeitet ☐
- bis zum Ende bearbeitet ☐
- Lösungsschritte nachvollzogen und mitgedacht ☐
- die meisten Rechnungen auch selbst auf Papier durchgeführt ☐

Genereller Nutzen der Aufgaben

	ja	nein
Nach der Bearbeitung der langen eÜbungen hatte ich das Gefühl...		
... die Vorlesungsinhalte besser zu verstehen.	☐	☐
... den Stoff besser in Arbeitsaufträgen anwenden zu können.	☐	☐
... bei umfangreichen Aufgabenstellungen besser den Überblick zu behalten.	☐	☐
Trotz der langen eÜbungen blieben mir noch viele unbeantwortete Fragen zum Stoff.	☐	☐
Die langen eÜbungen haben mir geholfen, meinen Kenntnisstand besser einzuschätzen.	☐	☐
Die langen eÜbungen haben mein Durchhaltevermögen bei schwierigeren Sachverhalten erhöht.	☐	☐
Ich wusste nach der Bearbeitung besser, was bei einer vollständigen schriftlichen Lösung zu beachten ist (Sonderfälle, Begründungen, etc.).	☐	☐
Die Aufgaben haben mir nicht oder nur wenig geholfen.	☐	☐
Ich fühle mich nach den langen eÜbungen imstande, auch komplexere schriftliche Aufgabenstellungen zu bewältigen.	☐	☐

Abbildung 5.2: Vorderseite des Fragebogens zur studentischen Rezeption der BSAs

Nutzen bei der Klausurvorbereitung (rückblickend zu Mathematik I)

	ja	nein
Durch die Bearbeitung der langen eÜbungen habe ich mich besser auf die Klausur vorbereitet gefühlt.	☐	☐
Die langen eÜbungen haben mir geholfen, meine Erfolgsaussichten bei der Klausur realistisch einzuschätzen.	☐	☐
Ich fand die Unterschiede zwischen langen eÜbungen und Klausuraufgaben zu groß.	☐	☐
Ohne die langen eÜbungen hätte ich in der Klausur vermutlich schlechter abgeschnitten.	☐	☐

Konzeption der Aufgaben, Verbesserung

	zu leicht	angemessen	zu schwer
Der Schwierigkeitsgrad der langen eÜbungen war...	☐	☐	☐
	zu klein	angemessen	zu groß
Der Umfang der langen eÜbungen war...	☐	☐	☐
	zu klein	angemessen	zu groß
Die eingebauten Zwischenschritte waren...	☐	☐	☐
	zu klein	angemessen	zu groß
Die Anzahl der Hilfestellungen und Erklärungen war...	☐	☐	☐
	hilfreich	überflüssig	störend
Die Symbole am Rand fand ich...	☐	☐	☐

Haben Sie weitere Anregungen, Kritikpunkte oder persönliche Stellungnahmen?

Vielen Dank für Ihre Mithilfe!

Abbildung 5.3: Rückseite des Fragebogens zur studentischen Rezeption der BSAs

Der **kurze Einleitungstext** klärt das Befragungsthema und betont Freiwilligkeit, Anonymität und den Beitrag durch Beantwortung, um eine angenehme Fragesituation zu schaffen, welche die Studierenden möglichst zum Beantworten überhaupt und insbesondere zum *ernsthaften* Beantworten anregt (vgl. [74], S. 9, S. 12). Man beachte, dass die BSAs im Fragebogen entsprechend zur genutzten Bezeichnung im Übungsbetrieb als „lange eÜbungen" bezeichnet werden, siehe auch Unterabschnitt 5.1.1.

Es folgt ein erster kurzer Fragenblock zur **allgemeinen Nutzung** der BSAs.

Der größte Fragenblock behandelt die **Auswirkung der BSAs aufs Stoffverständnis und zugehörige Fertigkeiten**; abgefragt wird dies über die zugehörige Selbstwahrnehmung der Umfrageteilnehmer. Implizit werden bei diesen Fragen Lernhürden aus Unterabschnitt 3.1.2 angesprochen: (Vor-)Kenntnisse/Fertigkeiten in Frage 1, 2, 4 des Blocks; Überblick/Anfangshürden in Frage 3, 9; Sorgfalt/Gründlichkeit/Durchhaltevermögen in Frage 6, 7. Frage 5 bezieht sich auf die Leitidee der Lernstand-Rückmeldens, siehe Unterabschnitt 3.1.1. Frage 8 fragt einen Gesamteindruck ab. Man beachte, dass es jeweils mehrere Fragen pro Lernhürde gibt. Mit solchen „Parallelmessungen" (vgl. [48], S. 16) lässt sich überprüfen, welche der abgegebenen Bögen konsistent bzw. inkonsistent ausgefüllt worden sind. Einige der mehrfachen Fragen sind zudem negativ formuliert worden, wodurch auch einem automatisierten Immer-Ja- bzw. Immer-Nein-Ankreuzen vorgebeugt werden soll (vgl. [74], S. 11-12). Überhaupt soll die Beschränkung auf Antworten der Form Ja/Nein eine Tendenz zur Mitte verhindern (vgl. z. B. auch [65], S. 5).

Analog zum vorigen schätzen die Teilnehmer auch im vorletzten Fragenblock den Effekt der BSAs ein – hier mit Bezug zur **Vorbereitung auf Klausuranforderungen**. Die Fragen 1 und 3 des Blocks beziehen sich dabei implizit auf die Leitidee des klausurähnlichen und -vorbereitenden Schwierigkeitsgrads (mit Frage 3 wieder negativ formuliert), Frage 2 auf die Leitidee des Lernstand-Rückmeldens (siehe Unterabschnitt 3.1.1). Frage 4 fragt eine übergreifende Einschätzung ab.

Im letzten Fragenblock bewerten die Teilnehmer Aspekte zu **Inhalt und Aufbau der BSAs**. Zum einen werden mit den Fragen des Blocks Leitideen aus Unterabschnitt 3.1.1 angesprochen: Frage 1 bezieht sich auf einen zur Klausur passenden Schwierigkeitsgrad, Frage 3 und 4 beziehen sich auf die Niedrigschwelligkeit durch Hilfestellungen und Zwischenschritte. Zum anderen wird mit den Fragen des Blocks implizit auch eine Beurteilung des Baumstruktur-Konzepts insgesamt abgefragt. Da die Antwortmöglichkeiten hier anders skaliert sind als nur mit Ja/Nein, war in diesem Fragenblock besonders auf eine unmissverständliche Formulierung der Fragen und zugehörigen Antwortmöglichkeiten zu achten (vgl. [48], S. 19).

Letztes Element des Fragebogens ist ein Textfeld, in welches Umfrageteilnehmer all das frei eintragen können, was sie über die vorigen Fragen hinaus sagen möchten.

5.2.2 Umfrageergebnisse aus den Sommersemestern 2013 bis 2017

Wie oben dargestellt sind durch den Wechsel weg von Papierbögen hin zu Online-Umfragen die Umfrage-Teilnehmerzahlen deutlich kleiner geworden. Unter Teilnehmerzahl sei jeweils die Zahl aller ausgefüllten Fragebögen verstanden, bei denen angegeben ist, dass der Ausfüllende mindestens „wenige“ BSAs bearbeitet hat. Personen, die dabei „keine“ angegeben haben, werden also nicht mitgezählt.

Dadurch erhält man folgende Zahlen: Im SoSe 13 in der letzten Vortragsübung in Papierform waren es 270 Teilnehmer; im SoSe 14 waren es 83, wobei diese Umfragerunde ebenfalls am Ende der Vorlesungszeit, aber bereits ausschließlich online durchgeführt wurde; seit dem SoSe 15 wurde die Umfrage erst nach der Mathematik-II-Klausur freigeschaltet, und man hat 13 Teilnehmer im SoSe 15, 31 Teilnehmer im SoSe 16, 12 Teilnehmer im SoSe 17.

Abgesehen von diesem Umfrageteilnehmer-Schwund lässt sich aber beobachten, dass die relativen Antwort-Verhältnisse seit dem SoSe 13 in ihren Tendenzen weitgehend gleichgeblieben sind. Diese Antwort-Verhältnisse werden im Folgenden dargestellt, sortiert nach den Fragenblöcken. Dabei sind alle Prozentangaben auf ganze Zahlen gerundet, und in den meisten Fällen wird statt der Zahlen für einzelne Semester einfach der niedrigste und höchste Anteil über alle Semester für die jeweilige Frage genannt. Die zugehörigen Prozentzahl-Spannen sind auch in den folgenden Abbildungen 5.4 und 5.5 im direkten Überblick zu sehen. Unter der URL http://didaktik.matha.rwth-aachen.de/de/mitarbeiter/mei/dissertation.html können zudem die vollständigen Antwort-Datensätze in Form von Spreadsheets eingesehen werden.

Fragebogen zu den langen eÜbungen in Mathematik I/II

Diese anonyme, freiwillige Umfrage soll die Nützlichkeit speziell der *langen eÜbungen* überprüfen, welche in den L²P-Lernräumen zu "Mathematik I/II" freiwillig angeboten wurden. Alle Fragen beziehen sich auf diese *langen* eÜbungen.

Durch Ihre Beantwortung leisten Sie einen wichtigen Beitrag zur Verbesserung des Angebots. Der gesamte Fragebogen erfordert höchstens 5 Minuten. Sie können natürlich auch einzelne Fragen unbeantwortet lassen. Vielen Dank!

Allgemeine Angaben

Wie häufig haben Sie Übungs- und Vorlesungs-Anwesenheitsveranstaltungen genutzt?

fast nie	4 – 8%
gelegentlich	5 – 23%
meistens	12 – 42%
praktisch immer	39 – 58%

Wieviele der langen eÜbungen haben Sie insgesamt bearbeitet? (In Mathematik I und II.)

keine	0%
nur wenige	13 – 50%
die meisten	33 – 57%
alle	17 – 39%

Wie haben Sie die langen eÜbungen bearbeitet? (Mehrere Antworten möglich.)

nur teilweise bearbeitet	0 – 31%
bis zum Ende bearbeitet	31 – 58%
Lösungsschritte nachvollzogen und mitgedacht	36 – 68%
die meisten Rechnungen auch selbst auf Papier durchgeführt	46 – 68%

Genereller Nutzen der Aufgaben

	ja	nein
Nach der Bearbeitung der langen eÜbungen hatte ich das Gefühl...		
... die Vorlesungsinhalte besser zu verstehen.	67 – 87%	13 – 31%
... den Stoff besser in Arbeitsaufträgen anwenden zu können.	69 – 86%	12 – 31%
... bei umfangreichen Aufgabenstellungen besser den Überblick zu behalten.	38 – 75%	17 – 62%
Trotz der langen eÜbungen blieben mir noch viele unbeantwortete Fragen zum Stoff.	45 – 85%	15 – 49%
Die langen eÜbungen haben mir geholfen, meinen Kenntnisstand besser einzuschätzen.	42 – 85%	10 – 50%
Die langen eÜbungen haben mein Durchhaltevermögen bei schwierigeren Sachverhalten erhöht.	23 – 41%	52 – 77%
Ich wusste nach der Bearbeitung besser, was bei einer vollständigen schriftlichen Lösung zu beachten ist (Sonderfälle, Begründungen, etc.).	62 – 81%	19 – 38%
Die Aufgaben haben mir nicht oder nur wenig geholfen.	11 – 23%	75 – 84%
Ich fühle mich nach den langen eÜbungen imstande, auch komplexere schriftliche Aufgabenstellungen zu bewältigen.	23 – 53%	42 – 77%

Abbildung 5.4: Die Vorderseite des Fragebogens mit Prozentzahl-Spannen über die fünf Befragungen hinweg

Nutzen bei der Klausurvorbereitung (rückblickend zu Mathematik I)

	ja	nein
Durch die Bearbeitung der langen eÜbungen habe ich mich besser auf die Klausur vorbereitet gefühlt.	58 – 81%	16 – 38%
Die langen eÜbungen haben mir geholfen, meine Erfolgsaussichten bei der Klausur realistisch einzuschätzen.	39 – 62%	38 – 58%
Ich fand die Unterschiede zwischen langen eÜbungen und Klausuraufgaben zu groß.	40 – 61%	33 – 59%
Ohne die langen eÜbungen hätte ich in der Klausur vermutlich schlechter abgeschnitten.	17 – 59%	40 – 77%

Konzeption der Aufgaben, Verbesserung

	zu leicht	angemessen	zu schwer
Der Schwierigkeitsgrad der langen eÜbungen war...	0 – 33%	50 – 85%	8 – 13%
	zu klein	angemessen	zu groß
Der Umfang der langen eÜbungen war...	7 – 38%	54 – 75%	8 – 17%
	zu klein	angemessen	zu groß
Die eingebauten Zwischenschritte waren...	0 – 23%	71 – 83%	0 – 16%
	zu klein	angemessen	zu groß
Die Anzahl der Hilfestellungen und Erklärungen war...	15 – 38%	54 – 79%	0 – 8%
	hilfreich	überflüssig	störend
Die Symbole am Rand fand ich...	36 – 69%	23 – 55%	0 – 10%

Haben Sie weitere Anregungen, Kritikpunkte oder persönliche Stellungnahmen?

Vielen Dank für Ihre Mithilfe!

Abbildung 5.5: Die Rückseite des Fragebogens mit Prozentzahl-Spannen über die fünf Befragungen hinweg

Erster Fragenblock: Allgemeine Nutzung

Die Frage nach dem Besuch von Anwesenheits-Veranstaltungen in Mathematik I/II ist seit dem SoSe 14 Teil des Fragebogens. Die überwiegende Mehrheit der Umfrageteilnehmer gibt einen häufigen Besuch an: Je nach Semester haben 39-58% *praktisch immer* angekreuzt; 17-42% *meistens*; 5-23% haben *gelegentlich* angegeben; und nur 4-8% *fast nie*. Allgemein liegt der Anteil von den Teilnehmern, die entweder *praktisch immer* oder *meistens* angekreuzt haben, im Bereich 71-92%. Mit diesen Zahlen lässt sich vermuten, dass die Umfrage-Teilnehmerschaft mindestens für die Umfragen ab SoSe 14 wahrscheinlich nicht völlig repräsentativ für die gesamte BSA-Nutzerschaft ist, sondern einen im Vergleich etwas größeren Anteil an besonders engagierten Studierenden umfasst.

Bei der Frage dazu, wieviele der BSAs man genutzt hat, gibt es stellenweise etwas größere Schwankungen: In den SoSe 13 bis 16 haben 13-31% der Umfrageteilnehmer angegeben, *nur wenige* der BSAs genutzt zu haben, im SoSe 17 sind es sogar 50% gewesen; 33-39% haben in den SoSe 13, 15, 16 und 17 *die meisten* angekreuzt, im SoSe 14 sind es 57% gewesen; und 30-39% haben *alle* in den SoSe 13-16 angegeben, während es im SoSe 17 nur 17% gewesen sind, mit arithmetischem Mittel der letzteren Werte bei ca. 29%. Damit ist der Anteil derjenigen Nutzer, die im jeweiligen Semester alle BSAs bearbeitet haben, tendenziell unter den Umfrageteilnehmern etwas größer als unter der gesamten BSA-Nutzerschaft: Seit WiSe 13/14 haben letztere Anteile semesterweise bei ca. 16%, 57%, 19%, 32%, 17%, 8%, 4%, 13% gelegen, mit arithmetischem Mittel dieser Werte bei ca. 21% (vgl. die Tabelle im Unterabschnitt 5.1.2). Auch wenn dies prinzipiell die Vermutung aus dem vorigen Absatz bekräftigt, ist dieser Unterschied im Durchschnitt gesehen noch gering genug, um die Ergebnisse dieser Umfrage als im Wesentlichen aussagekräftig anzusehen.

Auch bei der Frage, wie die Umfrageteilnehmer die BSAs genutzt haben, hat es etwas größere Schwankungen bei den Antworten über die Semester gegeben: In den SoSe 13, 14, 15 und 17 haben 11-31% angekreuzt, dass sie die BSAs eher *nur teilweise bearbeitet* haben, also nicht bis ganz zum Ende der jeweiligen Moodle-Lektion durchgelaufen sind, während dies im SoSe 16 kein einziger Umfrageteilnehmer angegeben hat; 31-58% haben angekreuzt, dass sie die BSAs tendenziell *bis zum Ende der Lektion bearbeitet* haben. Anteile unter 50% sind dabei „nur" in den SoSe 14 und 15 aufgetreten. (Zudem gab es in den SoSe 13 und 14 mit 2 bzw. 3 Bögen einige sehr wenige Abgaben, bei denen sowohl *nur teilweise bearbeitet* als auch *bis zum Ende der Lektion bearbeitet* angekreuzt worden ist.) 36-68% haben angekreuzt, dass sie die Schritte *mitgedacht und nachvollzogen* haben; 46-68% haben angegeben, dass sie die *meisten Rechnungen selbst auf Papier durchgeführt* haben. In allen Umfragen außer derjenigen zum SoSe 15 ist der Prozentsatz des *Selbst-Durchrechnens* größer gleich dem des *Mitdenkens/Nachvollziehens*. Bei den letzten beiden

Antwortoptionen ist der Anteil derjenigen abgegebenen Bögen, bei denen beides angekreuzt worden ist, noch größer und liegt z. B. im SoSe 16 bei 48% (diese letzten beiden Antwortoptionen schließen sich ja auch nicht gegenseitig aus wie die ersten beiden.). Insgesamt lassen die abgegebenen Antworten vermuten, dass die BSAs wenigstens von der Hälfte der Nutzer wie gewünscht mit eigenem Durchrechnen auf Papier genutzt worden sind. Etwas enttäuschender ist der nicht ganz so große Anteil derjeniger, die nach eigener Aussage die meisten der selbst genutzten BSAs auch bis zum Ende bearbeitet haben. Zumindest teilweise mag das aber auch auf durchaus sinnvolle Lernstrategien zurückzuführen sein, bei denen Lerner nur diejenigen Teile von BSAs bearbeiten, bei denen sie eigenen Nachholbedarf sehen.

Zweiter Fragenblock: Auswirkung der BSAs aufs Stoffverständnis und zugehörige Fertigkeiten

Die Fragen 1 und 2 zur Verbesserung von Vorkenntnissen/Fertigkeiten sind über alle Umfragen hinweg sehr positiv beantwortet worden, mit jeweils 67-87% Ja-Angaben, dass man mithilfe der BSAs die *Vorlesungsinhalte besser verstehen* bzw. den *Stoff besser in Arbeitsaufträgen anwenden* kann. Für die sinnvolle Einsetzbarkeit der BSAs durch die Studierenden ist das eine Bestätigung. Allerdings ist die Frage zu *trotz BSA-Bearbeitung noch vielen Fragen zum Stoff* ebenfalls durchaus häufig bejaht worden – in den SoSe 13, 14 und 17 mit 45-56%, im SoSe 16 mit 65% und im SoSe 15 sogar mit 85%. Worauf sich diese Angaben letztlich gründen, ist nicht sicher herauszufinden, es lassen sich jedoch einige Vermutungen aufstellen:

- Es gibt insgesamt nicht besonders „viele“ verschiedene BSAs, etwa wenn man mit den einfacheren, aber zahlreicheren eTest-Aufgaben vergleicht, von denen es für Mathematik I/II jeweils hunderte gibt. Auch wenn die BSAs schon durch die Auswahl von Termen und Einbeziehung verschiedener Lösungswege versuchen, möglichst viele relevante Fälle und Gedanken zu behandeln, kann dadurch trotzdem nicht alles abgedeckt werden. Es ist denkbar, dass der BSA-Fundus deshalb hinter hohen Erwartungen einiger Studierender zurückbleibt.
- Der vorige Aspekt mag noch durch die Neigung einiger Studierender verstärkt werden, statt eigenem Knobeln und Entwickeln wichtiger (heuristischer) Herangehensweisen vielmehr zu allen möglichen Fällen eine eigene Musterlösung lernen und später im Prüfungsfall genau so „abspulen“ zu wollen (siehe den Teilabschnitt zu effektivem Lernen und Aufgabenlösen ab S. 28). Gerade für Studierende mit solcher Neigung kann der BSA-Fundus zu klein erscheinen.

- In den Freikommentaren (deren Besprechung ab S. 179 zu finden ist) haben einige Umfrageteilnehmer es als Makel angemerkt, dass bestimmte BSAs schwieriger sind als Klausuraufgaben zu diesem Thema (etwa behandelt die Hauptachsentransformations-BSA einen dreidimensionalen Fall, während in den Klausuren meist nur zweidimensionale Fälle vorkommen). Allgemein kann es Studierende geben, die sich eine völlig genaue Passung zwischen BSAs und Klausuraufgaben wünschen, und die sich – da dies eben nicht der Fall ist – trotzdem nicht ausreichend auf die Prüfungen vorbereitet fühlen. Es gibt zu diesem Umstand zwar später eine eigene Frage, allerdings mag er schon hier zu einigen „Ja"-Antworten beigetragen haben.

- Gerade bei mathematischen Inhalten ist es generell eher unwahrscheinlich, dass Erst- oder Zweitsemester in einen annähernd „fragenlosen" Zustand gelangen, erst recht bei MINT-Studierenden außerhalb der Fachmathematik. Eine sehr hohe Ablehnung wäre deshalb hier vermutlich gar nicht zu erwarten.

Die Frage 3 zum *verbesserten Überblick* ist in den SoSe 13, 14, 16 und 17 ähnlich positiv bewertet worden wie die vorigen Fragen 1 und 2, mit 67-75% Ja-Angaben. Lediglich im SoSe 15 ist hier überwiegend Nein angekreuzt worden, mit nur 38% Ja-Angaben. Gründe für diesen Ausreißer sind weitgehend unklar; da die Abweichung nur in einem Semester auftritt und da es in diesem nur 13 Umfrageteilnehmer gegeben hat, ist es zumindest denkbar, dass dort einfach eine verzerrende Personen-Auswahl vorliegt.

Bei der zur gleichen Lernhürde gehörenden Frage 9 zum *verbesserten Bewältigen komplexer Aufgabenstellungen* verhält es sich ähnlich, wenn auch auf einem generell etwas niedrigeren Zustimmungs-Niveau: In den SoSe 13, 14, 16 und 17 haben immerhin noch 45-53% diese Frage mit Ja beantwortet, im SoSe 15 sind es nur 23% gewesen. Wieder mag es schlicht an der Personenauswahl gelegen haben. Aufschlussreich ist jedenfalls, dass der Ausreißer bei beiden Fragen im gleichen Semester liegt; dies kann auch rein empirisch darauf hindeuten, dass „Überblick haben" und „Auch bei komplexeren Aufgaben keine Anfangshürden haben" eng miteinander verbundene Konzepte sind.

Frage 6 zum *erhöhten Durchhaltevermögen bei schwierigeren Sachverhalten* hat nur recht wenig Zustimmung erfahren, mit lediglich 23-41% Ja-Antworten. Möglicherweise liegt dies zum Teil daran, dass die BSAs vorwiegend nur durch Feedback zu bereits Geschafftem oder noch Ausstehendem auf das Durchhaltevermögen einwirken können – sie vermitteln jedoch weniger inhaltsunabhängige kognitive Basis-Skills wie das Halten von Konzentration und wurden auch nicht in diese Richtung konzipiert.

Bei Frage 7 zum *verbesserten Wissen zum Vorgehen bei schriftlichen Lösungen* geht es dagegen um einen Aspekt, der recht prominent in den BSAs verarbeitet wurde. Tatsächlich sind dabei die Zustimmungs-Anteile höher, 62-81% der Umfrageteilnehmer haben hier Ja angekreuzt. Dies kann ein Indiz für den diesbezüglichen Nutzen der BSAs darstellen.

Ausgehend von den unterschiedlichen Antwort-Tendenzen zu diesen beiden Fragen kann man vermuten, dass „Durchhaltevermögen“ und „Wissen zum detaillierten Vorgehen bei schriftlichen Lösungen“ nicht in direktem Zusammenhang miteinander stehen, sodass ihr Aufsplitten in mehrere Lernhürden zu überdenken wäre.

Auch bei Frage 5 zur *verbesserten Einschätzung des Kenntnisstands* tritt wieder ein Ausreißer auf: In (fast) allen Sommersemestern haben 77-85% der Umfrageteilnehmer die Frage bejaht, was wieder für einen diesbezüglichen Nutzen der BSAs spricht. Im SoSe 17 haben dies jedoch nur 42% angekreuzt. Auch hier ist aus den Gesamtergebnissen zu diesem Umfrage-Durchgang nicht zu erkennen, wie dieser Ausreißer zustandekommt; in Ermangelung anderer Erklärungen lässt sich wieder schlicht eine verzerrende Personen-Auswahl annehmen.

Bei der abschließenden negativ formulierten Frage 9, ob die BSAs *nicht oder nur wenig geholfen* haben, ist konsistent nur von 11-23% der Umfrageteilnehmer Ja angekreuzt worden. Auch wenn dies nicht einer bestimmten Leitidee bzw. Lernhürde zugeordnet werden kann, lässt sich dies doch als ein Indiz dafür verstehen, dass die BSAs vermutlich mehrheitlich von den studentischen Nutzern als insgesamt hilfreich wahrgenommen werden.

Dritter Fragenblock: Vorbereitung auf Klausuranforderungen

Die Frage 1 danach, ob man sich durch die BSA-Bearbeitung *besser auf die Klausur vorbereitet* gefühlt hat, haben 58-81% der Umfrageteilnehmer mit Ja beantwortet. Im Wesentlichen spricht dies für eine gute Zustimmung und kann ein Indiz dafür sein, dass die BSAs bzgl. Aufgaben-Auswahl und Schwierigkeitsgrad prinzipiell sinnvoll gestaltet worden sind. Bei den Zustimmungs-Prozentwerten am unteren Ende der genannten Spannbreite (erhoben in den SoSe 13 und 15) hat möglicherweise wieder der Wunsch einiger Studierender nach exakter BSA-Klausuraufgaben-Passung eine Rolle gespielt.

Letzteres gilt wahrscheinlich noch mehr für die Frage 3, die danach fragt, ob man den *Unterschied zwischen BSAs und Klausuraufgaben noch zu groß* gefunden hat: 40-61% der Umfrageteilnehmer haben hier Ja angekreuzt.

Auch Frage 2 zum *verbesserten Einschätzen der eigenen Klausurerfolgs-Aussichten* hat nicht so eine hohe Zustimmg erhalten wie andere Teile der Umfrage: 39-62% haben hier Ja angekreuzt, und davon sind außer im SoSe 15 alle Werte (etwas) kleiner als 50%. Wieder kann man vermuten, dass dies teilweise auf diejenigen Studierenden zurückgeht, die es als Makel der BSAs empfinden, dass man wegen der nicht vollständigen Übereinstimmung zwischen BSAs und Klausuraufgaben nicht wissen kann, welche Aufgabenstellungen genau in der Klausur vorkommen werden.

Frage 4 hat schließlich danach gefragt, ob man nach eigener Einschätzung *ohne die BSAs schlechter in der Klausur* abgeschnitten hätte; Ja angekreuzt haben hier 17-59% der Umfrageteilnehmer. Die Differenz von 42 zwischen den tiefsten und höchsten Zustimmungswerten über die fünf Sommersemester hinweg ist die zweithöchste der gesamten Umfrage – wobei die größte Differenz mit 43 nur knapp darüberliegt – und dabei lassen sich hier keine klaren einzelnen Ausreißer erkennen. Diese starke Schwankung mag schlicht an der spekulativen Natur der Frage liegen. Um die Zustimmung zu dieser Frage etwas genauer eingrenzen zu können, kann man speziell die Umfrage-Durchgänge mit etwas höheren Teilnehmerzahlen betrachten: Das sind SoSe 13, 14 und 16 mit respektive 270, 83 und 31 Teilnehmern. Hier waren die Zustimmungs-Anteile mit 37%, 59% und 55% die höheren. (Man bedenke allerdings für SoSe 13 und 14, dass dort die Umfrage noch vor der Mathematik-II-Klausur durchgeführt/freigeschaltet wurde; dadurch kann sich die Aussage in diesen Semestern nur auf die vergangene Mathematik-I-Klausur im Wintersemester beziehen.) Auch diese letzteren drei Zustimmungswerte sind verglichen mit anderen Fragen nicht hoch. Neben dem spekulativen Fragen-Charakter hängt das evtl. damit zusammen, dass der Anteil „fleißiger“ Studierender unter den BSA-Nutzern höher sein kann als unter der Gesamt-Hörerschaft. Trotzdem kann man diese drei Zustimmungswerte als durchaus bemerkenswert betrachten, wenn man bedenkt, dass es sich um eine starke Aussage handelt: Der eigene Klausurerfolg geht natürlich im Allgemeinen auf viele Elemente des eigenen Lernens zurück, und insbesondere in dieser Veranstaltung gibt es viele nutzbare Lernangebote. Dass in den drei teilnehmerstärksten Umfragen mehr als ein Drittel der Teilnehmer speziell den BSAs einen verbessernden Einfluss zuschreibt, ist bereits eine bestärkende Aussage über den Nutzen der BSAs.

Vierter Fragenblock: Inhalt und Aufbau der BSAs

Die Rückmeldungen bei den ersten vier Fragen zu *Schwierigkeitsgrad*, *Umfang*, *Größe der einzelnen Zwischenschritte* und *Anzahl der Hilfestellungen/Erklärungen* der BSAs sind über die Sommersemester hinweg im Wesentlichen positiv ausgefallen: Fast durchgängig haben hier 67-85% der Umfrageteilnehmer „angemessen“ angegeben, und meist bewegen sich diese Prozentzahlen im oberen Bereich dieses Bereichs. Nur in SoSe 15 und 17 gibt es insgesamt 3 einzelne Ausreißer nach 50% bzw. 54%; da dies teilnahmeschwache Umfrage-Durchgänge gewesen sind und kein Muster erkennbar ist, sei es erneut bei der Vermutung belassen, dass es sich einfach um eine leicht verzerrte Personenauswahl handeln kann.

Bei den Fragen 1 und 4 ist bzgl. der von „angemessen" abweichenden Antworten auffällig, dass konsistent etwas mehr Antworten die BSAs als zu schwer und die Anzahl der Hilfestellungen/Erklärungen als zu klein angegeben haben. Selbst bei den kleinschrittigen BSAs scheint es also – wenn überhaupt – mehr Probleme mit Überforderung als mit Unterforderung zu geben, was wiederum auf Probleme mit sehr grundlegenden Fähigkeiten bei einigen Studierenden hindeuten kann. Bei den beiden anderen Fragen überwiegt jedoch je nach Sommersemester mal die eine, mal die andere Richtung, weswegen die vermutete Verbindung im vorigen Satz keineswegs klar ist.

Bei der fünften Frage zur Rezeption der *Randsymbole* sind die beiden Rückmeldungen „hilfreich" und „überflüssig" in grob vergleichbaren Anteilen angekreuzt worden, mit 36-69% für ersteres und 23-55% für letzteres. Mal wurde das eine mehr angekreuzt, mal das andere. Da die letzteren Prozentsätze im Mittel etwas niedriger liegen, da die Randsymbole etwas visuelle Auflockerung in die BSAs bringen, und da nur von 0-10% die Antwort „störend" gewählt worden ist, sind die Randsymbole jedenfalls bislang beibehalten worden.

Das Freikommentar-Textfeld

Anders als bei den bisherigen Ankreuz-Fragen ist es hier möglich gewesen, in sehr genauen Worten die eigene Meinung zu den BSAs und ihrem Nutzen zurückzumelden. Insgesamt haben das auch durchaus viele Umfrageteilnehmer getan – abgesehen vom kommentarlosen SoSe 15 enthalten 20-48% aller abgegebenen Bögen einen sinnvollen Kommentar (also Aussagen, die über „Nö" oder „Ich liebe Mathematik!" hinausgehen). Eine Liste mit allen Freikommentaren ist in Anhang C zu finden, wobei darin Klarnamen als einzelne Großbuchstaben anonymisiert sind. Hier seien nur einige der typischsten Äußerungen erwähnt, die jeweils so oder so ähnlich mehrfach aufgetreten sind. Die Beispiele sind hier ggfs. bezüglich Schreib- bzw. Tipp-Fehlern berichtigt:

Häufig kommen simple Lobkommentare vor, die einfach die BSAs als hilfreich bezeichnen und/oder einen Wunsch nach noch mehr BSAs zu weiteren Themengebieten ausdrücken. Diese Kommentare können als Bestätigung des BSA-Nutzens verstanden werden, wenn auch undefiniert. Beispiele sind:

- *Hat mir sehr gut gefallen. Habe keine Kritik, weiter so.*
- *Die Aufgaben haben mir sehr geholfen. Ich wünschte es wären noch mehr zu verschiedenen Themen verfügbar.*

Ebenfalls häufig sind Kommentare, die bestimmte positive oder auch negative Aspekte der BSAs nennen und somit oft eine etwas detailliertere Rückmeldung liefern. Beispiele, teilweise nur als Auszüge aus längeren Kommentaren, sind:

- *In manchen Aufgaben wurde zuviel von der Lösung vorgegeben, sodass man sich schlecht selbst einschätzen konnte. Die Anmerkungen fand ich sehr gut, weil sie im Gegensatz zur „Papier-Hausaufgabe" gezeigt haben, auf was man speziell bei den Aufgaben achten muss.*
- *Durch die genaue und recht kleinschrittige Bearbeitung mit Hilfestellung kann man die Sachverhalte einfach besser verstehen und nochmal genau nachlesen und nachvollziehen.*

Ein häufiger Kritikpunkt war, dass es immer noch zu große Unterschiede zwischen BSAs und Klausuraufgaben gebe. Wie weiter oben vermutet, kann das einerseits bei einigen Studierenden eventuell an unrealistischen Erwartungen zur Passung zwischen den beiden liegen. Andererseits gibt es natürlich zwangsläufig einen großen Unterschied zwischen dem elektronischen Bearbeiten der BSAs, wo neben viel Anleitung nur verhältnismäßig wenige und beschränkte Teile des schriftlichen Lösungswegs abgefragt werden können, und dem tatsächlich völlig eigenständigen Aufschreiben einer Lösung in der Klausur. Beispiele für diesbezügliche Kommentare sind jedenfalls:

- *Gute Hilfe zum Wiederholen/erstmaligen Verstehen einiger Themenbereiche; weniger gute Universalvorbereitung auf die Klausuraufgaben, da vom Typ und Inhalt her größere Abweichungen vorhanden.*
- *Ich finde es deutlich besser die HA schriftlich abzugeben, da man für die Klausur so deutlich besseres Feedback bekommt, gerade wenn es um die Notation etc. geht.*

Fazit zur Studierenden-Umfrage

Die studentischen Rückmeldungen zu den BSAs im Rahmen der beschriebenen fünf Umfragen sind im Wesentlichen positiv ausgefallen:

Das gilt zunächst für die Nutzung der BSAs im angestrebten Sinne. Tatsächlich liegt der Schwerpunkt, wie die Studierenden die BSAs nutzen, nach den Aussagen in der Umfrage mehr auf dem Selbst-Mitrechnen als auf dem bloßen Mitdenken/Nachvollziehen.

Die Fragen zur Umsetzung der Leitideen und Lernhürden sind ebenfalls mehrheitlich positiv beantwortet worden, meist mit Zustimmungswerten um ca. 75%. Allerdings gibt es bei einzelnen Aspekten „schwächere" Zustimmungswerte von ca. 30-50%, etwa dass für viele Umfrageteilnehmer trotz BSA-Benutzung noch Fragen zum Stoff übrigbleiben, dass für viele die BSA-Nutzung nicht zu einem nennenswert besseren Bewältigen und

Durchhaltevermögen bei komplexeren Aufgaben geführt hat, dass recht viele nicht davon ausgehen, dass sie ohne die BSA eine deutlich schlechtere Klausurleistung erbracht hätten. Bei fast allen der letzteren Punkte lassen sich jedoch sinnvolle Erklärungen finden, die oft in der Natur der Sache begründet sind: Studienanfänger werden generell kaum in den ersten Semestern bereits einen „fragenlosen“ Zustand erreichen, die BSAs können bei aller Kleinschrittigkeit kognitive Grundfertigkeiten wie Konzentrationsfähigkeit nur sehr indirekt (wenn überhaupt) schulen, und eine klare Attribution eines Klausurerfolgs speziell auf die vorher benutzten BSAs ist bei dem breiten Angebotsspektrum kaum von einer Mehrheit der Umfrageteilnehmer zu erwarten.

Auch die Rückmeldungen zur Gestaltung der BSAs, welche in den letzten Fragen abgefragt werden, sind mehrheitlich positiv ausgefallen. Bzgl. Schwierigkeitsgrad, Umfang, Anzahl und Ausmaß von Zwischenschritten und Hilfestellungen ist die Antwort „Angemessen“ bei im Mittel ca. 75% der Umfrageteilnehmer gewählt worden. Dies kann mindestens als ein Indiz für die Stimmigkeit der Umsetzung des BSA-Prinzips verstanden werden.

In den abschließenden Freikommentaren wird viel Lob geäußert – oft mit dem Wunsch nach noch mehr durch BSAs abgedeckten Themen – ebenso wie kritische Aspekte. Die wohl häufigste Kritik nennt den immer noch bestehenden Unterschied zwischen dem Bearbeiten von BSAs und dem schriftlichen, komplett eigenständigen Lösen von Aufgaben in einer Klausur. Trotz der weitestmöglich an Klausuranforderungen ausgerichteten BSA-Konzeption ist dies in mancher Weise völlig nachvollziehbar und nicht zu leugnen: Letztlich bleiben die Zwischenergebnis-Abfragen in den BSAs beschränkt und können schlicht nicht alle Aspekte des vollständigen schriftlichen Entwickelns abbilden. Im späteren Abschnitt 5.3, insbesondere 5.3.2, werden jedoch statistische Indizien dazu dargestellt, dass der Nutzen von BSAs gegenüber schriftlichen Hausaufgaben durchaus ähnlich sein kann.

Es ist anzumerken, dass die Fragebögen allem Anschein nach von den Umfrageteilnehmern überwiegend gewissenhaft ausgefüllt worden sind. Dafür sprechen etwa die Häufigkeit der ausgefüllten Freikommentare, der fast durchgehend ernsthafte Inhalt dieser Kommentare, sowie das geringe Auftreten von Enthaltungen. (Der Anteil letzterer liegt fast in allen Semestern bei 8% oder darunter, nur sehr selten in bestimmten Semestern bei einzelnen Fragen bei bis zu 20%.) Ebenso hat sich die Benutzung von „Kontrollfragen“ als eher unnötig herausgestellt, da beim Weglassen der wenigen Abgaben mit inkonsistent gesetzten Kreuzen im Wesentlichen immer noch die gleichen Verhältnisse herausgekommen sind. Damit ist insgesamt davon auszugehen, dass die obengenannten positiven Rückmeldungen auf einer ernsthaften Antwortbasis stehen.

5.3 Zusammenhang zwischen Aufgabenbearbeitung und Klausurerfolg

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen Umfragedurchläufe haben Erkenntnisse über die subjektive Wahrnehmung der Baumstrukturaufgaben unter den studentischen Nutzern geliefert. Mindestens ebenso sehr ist von Interesse, ob sich anhand statistischer Daten zu Klausurbearbeitung und Übungsangebotnutzung auch ein „objektiverer" Effekt der BSA-Nutzung auf die Klausurleistung feststellen lässt. Eine Möglichkeit dazu ist darin gesehen worden, Korrelationen zwischen Aufgabenbearbeitung und Klausurpunktzahl zu bestimmen und miteinander zu vergleichen.

Im folgenden ersten Unterabschnitt wird zunächst erläutert, welche Überlegungen hinter dem Vorgehen mit Korrelationen stehen und wie der individuelle Nutzungsgrad der verschiedenen Übungsangebote dafür operationalisiert worden ist. Daraufhin ist darzustellen – jeweils mit den nötigen mathematischen Details – welche Korrelationen schließlich genau bestimmt worden sind und wie dafür die Signifikanz der Abweichung von Null untersucht wird. Das Konzept der partiellen Korrelation wird dabei eigens erläutert, da es in den gängigen Einführungsvorlesungen zur Statistik nicht immer Teil des Stoffs ist; die anderen Begriffe, wie Pearson- und Spearman-Korrelation, Teststatistik, Quantile usw., sind üblicherweise Teil der Einführungsvorlesungen und werden hier als bekannt vorausgesetzt. Im zweiten Unterabschnitt werden dann die berechneten Korrelationen präsentiert, mit der zugehörigen Tabelle auf S. 191 sowie im direkten Anschluss mit den wesentlicheren Folgerungen aus den beobachteten Werten.

5.3.1 Vorgehen bei der statistischen Untersuchung

Zur Untersuchung der Wirkung der BSA-Nutzung auf die Klausurleistung wäre es besonders aufschlussreich gewesen, wenn man die Gesamthörerschaft als Kontrollgruppen-Experimentalgruppen-Design randomisiert in zwei oder mehr gleich große, möglichst ähnlich zusammengesetzte Gruppen hätte partitionieren können. Bei zwei Gruppen hätte die eine Zugriff auf die BSAs bekommen können, die andere nicht; bei mehreren Gruppen hätten die weiteren Gruppen noch Zugriff auf ein jeweils anderes Angebot (etwa eTest-Aufgaben) anstelle der BSAs bekommen können. Auf diese Weise wären z. B. nach den Klausuren ein Vergleich der Durchschnitts-Klausurpunktzahlen der Gruppen und somit Rückschlüsse auf die Wirkung der BSAs möglich gewesen, ggfs. verglichen mit der Wirkung anderer Angebote. Allerdings ist das Vorgehen aus ethischen Gründen nicht in Frage gekommen – es wäre vor den Studierenden nicht vertretbar gewesen, auf zufälliger Basis nur einigen eine zusätzliche Lernhilfe anzubieten.

Stattdessen ist entschieden worden, die durch den regulären Veranstaltungsbetrieb entstehenden anonymen Studierendendaten bzgl. Angebotnutzung und Klausurleistung auf Zusammenhänge hin zu untersuchen – genauer auf Korrelationen zwischen individuellem Nutzungsgrad des jeweiligen Angebots und individuell erreichter Klausurpunktzahl, also je nach genutztem Korrelationskoeffizienten auf einen monotonen oder spezieller auf einen linearen Zusammenhang. Die Klausurleistung wird dabei schlicht durch die Klausurpunktzahl operationalisiert. Bei der Übungsangebot-Nutzung erfordern die Operationalisierungen etwas genauere Erklärungen, welche im folgenden Unterabschnitt darzustellen sind.

Operationalisierungen des individuellen Nutzungsgrads verschiedener Übungselemente

Zur Operationalisierung des individuellen Nutzungsgrads der Baumstrukturaufgaben bieten sich hauptsächlich zwei Möglichkeiten an: Die in BSAs verbrachte Zeit oder die Anzahl der genutzten BSAs.

Gegen die mit der Bearbeitung der jeweiligen BSA verbrachte Zeit als Operationalisierung sprechen technische Aspekte: Moodle speichert schlicht die Zeitdauer zwischen dem erstem Öffnen der BSA und dem Klick auf den Button „Ende der Aufgabe“, egal ob der Nutzer zwischendurch den Browser schließt, ganz andere Dinge verfolgt o. ä. Dadurch sind die tatsächlichen Bearbeitungsdauern nicht herauszufinden. Hinzu kommt, dass das System eben nur von denjenigen Nutzern überhaupt die genannte Zeitspanne speichert, die am Ende der jeweiligen BSA auf den Abschluss-Button klicken. Wer die BSA bis zum Ende durcharbeitet, ohne auf den Button zu klicken, oder wer in den BSAs gezielt nur Stellen mit eigenem Nachholbedarf bearbeitet (was ja eine durchaus sinnvolle Strategie ist), würde also in den Daten nicht erscheinen; wichtige Information würde somit fehlen.

Entsprechend ist als passendere Operationalisierung die Anzahl der genutzten BSAs gewählt worden. Auch hier mag es geringe Verzerrungseffekte geben – etwa wenn Nutzer eine BSA nur öffnen, um den darin behandelten Term zu sehen und dann zu entscheiden, dass sie diese Aufgabe nicht weiter bearbeiten möchten. Allerdings ist diese Verzerrung aus der Sicht des Autors vermutlich von geringerem Ausmaß als der Informationsverlust beim vorigen Absatz. Bei denjenigen, die eine BSA nicht bis zum Ende bearbeiten, wird eher das obige sinnvolle Lernverhalten als überwiegend vermutet.

Zum Operationalisieren des individuellen eTest-Nutzungsgrads ist die im jeweiligen Semester erreichte eTest-Punktzahl gewählt worden. Sie weist zunächst eine feinere Unterteilung auf als die Anzahl benutzter eTests (es gibt insgesamt ca. 13 eTests pro Semester). Außerdem lässt sich vermuten, dass die individuell erreichte eTest-Gesamtpunktzahl den tatsächlichen Grad der Benutzung etwas akkurater abbildet als die Anzahl angefangener eTests: Wer einen eTest nur öffnet, ansieht und kurz darauf wieder schließt, erhält dafür auch keine Punkte.

Analog ist beim individuellen Nutzungsgrad der schriftlichen Hausaufgaben sowie der Wissensstandkontrollen entschieden worden; beide werden mittels der im jeweiligen Semester erreichten Gesamtpunktzahl operationalisiert.

Zur Korrelations-Berechnung

Grundlage der Korrelations-Berechnung ist für jedes Semester eine große, aus anonymen Daten zusammengesetzte Gesamttabelle, in der jede Zeile für eine Einzelperson steht. Die Grundgesamtheit bilden dabei alle zur Veranstaltung angemeldeten Studierenden des jeweiligen Semesters. Diese Einzel-Datensätze haben dann jeweils eine Reihe von Spaltenattributen, von denen die folgenden hier relevant sind:

Klausurpunktzahl Damit ist schlicht die individuell erreichte Punktzahl in der Klausur des jeweiligen Semesters gemeint. Ein Aspekt ist hier besonders zu beachten: Unter den zur Veranstaltung angemeldeten Studierenden gibt es in jedem Semester einige, die sich von der Klausur abgemeldet haben, spontan nicht erschienen sind oder aus anderen Gründen nicht daran teilgenommen haben. Die Frage ist, ob die zugehörigen Datensätze dennoch in die Korrelationsberechnungen einfließen sollen und, wenn ja, in welcher Form. Es ist davon auszugehen, dass diese Fälle relevante Information enthalten: Ein großer Teil derjenigen, die die Klausur nicht mitgeschrieben haben, dürfte dies aus stichhaltigen Gründen entschieden haben – bei vielen mutmaßlich aus der Selbsteinschätzung heraus, dass man sich wenig vorbereitet hat u.ä. und deshalb die Klausur wahrscheinlich ohnehin nicht bestehen könnte. Um diese Information nicht zu verlieren, sind die Nichtmitschreiber mit auf 0 gesetzter Klausurpunktzahl in die Korrelationen einbezogen worden. Dadurch fallen die Korrelationen mit der Klausurpunktzahl höher aus; werden die Korrelationen nur für die Klausurmitschreiber berechnet, so ergeben sich für alle Übungselemente rund 25-35% niedrigere Korrelationen (was beispielhaft anhand von Probe-Korrelationsberechnungen in verschiedenen Semestern überprüft worden ist). Der Grund dafür liegt höchstwahrscheinlich darin, dass sich unter den Nichtmitschreibern auch gerade diejenigen Studierenden befinden, die nur „auf dem Papier“ zur Veranstaltung angemeldet sind, jedoch weder Übungselemente wahrnehmen noch die Klausur mitschreiben (siehe voriger Absatz). Dieser Effekt tritt jedoch bei allen Übungselementen auf, sodass die Vergleichbarkeit der Korre-

lationen untereinander erhalten bleibt.
Zu beachten ist ferner, dass speziell im WiSe 12/13 statt Klausur*punktzahlen* die Klausur*noten* festgehalten worden sind, was einen leicht verzerrenden Effekt auf die zugehörigen Untersuchungsergebnisse haben kann. Wegen der deutschen Notenskala stehen in diesem Semester negative Korrelationen für einen „positiven“ Zusammenhang im Sinne von besserer Klausurleistung bei intensiverer Angebot-Bearbeitung.

Anzahl genutzter BSAs Genutzt wird für die Korrelationen die Anzahl der (auch unvollständig) individuell bearbeiteten BSAs. Dies ist aus dem Grund entschieden worden, dass ansonsten diejenigen Nutzer aus der Korrelationsberechnung herausfallen, die BSAs möglicherweise in großen Teilen bearbeitet, jedoch nicht den Abschluss-Button auf der letzten Seite geklickt haben. Insbesondere kann auch eine unvollständige BSA-Bearbeitung Teil effektiven Lernens sein, etwa wenn man nur die Aufgabenteile bearbeitet, von denen man weiß, dass man sie noch nicht beherrscht.
(Probeweise wurden durchaus für verschiedene Semester die Korrelationen zwischen Klausurpunktzahl und der Anzahl ausschließlich *vollständig* bearbeiteter BSAs bestimmt. Im Vergleich zu den Korrelationen mit der Anzahl auch unvollständiger BSAs lassen sich aber weder große Unterschiede noch durchgehende oder überhaupt erklärbare Muster erkennen: Die Differenz der beiden Korrelationskoeffizienten beträgt in den untersuchten Semestern fast immer jeweils höchstens 0,03, in einzelnen Fällen bis zu 0,05; mal ist der eine, mal der andere größer.)

eTest-Punktzahl Gemeint ist hier die individuell erreichte, kumulative Punktzahl über alle (verpflichtenden oder freiwilligen) eTests des jeweiligen Semesters. Eine Besonderheit ist wieder zu beachten: Für WiSe 12/13 und SoSe 13 wurde jeweils statt der absoluten erreichten eTest-Punktzahl der relativ erreichte Prozentsatz von der in diesem Semester maximal erreichbaren Punktzahl festgehalten. Diese sind allerdings auf zwei Nachkommastellen genau gespeichert worden, sodass abgesehen von vernachlässigbaren Rundungsfehlern Proportionalität vorliegt; für die Korrelationsberechnungen macht das also keinen Unterschied.

Punktzahl in den schriftlichen Hausaufgaben Von WiSe 13/14 bis einschl. SoSe 15 hat es für korrekt bearbeitete schriftliche Hausaufgaben Bonuspunkte gegeben (die die Studierenden im Bestehensfall später auf ihre Klausurnote haben anrechnen lassen können). Die Punktzahlen sind zentral festgehalten worden, sodass diese Information für die genannten Semester in die Zusammenhangs-Untersuchung einfließen kann. Als Spaltenattribut wird wieder die individuell erreichte kumulative Punktzahl in allen schriftlichen Hausaufgaben des jeweiligen Semesters genutzt.

WK-Punktzahl Analog zum Vorigen wird hier die individuell erreichte kumulative Punktzahl in allen Wissensstandkontrollen des jeweiligen Semesters genutzt.

Alle genannten Attribute sind mindestens ordinalskaliert. Für die interessierenden Paare von Attributen sind demgemäß Rangkorrelationskoeffizienten nach Spearman berechnet worden, wofür ordinalskalierte Daten ausreichen (vgl. [28], S. 113-114). Die Art des Wachstumsverhaltens bei einem etwaigen monotonen Trend in den bivariaten Daten geht durch die Rangbildung allerdings verloren; man erhält mit der Spearman-Korrelation ein Maß für monotonen Zusammenhang.

Außer der absolutskalierten BSA-Anzahl sind alle Attribute als Punktzahlen auch tatsächlich strenggenommen nicht mehr als ordinalskaliert, da man wegen der verschiedenen abgefragten Inhalte und Aufgabentypen nicht von einem überall völlig gleichwertigen Abstand von z. B. einem Punkt sprechen kann. Dennoch ist es in der Literatur durchaus verbreitet, dass Noten oder Punktzahlen etwa aus Tests vereinfachend als intervallskaliert aufgefasst und als solche mit Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizienten untersucht werden (gerade auch in Veröffentlichungen aus dem Bildungsbereich, vgl. z. B. [40], S. 114; [33], S. 136; [57], S. 155). Auch hier seien diese zusätzlich angegeben. Dabei ist keine Rangbildung zwischengeschaltet, wodurch man mit der Pearson-Korrelation ein Maß für linearen Zusammenhang erhält. Da die Auffassung der Punktzahlen als intervallskalierte Daten vereinfachend ist, können die Pearson-Korrelationskoeffizienten natürlich nur als zusätzliche, grobe Information dienen; die Beobachtungen sind hauptsächlich an den Spearman-Rangkorrelationskoeffizienten zu tätigen.

Die für die verschiedenen Semester berechneten Korrelationen sind zunächst diejenigen zwischen:

- **Anzahl genutzter BSAs** und **Klausurpunktzahl**
- **Punktzahl in den schriftlichen Hausaufgaben** und **Klausurpunktzahl**
- **Wissensstandkontrollen-Punktzahl** und **Klausurpunktzahl**
- **eTest-Punktzahl** (bzw. Prozent der erreichbaren eTest-Punkte in WiSe 12/13 und SoSe 13) und **Klausurpunktzahl**

Die Korrelation zwischen der Anzahl genutzter BSAs und der Klausurpunktzahl sei im Folgenden auch kurz **BSA-Korrelation** genannt. Man beachte, dass im WiSe 12/13 die Klausurnote statt der -punktzahl verwendet worden ist. Zu den vorigen Korrelationen kommen für jedes Semester noch zwei sogenannte partielle Korrelationen hinzu, und zwar diejenigen zwischen:

- **Anzahl genutzter BSAs** und **Klausurpunktzahl**, wobei der Einfluss der *eTest-Punktzahl* herausgerechnet ist
- **eTest-Punktzahl** und **Klausurpunktzahl**, wobei der Einfluss der *Anzahl genutzter BSAs* herausgerechnet ist

Das Konzept der partiellen Korrelation sowie die Gedanken zu deren Berechnung sind kurz darzustellen.

Partielle Korrelationen zur Kontrolle des Fleiß-Effekts

Sind die BSA-Nutzer einfach die generell fleißigen Studierenden, die allgemein viele Übungsangebote wahrnehmen, rein zeitlich mehr üben bzw. investieren, sich mehr vorbereiten und somit mehr Klausurpunkte erreichen? Oder geht die Korrelation tatsächlich auf verbesserte Stoffbeherrschung durch die BSA-Nutzung zurück? Dies führt aufs Grundproblem, dass Korrelationen ein Maß für Zusammenhang sind, jedoch nichts über die kausalen Einflüsse verraten, die für diesen Zusammenhang verantwortlich sind.

Die hier als am relevantesten vermutete Überlagerung besteht im Fleiß. Um einen solchen überlagernden Einfluss aus Korrelationen „herauszurechnen", bietet sich das Konzept der partiellen Korrelation an (vgl. [24], S. 339-342; speziell für Korrelationen nach Spearman auch [49]). Dabei hat man einen Datensatz mit drei Merkmalen x, y, z und sucht den (monotonen oder linearen) Zusammenhang zwischen x und y; das Drittmerkmal z hat aber einen Einfluss sowohl auf x als auch y, welcher somit in die „normale" Korrelation zwischen x und y hineinspielt und welchen man deshalb herausrechnen möchte. Im Fall, dass nur eine einzelne Störvariable herauszurechnen ist, ist sowohl bei Spearman- als auch bei Pearson-Korrelationen die partielle Korrelation gegeben durch die Formel $r_{xy.z} = \dfrac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{1 - r_{xz}^2}\sqrt{1 - r_{yz}^2}}$. Genauer, $r_{xy.z}$ bezeichnet man als die partielle Korrelation zwischen x und y bereinigt vom Einfluss von z. Es ist auch möglich, den Einfluss von mehr als einem Merkmal aus der Korrelation zwischen x und y herauszurechnen; für die hiesigen Zwecke reicht der beschriebene einfache Fall aber aus.

Ein inhaltlich-anschauliches Beispiel zur „Bereinigung" von Störeffekten aus Korrelationen per partieller Korrelation liefert das bekannte Storchproblem (vgl. [61]): Für eine Stichprobe verschiedener europäischer Länder sei x die jährliche Gesamtzahl von Menschengeburten, y die jährliche Gesamtzahl von Storch-Brutpaaren und z die Bevölkerungszahl des Landes. Dann hat man eine recht starke „Schein"-Korrelation r_{xy} zwischen x und y, was auf den ersten Blick für einen starken Zusammenhang zwischen Storchpopulation und Geburtenzahl sprechen könnte. Die vom Einfluss von z bereinigte partielle Korrelation $r_{xy \cdot z}$ ist jedoch viel kleiner, weshalb man davon ausgehen kann, dass der (monotone bzw. lineare) Zusammenhang zwischen x und y mehr von der menschlichen Bevölkerungszahl als von der Storchpopulation herrührt.

Wie kann nun – im Kontext des Veranstaltungsbetriebs – das Merkmal „Fleiß" operationalisiert werden? Optimal wären Daten zur Gesamtzeit, welche die Studierenden jeweils kumulativ für die Beschäftigung mit dem Stoff der Veranstaltung aufwenden, als direktes Maß für den Fleiß. Solche Daten liegen aber nicht vor; objektive Messungen auf individueller Basis zur gesamten Hörerschaft sind illusorisch, Selbsteinschätzungen zu einem einzelnen Befragungszeitpunkt sind zu ungenau für eine sinnvolle Einbindung in die Korrelationsuntersuchungen. Analog lässt sich auch die Gesamtanzahl oder -häufigkeit der individuell genutzten Veranstaltungselemente nicht zur Operationalisierung verwenden, da insbesondere für die diversen Anwesenheitsveranstaltungen keine genauen Besucherdaten erhoben werden (können).

Der Fleiß muss stattdessen mithilfe der zuvor aufgelisteten Attribute – Klausurpunktzahl, Anzahl genutzter BSAs, eTest-Punktzahl, Punktzahl in den schriftlichen Hausaufgaben, Punktzahl in den Wissensstandkontrollen – operationalisiert werden. Die Wahl ist hier auf die eTest-Punktzahl gefallen. Inhaltlich lässt sich das damit begründen, dass die eTests hauptsächlich grundlegendere Fertigkeiten statt komplexer Aufgabenlösefähigkeiten abfragen; somit kann eine vermehrte eTest-Bearbeitung und eine entsprechend höhere eTest-Punktzahl für größeren Fleiß sprechen. Von dieser Begründung abgesehen sind außerdem die anderen Attribute entweder inhaltlich als Fleiß-Maß weniger sinnvoll oder nur für wenige Semester verfügbar. Zu erinnern ist bzgl. der eTest-Punktzahl als Fleiß-Operationalisierung aber daran, dass bis SoSe 15 die eTests Voraussetzung für die Klausurzulassung waren. Dadurch können hier strenggenommen nur die über 50% der maximal möglichen Punktzahl hinausgehenden Punkte deutlich auf Fleiß hinweisen; in diesen Semestern ist daher von einer leichten Verzerrung der Werte auszugehen. Inhaltlich am passendsten ist die Fleiß-Operationalisierung durch eTest-Punktzahlen ab dem WiSe 15/16. Für jedes Semester ist die partielle Korrelation zwischen Anzahl genutzter BSAs und Klausurpunktzahl gebildet worden, bereinigt vom Einfluss der eTest-Punktzahl. Weicht diese bereinigte partielle Korrelation nur wenig von der unbereinigten normalen Korrelation ab, kann dies ein Indiz dafür sein, dass der bessere Klausurerfolg tatsächlich wenig von generellem Fleiß herrührt, sondern primär von durch BSA-Nutzung verbesserter Beherrschung des Vorlesungsstoffs.

Man kann zudem auf die Idee kommen, das soeben beschriebene Vorgehen einmal umzudrehen – schließlich wäre es mit analoger Argumentation ebenso legitim, den Zusammenhang zwischen eTest-Punktzahl und Klausurleistung bereinigt vom Einfluss der BSA-Nutzung untersuchen zu wollen. Falls hierbei die bereinigte partielle Korrelation mehr (nach unten) von der unbereinigten normalen Korrelation abweicht als beim vorigen Vorgehen, kann dies dafür sprechen, dass die Korrelation eTest-Punktzahl&Klausurpunktzahl zu einem größeren Anteil durch generellen Fleiß zustandekommt als bei der obigen Korrelation BSA-Nutzung&Klausurpunktzahl.

Zur statistischen Signifikanz der Korrelationen

Um zu untersuchen, ob sich die beobachteten Korrelationen statistisch signifikant von 0 unterscheiden, wird jeweils ein zweiseitiger Hypothesentest genutzt: Die Nullhypothese H_0 lautet, dass die „tatsächliche" Korrelation ρ gleich 0 ist, die Alternativhypothese H_1 lautet entsprechend $\rho \neq 0$.

Die genutzte Teststatistik sowohl für die Spearman- als auch für die Pearson-Korrelationen ist

$$T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \ ,$$

wobei r der jeweilige Korrelationskoeffizient ist und n die Größe der Grundgesamtheit des jeweiligen Semesters. Unter der Nullhypothese $\rho = 0$ ist T bei großen n – was hier in jedem Semester erfüllt ist – zumindest approximativ Student-t-verteilt mit $n-2$ Freiheitsgeraden. (Man beachte, dass diese approximative Student-t-Verteilung bei vereinfachend als intervallskaliert angenommenen Ausgangsmerkmalen unter Einsetzen des Pearson-Korrelationskoeffizienten in T gilt, bei ordinalskalierten Merkmalen unter Einsetzen des Spearman-Rangkorrelationskoeffizienten in T. Als *exakt* Student-t-verteilt mit $n-2$ Freiheitsgraden könnte man T nur dann annehmen, wenn die Ausgangsmerkmale eindeutig intervallskaliert und normalverteilt wären und man den Pearson-Korrelationskoeffizienten in T einsetzen würde. Vgl. dazu [76], S. 637, S. 640; [50], S. 316.) Die Nullhypothese wird zum Signifikanzniveau α verworfen, wenn $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ gilt. Dabei bezeichnet $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ das $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Quantil der Student-$t$-Verteilung mit $n-2$ Freiheitsgraden; das Rechnen mit $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ stammt vom zweiseitigen Test.

Die Signifikanzuntersuchung der partiellen Korrelationen läuft völlig analog zum Obigen, nur dass man hier mit $n-1$ statt n rechnen muss. (Hintergrund dessen ist, dass ein partieller Korrelationskoeffizient mit einer Störvariablen und Stichprobengröße n die gleiche Verteilung hat wie der zugehörige nicht-partielle Korrelationskoeffizient mit Stichprobengröße $n-1$. Das kann z. B. geometrisch nachgewiesen werden, vgl. [32]; [50], S. 348-350.) Die Teststatistik ist für die partiellen Korrelationen entsprechend

$$T = r\sqrt{\frac{n-3}{1-r^2}}$$

und Student-t-verteilt mit $n-3$ Freiheitsgraden, die Nullhypothese wird abgelehnt bei $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-3)$.

5.3.2 Korrelationen im Verlauf der Semester

Wie im vorigen Abschnitt beschrieben, sind die Korrelationen für jedes Semester berechnet und auf Signifikanz untersucht worden. Die Werte sind in Tabelle 5.2 dargestellt. Zum Lesen der Tabelle noch einige Anmerkungen:

- Die Grundgesamtheit der Datensätze, anhand derer Korrelationen bestimmt werden konnten, besteht ab dem WiSe 13/14 jeweils aus allen zur Veranstaltung angemeldeten Studierenden. Wie schon in Abschnitt 5.1.2 beschrieben, kommen dazu noch einige Datensätze von „Ausreißern", die ohne Veranstaltungs-Anmeldung Übungsangebote bearbeiten und/oder an der Klausur teilnehmen konnten. Im WiSe 12/13 und im SoSe 13 besteht die Grundgesamtheit dagegen aus den zur Klausur angemeldeten Studierenden und dazu einigen wenigen Personen, die sich zwar nicht zur Klausur angemeldet, aber BSAs und/oder eTests bearbeitet haben. Zur Unterscheidung sind in der folgenden Tabelle die Kennwerte der ersten beiden Semester kursiv gesetzt, alle anderen nichtkursiv; wegen der unterschiedlichen Grundgesamtheiten sind die kursiven nicht direkt mit den nichtkursiven Kennwerten vergleichbar.
- Der jeweils zuerst angegebene Korrelationskoeffizient ist der rangbezogene nach Spearman; darunter steht rotgedruckt der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson.
- Die Farbhinterlegungen stehen für die statistische Signifikanz der jeweiligen Korrelation, je nach Farbe zu unterschiedlichen Signifikanzniveaus; die genauen Niveaus sind der Legende unter der Tabelle zu entnehmen.
- Es sei daran erinnert, dass im WiSe 12/13 statt Klausurpunktzahlen nur die Klausurnoten verfügbar gewesen sind; daher stammen die negativen Korrelationswerte in diesem Semester in der Tabelle.

Die Datensatz-Tabellen zusammen mit den zugehörigen Korrelationsberechnungen (wobei letztere in der Datei jeweils unter einem eigenen Reiter zu finden sind) können für die untersuchten Semester als Spreadsheets unter der URL http://didaktik.matha.rwth-aachen.de/de/mitarbeiter/mei/dissertation.html eingesehen werden.

	WiSe 12/13	**SoSe 13**	**WiSe 13/14**	**SoSe 14**	**WiSe 14/15**	**SoSe 15**	**WiSe 15/16**	**SoSe 16**	**WiSe 16/17**	**SoSe 17**
Größe Grundgesamtheit	*814*	*683*	1297	892	1220	1061	1328	1190	1372	1200
Anteil Nutzer mind. 1 BSA	*53%*	*51%*	49%	23%	27%	19%	42%	26%	25%	16%
Korrelationen										
Anzahl BSAs & Klausurpkt.	*-0,32* *-0,31*	*0,45* *0,43*	0,54 0,52	0,37 0,39	0,42 0,40	0,37 0,34	0,58 0,51	0,44 0,42	0,34 0,31	0,26 0,29
Pkt. in schriftl. HAs & Klausurpkt.	–	–	0,47 0,48	0,47 0,49	0,30 0,30	0,50 0,53	–	–	–	–
WK-Pkt. & Klausurpkt.	–	–	–	–	–	–	0,40 0,45	0,38 0,47	0,24 0,45	0,27 0,47
Pkt. in verpfl. eTests & Klausurpkt.	*-0,07* *-0,06*	*0,21* *0,19*	0,15 0,15	0,36 0,35	0,24 0,19	0,30 0,32	–	–	–	–
Pkt. in freiw. eTests & Klausurpkt.	–	–	–	–	–	–	0,35 0,23	0,35 0,33	0,33 0,26	0,25 0,25
Partielle Korrelationen										
Anz. BSAs & Klausurpkt. ohne eTest-Einfl.	*-0,32* *-0,31*	*0,42* *0,40*	0,52 0,50	0,33 0,35	0,37 0,37	0,32 0,30	0,49 0,48	0,32 0,31	0,21 0,24	0,17 0,20
eTest-Pkt. & Klausurpkt. ohne BSA-Einfl.	*0,04* *0,04*	*0,12* *0,10*	-0,04 0,00	0,32 0,30	0,12 0,09	0,24 0,26	0,06 0,08	0,16 0,15	0,19 0,16	0,14 0,13

X,YZ Spearman-Rangkorrelationskoeffizient

X,YZ Pearson-Korrelationskoeffizient

X,YZ Korrelation ist signifikant zum Niveau $\alpha = 0,05$

X,YZ Korrelation ist signifikant zum Niveau $\alpha = 0,01$

X,YZ Korrelation ist signifikant zum Niveau $\alpha = 0,001$

Tabelle 5.2: Überblick über die Korrelationskoeffizienten im Verlauf der Semester

Aus den beobachteten Korrelationskoeffizienten in der Tabelle erhält man nun mehrere Erkenntnisse zum (monotonen bzw. linearen) Zusammenhang zwischen Aufgabenbearbeitung und Klausurleistung:

- Fast alle **Korrelationen haben das gewünschte Vorzeichen** in dem Sinne, dass eine intensivere Nutzung des jeweiligen Elements auch mit einer höheren Klausurpunktzahl (bzw. mit einer niedrigeren und damit besseren Klausurnote im WiSe 12/13) einhergeht. Insbesondere gilt dies für alle Korrelationen zwischen BSA-Nutzung und Klausurleistung.
  Die einzigen beiden Abweichungen davon sind die partiellen Korrelationen zwischen eTest-Punktzahl und Klausurpunktzahl bzw. -note in WiSe 12/13 und WiSe 13/14. Warum hier das Herausrechnen des BSA-Nutzungs-Einflusses sogar zu negativen Werten führt, ist nicht klar und mag insbesondere wegen der betragsmäßig sehr kleinen Werte schlicht an statistischer Schwankung liegen.

- Fast alle (unbereinigten wie partiellen) **Korrelationen weichen statistisch signifikant von 0 ab**. Insbesondere trifft dies auf alle (unbereinigten wie partiellen) Korrelationen zwischen BSA-Nutzung und Klausurleistung zu.
  Was die Aussagekraft der beobachteten Korrelationen angeht: Berücksichtigt man andere Korrelationsuntersuchungen in Bildungskontexten (vgl. z, B. [20], S. 127-128; [70], S. 64; [94], S. 114 ff.), erkennt man, dass insbesondere die meisten Korrelationen zu BSA-, HA- und WK-Bearbeitung im allgemeinen Vergleich durchaus hoch sind – auch dann noch, wenn man die etwas geringeren partiellen Korrelationen zur BSA-Bearbeitung betrachtet.

- Die Korrelationen BSA-Anzahl & Klausurleistung **liegen durchaus nah** bei den Korrelationen schriftl. HA-Punkte & Klausurleistung bzw. WK-Punktzahl & Klausurleistung; in einigen Semestern liegt erstere sogar über letzterer. Dies kann darauf hinweisen, dass die BSA-Bearbeitung einen grob ähnlichen Nutzen in Bezug auf die Klausurleistung hat wie die Bearbeitung der schriftlichen Hausaufgaben bzw. der Wissensstandkontrollen.
  Man beachte, dass insbesondere in den letzten drei untersuchten Semestern bei der Korrelation zwischen WK-Punkten und Klausurleistung ein recht großer Unterschied zwischen dem Spearman- und dem Pearson-Koeffizienten besteht. In zwei Fällen davon dreht sich dadurch das Größenverhältnis zwischen den Korrelationen von BSA- und WK-Bearbeitung mit der Klausurleistung um. Gründe für diese Unterschiede sind nicht bekannt.

- Die **Korrelation von der Klausurleistung mit der eTest-Punktzahl ist merklich niedriger** als diejenige mit der BSA-Nutzung, auch wenn dieser Unterschied bei den Pearson-Koeffizienten ausgeprägter ist als bei den Spearman-Koeffizienten. Interessanterweise sind die Korrelationen mit der eTest-Punktzahl seit deren Freiwilligkeit nicht deutlich größer geworden, obwohl man dies hätte vermuten können, da die Studierenden vorher 50% der eTest-Punkte erreichen *mussten*, um zur Klausur zugelassen zu sein. Jedenfalls kann dies ein weiteres Indiz dafür sein, dass BSA-Bearbeitung in Bezug auf die Klausurleistung einen höheren Nutzen hat als eTest-Bearbeitung.

- Die partiellen Korrelationen zwischen BSA-Nutzung und Klausurleistung bereinigt vom Einfluss der eTest-Punktzahl **weichen relativ wenig von den zugehörigen unbereinigten Korrelationen ab** (bis zu etwa einem Drittel davon außer im letzten untersuchten Semester; „relativ“ ist in Bezug auf den folgenden Punkt zu sehen). Versteht man wie oben beschrieben die eTest-Punktzahl als einen Marker für Fleiß, ist dies ein Indiz dafür, dass auch nach einer Störeinfluss-Herausrechnung die meisten Korrelationen zwischen BSA-Nutzung und Klausurleistung noch einigermaßen stark sind.

- Betrachtet man die partielle Korrelation **andersherum,** also eTest-Punktzahl mit Klausurleistung bereinigt vom Einfluss der BSA-Nutzung, **weichen diese mehr von den unbereinigten Korrelationen ab** (oft rund die Hälfte davon, in einigen Fällen noch mehr) als beim vorigen Punkt. Das kann dafür sprechen, dass der Zusammenhang zwischen eTest-Bearbeitung und Klausurleistung sich zu einem größeren Anteil aus anderen (Stör-)Einflüssen zusammensetzt, als es beim Zusammenhang zwischen BSA-Nutzung und Klausurleistung der Fall ist.

5.4 Vortest-Eingruppierung mit Nutzer-Nichtnutzer-Vergleich

Als zweites Untersuchungselement bzgl. der Wirkung der BSA-Bearbeitung ist ein Nutzer-Nichtnutzer-Vergleich nach voriger Eingruppierung in Leistungsgruppen anhand eines Vortests vorgenommen worden. Im ersten folgenden Unterabschnitt wird die Idee zu diesem Vorgehen inkl. der mathematischen Überlegungen zur Signifikanzuntersuchung beschrieben. Darauf folgt die Darstellung der Ergebnisse mit zugehörigen Tabellen ab S. 199 mit anschließender Zusammenfassung relevanter Folgerungen.

5.4.1 Vorgehen bei der Vortest-Eingruppierung

Idee und Einteilungskriterien

Im vorigen Abschnitt ist ein Ansatz dargestellt worden, wie sich – mithilfe der eTest-Punktzahl als einfachem Maß für Fleiß und den entsprechend davon bereinigten partiellen Korrelationen – der Zusammenhang zwischen BSA-Nutzung und Klausurleistung vom Störeinflüssen „isolieren" lässt. Hier ist ein anderer Ansatz zu beschreiben, bei dem die Studierenden anhand von Leistungen beim Studieneingang eingruppiert werden und für diese Teilgruppen jeweils separat die Wirkung der BSAs untersucht wird.

Dabei hat die Motivation für eine Betrachtung auf Gruppeneinteilungs-Basis darin gelegen, dass die BSAs ihrer Konzeption nach ja hauptsächlich die „mittleren" Studierenden ansprechen sollten, bei denen man vermutet hat, dass sie am meisten von einem Unterstützungsangebot profitieren könnten (siehe Unterabschnitt 2.2.2). Entsprechend ist nach einer Möglichkeit zur passenden Eingruppierung im Rahmen der gegebenen Daten gesucht worden.

Konkreter besteht der gewählte Ansatz jedenfalls darin, die erste Wissensstandkontrolle bzw. den ersten eTest als „Vortest" zu benutzen – zumindest in Wintersemestern. Inhaltlich legitim ist dies insofern, als dass in Mathematik I in der ersten WK bzw. im ersten verplichtenden eTest hauptsächlich Schulstoff abgefragt wird. Aufgaben aus einer Version der ersten WK sind z. B. im WiSe 15/16 die folgenden gewesen, und im ersten eTest sind es ganz ähnliche Aufgabenstellungen:

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Es seien $a, b, c, d > 0$. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{ac+ad}{c+d} = \boxed{} \qquad a\left(\left(\left(b+c\right)-c\right)d\right) - d\left(\left(a-c\right)b\right) = \boxed{}$$

$$\frac{a^4b^2-a^6}{a^5+a^4b} = \boxed{} \qquad \log\left(\frac{ab}{c}\right) - \log\left(\frac{a}{c}\right) = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (1 Punkt)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie folgende Ausdrücke. Kürzen Sie dabei soweit wie möglich und fassen Sie soweit wie möglich zusammen.

$$\frac{126}{90} = \boxed{} \qquad \left(2^3\right)^2 = \boxed{} \qquad \frac{15}{30} + \frac{15}{45}\alpha - 2\left(\frac{15}{60} + \frac{60}{90}\alpha\right) = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (1 Punkt)
Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung und geben Sie diese in einer Lösungsmenge an:

$$5x^2 - 15 = 10x + 60$$

Geben Sie den Rechenweg an!

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung für $x \in \mathbb{R}$ und geben Sie diese in einer Lösungsmenge an.

$$|7x + 14| < 28$$

Geben Sie den Rechenweg an!

Anhand der individuell erreichten Punktzahl in der ersten WK bzw. im ersten eTest – was ggfs. zusammenfassend „Vortest“ genannt wird – können die Studierenden also in „Fähigkeitsgruppen“ eingeteilt werden. Untersucht worden sind die Wintersemester 14/15, 15/16 und 16/17, zu früheren Semestern waren die erforderlichen Detaildaten nicht verfügbar. Die Gruppeneinteilung ist in den genannten Semestern wie folgt vorgenommen worden:

- Diejenigen, die am Vortest **nicht teilgenommen** haben: Für die Nichtteilnahme kann es verschiedene Gründe gegeben haben – Krankheitsfälle, Wiederholer, die keine Punkte für die Zulassung mehr benötigen, ohne bekannte Begründung Nichterschienene, etc. Diese Teilgruppe ist also nicht durch ein bestimmtes Fähigkeitsniveau gekennzeichnet – die beschriebenen Fälle sind zu heterogen, um diesbezügliche Schlussfolgerungen zuzulassen.
  Speziell im WiSe 15/16 werden auch alle diejenigen mit in diese Gruppe gezählt, die 0 Punkte in der ersten WK erhalten haben, da in den verfügbaren Daten zu diesem Semester kein Unterschied zwischen 0 Punkten oder Nichtteilnahme gemacht worden ist.

- Diejenigen, die **0 bis 2 Punkte in der ersten WK** bzw. **0 bis 3 Punkte im ersten eTest** erreicht haben. Mit dieser Teilgruppe werden die „schwachen Studierenden“

operationalisiert, bei denen zu vermuten ist, dass sie selbst bei Nutzung von Unterstützungs-Angeboten schwerlich genügend Verständnis, Fertigkeiten und Wissen erlangen können, um die Klausur zu bestehen.
Man beachte, dass – wie beim vorigen Punkt beschrieben – im WiSe 15/16 hier stattdessen die Gruppe derjenigen mit 1-2 Punkten in der ersten WK in die Untersuchung eingeht.

- Diejenigen, die **3 bis 4 Punkte in der ersten WK** bzw. **3,5 bis 6 Punkte im ersten eTest** erreicht haben. Mit dieser Teilgruppe werden die „mittleren Studierenden" operationalisiert, die die Hauptzielgruppe der BSAs bilden. Sie bringen mutmaßlich solide Vorkenntnisse, Fähigkeiten und Fleiß (etwa aus der Schule) mit, sodass ihnen Unterstützungsangebote dabei helfen können, statt einer schlechten oder sogar nicht ausreichenden eine durchaus gute Klausurleistung zu erreichen.

- Diejenigen, die **5 bis 6 Punkte in der ersten WK** bzw. **6,5 bis 8 Punkte im ersten eTest** erreicht haben. Mit dieser Teilgruppe werden die „starken Studierenden" operationalisiert, bei denen zu vermuten ist, dass sie so vorteilhaftes Vorwissen, Fertigkeiten, Einstellungen und Fleiß mitbringen, dass die meisten von ihnen selbst bei Nutzung nur eines kleinen Teils der Veranstaltungsangebote befriedigende bis sehr gute Klausurleistungen erbringen werden bzw. würden.

Jede dieser vier Teilgruppen ist dann nochmals unterteilt worden in diejenigen, die wenigstens eine BSA geöffnet haben, und diejenigen, die keine einzige BSA geöffnet haben – kurz, in BSA-Nutzer und -Nichtnutzer. (Siehe zu dieser Definition von BSA-Nutzern auch Unterabschnitt 5.1.2.) Es ergibt sich dadurch folgende Feldertafel mit acht Teilgruppen (Tabelle 5.3):

	Vortest-Nichtteilnehmer	Schwache Studierende	Mittlere Studierende	Starke Studierende
BSA-Nichtnutzer				
BSA-Nutzer				

Tabelle 5.3: Schema zur Eingruppierung nach Vortestleistung und BSA-Nutzung bzw. -Nichtnutzung, mit Feldern für Durchschnitts-Klausurpunktzahlwerte der jeweiligen Teilgruppen

Für jede dieser acht Teilgruppen ist dann per arithmetischem Mittel die durchschnittlich erreichte Klausurpunktzahl bestimmt worden. Hier ist also die Idee, statt Fleiß die allgemeinen Fähigkeiten am Studieneingang zu „kontrollieren". Der Vergleich der

Durchschnitts-Klausurpunktzahlen bei BSA-Nutzern und -Nichtnutzern in den einzelnen Teilgruppen liefert eine andere Art von Quantifizierung für den Effekt der BSA-Nutzung, durch die Gruppenbildung kontrolliert bzgl. des Einflusses vorbestehender mathematischer Fähigkeit am Veranstaltungsbeginn.

Signifikanz der Unterschiede in der Durchschnitts-Klausurpunktzahl

In Bezug auf die statistische Signifikanz der Ergebnisse ist diesmal zu untersuchen, ob sich in den jeweiligen Leistungsgruppen die BSA-Nutzer und -Nichtnutzer statistisch signifikant voneinander hinsichtlich der durchschnittlichen Klausurpunktzahl unterscheiden. Als statistischer Test dazu ist der Welch-Test gewählt worden – ein t-Test zum Vergleich der Erwartungswerte zweier Stichproben mit potentiell unterschiedlichen Varianzen – in einer Variante, bei der statt der „rohen" Klausurpunktzahlen die zugehörigen Rangwerte zu verwenden sind (vgl. dazu [80]). Ausschlaggebend für diese Wahl ist gewesen, ...

... dass die erhobenen Klausurpunktzahl-Datensätze weder in der Grundgesamtheit noch innerhalb der jeweiligen Teilgruppen approximativ normalverteilt sind (diese Annahme hat man schon rein visuell anhand von Diagrammen zu den Daten schnell verwerfen können),

... dass die Varianzen innerhalb der Teilgruppen-Datensätze bei BSA-Nutzern und BSA-Nichtnutzern oft deutlich unterschiedlich sind,

... und dass die Datensatzumfänge von BSA-Nutzern und -Nichtnutzern sich meist deutlich voneinander unterscheiden.

Der Welch-Test wird innerhalb der jeweiligen Vortest-Punkt-Gruppe – z. B. den 3-4-Punktlern – als Vergleich der arithmetischen Mittel der Klausurpunkt-Rangwerte von BSA-Nutzern bzw. -Nichtnutzern durchgeführt. μ_1 bezeichne dafür das arithmetische Mittel der Klausurpunkt-Rangwerte der BSA-Nutzer, μ_2 dasjenige der BSA-Nichtnutzer; die Nullhypothese H_0 lautet dann $\mu_1 \leq \mu_2$, die Alternativhypothese H_1 ist $\mu_1 > \mu_2$. Diesmal wird also ein einseitiger Test genutzt. Die Teststatistik ist

$$T = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} ,$$

wobei $s_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (x - \overline{x})^2,\ s_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (y - \overline{y})^2$ die geschätzten Varianzen und $n_1,\ n_2$ die Gruppengrößen jeweils der Nutzer- bzw. Nichtnutzer-Teilgruppe sind. Die Nullhypothese wird zum Signifikanzniveau α verworfen, wenn $T > t_{1-\alpha}(\nu)$ gilt; dabei ist $t_{1-\alpha}(\nu)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Student-t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden und ν gegeben durch

$$\nu = \left\lfloor \frac{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2 \cdot s_1^2}\right)^2}{\frac{1}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^2}{n_2^2(n_2-1)\cdot s_1^2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2} \right\rfloor .$$

5.4.2 Eingruppierungs-Ergebnisse in ausgewählten Wintersemestern

Den vorigen Beschreibungen entsprechend sind für die Wintersemester 14/15, 15/16 und 16/17 die jeweiligen Teilgruppen sowie die zugehörigen Durchschnitts-Klausurpunktzahlen mit entsprechenden Rangwerten bestimmt worden. Mithilfe dieser Daten ließ sich dann berechnen, zu welchem Signifikanzniveau die Differenz zwischen BSA-Nutzer- und BSA-Nichtnutzer-Mittelwert von Null abweicht.

Die Kennzahlen für die drei Wintersemester sind auf der nächsten Seite in Tabelle 5.4 festgehalten. In den Zellen steht jeweils normalgedruckt die Durchschnitts-Klausurpunktzahl und dahinter in Klammern kursivgedruckt der „Stichprobenumfang", also die Größe der jeweiligen Teilgruppe; für jede der vier Vortest-Fähigkeitsgruppen stehen außerdem unten der errechnete Wert T der Statistik, die Zahl der Freiheitsgrade, sowie das Signifikanzniveau, zu dem die jeweilige Differenz zwischen BSA-Nutzer- und BSA-Nichtnutzer-Mittelwert von 0 abweicht. Die Zahlenwerte sind jeweils auf zwei Nachkommastellen gerundet. Die vollständigen Berechnungen hierzu finden sich auf http://didaktik.matha.rwth-aachen.de/de/mitarbeiter/mei/dissertation.html unter den schon in Unterabschnitt 5.3.2 erwähnten Spreadsheets, genauer im jeweils zweiten Reiter der Tabellen zu den Wintersemestern 14/15, 15/16 und 16/17.

Wieder gibt es zu diesen Werten einige zentrale Beobachtungen, die gesondert festzuhalten sind:

- Zunächst sind in allen Vortest-Fähigkeitsgruppen aller drei untersuchten Wintersemester die Differenzen der Durchschnitts-Klausurpunktzahlen von BSA-Nutzern und -Nichtnutzern signifikant von 0 verschieden – im WiSe 15/16 bei den 5-6-Punktlern (den „starken Studierenden") zum Niveau $\alpha = 0,005$, in allen anderen Teilgruppen in allen drei Wintersemestern zum Niveau $\alpha = 0,001$. Da mit der Vortestpunkt-Eingruppierung der Einfluss unterschiedlicher Eingangsfähigkeiten zumindest teilweise kontrolliert wird, erhält man zusammen mit dem vorigen Punkt, dass **die durchschnittlichen Klausurpunktzahlen bei BSA-Bearbeitung statistisch signifikant höher sind als bei -Nichtbearbeitung**.

Durchschnittliche Klausurpunktzahlen WiSe 14/15	Vortest-Nichtteilnehmer	Schwache Studierende	Mittlere Studierende	Starke Studierende
BSA-Nichtnutzer	4,44 *(352)*	3,65 *(88)*	8,04 *(284)*	11,55 *(172)*
BSA-Nutzer	14,49 *(37)*	13,18 *(28)*	19,70 *(134)*	21,53 *(125)*
	$T = 4,56$ $\nu = 40$ $\alpha = 0,001$	$T = 5,40$ $\nu = 38$ $\alpha = 0,001$	$T = 9,30$ $\nu = 272$ $\alpha = 0,001$	$T = 5,32$ $\nu = 270$ $\alpha = 0,001$

Durchschnittliche Klausurpunktzahlen WiSe 15/16	Vortest-Nicht-teilnehmer und Nullpunktler	Schwache Studierende	Mittlere Studierende	Starke Studierende
BSA-Nichtnutzer	2,80 *(411)*	0,88 *(172)*	5,82 *(141)*	16,69 *(51)*
BSA-Nutzer	16,00 *(246)*	8,67 *(66)*	18,65 *(147)*	25,17 *(94)*
	$T = 13,67$ $\nu = 362$ $\alpha = 0,001$	$T = 7,05$ $\nu = 76$ $\alpha = 0,001$	$T = 10,79$ $\nu = 282$ $\alpha = 0,001$	$T = 2,90$ $\nu = 91$ $\alpha = 0,005$

Durchschnittliche Klausurpunktzahlen WiSe 16/17	Vortest-Nichtteilnehmer	Schwache Studierende	Mittlere Studierende	Starke Studierende
BSA-Nichtnutzer	8,38 *(595)*	2,83 *(218)*	13,29 *(136)*	25,78 *(79)*
BSA-Nutzer	21,70 *(174)*	11,03 *(61)*	22,63 *(67)*	38,93 *(42)*
	$T = 9,67$ $\nu = 260$ $\alpha = 0,001$	$T = 3,55$ $\nu = 74$ $\alpha = 0,001$	$T = 4,16$ $\nu = 141$ $\alpha = 0,001$	$T = 3,74$ $\nu = 110$ $\alpha = 0,001$

Tabelle 5.4: Durchschnitts-Klausurpunktzahlen der verschiedenen Teilgruppen in den Wintersemestern 14/15 bis 16/17, mit jeweiliger Teilgruppengröße in Klammern, sowie für jede Vortest-Leistungsgruppe jeweils mit Wert der Welch-Test-Statistik und Signifikanzniveau

- Die **Differenzen der Durchschnitts-Klausurpunktzahlen** – grob um 10 pendelnd – sind auch „mit bloßem Auge“ angeschaut **durchaus nennenswert**. Es mag zudem auffallen, dass die Durchschnitts-Klausurpunktzahlen in allen Teilgruppen relativ niedrig sind. Dies liegt daran, dass – wie schon bei den Korrelationen – diejenigen, die nicht an der Klausur am Semesterende teilgenommen haben, mit 0 Klausurpunkten in die Berechnung einbezogen worden sind. Dadurch werden die Durchschnitt-Klausurpunkzahlen „nach unten gezogen“ – im Mittel um ca. 10-15 Punkte.

- Eine mit den BSAs verbundene Hoffnung ist gewesen, dass vor allem die „mittleren Studierenden“ davon profitieren. Dafür mag sprechen, dass im WiSe 15/16 unter denjenigen mit >0 Vortest-Punkten **die 3-4-Punktler die Gruppe mit der größten Durchschnitts-Klausurpunktzahl-Differenz sind** – mit einer Differenz von ca. 12,83 Punkten, gegenüber 7,78 bei den 1-2-Vortest-Punktlern und 8,48 bei den 5-6-Vortest-Punktlern. Ähnliches ist – weniger stark ausgeprägt – auch im WiSe 14/15 der Fall, mit 11,67 Punkten Unterschied bei den 3,5-6-Vortest-Punktlern und 9,53 bzw. 9,98 bei den anderen beiden Gruppen. Im WiSe 16/17 ist es allerdings anders, dort weisen die 5-6-Vortest-Punktler die größte Differenz auf.

- In allen drei Wintersemestern ist die **Durchschnitts-Klausurpunktzahl-Differenz in der Vortest-Nichtteilnehmer-Gruppe** (bzw. der 0-Vortestpunkte-Gruppe im WiSe 15/16) die zweithöchste oder sogar höchste aller vier Vortest-Punktegruppen. Das liegt vermutlich an der Heterogenität dieser Gruppe – konkreter daran, dass die meisten Personen in dieser Gruppe wahrscheinlich Wiederholer sind, welche die WK- bzw. eTest-Punkte nicht zur Klausurzulassung benötigt und deshalb nicht mitgeschrieben haben. Noch genauer dürften hier in der BSA-Nichtnutzer-Untergruppe gerade diejenigen „Ausreißer“ liegen, die sich nur „pro forma“ in diesem Semester für die Veranstaltung anmelden, sonst aber kaum oder gar nichts dafür investieren und die Klausur immer wieder in spätere Semester verschieben; in der BSA-Nutzer-Untergruppe dürften sich dagegen tendenziell die fleißigeren Wiederholer befinden. Diese Heterogenität kann die auffällig hohen Durchschnitts-Klausurpunkt-Unterschiede in dieser Gruppe erklären – und auch, dass die Durchschnittswerte hier überhaupt höher liegen als in der Gruppe der „schwachen Studierenden“. (In den anderen drei Vortest-Punkte-Gruppen ist diese Heterogenität ja gerade durch die Konstruktion weniger gegeben.)

Nachdem in diesem Kapitel zu jeder Teiluntersuchung jeweils unmittelbar zugehörige Beobachtungen geschildert worden sind, ist im folgenden Fazit eine übergreifende Bilanz zu ziehen.

Kapitel 6

Fazit

6.1 Rückblick auf Haupterkenntnisse der einzelnen Kapitel

Als anstoßgebende Motivation für die Entwicklung der Baumstrukturaufgaben sind in Kapitel 2 – vor dem Hintergrund des für mathematikreiche Studiengänge zunehmend bedeutsamen Übergangs Schule-Hochschule – die didaktischen Herausforderungen speziell in der Veranstaltung „Mathematik I/II für Bauingenieure und verwandte Fachrichtungen“ beschrieben worden. Die wesentlichen Herausforderungen waren dabei das *Geben möglichst individuellen Feedbacks* für die hohe Anzahl von Studierenden, einerseits *Bewegen zum eigenständigen Lernen und Aufgabenlösen* und andererseits *Minimieren potentieller Überforderung durch genügend Hilfestellung*, ein Gewöhnen an *Aufgaben klausurnahen Niveaus* sowie das *Addressieren der „mittleren Studierenden“* als Haupt-Zielgruppe.

Diese Herausforderungen sind in Kapitel 3 als Leitideen für die Maßnahmenentwicklung aufgegriffen worden. Der grundlegende erste Schritt hin zur Konkretisierung war dann das Konzeptpapier nach Heitzer zu allgemeinen Lernhürden und möglichen Mitteln zu deren Minderung. Die Überlegungen, wie diese in E-Learning-Form realisiert werden konnten, haben zusammen mit dem Einbeziehen von Theorien aus der didaktischen Literatur schließlich zum Baumstruktur-Prinzip geführt. Die wichtigsten dieser Theorien waren der Verzweigungs-Ansatz des programmierten Lernens nach Crowder; damit eng verwandt die (lokale) Adaptivität, also die für das Baumstruktur-Prinzip zentralen antwortabhängigen Verzweigungen im Aufgabenverlauf; sowie Theorien zum Lernen mit Musterlösungen, darunter der Worked-Examples-Ansatz mit seiner Betonung möglichst lückenlosen „Vormachens“ zum Abbau unnötiger mentaler Hürden, und der Ansatz von Ableitinger mit seiner Betonung heuristischer Schritte im Löseprozess, die lange vor dem Aufschreiben einer sauberen Lösung wichtig sein können. Schließlich sind die Ziele des BSA-Projekts benannt worden (siehe auch nächsten Abschnitt 6.2).

Im Rahmen der BSA-Detailbeschreibungen in Kapitel 4 sind wesentliche BSA-Charakteristika am Beispiel der konkret entwickelten Aufgaben illustriert worden, insbesondere die explizite Behandlung anfänglicher heuristischer Ausprobier-Phasen bzw. „Nebenrechnungen", die möglichst merk- und nachvollziehbare Darstellung rezeptartig lösbarer Aufgabenabschnitte, sowie wann immer möglich visuelle Veranschaulichungen in Bildform.

In Kapitel 5 sind die verschiedenen Evaluationselemente – Studierendenumfrage, Auswertung der BSA-Nutzungsdaten, Korrelationsuntersuchung zu Aufgabenbearbeitungs- und Klausurleistungs-Daten, BSA-Nutzer-Nichtnutzervergleich nach Eingruppierung durch Vortest – mit ihren Ergebnissen dargestellt worden. Mit letzteren kann größtenteils das Erreichen der am Ende des Kapitels 3 genannten Ziele bestätigt werden (siehe dazu den folgenden Abschnitt).

6.2 Die Ziele hinter der BSA-Entwicklung – erreicht?

Die drei Hauptziele der BSA-Entwicklung waren: Die BSAs als inhaltlich hilfreiches und gut nutzbares E-Learning-Produkt, eine hohe Nutzungsquote der BSAs unter den Studierenden allgemein und besonders bei den „mittleren" Studierenden, sowie eine objektiv messbare, positive Wirkung der BSA-Bearbeitung für die Studierenden (siehe Abschnitt 3.5). Auf Basis der Evaluationsergebnisse aus Kapitel 5 lässt sich Folgendes zum Erreichen dieser Ziele resümieren.

Zur Frage, ob mit den BSAs ein nützliches E-Learning-Produkt vorliegt, hat die Auswertung der Studierendenumfrage einige Antworten geliefert. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass dieses Ziel im Wesentlichen erreicht ist: Die angekreuzten sowie ausformulierten Rückmeldungen sind in der Tendenz klar positiv, mit Zustimmungsquoten von oft mehr als 70%. Daneben geben nennenswerte Anteile der Befragten an, dass sie gerne noch mehr BSAs, noch mehr Erklärungen, noch direktere Klausurnähe hätten. Eine häufige Rückmeldung aus den ausformulierten Kommentaren ist auch, dass man die BSAs zwar sehr hilfreich, schriftliche Hausaufgaben aber noch nützlicher gefunden hat. Diese vermeintliche „Konkurrenz" zwischen den beiden Angeboten löst sich angesichts der praktischen Machbarkeit schnell auf: Individuell korrigierte und kommentierte schriftliche Hausaufgaben lassen sich im Falle von ca. 700 oder mehr Abgaben kaum noch mit vertretbarem Aufwand realisieren, während die BSAs u. a. gerade für automatisierte und dennoch einigermaßen individuelle Rückmeldungen zum Konzeptverständnis entwickelt worden sind und problemlos hohe Nutzerzahlen erlauben. Bei der Korrelationsuntersuchung (siehe übernächsten Absatz) erhält man sogar Indizien, dass der Zusammenhang zwischen BSA-Bearbeitung und besseren Klausurleistungen ähnlich stark einzuschätzen ist wie bei der Bearbeitung schriftlicher Hausaufgaben. Jedenfalls bleiben die positiven Antworttendenzen der verschiedenen Umfrage-Durchgänge bestehen, und auch wenn die Rücklaufzahlen der Umfrage in den späteren Semestern niedrig waren, stimmen die zugehörigen Antworttendenzen doch mit denen der früheren rückmeldungsreichen Umfragen überein. Zusammenfassend lässt sich somit sagen: BSAs werden von den Betroffenen als grundsätzlich hilfreiches und gut nutzbares E-Learning-Produkt erlebt.

Bei der Nutzungsquote der BSAs gibt es keine „deutlichen Mehrheiten", sodass das Ziehen einer Bilanz hier nicht eindeutig möglich ist. Aus Sicht des Autors ist diese Zieldimension als zumindest eingeschränkt erreicht anzusehen: Im Durchschnitt über die untersuchten Semester (unter Benutzung des arithmetischen Mittels) sind die Nutzungsquoten für ein freiwilliges Angebot grundsätzlich positiv. So haben im Durchschnitt ca. 30% aller zur Veranstaltung angemeldeten Studierenden mindestens eine BSA genutzt, 21% haben wenigstens eine BSA bis zum Ende bearbeitet und 13% haben wenigstens die Hälfte der in diesem Semester verfügbaren BSAs genutzt. Ebenfalls positiv ist, dass wie erhofft die BSA-Nutzungsquoten speziell der „mittleren" Studierenden in den drei untersuchten Wintersemestern mit durchschnittlich 39% höher gelegen haben als in der Gesamthörerschaft. Andererseits gibt es starke Schwankungen der hörerschaftweiten BSA-Nutzungsquoten über die Semester auch nach unten hin. (Zu einer möglichen Stabilisierung der Nutzungsquoten auf höherem Level siehe auch den nächsten Abschnitt 6.3.) Die Bilanz zur Nutzungsquote ist also gemischt, mit angesichts der Freiwilligkeit guten Durchschnittswerten, aber auch mit in einzelnen Semestern nach unten schwankenden Nutzungswerten.

Zur Frage einer messbaren positiven Wirkung der BSAs wurden zwei statistische Untersuchungen zur Korrelation zwischen Aufgabenbearbeitung und Klausurleistung sowie zum BSA-Nutzer-Nichtnutzer-Vergleich differenziert nach Vortest-Leistungsgruppen durchgeführt. Die Ergebnisse sind positiv: Die Korrelationen zwischen BSA-Bearbeitung und Klausurpunktzahlen sind für den allgemeinen Kontext Bildungsforschung durchaus hoch, woran sich auch nichts Wesentliches ändert, wenn man den Einfluss von durch eTest-Bearbeitung operationalisiertem Fleiß mittels partieller Korrelationen herausrechnet. Zudem sind diese Korrelationen ähnlich hoch wie die Korrelationen zwischen der Bearbeitung schriftlicher Hausaufgaben und der Klausurpunktzahl; dies kann ein Indiz dafür sein, dass die BSAs ähnlich hilfreich fürs Üben des Stoffs sind wie schriftliche korrigierte Hausaufgaben. Dieses Ergebnis erhält noch zusätzliches Gewicht dadurch, dass letztere deutlich höheren und jedes Semester neuen Personalaufwand erfordern. Beim Klausurpunktzahlvergleich der BSA-Nutzer und -Nichtnutzer gruppiert nach Leistung im Vortest haben sich in allen Gruppen statistisch signifikante Unterschiede bei den durchschnittlichen Klausurpunktzahlen von BSA-Nutzern gegenüber Nichtnutzern gezeigt – insbesondere in der Gruppe der „mittleren" Studierenden. Im Rahmen dessen, was diese beiden Untersuchungen aussagen können, weisen die Ergebnisse darauf hin, dass das hiesige Ziel erreicht worden ist.

6.3 Verbesserungs- und Ausbaumöglichkeiten

Neben der genannten grundsätzlich positiven Bilanz gibt es nach den Erfahrungen über fünf Jahre BSA-Einsatz in der Veranstaltung auch eine Reihe von Punkten, die sich rückblickend als verbesserungswürdig herausgestellt haben und die im Folgenden zu erläutern sind. Zudem werden kurz die aus Sicht des Autors sinnvollsten Ansatzpunkte für einen etwaigen Ausbau des BSA-Aufgabenpools genannt.

Die Benutzung von Moodle ist mit gewissen Einschränkungen verbunden: Einerseits ist Moodle die weiterhin einzige gefundene (freie) E-Learning-Plattform, die mit der Lektion-Aktivität ein Tool für antwortabhängige Verzweigungen bietet, ohne dass man selbst umständliche Modifizierungen vornehmen müsste. Andererseits sind die möglichen Fragetypen für die Lektion-Aktivität seit 2005 gleich geblieben (vgl. [4]), während das restliche Moodle-Kern-System seitdem deutliche Erweiterungen und Verbesserungen bzgl. der Fragemöglichkeiten erfahren hat. Insbesondere gibt es für die Test-Aktivität mittlerweile den STACK-Fragetyp, bei dem per Computeralgebrasystem u. a. die Eingabe auf Termgleichheit mit einer Musterantwort überprüft werden kann. Solche Möglichkeiten wären für die Baumstrukturaufgaben sehr wünschenswert, würden sie doch an vielen Stellen das Abfragen von Zwischenergebnissen „natürlicher" machen: So könnte man damit etwa direkt nach dem Term einer Ableitung oder einer Stammfunktion fragen, statt diesen in irgendeiner Form zu kodieren und den Nutzer nur nach bestimmten diesbezüglichen Zahlenwerten zu fragen. Auch andere der neueren Fragetypen für die Test-Aktivität, wie z. B. die diversen Drag-and-Drop-Fragen, hätten die recht „altbackenen" Lektion-Frageseiten gelegentlich auflockern können. Es ist also zu hoffen, dass die Lektion-Aktivität bzgl. Fragetypen irgendwann auf den gleichen Stand wie das restliche Moodle-System gebracht wird: Auf Tagungen wurden diesbzgl. bereits Kontakte mit Gleichgesinnten geknüpft, und auch in der engeren Entwickler-Community von Moodle wird das Problem besprochen (vgl. etwa [5]; es gibt auch aktuellere Links, deren URLs aber vermutlich kurzlebiger sind).

Die Art und Häufigkeit, wie in der Veranstaltung auf die BSAs hingewiesen wird, ist als ein wesentlichen Faktor hinter den stark über die Semester schwankenden BSA-Nutzungsquoten zu vermuten. Zwar wird man die BSA-Nutzung aus verschiedenen Gründen kaum zur Pflicht machen oder z. B. mit Bonuspunkten explizit honorieren können, doch ein „offensiveres“ und häufigeres Erwähnen als bisher könnte diese Quoten merklich verbessern und vielleicht auf einem höheren Level stabilisieren.

Beim Formulieren der Studierendenumfrage ist aus jetziger Sicht etwas zuviel Wert auf die Kürze des Fragebogens zwecks Niedrigschwelligkeit gelegt worden. Mit etwa 50% mehr Fragen hätte man vermutlich ähnlich viele Teilnehmer erhalten und dafür systematischer die zu untersuchenden Skalen abbilden können (darunter bspw. die ersten vier Leitideen aus Abschnitt 3.1.1). Um die Vergleichbarkeit über die Semester aufrechtzuerhalten, wurde der Fragebogen aber seit der Erstellung im SoSe 13 nicht mehr wesentlich geändert.

Bei beiden statistischen Untersuchungen – diejenige zur Korrelation zwischen Aufgabenbearbeitung und Klausurerfolg sowie diejenige zum Nutzer-Nichtnutzer-Vergleich nach Vortest-Eingruppierung – ist es ein Anliegen gewesen, mögliche „überlappende“ Nebeneffekte aus den beobachteten Zusammenhängen herauszurechnen. Optimal wäre es allerdings gewesen, wenn man statt dieser relativ komplizierten Untersuchungen ein simples psychologisches Experiment mit Experimental- und Kontrollgruppe hätte aufbauen können. Durch eine zufällige Einteilung der Studierendenschaft in BSA-Autorisierte und -Nichtautorisierte hätte man nach der Klausur den bestmöglichen „harten“ Vergleich bzgl. der Auswirkungen der BSA-Bearbeitung auf die erreichten Klausurpunkte ziehen können. Aus Fairness- und Ethik-Gründen ist das aber innerhalb der Veranstaltung nicht machbar gewesen. Realisieren ließe sich ein solches Experimentaldesign vermutlich nur in Ansätzen, indem man die BSA-Bearbeitung in einem von der Veranstaltung Mathematik I/II separaten, informellen Rahmen mit eigenem „Mathematik-Test“ untersuchte – was einen hohen Zusatzaufwand bedeuten und vermutlich nur relativ wenige Teilnehmer anziehen würde.

Möchte man zukünftig zu einem Aufgabentyp noch weitere fachliche oder didaktische Aspekte in den BSA-Pool aufnehmen – einen geänderten Ausgangsterm, der somit einen anderen Lösungsweg erfordert o. ä. – ist zuerst zu überlegen, ob man dies auch in Form eines relativ kurzen „Was wäre, wenn?“-Exkurses in einer der bestehenden BSAs einpflegen kann. Das Verhältnis zwischen Erstellungsaufwand (siehe auch nächsten Abschnitt) und Lernmehrwert ist dabei wahrscheinlich besser als beim Erstellen einer gänzlich neuen BSA, die dann womöglich noch in Teilen ähnlich abläuft wie die schon bestehende(n).

Bislang sind die BSAs thematisch auf den Stoff der Veranstaltung „Mathematik I/II“ für Bauingenieurwesen und verwandte Fachrichtungen begrenzt. Das Format ist allerdings genauso auch für Themengebiete geeignet, die in anderen Mathematik-Serviceveranstaltungen behandelt werden: Denkbare Beispiele sind etwa partielle Differentialgleichungen oder Funktionentheorie bei Elektrotechnikern, Stochastik bzw. Statistik bei Wirtschaftswissenschaftlern, Tensorrechnung oder mehrdimensionale Integrale bei Physikern, und viele weitere. An diesen und ähnlichen Ansatzpunkten könnte der Aufgabenpool ggfs. zukünftig nutzbringend erweitert werden.

6.4 Nutzen und Forschungsbeitrag der BSAs

Mit den Baumstrukturaufgaben ist ein E-Learning-Angebot entwickelt worden, das sich als in wesentlichen Punkten adäquat für konzept- und verständnisorientiertes Üben von Hochschul-Mathematikstoff erweist und das dem Nutzen schriftlicher Hausaufgaben nahekommt. Insbesondere für Veranstaltungen mit vielen hundert Hörern bedeutet dies – u. a. wegen des auf lange Sicht ungleich geringeren Aufwands – einen erheblichen Mehrwert.

Möchte man ähnliche Aufgaben an anderen Hochschulen bzw. für andere Veranstaltungen entwickeln, ist der Arbeitsaufwand zu beachten, der hinter der Entwicklung der BSAs steckt: Eine einzelne BSA – mit anfänglicher Sammlung möglicher didaktischer Hürden, Durchrechnen der Aufgabenstellung zu verschiedenen Termen und Entscheidung für einen davon, Grobkonzeption des BSA-Verlaufs und schließlich der detaillierten Erstellung und Verlinkung aller BSA-Seiten in Moodle – erfordert nicht weniger als 80 Arbeitsstunden, gerade bei längeren Aufgaben auch deutlich mehr. Neben dem reinen Aufwand müssen BSA-Entwickler zudem detaillierte Kenntnisse des Stoffs selbst wie auch Gespür und Erfahrung bzgl. der didaktischen Herausforderungen aus Studierendensicht besitzen. Durch die genaue Behandlung von Einzelschritten beim BSA-Prinzip sind die Aufgaben schließlich recht rigide und können nicht leicht im Nachhinein geändert werden. Dies rechnet sich aber auf lange Sicht, wenn der Vorlesungsstoff „stabil" bleibt: Sind sie einmal erstellt, erfordern die BSAs nahezu keinen Wartungsaufwand mehr und können über Jahre von den Studierenden zum Üben genutzt werden.

Es ist ein günstiger Umstand, dass mit den Verantwortlichen des Baumstrukturaufgaben-Projekts eine enge Zusammenarbeit zwischen der Mathematik- und der Mathematikdidaktik-Seite zustande gekommen ist. Ebenfalls günstig und vielleicht sogar notwendig für die Aufgabenentwicklung ist es gewesen, dass die Entwickler sowohl einen Lehramt- bzw. Didaktik-Hintergrund in Mathematik vorweisen als auch mehrsemestrige, studierendennahe Erfahrungen in der Mathematiklehre der Ingenieurveranstaltung sammeln konnten. Die Verknüpfung von mathematischen und didaktischen Detailkenntnissen mit praktischen Einsichten ins studentische Lernen in der Fachveranstaltung – worauf letztlich die stoffdidaktische Analyse und die Ausformung jeder BSA basieren – ist ein wesentliches Merkmal des BSA-Projekts.

Schließlich kann das Baumstruktur-Prinzip mit seiner lokalen Adaptivität – dem antwortabhängigen Verzweigen – dabei helfen, auf zeitgemäß digitale Weise den Ansatz programmierten Lernens nach Norman Crowder etwas mehr aus dem Schatten des Skinner-Ansatzes hervorzuholen. Mit seiner Betonung von Fertigkeiten spiegelt sich letzterer weiterhin im Großteil heutiger Mathematik-E-Learning-Angebote wider. Der verzweigte Ansatz mit mehrseitigem Aufgabenverlauf wie bei den BSAs kann dagegen eine Antwort auf die Frage darstellen, wie sich die für Hochschulmathematik elementare Dimension des Konzeptverständnisses in E-Learning-Form behandeln lässt. Neben dem „Gebrauchswert“ als Übungselement in Veranstaltungen zur Hochschulmathematik kann darin ein relevanter Beitrag zur aktuellen E-Learning-Forschung liegen.

Anhang A

Konzeptpapier zu Lernhürden und Abhilfen (Johanna Heitzer)

Verbesserung des e-Learnings zur Mathematik für Bauingenieure (Gemeinschaftsprojekt mit den Professoren Herty und Grasedyck)

Vermutete Hauptursachen für die Schwierigkeiten der Teilnehmer mittleren Niveaus, auf deren Minderung das e-Learning abzielen soll:

1. Zu geringen Vorkenntnisse und -fertigkeiten
2. Fehlende oder geringe Motivation
3. Fehlende Sorgfalt, Gründlichkeit und Durchhaltevermögen
4. Fehlender Überblick / zu große Anfangshürde bei komplexen Aufgaben
5. Fehlende „geistige Wendigkeit“ (nach Lompscher/Hasdorf 1976: Reduktion, Reversibilität, Aspektbeachtung, Aspektwechsel, Transferierung)
6. Fehlende Zielklarheit (nicht sehen, wofür man das braucht)

Mögliche Didaktische Abhilfen, nach Gruppen geordnet:

1. Die Schwierigkeiten in „Häppchen“ zerlegen und die einzelnen Fertigkeiten gezielt trainieren lassen.

2. Wo immer möglich motivieren / motivierend fragen. Rückmeldungen über den bereits erzielten Erfolg geben. Aufgaben stellen, deren Niveau so ist, dass die Studierenden sich als kompetent erleben können. Aufgaben stellen, bei denen der Sinn für einen zukünftigen Bauingenieur möglichst klar wird. Coachen und disziplinieren, Lernfortschritt durch die Aufgaben erfahrbar machen.

3. Regelmäßige Rückmeldungen über den bisherigen Lernstand und der Lösungsstand einer Aufgabe geben. Erfolgsrückmeldungen für Teillösungen geben, die Schwierigkeiten kontinuierlich steigern. Lücken in Wissen und Fertigkeiten aufzeigen und wiederum: coachen und disziplinieren. Aufgaben stellen, bei denen formal korrekte und vollständige Schreibweise explizit geübt wird. Aufgaben stellen, bei denen es auf Spezial- und Sonderfälle ankommt.

4. Überblicksfragen stellen. Überblicke geben, ruhig auch in Form von 'Mindmaps'. Wo immer möglich: Verknüpfungen herstellen. Die Schwierigkeiten in „Häppchen“ zerlegen und den Schwierigkeitsgrad kontinuierlich steigern. Immer mal wieder den Standort bestimmen und das vorhandene Wissen stabilisieren.

5. Verständnis-fördernd fragen. Wo immer möglich die Anschauung hinzunehmen, auch: Verknüpfungen zwischen verschiedenen Aufgabentypen oder mathematischen Sätzen und Verfahren herstellen. Manchmal die Strategien thematisieren. Immer wieder die Fragerichtung wechseln, Umkehraufgaben stellen und selbst formulieren lassen. Wichtige Fertigkeiten konsequent und immer wieder mal trainieren lassen.

6. Überblicksfragen stellen und Überblicke angeben. Verknüpfungen herstellen, wo immer möglich. Rückmeldungen geben der Form: „Das kannst Du schon, das musst Du noch lernen..“. Erstrebenswerten Zuwachs an lösbaren Problemen aufzeigen, die Nutzbarkeit der jeweiligen

Mathematatik für das Fach möglichst aufzeigen und erfahren lassen.

Spezielle geeignete Aufgabetypen oder Formate, die uns bisher einfallen sind, und erste Beispiele dazu:

- Zuordnungsaufgaben (Komplex 1, Folgen und Reihen 2)
- Aufgabentyp „Fehler suchen in vorgegebenen Rechnungen“ (Folgen und Reihen, Aufgabe 1)
- Richtige von falschen Aussagen unterscheiden (Komplexe Zahlen, Aufgabe 4)
- Aufgaben, die die Anschauung bewusst hinzuziehen (Komplexe Zahlen, Aufgabe 2,3)
- Aufgaben, die Fallunterscheidungen verlangen (diese können inhaltlich oder methodisch sein (Beispiel:Komplexe Zahlen, Aufgabe 3,4)
- Aufgaben stellen, in denen die Fragerichtung umgekehrt wird / selber Aufgaben erfinden lassen
- Benennen lassen, wodurch eine Aufgabe schwierig wird
- Fälle aufzählen lassen, die auftreten können (Beispiel: Zu Unstetigkeits-stellen bei einer Funktion können, z.B. führen: ...)
- Fallunterscheidungen aufzählen lassen
- Klassifizierungsfragen stellen, zB nach Typen von Funktionen, nach Gleichungssystemen oder Gleichungen hinsichtlich ihrer Lösbarkeit
- Aufgaben mit Baumstruktur und je nach Weg verschiedenen Rückmeldungen beziehungsweise Hilfestellungen.

Wichtige Abschlussbemerkung:

Grundlage der gesamten Aufgabenkonzeption ist bei jedem Teilgebiet eine gründliche didaktische Analyse der darin steckenden Schwierigkeiten und erforderlichen Fertigkeiten, wie Sie Frau Schmitz bei den komplexen Zahlen schon einmal beispielhaft gemacht hat.

Anhang B

Didaktische Sachanalysen & Aufgabenbeispiele (Andrea Offergeld)

Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. J. Heitzer
Andrea Schmitz

Aachen, den 4. Juli 2012

Themenbereich Komplexe Zahlen

Vorüberlegungen

- Identifizierung der komplexen Schreibweise $z = x + iy$ mit dem Tupel (x, y) bzw. dem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division in der Darstellungsweise $z = x + iy$:
  - komponentenweise
  - bei Division: Erweitern führt auf reellen Nenner
- Betrag und Dreiecksungleichungen für den Betrag; $\mathbb{C}$ hat keine Anornung, aber der Betrag $|z| = |x + iy| \in \mathbb{R}$ einer komplexen Zahl schon, da auf $\mathbb{R}$ die Anordnung existiert
- konjugiert komplexe Zahl; falls $z \in \mathbb{C}$, z nicht reell, Nullstelle eine Polynoms mit reellen Koeffizienten ist, dann ist auch $\bar{z}$ Nullstelle
- Umrechnung von Polarkoordinatendarstellung zur kartesischen Darstellung:
  - Gegeben sei eine komplexe Zahl in der Darstellung $z = |z|e^{i\varphi}$, $|z| \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$.
  - Diese Zahl lässt sich schreiben als $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi)$, es sind also nur die einzelnen Komponenten auszurechnen.
- Umrechnung von kartesischer zu Polarkoordinatendarstellung:
  - Gegeben sei eine komplexe Zahl in der Darstellung $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
  - Berechne zu z zunächst $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  - Für die Berechnung des Argumentes φ gibt es nun mehrere Möglichkeiten, die man sich geometrisch herleiten kann:
    * Zunächst ist der Bereich von φ festzulegen, falls die Darstellung für $z \neq 0$ eindeutig sein soll.

* Für $\varphi \in (-\pi, \pi]$ kann man den Tangens zur Berechnung verwenden. Es gilt dann:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0, y = 0 \\ \pi & \text{für } x < 0, y = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } x > 0, y \neq 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y > 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

* Falls man das Intervall für φ anders wählt, sind die Werte entsprechend anders.

* Man könnte auch stattdessen den Cosinus benutzen. Dann erhält man:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{für } y \geqslant 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

- Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division in der Darstellungsweise $z = |z|e^{i\varphi}$, $|z| \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$:
  - Addition und Subtraktion sind meist nur in kartesischer Darstellung vernünftig durchführbar, aber die Multiplikation sowie die Division funktionieren viel besser in Polarkoordinatendarstellung!
  - Außerdem hat das Produkt so eine geometrisch anschauliche Interpretation: Multiplikation des Abstandes der Zahlen vom Nullpunkt und Addition der Winkel.
- n-te Potenz und n-te Wurzel einer komplexen Zahl:
  - Für $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \neq 0$ gilt $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |z|^n e^{in\varphi}$. Damit hat die Gleichung $z^n = w, w \neq 0$ genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich $z = \zeta_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\varphi+k2\pi)}{n}}, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
  - Damit eignet sich die Darstellung in Polarkoordinaten auch besonders für die Potenzrechnung mit komplexen Zahlen.
  - Die n-ten Einheitswurzeln liegen alle auf dem Einheitskreis und unterteilen diesen in n gleiche Sektoren. Sie liegen spiegelbildlich zur reellen Achse, sind also reell oder treten in komplex konjugierten Paaren auf.
- Bei Aufgaben des Typs „Bestimmen Sie alle Nullstellen von $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.“ geht es darum, zunächst einfache Startlösungen zu erraten, entsprechende Polynomdivisionen durchzuführen und schließlich das Polynom vollständig in Linearfaktoren zu zerlegen.

- Bei Aufgaben des Typs „Bestimmen und skizzieren Sie den durch ... beschriebenen Bereich der Gaußschen Zahlenebene.“geht es darum, die einzelnen Bedingungen getrennt zu betrachten. Bei jeder einzelnen Bedingung sind für z die kartesischen Koordinaten $x + iy$ einzusetzen, die Ungleichungen entsprechend zu vereinfachen und zumeist auf Polynome niedrigeren Grades zurückzuführen. Schließlich werden die entsprechenden Schnittmengen oder Vereinigungsmengen gebildet und die Fläche skizziert.

Aufgaben

Aufgabe 1 Zuordnung von Polarkoordinatendarstellungen

Welche Polarkoordinatendarstellungen können den folgenden komplexen Zahlen $z_k, \quad k = 1,2,3$ mit $z_k = x_k + iy_k, \quad x_k, y_k \in \mathbb{R}$, zugeordnet werden? (Mehrere Lösungen sind möglich).

(1) $z_1 = 3 - 3i$
(2) $z_2 = -3 - 3i$
(3) $z_3 = -3 + 3i$

(a) $3\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4}))$
(b) $3\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i}$
(c) $3\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$
(d) $3\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) - i\cos(\frac{5}{4}\pi))$
(e) $3\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{i}$
(f) $\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}} \cdot e^{-\frac{15}{4}\pi i}$
(g) $3\sqrt{2}(\cos(\pi) - \cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi))$
(h) $3\sqrt{2} \cdot e^{\frac{13}{4}\pi i}$
(i) $3\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}$
(j) $\frac{6}{\sqrt{2}}(\cos(-\frac{\pi}{4}) - i\sin(-\frac{\pi}{4}))$
(k) $\frac{6}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{5}{4}\pi i}$
(l) $3\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$
(m) $3\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{5}{4}\pi))$

Lösung:

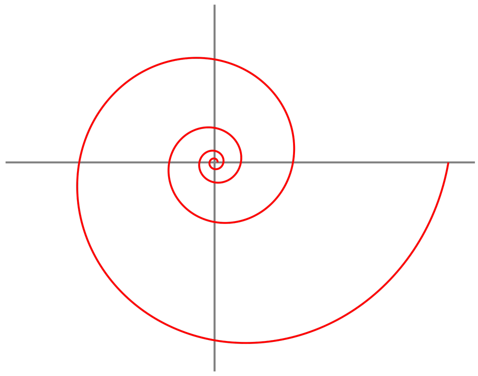
(1): (c),(f),(j)

(2): (b), (k), (m)

(3): (d), (i)

Distraktoren: (a), (e), (g), (h), (l)

Aufgabe 2 Logarithmische Spirale



(Grafik: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3f/Logarithmic_spiral.svg)

Eine logarithmische Spirale ist eine Spirale, bei der sich mit jeder Umdrehung um ihren Mittelpunkt (Zentrum, Pol) der Abstand von diesem Mittelpunkt um den gleichen Faktor verändert. In der komplexen Ebene lässt sich jede logarithmische Spirale durch folgende Funktion beschreiben:

$w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, w(t) = a \cdot z^t$, wobei $z \in \mathbb{C}$ und nicht reell ist, $|z| \neq 1$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gibt also ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so dass $w(t) = a \cdot |z|^t e^{it\varphi}$ gilt.

Die Drehrichtung einer Spirale beschreibt man von innen nach außen blickend entweder als linksdrehend oder rechtsdrehend.

1. Es sei $z = 1 + i$. Berechnen Sie $z_n = (1+i)^n$ für $n = 0, 1, 2, ..., 8$ und geben Sie die Ergebnisse in der Form $a + ib$ bzw. $a - ib$ mit $a, b \geqslant 0$ ohne Leerzeichen ein. (Schönere Alternative: Koordinatensystem, bei dem man die entsprechenden Punkte auswählen kann.)

2. Bestimmen Sie die Parameter a, $|z|$ und φ der logarithmischen Spirale, auf der alle diese Punkte liegen.

3. Um welchen Faktor ändert sich bei dieser Spirale mit jeder Umdrehung der Abstand vom Mittelpunkt?

4. Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, z nicht reell. In welchen der folgenden Fälle liegen alle z^n auf einer rechtsdrehenden, in welchen auf einer linksdrehende Spirale?

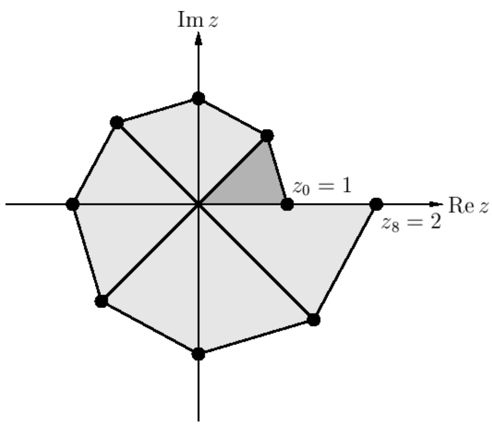
   (a) $|z| > 1$ und $0 < \varphi < \pi$
   (b) $|z| > 1$ und $-\pi < \varphi < 0$
   (c) $|z| < 1$ und $0 < \varphi < \pi$
   (d) $|z| < 1$ und $-\pi < \varphi < 0$

Lösung:

1. $1, 1+i, 2i, -2+2i, -4, -4-4i, -8i, 8-8i, 16$
2. $a = 1$, $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$
3. 16
4. (a) linksdrehend, (b) rechtsdrehend, (c) rechtsdrehend, (d) linksdrehend

Aufgabe 3 Figur aus ähnlichen Dreiecken

Die abgebildete Figur in der Gaußschen Ebene besteht aus ähnlichen Dreiecken. Bestimmen Sie (a) das Produkt p der markierten Punkte, sowie die (b) Summe der Flächeninhalte aller acht grau hinterlegten Dreiecke.



(Autor: Klaus Höllig, http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/interaufg/interaufg117/)

Lösung:

(a) $2^4 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\pi} = -22,63$ (gerundet auf die zweite Dezimalstelle)

(b) $\sum_{n=0}^{7} \frac{1}{4} \sqrt[8]{2}\sqrt{2} \left(\sqrt[4]{2}\right)^n = 6,11$ (gerundet auf die zweite Dezimalstelle)

Aufgabe 4 Bereiche der Gaußschen Zahlenebene bestimmen

Bestimmen Sie den durch

$$\frac{(\text{Re } z)^2}{|z-i|^2} + \text{Im } \left(\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}+i}\right) \geqslant 0, \quad z \neq i$$

beschriebenen Bereich der Gaußschen Zahlenebene und beantworten Sie dazu die folgenden Fragen.

1. Zur Lösung der Aufgabe setzt man zunächst $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ in die Ungleichung ein. Welche zusätzlichen Bedingungen müssen gestellt werden? Wähle alle richtigen Formulierungen aus den folgenden:

   (a) $x \neq 0$ und $y \neq 1$

   (b) $y \neq i$

   (c) $(x, y) \neq (0, 1)$

   (d) $(x, y) \neq (0, 1)$ und $(x, y) \neq (1, 0)$

   (e) $(x, y) \neq (0, i)$

   (f) $x \neq 0$ oder $y \neq 1$

   (g) $x \neq 0$ und $y \neq i$

   Lösung:

   (c), (f)

2. Welche Techniken sind zur Vereinfachung des Bruches $\frac{(\mathrm{Re}\ (x+iy))^2}{|(x+iy)-i|^2}$ nötig (Reihenfolge beliebig, Mehrfachantworten möglich)?

   (a) Nenner durch Erweitern mit seiner konjugiert komplexen Zahl zu einer reellen Zahl umwandeln.

   (b) Anwendung der binomischen Formeln zur Vereinfachung des Nenners.

   (c) Zusammenfassen jeweils der Realteile und Imaginärteile im Zähler durch Faktorisieren und Ordnen.

   (d) Formel zur Berechnung des komplexen Betrages anwenden.

   (e) Den Nenner auf die Form $\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ bringen.

   (f) x^2 kürzen.

   Lösung:

   (d)

3. Welche Techniken sind zur Vereinfachung des Bruches $\frac{((\overline{x+iy})^2}{\overline{x+iy}+i}$ nötig (Reihenfolge beliebig, Mehrfachantworten möglich)?

   (a) Nenner durch Erweitern mit seiner konjugiert komplexen Zahl zu einer reellen Zahl umwandeln.

   (b) Anwendung der binomischen Formeln zur Vereinfachung des Nenners.

   (c) Zusammenfassen jeweils der Realteile und Imaginärteile im Zähler durch Faktorisieren und Ordnen.

   (d) Formel zur Berechnung des komplexen Betrages anwenden.

(e) Den Nenner auf die Form $x^2 + (y-1)^2$ bringen.

(f) x^2 kürzen.

Lösung:

(a), (c), (e)

4. Nach Vereinfachung beider Brüche und Extrahieren des Imaginärteiles des zweiten Bruches bleibt eine reelle Ungleichung der Form Bruchterm 1 + Bruchterm 2 $\geqslant 0$ zu lösen. Gleichnamigmachen des Nenners und weiteres Ausmultiplizieren führt schließlich auf die Ungleichung
$$\frac{y(-y^2+y-x^2)}{x^2+(y-1)^2} \geqslant 0.$$
Welche Fallunterscheidung ist an dieser Stelle sinnvoll und ersichtlich zu folgern?

(a) $x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}$ oder $y \leqslant 0$

(b) $(y \geqslant 0$ und $(-y^2+y-x^2) \geqslant 0)$ oder $(y \leqslant 0$ und $(-y^2+y-x^2) \leqslant 0)$

(c) $(x^2+(y-1)^2 > 0$ und $y \geqslant 0$ und $(-y^2+y-x^2) \geqslant 0)$

oder $(x^2+(y-1)^2 > 0$ und $y \leqslant 0$ und $(-y^2+y-x^2) \leqslant 0)$

oder $(x^2+(y-1)^2 < 0$ und $y \geqslant 0$ und $(-y^2+y-x^2) \leqslant 0)$

oder $(x^2+(y-1)^2 < 0$ und $y \leqslant 0$ und $(-y^2+y-x^2) \geqslant 0)$.

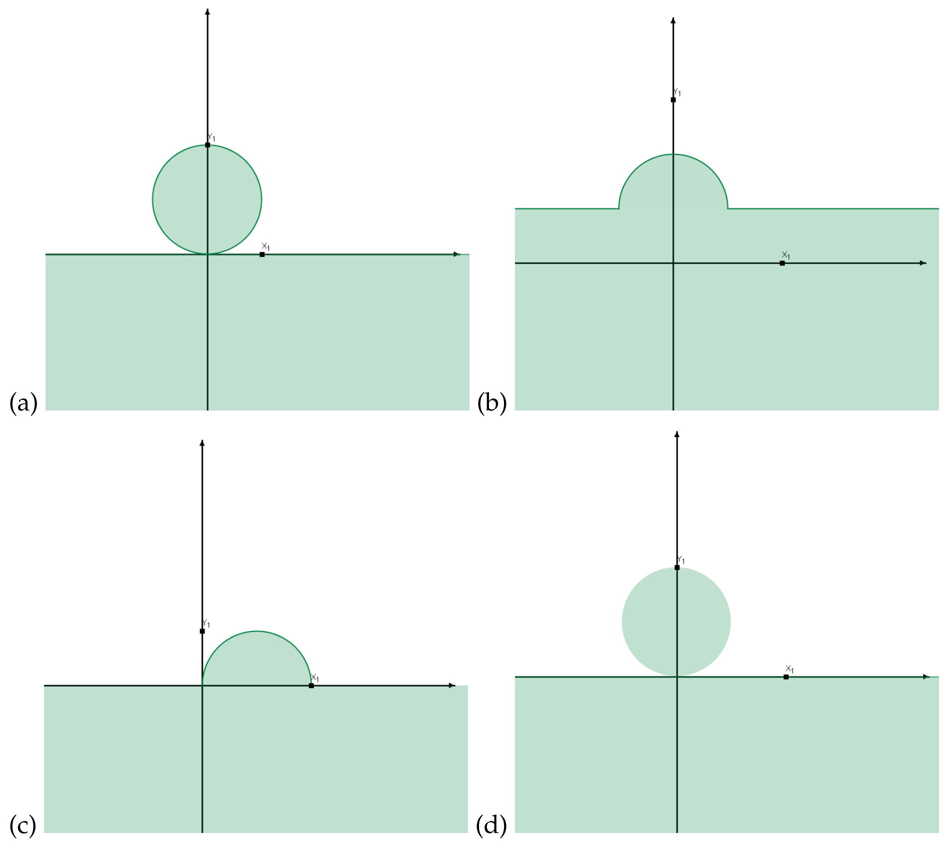
Rückmeldungen dazu:

Antwort (a): Diese Antwort ist zwar eine richtige, aber nicht direkt ersichtliche Folgerung. Sie ergibt sich erst als Vereinigungsmenge zweier Schnittmengen aus der allgemeinen Fallunterscheidung und ist als solche als Rechenschritt schriftlich festzuhalten, ebenso wie die Anwendung der quadratischen Ergänzung innerhalb der Fallunterscheidung.

Antwort (b): Diese Folgerung ist richtig und an dieser Stelle offensichtlich, da der Term $x^2 + (y-1)^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(x,y) \neq (0,1)$ echt größer Null ist.

Antwort (c): Diese Folgerung ist zwar richtig, da sie alle möglichen Fälle der Fallunterscheidung systematisch betrachtet. Sie ist aber nicht „sinnvoll", da der Fall $x^2 + (y-1)^2 < 0$ an dieser Stelle bereits offensichtlich ausgeschlossen werden kann.

5. Welche der folgenden Skizzen passt zur Ungleichung? Wähle eine passende Maßeinheit und trage ein, welche Maßzahl am Punkt X_1 auf der x-Achse und welche Maßzahl am Punkt Y_1 auf der y-Achse entsprechend anzubringen ist.



LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. J. Heitzer
Andrea Schmitz

Aachen, den 22. Juni 2012

Themenbereich Folgen und Reihen

Vorüberlegungen

-

Aufgaben

Aufgabe 1

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $a_n = \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{2\sqrt{n}-6n}$. Welche der folgenden Grenzwertberechnungen ist korrekt?

1.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{2\sqrt{n}-6n} \\ &= \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2}}{2-6\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n^2+n-n^2}}{2-6\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2-6\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{n}}-6} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{2\sqrt{n}-6n} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(2\sqrt{n}+6n)}{4n-36n^2} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{2\sqrt{n}\sqrt{n^2+n}-2n\sqrt{n}+6n\sqrt{n^2+n}-6n^2}{4n-36n^2} \\
&= \frac{2n\sqrt{n^2+n}-2n^2+6n\sqrt{n}\sqrt{n^2+n}-6n^2\sqrt{n}}{4n-36n^2} \\
&= \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-2+6\sqrt{n+1}-6\sqrt{n}}{\frac{4}{n}-36} \\
&= \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-2+6\sqrt{n+1-n}}{\frac{4}{n}-36} \\
&= \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-2+6}{\frac{4}{n}-36} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2-2+6}{0-36} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{2\sqrt{n}-6n} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{n^2+n-n^2}{(2\sqrt{n}-6n)(\sqrt{n^2+n}+n)} \\
&= \frac{-n\sqrt{n}}{2\sqrt{n}\sqrt{n^2+n}+2\sqrt{n}n-6n\sqrt{n^2+n}-6n^2} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2-6\sqrt{n+1}-6\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

4.

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{2\sqrt{n}-6n} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n+1-(n+1)}-n}{2\sqrt{n}-6n} \\
&= \frac{\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n+1}-n}{2-6\sqrt{n}} \\
&= \frac{n+1-\sqrt{n+1}-n}{2-6\sqrt{n}} \\
&= \frac{1-\sqrt{n+1}}{2-6\sqrt{n}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\frac{2}{\sqrt{n}}-6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0-1}{0-6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Lösung:

3., Distraktoren: 1., 2., 4.

Aufgabe 2 Zuordnungsaufgabe

1. In der Praxis genügen oft die Grenzwertsätze für konvergente Folgen um zu zeigen, dass eine Folge konvergiert. Manchmal benötigt man aber zusätzliche Strategien. Die Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Terme auf der rechten Seite gegeben sind, konvergieren alle. Ordnen Sie jede Strategie auf der linken Seite allen Folgen auf der rechten Seite zu, bei denen man sie sinnvoll anwenden kann, um ans Ziel zu kommen.

(a) Wenn $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = q$ mit $0 \leqslant q < 1$ für $a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.	(1) $a_n = \sqrt[3]{\frac{n+5}{8n-13}}$
(b) Nachweis von Beschränktheit und Monotonie sowie Betrachtung einer Fixpunktgleichung	(2) $a_1 := 1,\ a_{n+1} = \sqrt{7a_n}$
(c) „konjugiertes Erweitern" von Produkt- und Differenzfolgen	(3) $a_n = \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n$
(d) Schachtelung und Abschätzung der Folge	(4) $a_n = \frac{5n}{3^n}$
(e) Rückführung auf den Grenzwert e^a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n,\ a \in \mathbb{R}$	(5) $a_n = \frac{(-1)^n+5n^2}{n(n-6)},\ n \geqslant 7$
	(6) $a_n = \sqrt{3n^2+n}+2-\sqrt{3n^2-1}$
	(7) $a_n = \frac{6n}{\sqrt[3]{27n^3-n^2-n}}$
	(8) $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$
	(9) $a_n = \frac{i^{(n-1)}}{n+1}$
	(10) $a_n = \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}$
	(11) $a_1 := 4,\ a_{n+1} = \frac{4}{n+1} - \frac{17}{4\sqrt{n+1}}$
	(12) $a_n = \frac{13}{\cosh(n)\cdot n}$

2. Geben Sie die Grenzwerte der Folgen auf die erste Nachkommastelle gerundet ein.

Lösung:

1.

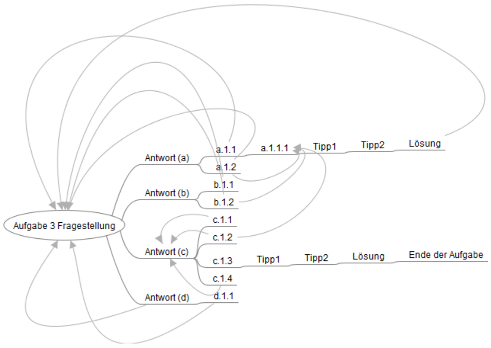
- (a)–>(4),(8)
- (b)–>(2)
- (c)–>(6)
- (d)–>(5),(9),(11)
- (e)–>(3),(8)

2.

- (1) 0,5
- (2) 7
- (3) 148,4
- (4) 0
- (5) 5
- (6) 2,3
- (7) 3
- (8) 0

- (9) 0
- (10) 1
- (11) 0

Aufgabe 3 „Baumstruktur-Aufgabe"



Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right)^{n^3}.$$

Sie sollen entscheiden, ob es sich um eine konvergente Reihe handelt. Welche Strategie würden Sie an dieser Stelle auswählen, um diese Frage zu beantworten?

(a) Prüfen, ob es sich bei der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ um eine Nullfolge handelt.

(b) Leibnitzkriterium

(c) Majorantenkriterium/Minorantenkriterium

(d) Quotiententest/Quotientenkriterium

Antwort (a) Prüfen auf Nullfolge –> Verweis auf Frageseite (a.1):

Gegeben war die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$. Sei außerdem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ die Folge der einzelnen Summanden.

Die Prüfung, ob die Folge der $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der a_n eine Nullfolge ist, ist in Erwägung zu ziehen, wenn man genau das Gegenteil vermutet. Bilden die a_n nämlich keine Nullfolge, so folgt daraus automatisch die Divergenz der Reihe.

Vermuten Sie, dass die Folge der a_n eine Nullfolge ist?

(i) ja

(ii) nein

- Antwort (i) –> Verweis auf Inhaltsseite (a.1.1):

  Richtig! Die Folge der a_n bildet eine Nullfolge. Dies ist nicht unmittelbar einleuchtend, da die Folge der Brüche $\frac{n^2}{n^2+1}$ innerhalb der Klammer monoton wachsend ist. Man könnte trotzdem auf die Vermutung kommen, da

  - der Faktor $\frac{n^2}{n^2+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ positiv und echt kleiner 1 ist

  - und die Anzahl dieser einzelnen Faktoren „kleiner 1“ mit jedem Folgeglied durch den Exponenten n^3 rapide zunimmt.

  Einen genauen Beweis, warum die Folge eine Nullfolge bildet, finden Sie HIER. [Verweis auf Inhaltsseite a.1.1.1]

  Da die Folge eine Nullfolge ist, lässt sich über die Konvergenz/Divergenz der Reihe an dieser Stelle keine weitere Aussage treffen. Wir müssen also eine weitere Strategie ausprobieren.

  HIER geht es zurück zur Ausgangsfrage. [Verweis zurück zur Ausgangsfrage]

- Antwort (ii) –> Verweis auf Inhaltsseite (a.1.2):

  Leider falsch. Die Folge der a_n bildet tatsächlich eine Nullfolge. Dies ist nicht unmittelbar einleuchtend, da die Folge der Brüche $\frac{n^2}{n^2+1}$ innerhalb der Klammer monoton wachsend ist. Man könnte trotzdem auf die Vermutung kommen, da

  - der Faktor $\frac{n^2}{n^2+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ positiv und echt kleiner 1 ist

  - und die Anzahl dieser einzelnen Faktoren „kleiner 1“ mit jedem Folgeglied durch den Exponenten n^3 rapide zunimmt.

  Einen genauen Beweis, warum die Folge eine Nullfolge bildet, finden Sie HIER. [Verweis auf Inhaltsseite a.1.1.1]

  Da die Folge eine Nullfolge ist, lässt sich über die Konvergenz/Divergenz der Reihe an dieser Stelle keine weitere Aussage treffen. Wir müssen also eine weitere Strategie ausprobieren.

  HIER geht es zurück zur Ausgangsfrage. [Verweis zurück zur Ausgangsfrage]

- Inhaltsseite (a.1.1.1)

  Um zu zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ eine Nullfolge ist, reicht es, eine Abschätzung der Form
  $$|a_n - 0| = |a_n| \leqslant b_n$$
  zu finden, wobei die b_n die Folgeglieder einer bereits bekannten Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind. Gelingt es Ihnen, eine solche Abschätzung zu finden?

  1. Tipp [–> Verweis auf Inhaltsseite (a.1.1.1), die obigen Text wiederholt und zusätzlich den Tipp einblendet; alternativ: 1. Tipp öffnet sich in separatem Fenster]:

Wir können a_n umformen zu

$$a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^3} = \left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}\right)^{n}.$$

Wie geht es weiter?

2. Tipp [–> Verweis auf Inhaltsseite (a.1.1.2), die obigen Text und den 1. Tipp wiederholt und zusätzlich den 2. Tipp einblendet; alternativ: 2. Tipp öffnet sich in separatem Fenster]:

Stichwort: Bernoullische Ungleichung!

Lösung [–> Verweis auf Inhaltsseite (a.1.1.3), die obigen Text und Tipps wiederholt und zusätzlich Lösung einblendet]:

Mit Bernoulli kann man die folgende Abschätzung treffen:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \underset{\frac{1}{n^2}>-1}{\geqslant} 1+n^2\cdot\frac{1}{n^2} = 2.$$

Also gilt

$$a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} = \left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}\right)^{n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n},$$

und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine bekannte Nullfolge.

HIER geht es zurück zur Ausgangsfrage. [Verweis zurück zur Ausgangsfrage]

Antwort (b) Leibnitzkriterium –> Verweis auf Frageseite (b.1):

Gegeben war die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$. Sei außerdem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ die Folge der einzelnen Summanden.

Um das Leibnitzkriterium anwenden zu können, müssen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

(i) $a_n \cdot a_{n+1} < 0$

(ii) $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$ und $|a_n| \to 0$

Welche dieser Voraussetzungen ist nicht erfüllt?

- Antwort (i) –> Verweis auf Inhaltsseite (b.1.1):

  Richtig! Die Summanden a_n sind für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv, mithin auch das Produkt beliebiger a_n. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also nicht alternierend. Daher ist das Leibnitzkriterium hier nicht anwendbar.

  [Verweis zurück zur Ausgangsfrage]

- Antwort (ii) –> Verweis auf Inhaltsseite (b.1.2):

  Leider falsch. Diese Voraussetzung ist erfüllt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der $|a_n| = a_n$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

  Stattdessen ist die Voraussetzung $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ nicht erfüllt. Die Summanden a_n sind für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv, mithin auch das Produkt beliebiger a_n. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also nicht alternierend. Daher ist das Leibnitzkriterium hier nicht anwendbar.

  Mehr dazu, warum die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der a_n eine monoton fallende Nullfolge ist, erfahren Sie HIER. [Verweis zu Inhaltsseite (a.1.1.1)]

  Zurück zur Ausgangsfrage geht es HIER. [Verweis zurück zur Ausgangsfrage]

Antwort (c) Majorantenkriterium/Minorantenkriterium –> Verweis auf Frageseite (c.1):

Gegeben war die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$. Sei außerdem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ die Folge der einzelnen Summanden.

Um das Majoranten- bzw. Minorantenkriterium anzusetzen, muss man sich zunächst entscheiden, ob man absolute Konvergenz oder Divergenz der Reihe vermutet. Dazu führe man sich bekannte Vergleichsreihen vor Augen, die als Minorante oder Majorante dienen könnten. Häufig werden die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n,\ q > 0$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$ als Vergleichsreihen benutzt.

Welches Verfahren erscheint am aussichtsreichsten?

(i) Abschätzung gegen eine Marorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha},\ \alpha > 1$, um Konvergenz nachzuweisen

(ii) Abschätzung gegen eine Minorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha},\ \alpha \leqslant 1$, um Divergenz nachzuweisen

(iii) Abschätzung gegen eine Majorante $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n,\ 0 < q < 1$, um Konvergenz nachzuweisen

(iv) Abschätzung gegen eine Minorante $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n,\ q > 1$, um Divergenz nachzuweisen

- Antwort (i) –> Verweis auf Inhaltsseite (c.1.1):

  In der Folge der einzelnen Summanden mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ kommen alle n in Zähler und Nenner in gleicher Potenz vor. Daher ist eine Abschätzung gegen die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha},\ \alpha > 1$ wenig aussichtsreich.

  HIER geht es zurück. [Verweis zurück auf Frageseite (c.1)]

- Antwort (ii) –> Verweis auf Inhaltsseite (c.1.2):

  In der Folge der einzelnen Summanden mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ kommen alle n in Zähler und Nenner in gleicher Potenz vor. Wenn man Divergenz vermutet, könnte man hier höchstens die Abschätzung nach unten gegen konstante Summanden, also eine Abschätzung gegen die Reihe $c\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, $\alpha = 0$, $c > 0$ konstant, in Erwägung ziehen. Dann würde die a_n keine Nullfolge bilden - das tun sie aber.

  Die Begründung, warum die Folge eine Nullfolge bildet, finden Sie HIER. [Verweis auf Inhaltsseite a.1.3]

  HIER geht es zurück. [Verweis zurück auf Frageseite (c.1)]

- Antwort (iii) –> Verweis auf Inhaltsseite (c.1.3)

  Ein guter Gedanke! Der Exponent n^3 in der Folge der Summanden $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ und die Tatsache, dass der Bruch $\frac{n^2}{n^2+1}$ für alle $n \geqslant 1$ kleiner 1 ist, lassen vermuten, dass wir hier mit einer Abschätzung gegen die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $0 < q < 1$ Erfolg haben könnten. Wie könnte diese Abschätzung erfolgen und wie wäre q zu wählen?

  1. Tipp [–> Verweis auf Inhaltsseite (c.1.3.1), die obigen Text wiederholt und zusätzlich den Tipp einblendet; alternativ: 1. Tipp öffnet sich in separatem Fenster]:

  Wir können a_n umformen zu

  $$a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^3} = \left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}\right)^{n}.$$

  Wie geht es weiter?

  2. Tipp [–> Verweis auf Inhaltsseite (c.1.3.2), die obigen Text und den 1. Tipp wiederholt und zusätzlich den 2. Tipp einblendet; alternativ: 2. Tipp öffnet sich in separatem Fenster]:

  Stichwort: Bernoullische Ungleichung!

  Lösung [–> Verweis auf Inhaltsseite (c.1.3.3), die obigen Text und Tipps wiederholt und zusätzlich Lösung einblendet]:

  Mit Bernoulli kann man nun die folgende Abschätzung treffen:

  $$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \underset{\frac{1}{n^2}>-1}{\geqslant} 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 2.$$

  Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

  $$|a_n| = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} = \left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}\right)^{n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Mit $q = \frac{1}{2}$ ist also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ eine Majorante zur Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$, die mithin (absolut) konvergiert.

[Ende der Aufgabe]

- Antwort (iv) –> Verweis auf Inhaltsseite (c.1.4)

  Um die Folge der einzelnen Summanden mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ gegen die divergierende Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n,\ q > 1$ nach unten abzuschätzen zu können, müsste der Bruch $\frac{n^2}{n^2+1}$ ab einem gewissen n_0 größer gleich der Zahl $q > 1$ sein. Er ist jedoch echt kleiner 1 für alle $n \geqslant 1$.

  HIER geht es zurück. [Verweis zurück auf Frageseite (c.1)]

Antwort (d) Quotiententest/Quotientenkriterium –> Verweis auf Inhaltsseite (d.1):

Gegeben war die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$. Sei außerdem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ die Folge der einzelnen Summanden.

Das Quotientenkriterium ist normalerweise ein guter Ansatz, um sich der Konvergenzfrage einer Reihe zu nähern, deren Summanden Fakultäten und/oder Potenzen enthalten. Man erhält hier

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{2(n+1)^3} \cdot (n^2+1)^{n^3}}{((n+1)^2+1)^{(n+1)^3} \cdot n^{2n^3}}.$$

Tatsächlich kann man hier zu einer aussagekräftigen Abschätzung des Quotienten $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ gelangen. Diese ist jedoch nicht sehr offensichtlich und ziemlich mühselig!

HIER finden Sie eine solche Abschätzung. [Verweis auf Inhaltsseite (d.1.1)]

Es gibt einen viel einfacheren und besseren Weg, die Reihe auf Konvergenz/Divergenz hin zu untersuchen!

Deshalb geht es HIER zurück zur Ausgangsfrage. [Verweis zurück zur Ausgangsfrage]

- Abschätzung, Inhaltsseite (d.1.1)

  Man könnte den Quotienten $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ z.B. wie folgt abschätzen:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^{2(n+1)^3}\cdot(n^2+1)^{n^3}}{((n+1)^2+1)^{(n+1)^3}\cdot n^{2n^3}} \\
&= \left(\frac{(n+1)^2\cdot(n^2+1)}{((n+1)^2+1)\cdot n^2}\right)^{n^3}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}\right)^{3n^2+3n+1} \\
&= \left(\frac{1}{\frac{((n+1)^2+1)\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot(n^2+1)}}\right)^{n^3}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)^{3n^2+3n+1} \\
&= \left(\frac{1}{\frac{n^4+2n^3+2n^2}{n^4+2n^3+2n^2+2n+1}}\right)^{n^3}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+2n+2}\right)^{3n^2+3n+2}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+2n+2}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{2n+1}{n^4+2n^3+2n^2+2n+1}}\right)^{n^3}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+2n+2}\right)^{3n^2+3n+2}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+2n+2}\right)^{-1} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{1-\frac{2n}{8n^4}}\right)^{n^3}\left(1-\frac{1}{3n^2+3n+2}\right)^{3n^2+3n+2}\left(1-\frac{1}{n^2+2n+2}\right)^{-1} \\
&= \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{\frac{1}{4}}{n^3}\right)^{n^3}}\left(1-\frac{1}{3n^2+3n+2}\right)^{3n^2+3n+2}\left(1-\frac{1}{n^2+2n+2}\right)^{-1}}_{:=b_n}
\end{aligned}
$$

Da also

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant b_n,\ n\in\mathbb{N}$$

gilt und außerdem

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\frac{1}{4}}{n^3}\right)^{n^3}}\left(1-\frac{1}{3n^2+3n+2}\right)^{3n^2+3n+2}\left(1-\frac{1}{n^2+2n+2}\right)^{-1}\right) \\
&= e^{\frac{1}{4}}\cdot e^{-1}\cdot 1 \\
&= e^{-\frac{3}{4}} < 1
\end{aligned}
$$

folgt daraus mit dem Quotientenkriterium die (absolute) Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$.

HIER geht es zurück zur Ausgangsfrage, um das einfachere Kriterum zu wählen. [Verweis zurück zur Ausgangsfrage]

Anhang C

Gesammelte Freikommentare aus den Studierenden-Umfragen

Freikommentare Sommersemester 2013

- - Gerne noch mehr Aufgaben
  - Bitte auch nochmal vor den Klausuren freistellen

- (Durchhaltevermögen erhöht) Nein, denn die waren ja vergleichsweise leicht Den Schwierigkeitsgrad fand ich gut bis zu leicht, aber den Umfang zu lang. Daraus hätte man gut 2 Aufgaben machen können. Was die Schritte angeht sind es echt viele, aber wenn man es nicht konnte war das auch gut. Blöd war aber, dass man nicht gut einschätzen konnte ob Zwischenschritte kommen. Da gaußt man z.B. einige Schritte und muss sie dann 4x durchklicken und hat einen anderen Ansatz...

- Die online-Hausaufgaben sollten immer freigeschaltet bleiben!

- Ich finde die Aufgaben gut und hilfreich. Ich fände es gut, wenn es zum Ende jeden Themas eine gäbe. Danke.

- Die Aufgaben haben mir auch eine zusätzliche Übungsvorlage gegeben. Fand die Aufgaben genial.

- Als Ergänzung sind die elektronischen Aufgaben ganz nett, jedoch kein Ersatz für schriftl. Hausaufgaben

- Die elektronischen Hausaufgaben können eine schriftliche Abgabe nicht ersetzen! (Lerneffekt ist bei schriftlicher Abgabe höher.)

- Ich finde die klassischen Hausaufgaben, die schriftlich bearbeitet und dann abgegeben werden, hilfreicher. Bei der Bearbeitung am Computer lässt die Konzentration schneller nach und die Ermüdung tritt schneller ein.

- Auf jeden Fall beibehalten

- bis zum Tag der Klausur freischalten; !! ebenso e-Tests bitte vor der Klausur nochmal freischalten!! mehr e-HA! vllt. viele kleinere Aufgaben?!

- Ein E-Mail Reminder wäre nett

- Aufgaben sollten bis zur Klausur freigeschaltet bleiben, damit man sie wiederholen kann.

- Mehr Punkte für Zwischenschritte wären schön, und nicht nur 1 Punkt für viele Zuordnungen wie bei der letzten Aufgabe

- \- es wäre sinnvoll die e-Hausaufgaben zu allen Themen durchzuführen
  \- die Themen die dort behandelt wurden fielen mir eh nicht besonders schwer, andere Themen die ich nicht besonders gut konnte wurden dort nicht behandelt, hätten mir jedoch geholfen -¿ sehr gutes Angebot! Ausweitung wäre sinnvoll! -¿ hilfreicher als schriftliche HA bei denen man keine Ahnung hat, wie es richtig gewesen wäre...
- Eine ausführliche Lösung wäre zum Verständnis besser geeignet. Und die Freigabe der Aufgaben (nach Erreichen der Punkte) zum lernen wäre sinnvoll - sollte die Klausur an diese Art Aufgaben angepasst werden.
- In Zukunft auf jeden Fall beibehalten!
- öfter elektronische Hausaufgaben einrichten
- Gerne mehr e-Hausaufgaben
- sehr hilfreich
- Super Sache, gerne zu jedem Thema!
- Sehr hilfreich, gerne mehr. Während der Klausurvorbereitung werde ich alle eHausaufgaben nochmal durchgehen.
- Ich finde die Online-Übungen als eine große Hilfe. Die Erklärungen sind sehr plausibel und man versteht die Vorgehensweise bei den Hausaufgaben um einiges besser. Bitte MEHR davon!!!Ich weiß, dass ist viel Arbeit aber zu jedem Themengebiet eine Online-Übung wäre eine große Hilfe!!
- Bitte die Aufgaben geöffnet lassen!! Der Zugang sollte zu jedem Zeitpunkt im Semester (v.a. Gegen Semesterende) möglich sein!
- Gute Sache, sollte weitergeführt werden. Hilfreich durch Kommentare und schrittweise Bearbeitung.
- Falls noch 1-2 Übungsaufgaben zu den DGL freigeschaltet werden könnten, wäre das echt super. Beibehalten, übersichtlicher & verständnisfördernder als die eTests
- Je mehr elektronische Hausaufgaben, desto besser
- \- Die Aufgaben werden zu viel vorgerechnet, besser öfters selbst Zwischenergebnisse eintragen.
  \- Aufgaben Klausurfremd zu einfach, nicht gut vorbereitet auf Klausur. Bevorzuge schriftliche Form!

- Ich finde es deutlich besser die HA schriftlich abzugeben, da man für die Klausur so deutlich besseres Feedback bekommt, gerade wenn es um die Notation etc geht.
- mehr online Hausaufgaben, zu mehr Tehmen
- Am besten zu jedem Thema eine Online-Hausaufgabe, um sich mehr mit dem Stoff auf höherem Niveau zu beschäftigen.
- Nö
- Zur Vorbereitung auf die Klausur nochmal Freischalten
- Die online-Hausaufgaben sind TOP!!!!! :) Mehr, mehr, mehr!!!!
- Mehrere schriftliche HA wäre besser! Online HA sind gut!
- Es wäre toll, wenn die E-Test ähnlich wie die HA (mit Erklärung am Ende) gestaltet werden würde.
- Sehr gutes Konzept, es wäre allerdings wünschenswert gewesen den Umfang der schriftlich abzugebenden Has beim Einführen der E-Hausaufgaben NICHT drastisch zu reduzieren. Diese haben ein besseres Feedback gegeben als die E-HAs.
- Danke!
- I HERZ Mathematik ohne Rechnen! Und X is da Best =)
- Fand die Aufgaben als Ergänzung zum Lernen gut aber nich besonders „Horrizont erweiternd“ - Gerne auch komplexere Aufgaben
- Die online HA währen besser wenn es mehrere davon gibt und wenn diese mehr von Schüler anfordern. Die in Mathe II waren meistens durch Klicken auf „Weiter“ gelöst.
- Gern auch mehr elektr. HA einführen!
- Ich finde, dass nur eine Aufgabe in der Hausaufgabe wenig ist. Besser wäre es, eine leichte und eine komplexere Aufgabe vorzurechnen.
- Die Hausaufgaben sollten die ganze Zeit online bleiben!
- weiter so, Jungens!
- zu DGL so ein Konzept
- Die elektronischen Hausaufgaben sollten beibehalten werden.

- online Hausaufgaben waren grundsätzlich hilfreich, darum wäre es aber sinnvoller, sie bei komplexeren Themen zu verwenden (Stetigkeit, Reihen...), bzw. zusätzlich zu der schriftlichen Hausaufgabe

- ich fand die e-HA's sehr hilfreich und hätte mir bes. in Mathe1 mehr davon gewünscht (vielleicht sogar eine zu jedem Thema). Durch die genaue und recht kleinschrittige Beareitung mit Hilfestellung kann man die Sachveralte einfach besser verstehen und nochmal genau nachlesen und nachvollziehen. Es wäre auch schön gewesen wenn sie jederzeit freigeschaltet wären. Gut, dass dies gegen Klausurtermin der Fall war.

- in manchen Aufgaben wurde zuviel von der Lösung vorgegeben, sodass man sich schlecht selbst einschätzen konnte. Die Anmerkungen fand ich seht gut weil sie im Gegensatz zur „Papier Hausaufgabe"gezeigt haben auf was man speziell bei den Aufgaben achten muss. Bei manchen Fragen oftmals richtige Antwort gewusst, aber falsch angekreuzt, weil das technische Fachchinesisch in den Antwortmöglichkeiten verwirrend war. Eventuell Antwortmöglichkeiten, die viele Mathesymbole beinhalten, sprachlich näher erläutern.

- Ich fände es gut, wenn es mehr elektronische Hausaufgaben geben würde, da ich diese durch ihren „Schritt-für-Schritt" Lösungsweg als sehr hilfreich empfinde.

- Da duie elektronischen Hausaufgaben sehr gut bearbeitet werden konnten, würde ich für eien Ausbau dieser Hausaufgaben plädieren. Der Lerneffekt ist bei diesen deutlich höher als bei den abzugebenden Aufgaben - da dort das Feedback sehr zeitaufwendig und meist zu kurz ist. Die umfangreichen Erklärungen in den elektronischen Hausaufgaben könnten noch weiter ausgebaut werden bzw. mehr Aufgaben in diesem Stil erstellt werden. Dies fände ich äußerst wünschenswert.

- X ist so unglaublich viel besser und kompetenter als Y! In der 2. Online-Hausaufgabe.(Mathe 2) konnte man viel zu wenig (Zwischen-) Ergebnisse eingeben!

- Mathe ist ein ohnehin sehr aufwendiges Studienfach. Neben der Vorlesung, der Übung, den e-Tests und eigenständiger Nacharbeitung eine weitere Hausaufgaben zu machen, ist zuviel Aufwand. Im Zuge einer Klausurvorbereitung evtl. sinnvoll, allerdings im Semester zuviel. [Kommentar auf einem sonst leeren Bogen]

Freikommentare Sommersemester 2014

- Super Sache, auf jeden Fall beibehalten!

- Ergänzte Ergebnisse z. Übung, Nicht nur das Antwort aber auch der wichtigste zwischenschritten, Altklausur auf l2p hochladen.

- Teilweise unterschiedliche Schreibweise ob Kleingruppen- oder Vortragsübung. Benötigt als Umdenken was es beim erlernen schwer macht, wenn auch am Schluss nicht mehr sehr störend.

- Grade die Hausaufgaben waren sehr hilfreich, da man die Aufgaben korrigiert zurück erhalten hat.

- Meines Erachtens waren die Aufaben zu Mathe 1 hilfreicher. Zum einen war das Angebot breiter, aber auch die Aufgaben komplexer und umfangreicher, sodass viele Sachverhalte auf einmal klarer bzw. klarer wurden. Insgesamt hat mir das Angebot aber sehr gut gefallen!

- die schriftlichen hausaufgaben finde ich nicht so gut wie die elektronischen, da man dort gleich einen lerneffekt hat

- Die Aufgaben haben mir sehr geholfen. Ich wünschte es wären noch mehr zu verschiedenen Themen verfügbar.

- Es wäre hilfreich mehr Tests zu erstellen, die komplexere Themen wie DGLs höherer Ordnung enthalten da dieses Thema in Vorlesung und Vortragsübung nur kurz angeschnitten wurde und trotzdem klausurrelevant war.

- Von den klausurvorbereitenden E-Tests mit Hilfestellungen sollte es zu jedem Thema welche geben, da man durch diese das gesamte Thema noch einmal sehr gut erklärt bekommt und so seine Schwächen sieht. Gerne auch schon während des Semesters.

- Ein Endergebnis wäre schön gewesen um auch den letzten Schritt überprüfen zu können.

- Musterlösungen zu den neusten Klausur wären hilfreich

- Die schriftliche Abgabe der Hausaufgaben ist hilfreicher, auf Grund der Nähe zur Klausur also auch der Möglichkeit über die Kommentare seine eigenen Fehler zu erkennen und gleichzeitig zu üben eine Aufgabe mathematisch korrekt aufzuschreiben und zu lösen. Somit können unnötige Fehler, die allein durch Festhalten der Lösung entstehen, zu vermeiden.

- Im Großen und Ganzen sind die eHausaufgaben recht hilfreixh zur Verständnis und Ausarbeitung der Aufgaben, allerdings finde ich die Aufgabenstellungen in den eHausaufgaben zu leicht im Vergleich zu Klausuraufgaben. Man versteht die einzelnen Abläufe dadurch zwar gut, kann sich aber nicht wirklich auf die Klausur vorbereiten. Alles in allem trotzdem hilfreich!

- über mehr E-Hausaufgaben hätte ich mich sehr gefreut
- Zu dieser Umfrage: Fragen präzieser stellen
- Hilfreich wäre es, wenn es zu jedem Thema eine Aufgabe geben würde. Ansonsten waren die Aufgaben immer gut verständlich erklärt und haben bei den Vorbereitungen der Klausur geholfen.
- mehr Hausübungen, die vom Institut kontrolliert werden!
- Bei dieser Umfrage war mir nicht klar auf welche Aufgaben die fragen sich genau bezogen. Die ausführlichen schritt für schritt online Hausaufgaben (Mathe 1) haben mir super gafallen. Die E-Tests waren mal mehr mal weniger hilfreich und hatten insgesammt nicht so viel mit der Klausur zu tun. Besonders haben mir die altklausuren geholfen und beispielaufgaben mit ausführlichen Lösungen, die ich von meiner Vormieterin noch hatte.
- Die Hausaufgaben kamen einmal viel zu früh dran. Wir hatten zu dem Thema gerade erst die Vortragsübung gehabt, und keine Zusatzübung. Das war viel zu früh, ich habe in der Hausaufgabe die Aufgaben ohne wirklich selber zu denken bearbeitet! Eher von meinen Unterlagen abgeschrieben. Sonst würde ich auch vorschlagen, warum nicht jede Woche eine Hausaufgabe abgeben? Die Hausaufgaben sind viel hilfreicher als die ETest, alleine weil man dadurch viel über das formale Schreiben lernt. Oder vielleicht die einzelnen Hausaufgaben mit mehrere Aufgaben. Insgesamt fande ich die Umstellung sehr gut! Die alten Bonuspunktaufgaben, die elektronischen, waren meiner Meinung nach kein guter Maß um die Kenntnisse einzuschätzen
- Ich fand die elektronischen Hausaufgaben sinvoll und ansprechend. Sie geben einem die Möglichkeit die Aufgabenstellung zuerst selbst zu lösen und dann jeden Schritt einzelt zu überprüfen, bzw. bei Schwierigkeiten eine Hilfestellung und Denkanstoß zu bekommen, ohne direkt ind ei Fragestunde gehen zu müssen. Bei den Bonuspunktaufgaben (Mathe I) gab es bei mir manchmal Schwierigkeiten mit der Eingabe der Lösung. Zwar habe ich es letztendlich immer richtig gemacht und somit den Bonuspunkt bekommen, allerdings sollte es meiner Meinung nach nicht Sinn der Aufgabe sein, dass das Kodieren der Lösung (fast) schwieriger ist, als die Aufgabe selbst.

- Ich habe die Aufgaben nicht bearbeitet, weil ich schon die Etests zum Teil verwirrend fand und auch so gut mit dem Stoff klar kam. [Kommentar auf einem sonst leeren Bogen]

Freikommentare Sommersemester 2016

- Zwischenergebnisabfragen sind zwar hilfreich, aber es ist ärgerlich, wenn man keinen blassen Schimmer hat, wie man an das Ergebnis kommen soll; aber ein Ergebnis braucht, um weiter zu kommen und eventuell den Lösungsweg zu sehen.
- Prüfungsirrelevante Inhalte wie bspw. Quadriken im R3 waren noch in den Aufgaben. Dies hat zu Verwirrung geführt.
- Aufgaben bitte besser auf Klausurrelevante Inhalte reduzieren. zB Bernoulli weglassen.
- Es ist kompliziert wenn man eine Lösung selber eintragen soll und nur die Lösung im richtigen Format richtig ist, aber wenn man das richtige Ergebnis hat und es anders einträgt, kommt man nicht weiter. Auch wenn man nicht auf die richtige Lösung kommt, bekommt man oft keine Hilfestellung wie man die Aufgabe lösen kann und dann kann man die Aufgabe nicht weiter berechnen, was auch ungünstig ist. Was ich persönlich auch nervig fand, War das man die Lösungen immer mit dem Taschenrechner berechnen muss und nicht die Lösung in Form von Cos etc aufschreiben kann, da man in der Klausur ja auch keinen Taschenrechner benutzen darf.
- Mehrmals haben sich die Lösungsmethoden in den Vortragsübungen und E-Übungen deutlich unterschieden und das hat mich ein bisschen verwirrt.
- ruhig mehr aufgaben dieser form
- Meine Antworten beziehen sich auf die e-Übungen im ersten Teil, da ich sie bei Mathe II vergessen hab, weshalb ich mich auch sehr geärgert habe. Das Konzept finde ich sehr gut. Mehr solcher Aufgaben wäre gut, auch mit unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen. Ab und zu wurde der Text nicht angezeigt und ich musste die Seite verlassen, sodass ich von neu anfangen musste.
- Noch mehr solcher langen Aufgaben und noch mehr klausurnahe Aufgaben. Ein paar, verständnisfördernde Aufgaben für zu Hause, die speziell in Sprechstunden besprochen werden könnten. Falls die nicht per Emailverkehr geklärt werden konnten.

- Ich würde mich darüber freuen, wenn in den Übungen und Vorlesungen mehr auf die etests aufmerksam gemacht werden würde. Die Qualität der etests ist sehr gut.
- Ich fand die langen Aufgaben zum verstehen sehr gut und sie haben mir auch wirklich geholfen. An manchen Stellen hat es mich verwirrt, dass so viel erklärt wurde, wodurch ich mir nicht sicher war ob auch so eine gründliche Erklärung in der Klausur nötig war. Deswegen wäre es vllt noch gut an manchen Stellen zu sagen was als Formulierung in der Klausur ausreichend ist und was nur zur erklärungszwecken genannt wurde...ansonsten gute Idee!
- Die generellen Möglichkeiten zur Bearbeitung von Aufgaben waren zu klein.
- mehrere verschiedene Aufgaben zu einem Themenbereich
- -ich fänd es gut, wenn die langen e-Aufgaben weiterhin jedes Jahr verfügbar wären, da sie einem viel helfen (Förmlichkeit, Vollständigkeit usw.)
  -es könnten noch mehr lange e-Aufgaben zur Verfügung gestellt werden
- Die Eingabe von Ergebnissen war teilweise problematisch. So hatte ich mein Ergebnis in das vorgesehene Eingabefeld eingegeben und es wurde als falsch bewertet. Als ich dann auf den nächsten Zwischenschritt gegangen bin, wo die richtige Lösung erklärt wurde, stand da genau das Ergebnis (in genau der gleichen Schreibweise), was ich eingetippt hatte, aber nicht angenommen wurde. In einem anderen Fall konnte man die eÜbung erst gar nicht beenden, da man aufgrund einer falschen Antwort in einem Zwischenschritt festsaß. Viel besser wäre gewesen wie bei anderen Übungen auch, nach einer falschen Antwort dennoch die Lösung zu erhalten mit entweder der kompletten Lösung oder wenigstens einem Tipp dazu.
- Zwischenlösungen sollten nach dem 2. mal falsch beantworten, teilweise eingeblebendet werden, damit man einen Ansatzpunkt hat.
- Die Vorrechen-Videos zu den Übungsaufgaben waren super, vielen Dank dafür! [Kommentar auf einem sonst leeren Bogen]

Freikommentare Sommersemester 2017

- Ich fänd mehr Lang E-test Aufgaben gut oder auch Altklausuraufgaben in E-Test Form.. Oder vielleicht eine Probeklausur in E-Test Form.
- gute Hilfe zum Wieder-/ erstmaligen Verstehen einiger Themenbereiche; weniger gute Universalvorbereitung auf die Klausuraufgaben, da vom Typ und Inhalt her größere Abweichungen vorhanden

- Insgesamt finde ich die langen e-Übungen sehr hilfreich. Ich konnte einzelne Aufgabenschritte nachvollziehen und mir ein Schema erstellen. Ich kann die langen e-Übungen also nur weiter empfehlen :)
- Hat mir sehr gut gefallen. Habe keine Kritik, weiter so.
- Teilweise fand ich die Aufgaben unverständlich, bzw. hatten sie nichts mit dem zu tun, was bisher in den Übungen o.ä. bearbeitet wurde, daher hatte ich nach Bearbeitung oft das Gefühl nichts gewonnen zu haben.

Anhang D

Alle Seiten der selbstentwickelten/überarbeiteten BSAs

1. BSA zu Betragsungleichungen

Deutsch (de)

Meine Kurse ▶ 17ws-02656 ▶ Lange eÜbungen ▶ 1. Aufgabe zu Betragsungleichungen ▶ Bearbeiten ▶ Erweitert ▶ Bearbeiten

Einstellungen

1. Aufgabe zu Betragsungleichungen

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Wichtig"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Inhaltsseite

Vorbemerkung

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung lautet wie folgt:

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

Diese (relativ einfache grundlegende) Aufgabe werden Sie nun Schritt für Schritt lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Gliederung der Aufgabe

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Gliederung der Aufgabe

Wie kann man an diese Aufgabe herangehen?

- Als erstes sieht man, dass die Aussage äquivalent ist zu zwei 'einfachen' Ungleichungen, die beide gleichzeitig erfüllt werden müssen:

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq |x^2 - 3x + 2| \text{ und } |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

- Diese beiden Ungleichungen löst man zunächst einzeln. Für jede davon erhält man dann erst einmal eine eigene Lösungsmenge.
- Aus diesen beiden Mengen ermittelt man dann die endgültige Lösungsmenge, für die beide Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung

Wir lösen also zuerst die linke Ungleichung $x \leq |x^2 - 3x + 2|$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung

Bei einer Betragsungleichung ist es oft (aber nicht immer!) sinnvoll, als ersten Schritt die Beträge aufzulösen - vor allem dann, wenn es sich nicht um viele Beträge handelt und wenn die Terme nicht zu kompliziert sind.

Um hier den einzigen Betragsterm $|x^2 - 3x + 2|$ aufzulösen, müssen wir herausfinden, für welche x der Term $x^2 - 3x + 2$ positiv bzw. negativ ist. Das findet man am einfachsten mithilfe der Nullstellen heraus - wenn der Term im Betrag so wie hier *stetig* ist, kann sich nur an diesen Stellen das Vorzeichen ändern!

Bestimmen Sie also jetzt die Nullstellen von $x^2 - 3x + 2$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Wie lauten die Nullstellen des Terms

$$x^2 - 3x + 2?$$

Geben Sie diese ins untenstehende Feld ein.

Falls es keine Nullstelle gibt, geben Sie "-" ein; falls es zwei gibt, tragen Sie sie getrennt durch Semikolon in der Form "a;b" ein, Reihenfolge egal.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (1;2|2;1|1\.0+;2\.0+|2\.0+;1\.0+|1,0+;2,0+|2,0+;1,0+)

Feedback 1

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Bewertung 1

Sprung Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Antwort 2 : (-1;-2|-2;-1|-1\.0+;-2\.0+|-2\.0+;-1\.0+|-1,0+;-2,0+|-2,0+;-1,0+)

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Antwort 3 : .*

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Korrekt! Es ist $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ mit den Nullstellen 1 und 2.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Ihre Eingabe waren nicht die korrekten Nullstellen.

Vielleicht haben Sie den Satz von Vieta angewendet, aber verwechselt, was die Nullstellen sind? Bedenken Sie:

Bei einem faktorisierten quadratischen Polynom $(x+a)(x+b), \ a, b \in \mathbb{R}$ sind die Nullstellen gerade $x_1 = -a$ und $x_2 = -b$, also mit dem umgedrehten Vorzeichen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ich versuche es noch einmal.

Sprung 1: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Inhalt 2: Ich brauche noch mehr Hilfe beim Bestimmen der Nullstellen.

Einstellungen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Sprung 2: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Ihre Eingabe waren nicht die korrekten Nullstellen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ich versuche es noch einmal.

Sprung 1: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Inhalt 2: Ich brauche Hilfe beim Bestimmen der Nullstellen.

Sprung 2: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms

Um die Nullstellen von $x^2 - 3x + 2$ zu bestimmen, gibt es mehrere Möglichkeiten, z.B.:

- pq-Formel
- Satz von Vieta
- Quadratische Ergänzung und Anwendung der 3. binomischen Formel

Da die pq-Formel schon aus der Schule bekannt sein sollte, sehen wir uns stattdessen die anderen beiden Möglichkeiten an.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Satz von Vieta

Sprung 1: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Inhalt 2: Quadratische Ergänzung

Sprung 2: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Einstellungen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Mit dem **Satz von Vieta** kann man sehr schnell die Faktorisierung $x^2 - 3x + 2 = (x + a)(x + b)$ mit ganzzahligen $a, b \in \mathbb{Z}$ durch Ausprobieren finden - *falls sie denn so ganzzahlig existiert!*

(Findet man jedoch damit keine Faktorisierung, dann sind a, b entweder nicht ganzzahlig oder der quadratische Term hat gar keine reellen Nullstellen.)

Der Satz von Vieta besagt, dass bei $x^2 - 3x + 2 = (x + a)(x + b)$ für a, b folgendes gelten muss:

$$\begin{aligned} a + b &= -3 \text{ und} \\ a \cdot b &= 2 \end{aligned}$$

Können Sie durch Ausprobieren zwei ganze Zahlen a, b finden, die das erfüllen? Bedenken Sie, dass wegen $a \cdot b = 2$ nur Teiler von 2 in Frage kommen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Geben Sie hier a und b aus der Faktorisierung $x^2 - 3x + 2 = (x + a)(x + b)$ ein:

(In der Form "a;b" durch Semikolon getrennt, Reihenfolge egal.)

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (-1;-2|-2;-1|-1\.0+;-2\.0+|-2\.0+;-1\.0+|-1,0+;-2,0+|-2,0+;-1,0+)

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Einstellungen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Die Eingabe war nicht korrekt. Sie sollten es aber unbedingt beherrschen, sehen Sie es sich noch einmal an!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zum Verfahren

Sprung 1: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit Vieta)

Korrekt! Es ist $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Die Nullstellen sind also 1 und 2.

(Sie können natürlich genauso mit pq-Formel zu diesem Ergebnis kommen, die Wahl der Methode ist Ihnen überlassen.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Sie kennen die quadratische Ergänzung schon vom Bestimmen der **Scheitelpunktsform** einer Parabel. Genau diese ist auch zuerst zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Können Sie schon erahnen, wie man jetzt aus dieser Scheitelpunktsform die Faktorisierung bzw. die Nullstellen bestimmen kann? Als Tipp: 3. Binomische Formel.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite

einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Mit der 3. binomischen Formel kann man den quadratischen Term faktorisieren und daraus die Nullstellen ablesen:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Vereinfachen Sie dies noch selbst zuende, und geben Sie dann im Feld unten die beiden Nullstellen ein.

(Hintereinander, nur durch Semikolon getrennt, keine Leerzeichen, Reihenfolge egal.)

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (1;2|2;1|1\.0+;2\.0+|2\.0+;1\.0+|1,0+;2,0+|2,0+;1,0+)

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Antwort 2 : (-1;-2|-2;-1|-1\.0+;-2\.0+|-2\.0+;-1\.0+|-1,0+;-2,0+|-2,0+;-1,0+)

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Antwort 3 : .*

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Achten Sie noch einmal genau auf das Vorzeichen. Bedenken Sie, dass ein Term $(x + a)(x + b)$ die Nullstellen $-a$ und $-b$ hat!

Inhaltsseite

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Einstellungen

Inhalt 1:	Zurück
Sprung 1:	Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Die Eingabe war nicht korrekt. Sie sollten dies aber unbedingt beherrschen, rechnen Sie noch einmal!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück
Sprung 1:	Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Nullstellen des Betragsterms (mit quadr. Ergänzung)

Genau! Man hat

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= (x-1)(x-2) \end{aligned}$$

mit den Nullstellen 1 und 2.

(Sie können natürlich genauso mit pq-Formel zu diesem Ergebnis kommen, die Wahl der Methode ist Ihnen überlassen.)

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

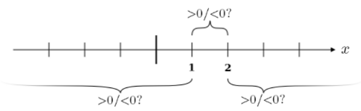
Einstellungen

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Jetzt kann man das Vorzeichen von $x^2 - 3x + 2$ für die verschiedenen $x \in \mathbb{R}$ bestimmen.

Nur an den Nullstellen 1 und 2 kann sich das Vorzeichen ändern. Für die Bereiche "dazwischen" lässt es sich auf verschiedene Weise ermitteln, z.B.:

- einfach Werte einsetzen
- sich den Verlauf der Parabel vorstellen
- die Faktorisierung $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ ausnutzen



Geben Sie für diese drei Bereiche (x<1 ; 1<x<2 ; 2<x ; in dieser Reihenfolge) an, ob darauf der Term $x^2 - 3x + 2$ positiv (+) oder negativ (-) ist.

Schreiben Sie Ihre Antwort in der Form "+;+;+" oder entsprechend mit anderen Vorzeichen in das Eingabefeld:

Kurzantwort

Antwort 1:	+;-;+
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms
Antwort 2 :	*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Nein, so verhält sich das Vorzeichen von $x^2 - 3x + 2$ nicht.

Falls Sie glauben, daß Sie sich nur verrechnet haben, gehen Sie zurück und rechnen Sie noch einmal nach. Falls Sie jedoch Hilfe benötigen, wählen Sie das Vorgehen, welches Sie anwenden wollen:

Inhaltsseite

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Einstellungen

Inhalt 1:	Zurück
Sprung 1:	Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms
Inhalt 2:	Werte einsetzen
Sprung 2:	Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms (Werte einsetzen)
Inhalt 3:	Verlauf der Parabel
Sprung 3:	Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms (Verlauf der Parabel)
Inhalt 4:	Faktorisierung ausnutzen
Sprung 4:	Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms (Faktorisierung ausnutzen)

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms (Werte einsetzen)

Man kann sich einfach aus jedem der drei Intervalle für x einen beliebigen Wert herausgreifen und dann in den Term $x^2 - 3x + 2$ einsetzen. Das Vorzeichen des Ergebnisses liefert dann gleich dasjenige für das ganze Intervall - schließlich kann es sich nur an den Nullstellen ändern.

Also:

- Für $x < 1$:

  Wähle z.B. $0 \in (-\infty, 1)$. Es ist $0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$. Also ist $x^2 - 3x + 2$ auf diesem Intervall positiv.

- Für $1 < x < 2$:

  Wähle z.B. $\frac{3}{2} \in (1,2)$. Es ist $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4} < 0$. Also ist $x^2 - 3x + 2$ auf diesem Intervall negativ.

- Für $2 < x$:

  Wähle z.B. $4 \in (2, \infty)$. Es ist $4^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 6 > 0$. Also ist $x^2 - 3x + 2$ auf diesem Intervall positiv.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Linke Ungleichung - Betrag auflösen

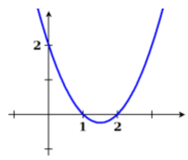
Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms (Verlauf der Parabel)

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms (Verlauf der Parabel)

Einstellungen

$x^2 - 3x + 2$ ist eine *nach oben geöffnete* Parabel, da der quadratische Summand positiv ist. Außerdem hat diese Parabel *zwei Nullstellen*, wie Sie eben herausgefunden haben. Sie muss also ungefähr so aussehen:



Jedenfalls weiß man sofort:

- Im Intervall $(1,2)$ ist das Vorzeichen von $x^2 - 3x + 2$ negativ.
- In den Intervallen $(-\infty, 1)$ und $(2, \infty)$ ist das Vorzeichen von $x^2 - 3x + 2$ positiv.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms (Faktorisierung ausnutzen)

Mithilfe der Faktorisierung $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ kann man direkt alle Fälle durchgehen:

- Für $x \in (-\infty, 1)$:

  Dann sind beide Faktoren negativ - und mit "Minus mal minus gibt plus" ist der Term positiv auf diesem Intervall.

- Für $x \in (1,2)$:

  Dann ist der linke Faktor negativ, der rechte positiv - und wegen "Minus mal plus gibt minus" ist der Term negativ auf diesem Intervall.

- Für $x \in (2, \infty)$:

  Dann sind beide Faktoren positiv - damit ist der Term positiv auf diesem Intervall.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen

einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Vorzeichen des Betragsterms

Richtig! Die Werte von $x^2 - 3x + 2$ sind...

- ... positiv für $x \in (-\infty, 1)$ und auch für $x \in (2, \infty)$
- ... negativ für $x \in (1, 2)$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Mit dem soeben bestimmten Vorzeichenverhalten kann man endlich den Betrag auflösen!

Lösen Sie jetzt den Betrag in der Ungleichung $x \leq |x^2 - 3x + 2|$ auf und geben Sie die resultierende Fallunterscheidung an.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Betrag auflösen

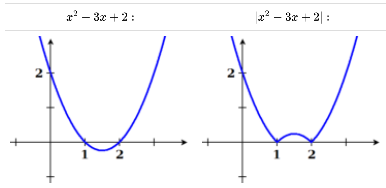
Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Es ist

$$\begin{aligned} |x^2 - 3x + 2| &= |(x-1)(x-2)| \\ &= \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{falls } x \leq 1 \text{ oder } x \geq 2 \\ -x^2 + 3x - 2, & \text{falls } 1 < x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

(Beachten Sie:
Da der Betragsterm an den Stellen 1 und 2 den Wert $+0 = -0$ hat, kann man bei der Fallunterscheidung für die Bereiche von x *selbst entscheiden*, zu welchem Fall man die Grenzen 1 und 2 zählt.
Wichtig ist, dass die Fälle den gesamten möglichen Bereich abdecken, sich aber nicht überlappen.)

Der Unterschied ohne/mit Betragsstrichen äußert sich bei den Graphen folgendermaßen:



Nun zurück zur Ungleichung!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Löst man jetzt den Betrag innerhalb der Ungleichung auf, erhält man

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| = |(x-1)(x-2)|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x^2 - 3x + 2, & \text{falls } x \leq 1 \text{ oder } x \geq 2 \\ x \leq -x^2 + 3x - 2, & \text{falls } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Die beiden entstandenen Fälle können Sie nun nach x auflösen.

Linke Ungleichung - Betrag auflösen

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Mit Äquivalenzumformungen kommt man zu

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| = |(x-1)(x-2)|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -x^2 + 3x - 2, & \text{falls } 1 < x < 2 \\ x \leq x^2 - 3x + 2, & \text{falls } x \leq 1 \text{ oder } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq -x^2 + 2x - 2, & \text{falls } 1 < x < 2 \\ 0 \leq x^2 - 4x + 2, & \text{falls } x \leq 1 \text{ oder } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \leq 0, & \text{falls } 1 < x < 2 \\ 0 \leq x^2 - 4x + 2, & \text{falls } x \leq 1 \text{ oder } x \geq 2. \end{cases}$$

Um dies zu lösen, muss wieder bestimmt werden, wann die beiden quadratischen Terme größer/kleiner gleich 0 sind. Das kann man ganz ähnlich wie schon zuvor mit dem Betragsterm erledigen, z.B. mit der Scheitelpunktsform. Rechnen Sie selbst!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Mit quadratischer Ergänzung kommt man zu

$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \leq 0, & \text{falls } 1 < x < 2 \\ x^2 - 4x + 2 \;\; = (x-2)^2 - 2 & \\ \qquad\qquad\quad\;\; = (x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2}) \geq 0, & \text{falls } x \leq 1 \text{ oder } x \geq 2. \end{cases}$$

Was können Sie nun zu dem oberen der beiden Fälle sofort sagen? $(x-1)^2 + 1 \leq 0$...

Multiple-Choice

Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Antwort 1:	... hat keine Lösung für $x \in (1, 2)$.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Linke Ungleichung - Ungleichung lösen
Antwort 2 :	... hat mindestens eine Lösung für $x \in (1, 2)$.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Genau!

In $(x-1)^2 + 1$ ist der linke Summand wegen des Quadrats ≥ 0, und der rechte Summand ist sogar > 0.
Der Ausdruck ist also **für alle** x größer als 0, und insbesondere ist dann $(x-1)^2 + 1 \leq 0, \;\; 1 < x < 2$ unlösbar.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter mit dem anderen Fall

Sprung 1: Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Leider falsch.

In $(x-1)^2 + 1$ ist der linke Summand wegen des Quadrats ≥ 0, und der rechte Summand ist sogar > 0.
Der Ausdruck ist also **für alle** x größer als 0, und insbesondere ist dann $(x-1)^2 + 1 \leq 0, \;\; 1 < x < 2$ unlösbar.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter mit dem anderen Fall

Sprung 1: Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Einstellungen

Wenn überhaupt, ist die Ungleichung also nur im übrigbleibenden Fall lösbar:

...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2=(x-1)^2+1\le 0, & \text{falls } 1<x<2 \\ x^2-4x+2 \;=(x-2)^2-2 \\ \qquad\quad =(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})\ge 0, & \text{falls } x\le 1 \text{ oder } x\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{keine Lösung}, & \text{falls } 1<x<2 \\ (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})\ge 0, & \text{falls } x\le 1 \text{ oder } x\ge 2. \end{cases}$$

Diesen letzten Fall kann man ganz ähnlich lösen wie das Vorzeichenverhalten des Betragsterms am Anfang der Aufgabe: Man muss herausfinden, für welche x der quadratische Term ≥ 0 ist.

Führen Sie dies jetzt durch!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Ungleichung lösen

...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{keine Lösung}, & \text{falls } 1<x<2 \\ (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})\ge 0, & \text{falls } x\le 1 \text{ oder } x\ge 2. \end{cases}$$

- Es ist $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})\ge 0$ genau dann erfüllt, wenn $x\le 2-\sqrt{2}$ (kleinere der beiden Nullstellen) **oder** $x\ge 2+\sqrt{2}$ (größere der beiden Nullstellen).
- Nun muss man noch die Bedingung an x berücksichtigen, nämlich $x\le 1$ oder $x\ge 2$. Hier bedeutet das aber *keine weitere Einschränkung*, denn $x\le 2-\sqrt{2}\le 1$ oder $x\ge 2+\sqrt{2}\ge 2$ erfüllt dies schon. (Es ist $\sqrt{2}>1$.)

  Kürzer kann man das schreiben als $x\in(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup[2+\sqrt{2},\infty)$.
  Beachten Sie, dass dann wegen des "**oder**" die *Vereinigung* zu nutzen ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Gelöst

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Gelöst

Einstellungen

Damit hat man die linke Ungleichung vollständig gelöst. Noch einmal die wichtigen Schritte:

$$x\le|x^2-3x+2|=|(x-1)(x-2)|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -x^2+3x-2, & \text{falls } 1<x<2 \\ x\le x^2-3x+2, & \text{falls } x\le 1 \text{ oder } x\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2=(x-1)^2+1\le 0, & \text{falls } 1<x<2 \\ x^2-4x+2 \;=(x-2)^2-2 \\ \qquad\quad =(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})\ge 0, & \text{falls } x\le 1 \text{ oder } x\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{keine Lösung}, & \text{falls } 1<x<2 \\ x\in(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup[2+\sqrt{2},\infty), & \text{falls } x\le 1 \text{ oder } x\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \; x\in(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup[2+\sqrt{2},\infty).$$

Auf der nächsten Seite wird dieses Ergebnis zum Abschluss im Koordinatensystem veranschaulicht.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Linke Ungleichung - Gelöst

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linke Ungleichung - Gelöst

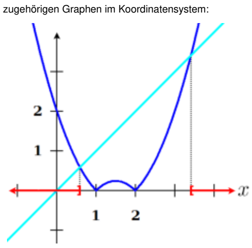
Linke Ungleichung - Gelöst

Einstellungen

Das Ergebnis

$$x\le|x^2-3x+2| \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup[2+\sqrt{2},\infty)$$

veranschaulicht an den zugehörigen Graphen im Koordinatensystem:



$(x,|x^2-3x+2|$, Lösungsmenge$)$

Die gestrichelten Linien befinden sich an den Stellen $2-\sqrt{2}$ und $2+\sqrt{2}$. Dies sind gerade die Schnittstellen von x mit $|x^2-3x+2|$!

Man erkennt auch, dass die Lösungsmenge genau aus all den Stellen besteht, an denen der Graph von x unterhalb des Graphen von $|x^2-3x+2|$ liegt.

(Die Veranschaulichung dient nur als bildliche Hilfe für Sie; zum Erfüllen der Aufgabe ist dies nicht nötig. Auch sollen Sie natürlich in einer Klausur keine roten Stifte verwenden.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur rechten Ungleichung

Sprung 1: Rechte Ungleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Rechte Ungleichung

Nun zur rechten Ungleichung $|x^2-3x+2|\le 3x+3$.

Da der Betragsterm derselbe ist wie schon bei der linken Ungleichung, kann man ihn direkt auflösen und mit dem Lösen der Ungleichung beginnen. Das Vorgehen ist hier völlig analog zur linken Ungleichung: Wieder wird gegen einen linearen Ausdruck abgeschätzt, diesmal $3x+3$.

Lösen Sie also jetzt selbst diese Ungleichung, ganz analog wie zuvor.

Inhaltsseite

Rechte Ungleichung

Einstellungen

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Ganz analog zu vorher erhält man

$$|x^2-3x+2|=|(x-1)(x-2)|\le 3x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-2\le 3x+3, & \text{falls } 1<x<2 \\ x^2-3x+2\le 3x+3, & \text{falls } x\le 1 \text{ oder } x\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5\ge 0, & \text{falls } 1<x<2 \\ x^2-6x-1 \;=(x-3)^2-10 \\ \qquad\quad =(x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})\le 0, & \text{falls } x\le 1 \text{ oder } x\ge 2 \end{cases}$$

Was fällt Ihnen bei dem Fall $x^2+5\ge 0$ für $1<x<2$ auf?

Multiple-Choice

Antwort 1 : $x^2+5\ge 0$ ist unerfüllbar für alle $x\in(1,2)$.

Feedback 1

Bewertung 0

Sprung Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Antwort 2: $x^2+5\ge 0$ ist erfüllt für alle $x\in(1,2)$.

Feedback 2

Bewertung 1

Sprung Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Nein! $x^2+5\geq 0$ ist immer erfüllt - sogar für alle $x\in\mathbb{R}$. Wegen des Quadrats ist der linke Summand ≥ 0, und mit dazuaddierter 5 ist der Ausdruck erst recht ≥ 0.

Den Fall $(x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})\leq 0$ für $x\leq 1$ oder $x\geq 2$ kann man ähnlich lösen wie zuvor und erhält

$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5\geq 0, & \text{falls } 1<x<2 \\ x^2-6x-1 \begin{aligned}[t] &= (x-3)^2-10 \\ &= (x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})\leq 0, \end{aligned} & \text{falls } x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{immer erfüllt}, & \text{falls } 1<x<2 \\ x\in[3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}], & \text{falls } x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2. \end{cases}$$

Auch diesmal muss man noch für beide Fälle die Bedingungen an x berücksichtigen - tun Sie dies.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Genau! $x^2+5\geq 0$ ist wegen des Quadrierens immer erfüllt - sogar für alle $x\in\mathbb{R}$.

Den Fall $(x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})\leq 0$ für $x\leq 1$ oder $x\geq 2$ kann man ähnlich lösen wie zuvor und erhält

$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5\geq 0, & \text{falls } 1<x<2 \\ x^2-6x-1 \begin{aligned}[t] &= (x-3)^2-10 \\ &= (x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})\leq 0, \end{aligned} & \text{falls } x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{immer erfüllt}, & \text{falls } 1<x<2 \\ x\in[3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}], & \text{falls } x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2. \end{cases}$$

Auch diesmal muss man noch für beide Fälle die Bedingungen an x berücksichtigen - tun Sie dies.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Sprung 1: Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Rechte Ungleichung - Ungleichung lösen

Aus der Fallunterscheidung erhält man nun folgendermaßen die Lösungsmenge:

Innerhalb des einzelnen Falls wird die x-Bedingung durch **"und"** an die linke Seite geknüpft. Die beiden Fälle werden dann als ganzes mit **"oder"** vereinigt.

$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{immer erfüllt}, & \text{falls } 1<x<2 \\ x\in[3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}], & \text{falls } x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned}[t] &[(\text{immer erfüllt}) \text{ und } (1<x<2)] \text{ oder} \\ &[(x\in[3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}]) \text{ und } (x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2)] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned}[t] &x\in(1,2) \text{ oder} \\ &x\in[3-\sqrt{10},1]\cup[2,3+\sqrt{10}] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x\in(1,2)\cup([3-\sqrt{10},1]\cup[2,3+\sqrt{10}])=[3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}]$$

Damit ist auch die rechte Ungleichung gelöst. Im Folgenden noch einmal die wichtigsten Schritte und eine Veranschaulichung im Koordinatensystem.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Rechte Ungleichung - Gelöst

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Rechte Ungleichung - Gelöst

Rechte Ungleichung - Gelöst

Die gesamte Umformung mit den wichtigsten Schritten:

$$|x^2-3x+2|=|(x-1)(x-2)|\leq 3x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-2\leq 3x+3, & \text{falls } 1<x<2 \\ x^2-3x+2\leq 3x+3, & \text{falls } x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5\geq 0, & \text{falls } 1<x<2 \\ x^2-6x-1 \begin{aligned}[t] &= (x-3)^2-10 \\ &= (x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})\leq 0, \end{aligned} & \text{falls } x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{immer erfüllt}, & \text{falls } 1<x<2 \\ x\in[3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}], & \text{falls } x\leq 1 \text{ oder } x\geq 2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned}[t] &x\in(1,2) \text{ oder} \\ &x\in[3-\sqrt{10},1]\cup[2,3+\sqrt{10}] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x\in[3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}]$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter zur Veranschaulichung im Koordinatensystem

Sprung 1: Rechte Ungleichung - Gelöst

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

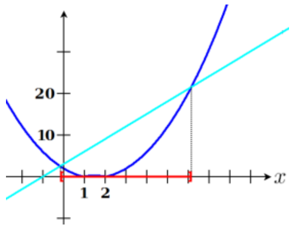
Rechte Ungleichung - Gelöst

Rechte Ungleichung - Gelöst

Das Ergebnis

$$|x^2-3x+2|\leq 3x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}]$$

veranschaulicht an den zugehörigen Graphen im Koordinatensystem (diesmal in anderem Maßstab):



($|x^2-3x+2|$, $3x+3$, Lösungsmenge)

Die gestrichelten Linien befinden sich an den Stellen $3-\sqrt{10}$ und $3+\sqrt{10}$. Dies sind gerade die Schnittstellen von $3x+3$ mit $|x^2-3x+2|$!

Man erkennt auch, dass die Lösungsmenge genau aus all den Stellen besteht, an denen der Graph von $|x^2-3x+2|$ unterhalb des Graphen von $3x+3$ liegt.

(Die Veranschaulichung dient wieder nur als bildliche Hilfe für Sie. Zum Erfüllen der Aufgabe ist dies nicht nötig.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Damit sind die beiden einzelnen Ungleichungen gelöst, und wir können uns an die Lösung der kombinierten Ungleichung

$$x\leq|x^2-3x+2|\leq 3x+3$$

machen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Sprung 1: Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Die einzelnen Lösungsmengen für die linke und rechte Ungleichung sind:

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, \infty)$$

$$|x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}]$$

Wie müssen Sie daraus die Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq |x^2 - 3x + 2| \text{ und } |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

bilden?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Aus den beiden Lösungsmengen der linken und rechten Ungleichung muss die Schnittmenge gebildet werden.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung
Antwort 2 :	Aus den beiden Lösungsmengen der linken und rechten Ungleichung muss die Vereinigung gebildet werden.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Genau!

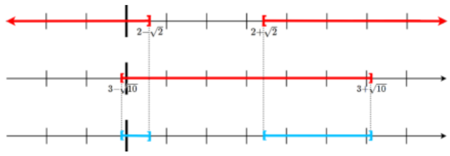
Die linke und rechte Ungleichung müssen gleichzeitig erfüllt sein. Das heißt, man sucht die x, die $x \leq |x^2 - 3x + 2|$ **und** $|x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$ erfüllen - und das erreicht man gerade durch die **Schnittmenge** der beiden zugehörigen Lösungsmengen!

Man bildet also die Schnittmenge aus $(-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, \infty)$ und $[3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}]$ und erhält für die kombinierte Ungleichung:

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left((-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, \infty)\right) \cap [3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}]$$
$$= [3-\sqrt{10}, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{10}]$$

Veranschaulicht am Zahlenstrahl:



(Lösungsmengen von linker und rechter Ungleichung in rot, Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung in blau)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zusammenfassung der Lösung

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung

Nein!

Durch die **Vereinigung** würde man diejenigen x erhalten, die $x \leq |x^2 - 3x + 2|$ **oder** $|x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$ erfüllen - darunter also auch solche x, für die nur eine der beiden Ungleichungen erfüllt ist.

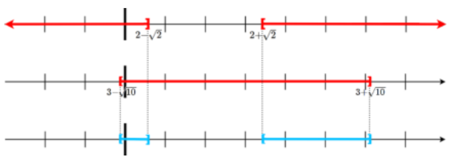
Die linke und rechte Ungleichung müssen aber <u>beide</u> erfüllt sein. Das heißt, man sucht die x, die $x \leq |x^2 - 3x + 2|$ **und** $|x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$ erfüllen - und das erreicht man gerade durch die **Schnittmenge** der beiden zugehörigen Lösungsmengen!

Man bildet also die Schnittmenge aus $(-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, \infty)$ und $[3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}]$ und erhält für die kombinierte Ungleichung:

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left((-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, \infty)\right) \cap [3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}]$$
$$= [3-\sqrt{10}, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{10}]$$

Veranschaulicht am Zahlenstrahl:



(Lösungsmengen von linker und rechter Ungleichung in rot, Lösungsmenge der kombinierten Ungleichung in blau)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zusammenfassung der Lösung

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die kombinierte Ungleichung wurde als erstes aufgeteilt in die mit "und" verbundenen einzelnen Ungleichungen

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq |x^2 - 3x + 2| \text{ und } |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3,$$

um diese zunächst einzeln zu lösen:

$x \leq \lvert x^2 - 3x + 2 \rvert$:	$\lvert x^2 - 3x + 2 \rvert \leq 3x + 3$:
- Betrag auflösen, Fallunterscheidung erzeugen	- Betrag auflösen, Fallunterscheidung erzeugen
- Äquivalenzumformungen darauf durchführen, bis man die Lösungsmenge ablesen kann	- Äquivalenzumformungen darauf durchführen, bis man die Lösungsmenge ablesen kann
- Lösungsmenge: $(-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, \infty)$	- Lösungsmenge: $[3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}]$

Durch Bilden der Schnittmenge hat man daraus die Lösungsmenge für die ursprüngliche kombinierte Ungleichung gewonnen:

$$x \leq |x^2 - 3x + 2| \leq 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [3-\sqrt{10}, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{10}]$$

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ende der Aufgabe!

Sprung 1: Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

2. BSA zu Betragsungleichungen

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ▶ 17ws-02656 ▶ Lange eÜbungen ▶ 2. Aufgabe zu Betragsungleichungen ▶ Bearbeiten ▶ Erweitert ▶ Bearbeiten

2. Aufgabe zu Betragsungleichungen

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Wichtig"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Inhaltsseite

Einstellungen

Vorbemerkung

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Der grundsätzliche Auftrag für die Aufgabe lautet:

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq -1, -3$ die Ungleichung

$$\frac{|x-2|}{|x+1|} \geq \frac{|x-1|}{|x+3|}$$

gilt.

Diese Aufgabe werden Sie nun Schritt für Schritt im Folgenden lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsansätze

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsansätze

Lösungsansätze

Betrachten Sie nun zunächst selbst die Ungleichung

$$U: \quad \frac{|x-2|}{|x+1|} \geq \frac{|x-1|}{|x+3|} \quad \text{und} \quad x \neq -1, -3$$

und überlegen Sie, wie Sie vorgehen würden:

Multiple-Choice

Antwort 1: Ich würde beide Seiten von U quadrieren.

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Beide Seiten von U quadrieren

Antwort 2 : Ich würde auf beiden Seiten von U den Term $\frac{|x-1|}{|x+3|}$ subtrahieren und dann auf der linken Seite einen Bruch mit einem gemeinsamen Hauptnenner bilden.

Feedback 2

Bewertung 0

Einstellungen

Lösungsansätze

Sprung Auf beiden Seiten von U Term subtrahieren und Hauptnenner bilden

Antwort 3 : Ich würde die Beträge alle direkt auflösen und die entstehenden Fälle einzeln lösen.

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Beträge direkt auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beide Seiten von U quadrieren

Gute Idee! Da wir es auf beiden Seiten der Ungleichung nur mit Beträgen zu tun haben, *verändern wir die Lösungsmenge nicht*, wenn wir hier quadrieren (*) - und werden noch dazu alle Beträge auf einmal los, was das Rechnen vereinfacht.

Man erhält also die Ungleichung

$$\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} \geq \frac{(x-1)^2}{(x+3)^2} \text{ und } x \neq -1, -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} - \frac{(x-1)^2}{(x+3)^2} \geq 0 \text{ und } x \neq -1, -3.$$

(*) Achtung: Natürlich ist Quadrieren im Normalfall **keine Äquivalenzumformung** und sollte deshalb immer „mit Vorsicht" eingesetzt werden!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Nächster Umformungsschritt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Auf beiden Seiten von U Term subtrahieren und Hauptnenner bilden

Bei manchen Termen könnte dieser Schritt eine gute Wahl sein.

Hier verhilft er allerdings nicht zu großem Fortschritt beim Versuch, die Beträge möglichst schnell und einfach aufzulösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Es gibt eine elegantere Methode, hier geht's zurück.

Sprung 1: Lösungsansätze

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Beträge direkt auflösen

Direktes Betragauflösen mit folgender Fallunterscheidung ist ein Standardverfahren, welches sich vor allem bei einfachen Betragstermen anbietet.

Es ist aber nicht unbedingt immer der schnellste Weg zur Lösung: Man hat viel Rechenarbeit, mehrere Fälle und damit viele Möglichkeiten zum Verrechnen, und unter Umständen unterscheidet man Fälle, die nachher zum gleichen Ergebnis führen.

Trotzdem ist das direkte Betragauflösen mit Fallunterscheidung natürlich eine Möglichkeit. Führen Sie dies also durch!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Beträge direkt auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beträge direkt auflösen

Bevor wir die Rechnung im Detail durchgehen:

Sie haben in

$$\frac{|x-2|}{|x+1|} \geq \frac{|x-1|}{|x+3|} \text{ und } x \neq -1, -3$$

einfach die Beträge mittels Fallunterscheidung aufgelöst, um für die einzelnen entstandenen Fälle jeweils die Teillösungsmenge zu bestimmen.

Wieviele Fälle ergeben sich, die man bei diesem Vorgehen unterscheiden muss? Geben Sie die Anzahl ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (\+)?0*5((,|\.)0*)?

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Beträge direkt auflösen

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Beträge direkt auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beträge direkt auflösen

Einstellungen

Nein, das war nicht korrekt.

Das Betragauflösen führt zu

$$\frac{|x-2|}{|x+1|} \geq \frac{|x-1|}{|x+3|} \text{ und } x \neq -1,-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-2)}{-(x+1)} \geq \frac{-(x-1)}{-(x+3)}, & \text{falls } x < -3 \\ \frac{-(x-2)}{-(x+1)} \geq \frac{-(x-1)}{x+3}, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ \frac{-(x-2)}{x+1} \geq \frac{-(x-1)}{x+3}, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ \frac{-(x-2)}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+3}, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+3}, & \text{falls } 2 < x. \end{cases}$$

Denken Sie bei den Fallbedingungen rechts daran, dass -1 und -3 nicht im Definitionsbereich der Ungleichung liegen.

Formen Sie jetzt die einzelnen Fälle weiter äquivalent um. Bedenken Sie dabei immer, wenn Sie die Ungleichung mit irgendeinem Ausdruck multiplizieren: Ist der Ausdruck < 0, dann dreht sich damit die Richtung der Ungleichung um, also "kleiner" wird zu "größer" und umgekehrt usw.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Einzelne Fälle lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beträge direkt auflösen

Beträge direkt auflösen

Einstellungen

Korrekt! Das Betragauflösen führt zu

$$\frac{|x-2|}{|x+1|} \geq \frac{|x-1|}{|x+3|} \text{ und } x \neq -1,-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-2)}{-(x+1)} \geq \frac{-(x-1)}{-(x+3)}, & \text{falls } x < -3 \\ \frac{-(x-2)}{-(x+1)} \geq \frac{-(x-1)}{x+3}, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ \frac{-(x-2)}{x+1} \geq \frac{-(x-1)}{x+3}, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ \frac{-(x-2)}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+3}, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+3}, & \text{falls } 2 < x. \end{cases}$$

Denken Sie bei den Fallbedingungen rechts daran, dass -1 und -3 nicht im Definitionsbereich der Ungleichung liegen.

Formen Sie jetzt die einzelnen Fälle weiter äquivalent um. Bedenken Sie dabei immer, wenn Sie die Ungleichung mit irgendeinem Ausdruck multiplizieren: Ist der Ausdruck < 0, dann dreht sich damit die Richtung der Ungleichung um, also "kleiner" wird zu "größer" und umgekehrt usw.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Einzelne Fälle lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einzelne Fälle lösen

Einzelne Fälle lösen

Einstellungen

Man formt weiter äquivalent um zu

$$\frac{|x-2|}{|x+1|} \geq \frac{|x-1|}{|x+3|} \text{ und } x \neq -1,-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-2)}{-(x+1)} \geq \frac{-(x-1)}{-(x+3)}, & \text{falls } x < -3 \\ \frac{-(x-2)}{-(x+1)} \geq \frac{-(x-1)}{x+3}, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ \frac{-(x-2)}{x+1} \geq \frac{-(x-1)}{x+3}, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ \frac{-(x-2)}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+3}, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+3}, & \text{falls } 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) \geq (x-1)(x+1), & \text{falls } x < -3 \\ -(x-2)(x+3) \geq (x-1)(x+1), & \text{falls } -3 < x < -1 \\ -(x-2)(x+3) \geq -(x-1)(x+1), & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ -(x-2)(x+3) \geq (x-1)(x+1), & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ (x-2)(x+3) \geq (x-1)(x+1), & \text{falls } 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6 \geq x^2-1, & \text{falls } x < -3 \\ -x^2-x+6 \geq x^2-1, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ -x^2-x+6 \geq -x^2+1, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ -x^2-x+6 \geq x^2-1, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ x^2+x-6 \geq x^2-1, & \text{falls } 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, & \text{falls } x < -3 \\ 0 \geq 2x^2+x-7, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ 5 \geq x, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ 0 \geq 2x^2+x-7, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ x \geq 5, & \text{falls } 2 < x. \end{cases}$$

An diesem Punkt können wir jetzt schon erkennen, dass einige Fälle unlösbar oder immer erfüllt sind. Welche nämlich?

Wählen Sie für jeden der Fälle das passende aus:

ZuordnungDie erste Antwort sollte zur Seite mit der Antwort "richtig" verzweigen

Bewertung bei richtiger Antwort : 1

Sprung bei richtiger Antwort : Einzelne Fälle lösen

Einzelne Fälle lösen

Einstellungen

Bewertung bei falscher Antwort : 0

Sprung bei falscher Antwort : Einzelne Fälle lösen

Antwort 1 : Fall $x < -3$

Zugeordnete Antwort 1 : unlösbar

Antwort 2 : Fall $-3 < x < -1$

Zugeordnete Antwort 2 : -

Antwort 3 : Fall $-1 < x \leq 1$

Zugeordnete Antwort 3 : immer erfüllt

Antwort 4 : Fall $1 < x \leq 2$

Zugeordnete Antwort 4 : -

Antwort 5 : Fall $2 < x$

Zugeordnete Antwort 5 : -

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einzelne Fälle lösen

Nein, das war nicht korrekt.

Sie müssen aber unbedingt in der Lage sein, die Bedingungen an x zu interpretieren. Es kann hilfreich sein, sich die Bedingungen am **Zahlenstrahl** vorzustellen oder zu zeichnen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frage

Sprung 1: Einzelne Fälle lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einzelne Fälle lösen

Einzelne Fälle lösen

Korrekt, es ist

$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, & \text{falls } x < -3 \\ 0 \geq 2x^2 + x - 7, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ 5 \geq x, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ 0 \geq 2x^2 + x - 7, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ x \geq 5, & \text{falls } 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{unlösbar}, & \text{falls } x < -3 \\ 0 \geq 2x^2 + x - 7, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ \text{immer erfüllt}, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ 0 \geq 2x^2 + x - 7, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ x \geq 5, & \text{falls } 2 < x. \end{cases}$$

Führen Sie jetzt noch die letzten Umformungen durch, um die verbleibenden quadratischen Ungleichungen zu vereinfachen - und lösen sie die Ungleichung vollends auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ungleichung lösen

Ungleichung lösen

Insgesamt erhalten wir

$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{unlösbar}, & \text{falls } x < -3 \\ 0 \geq 2x^2 + x - 7, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ \text{immer erfüllt}, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ 0 \geq 2x^2 + x - 7, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ x \geq 5, & \text{falls } 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{unlösbar}, & \text{falls } x < -3 \\ 0 \geq x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ \text{immer erfüllt}, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ 0 \geq x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ x \geq 5, & \text{falls } 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{unlösbar}, & \text{falls } x < -3 \\ 0 \geq (x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4})(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4}), & \text{falls } -3 < x < -1 \\ \text{immer erfüllt}, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ 0 \geq (x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4})(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4}), & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ x \geq 5, & \text{falls } 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{unlösbar}, & \text{falls } x < -3 \\ -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4} \leq x \leq -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4}, & \text{falls } -3 < x < -1 \\ \text{immer erfüllt}, & \text{falls } -1 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4} \leq x \leq -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4}, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ x \geq 5, & \text{falls } 2 < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4} \leq x < -1 \text{ oder } -1 < x \leq -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4} \text{ oder } x \geq 5$$

Beim Einbeziehen der Fallbedingungen im letzten Schritt macht man sich zunutze, dass $\sqrt{57}$ irgendwo zwischen $7 = \sqrt{49}$ und $8 = \sqrt{64}$ liegen muss.

Sofern die Aufgabenstellung es nicht erwähnt, muss man die Lösungsmenge nicht unbedingt am Zahlenstrahl einzeichnen. Dennoch kann dies beim Verständnis helfen. Markieren Sie also jetzt die resultierende Lösungsmenge am Zahlenstrahl!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ungleichung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ungleichung lösen

Ungleichung lösen

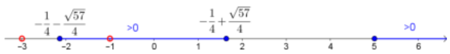
Ergebnis der äquivalenten Umformungen war:

$$\frac{|x-2|}{|x+1|} \geq \frac{|x-1|}{|x+3|} \text{ und } x \neq -1, -3$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4} \leq x < -1 \text{ oder } -1 < x \leq -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4} \text{ oder } x \geq 5$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4} \leq x < -1 \text{ oder } -1 < x \leq -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4} \text{ oder } x \geq 5\}.$$

Am Zahlenstrahl eingezeichnet sieht das dann wie folgt aus:



Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ende der Aufgabe!

Sprung 1: Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Nächster Umformungsschritt

Nächster Umformungsschritt

Unsere Ungleichung lautet also

$$U: \quad \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} - \frac{(x-1)^2}{(x+3)^2} \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1, -3.$$

Wie würden Sie nun weiter vorgehen?

Multiple-Choice

Antwort 1 : Ich würde die 3. Binomische Formel anwenden und U direkt faktorisieren zu $\left(\frac{x-2}{x+1} + \frac{x-1}{x+3}\right)\left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{x-1}{x+3}\right) \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1, -3.$

Feedback 1

Bewertung 0

Sprung 3. Binom anwenden

Antwort 2: Ich würde die Brüche „auf einen Hauptnenner bringen" und U somit schreiben als $\frac{(x-2)^2(x+3)^2 - (x+1)^2(x-1)^2}{(x+1)^2(x+3)^2} \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1, -3.$

Nächster Umformungsschritt

Feedback 2

Bewertung 1

Sprung Auf den Hauptnenner bringen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

3. Binom anwenden

Sie wollen nun *direkt* das 3. Binom anwenden. Dieser Weg würde zum Ziel führen, ist allerdings *nicht* der schnellste, denn wir haben es dann immer noch mit verschiedenen einfachen Linearfaktoren in den Nennern zu tun!

Würden wir stattdessen zunächst den Hauptnenner bilden, so ist dieser quadratisch und somit *eindeutig positiv*. Man kann also beide Seiten der Ungleichung mit ihm multiplizieren, ohne dass dies die Richtung der Ungleichung ändert, und erhält:

$$\frac{(x-2)^2(x+3)^2 - (x+1)^2(x-1)^2}{\underbrace{(x+1)^2(x+3)^2}_{>0}} \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1, -3$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x+3)^2 - (x+1)^2(x-1)^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1, -3.$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Nächster Umformungsschritt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Auf den Hauptnenner bringen

Sie würden nun zunächst die Brüche „auf einen Hauptnenner bringen" . Dies ist ein guter Gedanke, denn der Hauptnenner ist quadratisch und somit *eindeutig positiv*! Man kann also beide Seiten der Ungleichung mit ihm multiplizieren, ohne dass dies die Richtung der Ungleichung ändert, und erhält:

$$\frac{(x-2)^2(x+3)^2 - (x+1)^2(x-1)^2}{\underbrace{(x+1)^2(x+3)^2}_{>0}} \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1, -3$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x+3)^2 - (x+1)^2(x-1)^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1, -3.$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Nächster Umformungsschritt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Nächster Umformungsschritt

Nächster Umformungsschritt

Einstellungen

Die Ungleichung lautet also jetzt

$$(x-2)^2(x+3)^2-(x+1)^2(x-1)^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1,-3.$$

Überlegen Sie sich, welchen nächsten Umformungsschritt Sie nun vornehmen würden.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: 3. Binom anwenden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

3. Binom anwenden

An *dieser Stelle* macht es nun unbedingt Sinn, das **3.Binom** anzuwenden, um die Quadrate „loszuwerden"!

Man erhält somit

$$\begin{aligned} &(x-2)^2(x+3)^2-(x+1)^2(x-1)^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1,-3 \\ \Leftrightarrow &((x-2)(x+3)+(x+1)(x-1))\,((x-2)(x+3)-(x+1)(x-1)) \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1, \end{aligned}$$

Lösen Sie die Ungleichung nun selbst bis zum Ende auf!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ungleichung auflösen

Man erhält:

$$\begin{aligned} &((x-2)(x+3)+(x+1)(x-1))\,((x-2)(x+3)-(x+1)(x-1)) \geq 0 && \text{und} \quad x \neq \\ \Leftrightarrow\ &\left(x^2+x-6+x^2-1\right)\left(x^2+x-6-x^2+1\right) \geq 0 && \text{und} \quad x \neq \\ \Leftrightarrow\ &\left(2x^2+x-7\right)(x-5) \geq 0 && \text{und} \quad x \neq \\ \Leftrightarrow\ &\left(x^2+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{2}\right)(x-5) \geq 0 && \text{und} \quad x \neq \\ \Leftrightarrow\ &\left((x+\tfrac{1}{4})^2-\left(\tfrac{\sqrt{57}}{4}\right)^2\right)(x-5) \geq 0 && \text{und} \quad x \neq \\ \Leftrightarrow\ &\left(\left((x+\tfrac{1}{4}+\tfrac{\sqrt{57}}{4}\right)\left((x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{\sqrt{57}}{4}\right)\right)(x-5) \geq 0 && \text{und} \quad x \neq \end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Ungleichung auflösen

Einstellungen

Sprung 1: Ungleichung auflösen

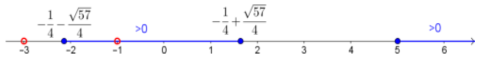
Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ungleichung auflösen

Die Ungleichung lautet also

$$U: \quad \left(\left((x+\tfrac{1}{4}+\tfrac{\sqrt{57}}{4}\right)\left((x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{\sqrt{57}}{4}\right)\right)(x-5) \geq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -1,-3.$$

Zur ihrer Auswertung kann man nun den Zahlenstrahl heranziehen:



Damit erhält man

$$U \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{4}-\tfrac{\sqrt{57}}{4} \leq x < -1 \text{ oder } -1 < x \leq -\tfrac{1}{4}+\tfrac{\sqrt{57}}{4} \text{ oder } x \geq 5.$$

und mithin die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -\tfrac{1}{4}-\tfrac{\sqrt{57}}{4} \leq x < -1 \text{ oder } -1 < x \leq -\tfrac{1}{4}+\tfrac{\sqrt{57}}{4} \text{ oder } x \geq 5\}.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ende der Aufgabe!

Sprung 1: Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

BSA zu rekursiven Folgen

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ▶ 17ws-02656 ▶ Lange eÜbungen ▶ Aufgabe zu rekursiven Folgen ▶ Bearbeiten ▶ Erweitert ▶ Bearbeiten

Aufgabe zu rekursiven Folgen

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Wichtig"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Einstellungen

Vorbemerkung

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Wir bearbeiten folgende Aufgabenstellung:

Untersuchen Sie, ob die durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4} \quad \text{und} \quad b_1 = 19, \quad b_{n+1} = \sqrt{5+4b_n}$$

gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und bestimmten Sie gegebenenfalls jeweils den Grenzwert.

Im Folgenden werden Sie diese Aufgabe Schritt für Schritt lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Aufgabenstellung - Typisches Vorgehen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung - Typisches Vorgehen

Aufgabenstellung - Typisches Vorgehen

Einstellungen

Derartige Aufgaben zu rekursiven Folgen lassen sich meist durch folgendes Vorgehen lösen:

1. Zuerst ein Gespür für die Folge entwickeln. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, die man aber nicht immer alle ausprobieren muss:
   - erste Folgenglieder ausrechnen (für Monotonievermutungen)
   - offensichtliche Beschränkungen erkennen, etwa $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ oder $a_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ etc. (z.B. für untere/obere Schranke oder zum Erleichtern späterer Rechnungen)
   - zugehörige Fixpunktgleichung lösen (für Vermutungen zu möglichen Grenzwerten oder unteren/oberen Schranken)
2. Dann die Konvergenz zeigen:
   - fallende bzw. steigende Monotonie nachweisen
   - Beschränktheit nach unten bzw. oben nachweisen (beides oft mittels vollständiger Induktion)
3. Schließlich den Grenzwert bestimmen mithilfe der Fixpunktgleichung.

Damit beginnen wir jetzt!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Gespür entwickeln

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Gespür entwickeln

Wir beginnen also mit einigen vorbereitenden Rechnungen, die uns ein Gespür für den Verlauf der Folge verschaffen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Einige Folgenglieder berechnen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Folgenglieder berechnen

Um ein erstes Gefühl dafür zu bekommen, wie sich die beiden Folgen verhalten, ist es oft hilfreich, die ersten paar Folgenglieder auszurechnen.

Tun Sie das, und zwar ohne Taschenrechner.

Einige Folgenglieder berechnen

Einstellungen

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Einige Folgenglieder berechnen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Folgenglieder berechnen

Bei $a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ erhält man die ersten Folgenglieder

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{8}{5}$$
$$a_3 = \frac{\frac{64}{5}}{\frac{64}{25}+\frac{100}{25}} = \frac{64}{5}\cdot\frac{25}{164} = \frac{80}{41}$$
$$a_4 = \frac{\frac{640}{41}}{\frac{6400}{1681}+\frac{6724}{1681}} = \frac{640}{41}\cdot\frac{1681}{13124} = \frac{6560}{3281}.$$

Welches Verhalten kann man aufgrund dieser ersten vier Werte vermuten?

Multiple-Choice

Antwort 1: Die Folgenglieder a_n steigen monoton.

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Einige Folgenglieder berechnen

Antwort 2 : Die Folgenglieder a_n fallen monoton.

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Einige Folgenglieder berechnen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Folgenglieder berechnen

Korrekt!

Einige Folgenglieder berechnen

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Einige Folgenglieder berechnen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Folgenglieder berechnen

Nein, das war nicht richtig.

Sie müssen aber unbedingt Lagebeziehungen zwischen zwei oder mehreren Brüchen bestimmen können. Üben Sie das also mithilfe von vielen Beispielbrüchen! Um ein Gefühl für die Größenverhältnisse zu bekommen, kann es auch helfen, viele Beispielbrüche im Taschenrechner als Dezimalzahlen anzeigen zu lassen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Einige Folgenglieder berechnen

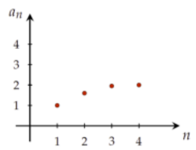
Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Folgenglieder berechnen

Wir sehen: Bei

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{8}{5}, \quad a_3 = \frac{80}{41}, \quad a_4 = \frac{6560}{3281}$$

gilt $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, und die Werte scheinen sich immer langsamer an 2 anzunähern. In einem Koordinatensystem sieht das wie folgt aus *(das muss man bei einer Klausurlösung nicht zeichnen, es geht hier nur um die Veranschaulichung)*:



Man kann schon zumindest *vermuten*, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab dem ersten Folgenglied monoton steigt (sogar streng) und von unten gegen den Grenzwert und obere Schranke 2 läuft.

Rechnen Sie jetzt auch die ersten paar Folgenglieder von b_n aus.

Einige Folgenglieder berechnen

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Einige Folgenglieder berechnen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Folgenglieder berechnen

Die Glieder der zweiten Folge lassen sich wegen der immer weiter verschachtelten Wurzeln nicht so einfach ausrechnen.
Jedenfalls erhalten wir bei $b_{n+1} = \sqrt{5+4b_n}$ für die ersten Folgenglieder

$$\begin{aligned} b_1 &= 19 \\ b_2 &= \sqrt{5+4\cdot 19} = 9 \\ b_3 &= \sqrt{5+4\cdot 9} = \sqrt{41} && \Rightarrow && 6 < b_3 < 7 \\ b_4 &= \sqrt{5+4\sqrt{41}} && \underset{6<b_3<7}{\Rightarrow} && 5 < \sqrt{5+24} < b_4 < \sqrt{5+28} < 6. \end{aligned}$$

Mit $5 < b_4 < 6$ gilt dann auch $5 = \sqrt{5+20} < b_5 < \sqrt{5+24} < 6$. Man sieht, dass sogar $5 < b_n < 6$ für alle $n \geq 4$ gelten muss - und dass man das leicht per vollständiger Induktion zeigen kann.

Welches Verhalten kann man aufgrund dieser ersten Werte vermuten? Überlegen Sie, bevor Sie weiterklicken.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Einige Folgenglieder berechnen

Inhalt 2: Ich möchte die vollständige Induktion sehen.

Sprung 2: Einige Folgenglieder berechnen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Folgenglieder berechnen

Einige Folgenglieder berechnen

Wir wollen mit vollständiger Induktion zeigen, dass $5 < b_n < 6$ gilt für alle $n \geq 4$. Die wesentliche Überlegung, die in den Induktionsschritt eingeht, hatten wir eben schon gemacht.

- ***Induktionsanfang** ($n = 4$):*
  $5 < b_4 < 6$ war schon durch Ausrechnen nachgewiesen. ✓

- ***Induktionsschritt** ($n \to n+1$):*
  Für ein $n \in \mathbb{N}$ setze voraus $5 < b_n < 6$ (IV).

  Dann ist mit der strengen Monotonie der Wurzelfunktion $b_{n+1} = \underbrace{\sqrt{5+4b_n}}_{\substack{<\sqrt{5+4\cdot 6}=\sqrt{29}<6, \\ >\sqrt{5+4\cdot 5}=5 \ \text{mit IV}}}$ und damit auch

  $5 < b_{n+1} < 6$. ✓

Somit ist die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gezeigt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück

Sprung 1: Einige Folgenglieder berechnen

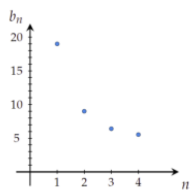
Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Folgenglieder berechnen

Mit

$$b_1 = 19, \quad b_2 = 9, \quad 6 < b_3 < 7, \quad 5 < b_i < 6 \text{ für } i \geq 4$$

erhalten wir $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$, außerdem die untere Schranke 5 für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie die obere Schranke 6 für $n \geq 4$. Wieder in einem Koordinatensystem veranschaulicht sieht das so aus:



Damit können wir wieder zumindest *vermuten*, dass b_n für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend ist (hier sogar streng), und dass die Folge von oben gegen einen Wert ≥ 5 (vielleicht sogar genau 5) konvergiert.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einige Folgenglieder berechnen

Sprung 1: Offensichtliche Beschränkungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Offensichtliche Beschränkungen

Als nächstes schauen wir, ob wir den Folgengliedern a_n bzw. b_n direkt irgendwelche Beschränkungen "ansehen" können.

Eben hatten wir schon $5 < b_n < 6$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ gezeigt. Also schauen wir uns nur noch a_n an.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Offensichtliche Beschränkungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Offensichtliche Beschränkungen

Wir schauen, ob bei

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2 + 4}$$

die Folgenglieder alle < 0 oder > 0 sind.

(Wie kommt man eigentlich darauf, ausgerechnet mit 0 zu vergleichen? Nun, wenn ab irgendeinem Punkt alle Folgenglieder > 0 oder < 0 sind, ist das oft leicht zu zeigen. Andererseits kann man mit so einer simplen Beschränkung manchmal später leichter die Fixpunktgleichung lösen oder den korrekten Grenzwert auswählen. Wir wissen zwar nicht, ob es uns hier wirklich helfen wird, aber wir machen es einfach mal.)

Was gilt hier?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Offensichtliche Beschränkungen
Antwort 2 :	Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n < 0$ für alle $n \geq n_0$.
Feedback 2	

Einstellungen

Offensichtliche Beschränkungen

Bewertung 0

Sprung Offensichtliche Beschränkungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Offensichtliche Beschränkungen

Nein!

- Man hat am Anfang $a_1 = 1 > 0$.
- Dann betrachten wir in $a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ einzeln den Zähler und den Nenner. Wir sehen:
  - Wenn $a_n > 0$, dann ist auch $8a_n > 0$, also ist der Zähler > 0.
  - $a_n^2 + 4$ ist sowieso **immer** größer als 0.

  Also wenn $a_n > 0$, dann ist auch $\frac{8a_n}{a_n^2+4} = a_{n+1} > 0$.

Da das erste Folgenglied > 0 ist, können die späteren Folgenglieder also auch niemals unter 0 rutschen.

Was wir gerade gemacht haben, ist nichts anderes als eine vollständige Induktion! Wenn auch etwas umgangssprachlich aufgeschrieben. Schreiben Sie jetzt genau diese Argumentation einmal selbst ganz "förmlich" als vollständige Induktion auf, um $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Offensichtliche Beschränkungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Offensichtliche Beschränkungen

Korrekt.

Tatsächlich gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie das jetzt "wasserdicht" mit vollständiger Induktion - schreiben Sie auf!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Offensichtliche Beschränkungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Offensichtliche Beschränkungen

Wir zeigen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion.

- IA ($n = 1$):
  Es ist $a_1 = 1 > 0$. ✓
- IS ($n \to n+1$):
  Es gelte $a_n > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).

$$\underset{\text{IV}}{\Rightarrow} \quad 8a_n > 0 \text{ und } a_n^2 + 4 > 0$$
$$\Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4} > 0 \quad ✓$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit gezeigt, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen

Wir wollen jetzt noch für beide Folgen die sogenannte "Fixpunktgleichung" lösen. Was ist damit gemeint? Bei rekursiv definierten Folgen wie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

Falls die Folgen konvergieren, *dann* gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} =: a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} =: b$.

Daraus folgt dann:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8a_n}{a_n^2+4} = \frac{8 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^2 + 4} = \frac{8a}{a^2+4}$$

und

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{5+4b_n} = \sqrt{5 + 4 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)} = \sqrt{5+4b}$$

Die damit entstandenen Gleichungen in a bzw. b nennen wir "Fixpunktgleichungen" und lösen diese im Folgenden auf nach a bzw. b. Schreiben Sie diese Gleichungen auf und klicken Sie dann weiter!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einstellungen

Fixpunktgleichungen auflösen

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Wir fangen an mit der Fixpunktgleichung zur ersten Folge, also

$$a = \frac{8a}{a^2+4}.$$

Lösen Sie die Gleichung nach a auf. Wir lassen zunächst a aus ganz $\mathbb{R}$ als Lösung zu. (Das Ausschließen bestimmter Lösungen können wir später machen.)

Welche Lösungen für a hat also die Gleichung? Geben Sie alle hintereinander ein, von klein noch groß geordnet, nur durch Semikolon getrennt.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `(-0*2((\.|,)0*)?;(-|\+)?0+((\.|,)0*)?;(\+)?0*2((\.|,)0*)?)`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: a

Antwort 2 : `(-0*2((\.|,)0*)?;(\+)?0*2((\.|,)0*)?)`

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: a

Antwort 3 : `(-|\+)?0+((\.|,)0*)?;(\+)?0*2((\.|,)0*)?)`

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: a

Antwort 4 : `.*`

Feedback 4

Bewertung 0

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Korrekt! Wenn wir a aus ganz $\mathbb{R}$ zulassen, ist

$$\begin{aligned}
& a &&= \frac{8a}{a^2+4} \\
\Leftrightarrow\quad & a\left(a^2+4\right) &&= 8a \\
\Leftrightarrow\quad & a^3 + 4a &&= 8a \\
\Leftrightarrow\quad & a^3 - 4a &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a\left(a^2-4\right) &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a(a-2)(a+2) &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \ \text{ oder } \ a &&= -2 \ \text{ oder } \ a = 2.
\end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: a

Inhalt 2: Meine Rechnung sieht anders aus, ich habe durch a geteilt.

Sprung 2: Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Wenn Sie bei Ihrer Rechnung stattdessen durch a geteilt haben, dann sieht Ihre Rechnung vermutlich ungefähr so aus:

$$\begin{aligned}
& a = \frac{8a}{a^2+4} && && \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \ \text{ oder } && 1 &&= \frac{8}{a^2+4} \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \ \text{ oder } && a^2 + 4 &&= 8 \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \ \text{ oder } && a^2 &&= 4 \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \ \text{ oder } && a = -2 && \text{ oder } a = 2.
\end{aligned}$$

Beim Teilen durch a im ersten Schritt verliert man bekanntlich die Möglichkeit $a = 0$. Deshalb muss man extra überprüfen, ob $a = 0$ eine Lösung der anfänglichen Gleichung ist. Hier ist das tatsächlich der Fall.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Nicht ganz richtig.

Sie haben vermutlich irgendwann durch a geteilt, ansonsten korrekt äquivalent umgeformt, **aber vergessen, den Fall $a = 0$ gesondert zu prüfen**. Die Fixpunktgleichung ist tatsächlich für $a = 0$ erfüllt:

$$0 = \frac{8 \cdot 0}{0^2 + 4}$$

Schreiben Sie also noch einmal die gesamte korrekte Äquivalenzumformung auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Es ist

$$\begin{aligned} & a = \frac{8a}{a^2+4} \\ \Leftrightarrow\quad & a = 0 \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{8}{a^2+4} \\ \Leftrightarrow\quad & a = 0 \quad \text{oder} \quad a^2 + 4 = 8 \\ \Leftrightarrow\quad & a = 0 \quad \text{oder} \quad a^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & a = 0 \quad \text{oder} \quad a = -2 \quad \text{oder } a = 2. \end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Das war fast korrekt.

Sie haben nur die nichtnegativen Lösungen 0 und 2 genannt. Das ist durchaus sinnvoll; wir hatten ja zuvor herausgefunden, dass $a_n > 0$ für alle n gilt und damit auch der Grenzwert $a \geq 0$ sein muss, wenn er überhaupt existiert.

Die Fixpunktgleichung zu a hat aber auch eine dritte, negative Lösung. Bestimmen Sie diese noch der Vollständigkeit halber und tragen Sie sie auf der Frageseite mit ins Eingabefeld ein.

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frageseite

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Das war nicht korrekt.

Bedenken Sie bei der Äquivalenzumformung, dass Sie den Nenner auf der rechten Seite durch beidseitiges Multiplizieren mit $(a^2 + 4)$ loswerden können:

$$\begin{aligned} & a &&= \frac{8a}{a^2+4} \\ \Leftrightarrow\quad & a\left(a^2+4\right) &&= 8a \\ \Leftrightarrow\quad & a^3 + 4a &&= 8a \\ \Leftrightarrow\quad & \ldots \end{aligned}$$

Formen Sie weiter äquivalent um und bestimmen Sie die Lösungen $a \in \mathbb{R}$ der Gleichung.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frageseite

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Gut , wir haben also herausgefunden, dass für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fixpunktgleichung $a = \dfrac{8a}{a^2+4}$ lösbar ist, nämlich für $a \in \{-2, 0, 2\}$.

Was bedeutet das für die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Multiple-Choice

Antwort 1: Wir wissen nicht, ob die Folge konvergiert.

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Antwort 2 : Die Folge konvergiert gegen -2, 0 oder 2.

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: a

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Korrekt!

Wenn die Fixpunktgleichung lösbar ist (hier für $a \in \{-2, 0, 2\}$), wissen wir nur:

Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, *dann* ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \{-2, 0, 2\}$.

Man kann aber nicht aus der Lösbarkeit der Fixpunktgleichung die Folgenkonvergenz folgern. Wir müssen also später anders zeigen, dass die Folge konvergiert oder eben nicht. Jetzt erstmal zur Fixpunktgleichung der zweiten Folge.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: b

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Nein.

Wenn die Fixpunktgleichung lösbar ist (hier für $a \in \{-2, 0, 2\}$), können wir daraus *nicht* folgern, dass die Folge konvergiert. Wir wissen nur:

Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, *dann* gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \{-2, 0, 2\}$.

Wir müssen also anders zeigen, dass die Folge konvergiert oder eben nicht. Jetzt erstmal zur Fixpunktgleichung der zweiten Folge.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Fixpunktgleichungen auflösen: a

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: b

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: b

Die zweite Fixpunktgleichung lautet

$$b = \sqrt{5 + 4b}.$$

Die Gleichung ist zwar definiert für alle reellen $b \geq -\frac{5}{4}$. Aber wir sehen: Auf der rechten Seite kann wegen der Wurzel nur ein Wert ≥ 0 stehen. Also kann die Gleichung nur dann lösbar sein, wenn auch die linke Seite ≥ 0 ist. Es reicht also, wenn wir die Gleichung für $b \geq 0$ lösen.

Lösen Sie also jetzt die Gleichung für $b \geq 0$ und benutzen Sie, dass dann beide Seiten größergleich 0 sind. Geben Sie schließlich unten alle Lösungen hintereinander ein, von klein noch groß geordnet, nur durch Semikolon getrennt.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `(\+)?0*5((\.|,)0*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: b

Antwort 2 : `(-0*1((\.|,)0*)?;(\+)?0*5((\.|,)0*)?)`

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: b

Antwort 3 : `.*`

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Fixpunktgleichungen auflösen: b

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: b

Fixpunktgleichungen auflösen: b

Einstellungen

Richtig!

Für $b \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} & & b &= \sqrt{5+4b} \\ &\overset{\text{beide Seiten} \geq 0}{\Leftrightarrow} & b^2 &= 5+4b \\ &\Leftrightarrow & b^2-4b-5 &= 0 \\ &\Leftrightarrow & (b-5)(b+1) &= 0 \\ &\overset{b\geq 0}{\Leftrightarrow} & b &= 5. \end{aligned}$$

(Durch Einsetzen lässt sich übrigens erkennen: Selbst ohne die anfängliche Einschränkung $b \geq 0$ würde $b = -1$ die ursprüngliche Fixpunktgleichung nicht lösen.)

Genau wie bei der ersten Folge können wir auch hier nicht direkt Konvergenz bzw. Divergenz folgern:

Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, *dann* gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: b

Fixpunktgleichungen auflösen: b

Einstellungen

Fast korrekt.

Sie haben vermutlich größtenteils richtig nach b aufgelöst, aber dann vergessen, dass wir für die Umformung $b \geq 0$ vorausgesetzt hatten. Ohne diese Voraussetzung gilt nämlich **beim Quadrieren im ersten Schritt keine Äquivalenz!**

Für $b \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} & & b &= \sqrt{5+4b} \\ &\overset{\text{beide Seiten} \geq 0}{\Leftrightarrow} & b^2 &= 5+4b \\ &\Leftrightarrow & b^2-4b-5 &= 0 \\ &\Leftrightarrow & (b-5)(b+1) &= 0 \\ &\overset{b\geq 0}{\Leftrightarrow} & b &= 5. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen kann man übrigens erkennen: Selbst wenn wir am Anfang nicht mit $b \geq 0$ eingeschränkt hätten, würde $b = -1$ die ursprüngliche Fixpunktgleichung nicht lösen:

$$-1 \neq \sqrt{5+4\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Genau wie bei der ersten Folge können wir auch hier nicht direkt Konvergenz bzw. Divergenz folgern:

Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, *dann* gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen: b

Fixpunktgleichungen auflösen: b

Einstellungen

Das war nicht korrekt.

Bedenken Sie bei der Äquivalenzumformung:
Die linke Seite b ist mit eben genannter Einschränkung ≥ 0, die rechte Seite $\sqrt{5+4b}$ kann wegen der Wurzel ebenfalls nur ≥ 0 sein. Wenn auf beiden Seiten vom Gleichheitszeichen ein Ausdruck ≥ 0 steht, dann kann man **als Äquivalenzumformung beide Seiten quadrieren**, um die Wurzel loszuwerden. (Überlegen Sie sich, warum das klappt!) Dann gilt für $b \geq 0$:

$$\begin{aligned} & & b &= \sqrt{5+4b} \\ &\overset{\text{beide Seiten} \geq 0}{\Leftrightarrow} & b^2 &= 5+4b \\ &\Leftrightarrow & & \dots \end{aligned}$$

Es entsteht eine quadratische Gleichung, die Sie leicht lösen können sollten. Formen Sie also weiter äquivalent um und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frageseite

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: b

Inhalt 2: Warum klappt hier das äquivalente Quadrieren?

Sprung 2: Beide Seiten einer Gleichung quadrieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beide Seiten einer Gleichung quadrieren

Unter welchen Voraussetzungen ist das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung eine Äquivalenzrelation? Wir sehen uns die Gleichung $x = y$ an.

- Die Folgerung $x = y \quad \Rightarrow \quad x^2 = y^2$ gilt immer, für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- Die Folgerung $x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = y$ gilt dagegen nur unter den Voraussetzungen
  - $x \geq 0$ und $y \geq 0$
    oder
  - $x \leq 0$ und $y \leq 0$.
- Für $x > 0$ und $y < 0$ (oder umgekehrt) gilt diese Rückrichtung - und damit die Äquivalenz - nicht:
  So ist etwa $(-1)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad -1 = 1$ offensichtlich keine gültige Folgerung. Für eine Äquivalenzumformung müssen aber beide Folgerungsrichtungen gültig sein.

Inhaltsseite

Beide Seiten einer Gleichung quadrieren

Einstellungen

Inhalt 1: Zurück

Sprung 1: Fixpunktgleichungen auflösen: b

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Fixpunktgleichungen auflösen

Wir haben also beide Fixpunktgleichungen gelöst mit

$$\begin{aligned} & a = \frac{8a}{a^2+4} \\ \Leftrightarrow \quad & a = 0 \;\text{ oder }\; a = -2 \;\text{ oder }\; a = 2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & b = \sqrt{5+4b} \\ \Leftrightarrow \quad & b = 5. \end{aligned}$$

Damit haben wir jetzt wirklich genug an Informationen gesammelt. Im nächsten Schritt können wir anfangen, die Konvergenz der beiden Folgen zu zeigen!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Konvergenz der ersten Folge

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Konvergenz der ersten Folge

Wir erinnern uns:

Das typische Vorgehen, um die Konvergenz einer rekursiv definierten Folge zu zeigen, ist das Zeigen der Monotonie und der Beschränktheit - denn daraus folgt dann Konvergenz.

Bei einer monoton *steigenden* Folge reicht es, die Beschränktheit nach *oben* zu zeigen - denn hier kann ab irgendeinem Folgenglied die Folge nicht mehr fallen, und ist damit schon automatisch nach unten beschränkt. Umgekehrt reicht es bei einer monoton *fallenden* Folge, die Beschränktheit nach *unten* zu zeigen.

Zuerst nehmen wir uns $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vor.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Konvergenz der ersten Folge

Sprung 1: Konvergenz der ersten Folge

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Konvergenz der ersten Folge

Zur ersten Folge mit $a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ hatten wir bisher herausgefunden:

1. Die ersten Folgenglieder sind $a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{8}{5}, \quad a_3 = \frac{80}{41}, \quad a_4 = \frac{6560}{3281}$, also $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Die Werte scheinen sich von unten an 2 anzunähern.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$.
3. Die zu a_n gehörige Fixpunktgleichung hat die Lösungen $-2, 0, 2$.

Was ziehen wir daraus?

- Wegen 1. können wir vermuten, dass a_n monoton steigend ist.
- Dass die Folge wegen 2. nie nach unten in den negativen Bereich geht, verstärkt diese Annahme noch.
- Schließlich kann man mit 1. und 3. vermuten, dass die Folge gegen den Grenzwert 2 läuft, und dass 2 auch eine obere Schranke für die Folge ist.

Wir wollen also zeigen, dass a_n monoton steigt, nach oben beschränkt ist durch 2, und somit konvergieren muss.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Monotonie

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie

Einstellungen

Monotonie

Wir kennen (mindestens) zwei verschiedene Ansätze, mit denen man versuchen kann, die monotone Steigung der Folge

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$$

zu zeigen:

- Man zeigt $a_n \leq a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ per vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.
  Dies ist ein Standardvorgehen. Allerdings kann es manchmal knifflig sein, eine passende Idee für den Induktionsschritt zu bekommen. Das gilt insbesondere dann, wenn der Ausdruck ganz rechts nicht offensichtlich monoton in a_n ist.
- Man löst die Ungleichung $a_n \leq a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ nach a_n auf. Man muss dazu dann noch zeigen, dass irgendwann alle Folgenglieder a_n in diesem Bereich liegen, den man als Ungleichungslösung herausbekommt.
  Bei diesem Ansatz lässt sich die anfängliche Ungleichung oft ohne Probleme lösen. Da man später sowieso noch Beschränktheit zeigen muss, kann man dadurch dann insgesamt oft die Monotonie zeigen. Es ist aber wichtig, dieses Vorgehen genau zu verstehen, wenn man es anwenden möchte.

Wählen Sie den Ansatz, der Ihnen am erfolgversprechendsten erscheint.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zeigen durch vollständige Induktion

Sprung 1: Monotonie: Vollständige Induktion

Inhalt 2: Zeigen durch Ungleichung und Beschränktheit

Sprung 2: Monotonie: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Vollständige Induktion

Einstellungen

Monotonie: Vollständige Induktion

Also gut, Sie wollen $a_n \leq a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion zeigen.

Das könnte eine problematische Wahl sein - beim Ausdruck $\frac{8a_n}{a_n^2+4}$ lässt sich keine offensichtliche Monotonie in a_n erkennen. Das macht die vollständige Induktion oft knifflig. Versuchen wir es trotzdem.

Der Induktionsanfang ist leicht - die ersten Folgenglieder hatten wir ja schon berechnet. Schauen Sie über Ihre Notizen und schreiben Sie es als Induktionsanfang auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Monotonie: Vollständige Induktion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Vollständige Induktion

Wir haben

- **IA ($n = 1$):**
  $a_1 = 1 \leq \frac{8}{5} = a_2 \qquad \checkmark$
- **IS ($n \to n+1$):**
  Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \leq a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ (IV).

  Dann ist ...

Versuchen Sie, den Induktionsschritt selbst zu schaffen. Erst, wenn Sie es gründlich versucht haben, klicken Sie weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Monotonie: Vollständige Induktion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Vollständige Induktion

Einstellungen

Monotonie: Vollständige Induktion

Beim Induktionsschritt wird es problematisch:

- **IA ($n = 1$):**
  $a_1 = 1 \leq \frac{8}{5} = a_2 \qquad \checkmark$
- **IS ($n \to n+1$):**
  Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \leq a_{n+1}$ (IV).

  Dann kann man die Ungleichung $a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4} \leq \frac{8a_{n+1}}{a_{n+1}^2+4} = a_{n+2}$ aufstellen. Aber egal wie Sie äquivalent umgeformt und die IV einzubringen versucht haben - wahrscheinlich haben Sie es nicht geschafft, $a_{n+1} \leq a_{n+2}$ zu folgern. Selbst wenn es tatsächlich möglich sein sollte, wird es wohl umständlich.

Wir versuchen also hier besser den anderen Ansatz.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zum anderen Ansatz

Sprung 1: Monotonie: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Ungleichung auflösen

Gut, versuchen wir es, indem wir die Ungleichung $a_n \leq a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ auflösen.

Sie haben die wesentlichen Äquivalenzumformungs-Schritte schon so ähnlich vorher bei der Fixpunktgleichung genutzt. Lösen Sie entsprechend jetzt die Ungleichung $a_n \leq \frac{8a_n}{a_n^2+4}$ nach a_n auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Monotonie: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Ungleichung auflösen

Einstellungen

Monotonie: Ungleichung auflösen

Man kann die gleichen Äquivalenzumformungen vornehmen wie vorher bei der Fixpunktgleichung und erhält dann:

$$\begin{array}{rrl} & a_n & \leq \dfrac{8a_n}{a_n^2+4} \\ \Leftrightarrow & a_n\left(a_n^2+4\right) & \leq 8a_n \\ \Leftrightarrow & a_n^3+4a_n & \leq 8a_n \\ \Leftrightarrow & a_n^3-4a_n & \leq 0 \\ \Leftrightarrow & a_n\left(a_n^2-4\right) & \leq 0 \\ \Leftrightarrow & a_n(a_n-2)(a_n+2) & \leq 0 \\ \Leftrightarrow & a_n \in (-\infty,-2] & \text{oder} \;\; a_n \in [0,2] \\ \overset{a_n \geq 0 \;\forall n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} & a_n \in [0,2] & \end{array}$$

Bei der letzten Äquivalenz benutzen wir unser Wissen von den ersten Rechnungen.

Jedenfalls haben wir damit erstmal nur nachgewiesen: *Falls* irgendein a_n in diesem Bereich $[0,2]$ liegt, *dann* ist das nächste Folgenglied größer, also $a_n \leq a_{n+1}$.

Man muss noch zeigen, dass ab irgendeinem Folgeglied wirklich *alle* a_n in $[0,2]$ liegen. Dann gilt nämlich für all diese a_n die Beziehung $a_n \leq a_{n+1}$, und damit ist dann die monotone Steigung der Folge gezeigt. Die Beschränktheit der Folge erledigt man so auch gleich mit.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Beschränktheit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beschränktheit

Eben haben wir gezeigt:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad a_n \in [0,2]$$

$a_n \geq 0$ trifft sowieso für alle n zu, wie wir gesehen hatten. Wir müssen den Nachweis der monotonen Steigung fertigstellen, indem wir noch $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen (oder zumindest für alle n größer als irgendein n_0).
Wenn wir das nachgewiesen haben, folgt daraus nicht nur die monotone Steigung der Folge, sondern natürlich auch direkt die Beschränktheit.

Versuchen Sie selbst, $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Dafür müssen Sie sich wieder zwischen vollständiger Induktion und dem Auflösen der Ungleichung entscheiden.

Einstellungen

Beschränktheit

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Beschränktheit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beschränktheit

Nachdem Sie sich darangesetzt haben, $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen:

Welches Vorgehen ist hier erfolgreich?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Auflösen der Ungleichung $a_{n+1} = \dfrac{8a_n}{a_n^2+4} \leq 2$ nach a_n
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Beschränkheit: Ungleichung auflösen
Antwort 2 :	$a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen per vollständiger Induktion
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Beschränkheit: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beschränkheit: Ungleichung auflösen

Einstellungen

Beschränkheit: Ungleichung auflösen

Ja, höchstwahrscheinlich haben Sie recht.

Falls Sie es zuerst mit der vollständigen Induktion versucht haben, dürften Sie wieder gemerkt haben: Der Induktionsschritt von n nach $n+1$ lässt sich kaum zeigen, indem man $a_{n+1} = \dfrac{8a_n}{a_n^2+4} \leq \ldots \leq 2$ direkt abschätzt. Die beiden a_n sowohl im Zähler als auch im Nenner machen es problematisch, da hilft auch nicht die Induktionsvoraussetzung.

Stattdessen nutzen wir die Ungleichung

$$a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4} \leq 2$$

für $n \in \mathbb{N}$ (sowieso ist $a_1 = 1 \leq 2$) und lösen sie auf nach a_n. Dazu braucht man keine vollständige Induktion. Lösen Sie die Ungleichung auf, wenn Sie es nicht schon getan haben.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Beschränkheit: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beschränkheit: Ungleichung auflösen

Haben Sie tatsächlich einen Weg gefunden, $a_n \leq a_{n+1}$ per vollständiger Induktion zu zeigen? Wir haben das jedenfalls nicht geschafft. Unsere Erfahrung:

Der Induktionsschritt von n nach $n+1$ lässt sich kaum zeigen, indem man $a_{n+1} = \dfrac{8a_n}{a_n^2+4} \leq \ldots \leq 2$ direkt abschätzt. Die beiden a_n sowohl im Zähler als auch im Nenner machen es problematisch, da hilft auch nicht die Induktionsvoraussetzung.

Stattdessen nutzen wir die Ungleichung

$$a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4} \leq 2$$

für $n \in \mathbb{N}$ (sowieso ist $a_1 = 1 \leq 2$) und lösen sie auf nach a_n. Dazu braucht man keine vollständige Induktion. Lösen Sie die Ungleichung auf, wenn Sie es nicht schon getan haben.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einstellungen

Beschränkheit: Ungleichung auflösen

Sprung 1: Beschränkheit: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beschränkheit: Ungleichung auflösen

Wir lösen auf für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} = \dfrac{8a_n}{a_n^2+4} & \leq 2 \\ \Leftrightarrow & 8a_n & \leq 2a_n^2+8 \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq 2a_n^2-8a_n+8 \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq a_n^2-4a_n+4 = \underbrace{(a_n-2)^2}_{\geq 0} \\ \Leftrightarrow & a_n \in \mathbb{R} & \end{array}$$

Man sieht: Egal, was a_n ist - das Folgeglied a_{n+1} ist dann auf jeden Fall ≤ 2. Mit $a_1 = 1 \leq 2$ erhält man $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit haben wir jetzt sowohl die monotone Steigung als auch die Beschränktheit von a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ endgültig nachgewiesen. Aus beidem zusammen folgt die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

Jetzt bleibt nur noch der Grenzwert zu bestimmen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Grenzwert

Wir haben nachgewiesen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend sowie beschränkt ist und somit konvergiert. Weiter geht es mit der Bestimmung des Grenzwerts.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Grenzwert

Grenzwert

Um den Grenzwert zu bestimmen, greifen wir zurück auf die zuvor aufgelöste Fixpunktgleichung $a = \frac{8a}{a^2+4}$, die gelöst wird durch $a \in \{-2, 0, 2\}$. Da wir die Konvergenz der Folge gezeigt haben, wissen wir, dass einer der drei Werte tatsächlich Grenzwert der Folge ist.

Überlegen Sie, welcher der drei Werte der Grenzwert sein muss, und wie Sie dabei die anderen beiden Werte ausschließen können. Was ist der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Multiple-Choice

Antwort 1: 2

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Grenzwert

Antwort 2 : 0

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Grenzwert

Antwort 3 : -2

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Grenzwert

Korrekt! -2 und 0 kann man als Grenzwerte recht leicht ausschließen:

- Wegen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ - am Anfang gezeigt - kann -2 nicht der Grenzwert sein.
- Es gilt sogar $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn es ist $a_1 = 1$ und die Folge ist monoton steigend. Damit ist auch 0 als Grenzwert ausgeschlossen.

Es bleibt also nur noch 2 übrig. Da wir wissen, dass die Folge konvergiert und insbesondere gegen -2, 0 oder 2 konvergieren muss, ist damit 2 als Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nachgewiesen.

Grenzwert

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur zweiten Folge

Sprung 1: Konvergenz der zweiten Folge

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Grenzwert

Das war nicht korrekt. Erinnern Sie sich: Wir hatten schon am Anfang wegen des Verlaufs der ersten Folgenglieder vermutet, dass 2 im Fall der Konvergenz der Grenzwert sein muss.

-2 und 0 kann man tatsächlich als Grenzwerte ausschließen! Überlegen Sie sich genau, warum.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Grenzwert

- Wegen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ - am Anfang gezeigt - kann -2 nicht der Grenzwert sein.
- Es gilt sogar $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn es ist $a_1 = 1$ und die Folge ist monoton steigend. Damit ist auch 0 als Grenzwert ausgeschlossen.

Also ist 2 der Grenzwert der ersten Folge.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur zweiten Folge

Sprung 1: Konvergenz der zweiten Folge

Inhalt 2: Warum schließt der oberste Punkt nicht auch schon 0 als GW aus?

Sprung 2: Grenzwert 0 trotz positiver Folgenglieder

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Grenzwert 0 trotz positiver Folgenglieder

Grenzwert 0 trotz positiver Folgenglieder

Selbst wenn bei einer Folge alle Folgenglieder echt größer als 0 sind, kann sie trotzdem den Grenzwert 0 haben!

Die bekannte Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Beispiel dafür.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Jetzt weiter zur zweiten Folge

Sprung 1: Konvergenz der zweiten Folge

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Konvergenz der zweiten Folge

Jetzt also an die Konvergenz der zweiten Folge mit $b_{n+1} = \sqrt{5+4b_n}$. Was haben wir dazu bisher herausgefunden?

1. Für die ersten Folgenglieder gilt $b_1 = 19,\ \ b_2 = 9,\ \ 6 < b_3 < 7,\ \ 5 < b_4 < 6$, also $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$. Die Werte scheinen sich von oben an 5 anzunähern.
2. Wir haben sogar $5 < b_i < 6$ für $i \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ mit vollständiger Induktion nachgewiesen.
3. Die zu b_n gehörige Fixpunktgleichung hat 5 als einzige Lösung.

Was ziehen wir daraus?

- Wegen 1. können wir vermuten, dass b_n monoton fallend ist.
- Diese Vermutung wird durch die Punkte 2. und 3. noch verstärkt, mit wahrscheinlichem Grenzwert 5.
- Nach 2. ist die Beschränktheit der Folge schon nachgewiesen. Für den Konvergenznachweis müssen wir also nur noch die Monotonie zeigen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Monotonie

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie

Wir wollen zeigen, dass b_n mit $b_{n+1} = \sqrt{5+4b_n}$ monoton fällt - also $b_n \geq b_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wie würden Sie das am ehesten lösen?

Inhaltsseite

Inhalt 1: Mit vollständiger Induktion

Monotonie

Sprung 1: Monotonie: Vollständige Induktion

Inhalt 2: Mit Auflösen der zugehörigen Ungleichung

Sprung 2: Monotonie: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Vollständige Induktion

Gut, versuchen wir es mit vollständiger Induktion.

Diesmal könnte der Induktionsschritt tatsächlich besser klappen als bei der ersten Folge, denn der Ausdruck $\sqrt{5+4b_n}$ ist offensichtlich monoton (steigend) in b_n.

Der Induktionsanfang ist leicht - die ersten Folgenglieder hatten wir ja schon berechnet. Schauen Sie über Ihre Notizen und schreiben Sie den Induktionsanfang auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Monotonie: Vollständige Induktion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Vollständige Induktion

Wir haben

- IA ($n = 1$):
  $b_1 = 19 \geq 9 = b_2$ ✓
- IS ($n \to n+1$):
  Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $b_n \geq b_{n+1}$ (IV).

  Dann ist ...

Versuchen Sie, den Induktionsschritt selbst zu schaffen. Erst, wenn Sie diesen fertig haben oder Sie es zumindest gründlich versucht haben, klicken Sie weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Monotonie: Vollständige Induktion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite

Einstellungen

einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Vollständige Induktion

Der Induktionsschritt klappt diesmal sehr "geradeheraus":

- IA ($n = 1$):
  $b_1 = 19 \geq 9 = b_2 \qquad \checkmark$
- IS ($n \to n+1$):
  Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $b_n \geq b_{n+1} \quad (\mathrm{IV})$.

  Dann ist $b_{n+1} = \sqrt{5+4b_n} \underset{\substack{b_n \geq b_{n+1}\ (\mathrm{IV}), \\ \text{Wurzel monoton}}}{\geq} \sqrt{5+4b_{n+1}} = b_{n+2}. \qquad \checkmark$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit gezeigt, dass $b_n \geq b_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also fällt die Folge tatsächlich monoton.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Beschränktheit & Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Ungleichung auflösen

Gut, Sie wollen die fallende Monotonie zeigen, indem Sie die Ungleichung

$$b_n \geq b_{n+1} = \sqrt{5+4b_n}$$

nach b_n auflösen. Tun Sie das.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Monotonie: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Ungleichung auflösen

Einstellungen

Monotonie: Ungleichung auflösen

Direkt am Wurzelterm der Folge erkennen wir, dass $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also haben wir

$$\begin{aligned} && b_n &\geq b_{n+1} = \sqrt{5+4b_n} \\ \overset{b_n \geq 0}{\Leftrightarrow} && b_n^2 &\geq 5 + 4b_n \\ \Leftrightarrow && b_n^2 - 4b_n - 5 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow && (b_n - 5)(b_n + 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow && b_n \geq 5 & \quad \text{oder } b_n \leq 1 \\ \underset{b_n \geq 0}{\Leftrightarrow} && b_n \geq 5. & \end{aligned}$$

Was können wir daraus jetzt schließen? Wählen Sie aus.

Multiple-Choice

Antwort 1: Die Folge ist monoton.

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Monotonie: Ungleichung auflösen

Antwort 2 : Die Folge ist nicht monoton.

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Monotonie: Ungleichung auflösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Ungleichung auflösen

Korrekt! Auf der vorigen Seite haben wir nachgewiesen:

$$b_n \geq b_{n+1} \Leftrightarrow b_n \geq 5$$

Aber die ersten drei Folgenglieder sind ja deutlich größer als 5, und wir hatten am Anfang schon gezeigt, dass $5 < b_n < 6$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$. Damit folgt $b_n \geq b_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und so die fallende Monotonie von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Monotonie: Ungleichung auflösen

Einstellungen

Sprung 1: Beschränktheit & Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Monotonie: Ungleichung auflösen

Das war nicht korrekt! Gehen wir es einmal genau durch:

- Wir hatten ja schon früh nachgewiesen, dass die ersten drei Folgenglieder sowieso deutlich größer a sind, und dass $5 < b_n < 6$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.
- Dann haben wir auf voriger Seite die Äquivalenz $b_n \geq b_{n+1} \Leftrightarrow b_n \geq 5$ erhalten.
- Also können wir insgesamt folgern:

  $b_n > 5\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad b_n \geq 5\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad b_n \geq b_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fal

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Beschränktheit & Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beschränktheit & Grenzwert

Eben haben wir gezeigt, dass die zweite Folge monoton fällt. Außerdem hatten wir anfangs schon die Beschränktheit durch $5 < b_n < 6 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ nachgewiesen.

Durch beides zusammen folgt auch die Konvergenz der zweiten Folge!

Bleibt nur noch der Grenzwert zu bestimmen. Das ist diesmal sehr leicht - geben Sie den Grenzwert an, und klicken Sie erst danach weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Beschränktheit & Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Beschränktheit & Grenzwert

Einstellungen

Beschränktheit & Grenzwert

Wir hatten ja die Fixpunktgleichung zur zweiten Folge gelöst mit

$$b = \sqrt{5+4b} \quad \Leftrightarrow \quad b = 5.$$

Da die Konvergenz eben nachgewiesen wurde, wissen wir dadurch auch direkt, dass 5 der Grenzwert sein muss. Diesmal gibt es keine anderen Lösungen der Fixpunktgleichung, die man ausschließen müsste.

Wir haben also auch die zweite Folge erfolgreich abgearbeitet!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Ergebniszusammenfassung

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Zusammenfassung der Ergebnisse

Einstellungen

Für die beiden durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2 + 4} \qquad \text{und} \qquad b_1 = 19, \quad b_{n+1} = \sqrt{5 + 4b_n}$$

rekursiv definierten Folgen haben wir zunächst einige Vorrechnungen gemacht:

- Erste Folgenglieder berechnet, und so Vermutungen erhalten zu Monotonieverhalten & möglichem Grenzwert.
- $a_n > 0$ und $5 < b_n < 6$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.
- Die zugehörigen Fixpunktgleichungen gelöst und somit potentielle Grenzwerte für den Fall der Konvergenz bestimmt:

$$a = \frac{8a}{a^2 + 4} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \{-2, 0, 2\}$$

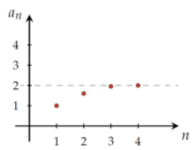
$$\textbf{und}$$

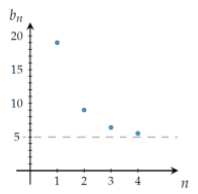
$$b = \sqrt{5 + 4b} \quad \Leftrightarrow \quad b = 5$$

Davon ausgehend haben wir dann zu beiden Folgen jeweils die Konvergenz nachgewiesen und mithilfe der Fixpunktlösungen den Grenzwert bestimmt:

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend & nach oben beschränkt durch 2, somit konvergent. Da die Folgenglieder sogar nach unten beschränkt sind durch 1, muss 2 der Grenzwert sein.
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend & nach unten beschränkt durch 5, somit ebenfalls konvergent. Natürlich muss dann 5 der Grenzwert sein.

Im Koordinatensystem (nur hier zur Veranschaulichung, in einer Klausuraufgabe müssen Sie das nicht zeichnen):





Die Aufgabe ist also gelöst.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Einstellungen

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Ende der Aufgabe
Sprung 1:	Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

BSA zur Reihenkonvergenz

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ▶ 17ws-02656 ▶ Lange eÜbungen ▶ Aufgabe zur Reihenkonvergenz ▶ Bearbeiten ▶ Erweitert ▶ Bearbeiten

Aufgabe zur Reihenkonvergenz

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Wichtig"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Inhaltsseite

Vorbemerkung

Inhalt 1:	Zur Aufgabe!
Sprung 1:	Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung lautet wie folgt:

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$$

konvergiert, absolut konvergiert, divergiert.

Diese Aufgabe werden Sie nun Schritt für Schritt lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfängliches Ausprobieren

Zum Abkürzen - manchmal ist das hilfreich - bezeichnen wir den Term hinter dem Summenzeichen als a_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}}_{a_k}$$

Gerade bei Reihenkonvergenzaufgaben mit variablem $x \in \mathbb{R}$ kommt es oft darauf an,

- am Anfang einfach mal verschiedene Lösungsansätze durchzuprobieren, bis man einen passend erscheinenden gefunden hat, und
- ein Gespür für den potentiellen Konvergenzbereich und jeweilige Konvergenzkriterien zu entwickeln.

Typischerweise hat man bei diesen Aufgaben recht viel "Schmierblatt"-Nebenrechnungen, bevor man sich an das saubere Aufschreiben einer fertigen Lösung machen kann.

Führen Sie also erste "Schmierrechnungen" durch. Für welche x könnte die Reihe konvergieren/divergieren? Lässt sich direkt ein Kriterium anwenden? Kann man den Term irgendwie hilfreich abschätzen? Verfolgen Sie jeden Gedanken, der Ihnen einfällt.

Inhaltsseite

Anfängliches Ausprobieren

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfängliches Ausprobieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$$

Was haben Sie herausgefunden? Wählen Sie einen Ansatz aus, der Ihren ersten Rechnungen und Vermutungen nach zu einer Lösung oder Teillösung führt.

Wenn Sie schließlich für alle $x \in \mathbb{R}$ einen groben Ansatz gefunden haben, wählen Sie stattdessen "Ich habe alles vorbereitet" aus.

Multiple-Choice

Antwort 1:	Ich schätze den Bruchterm nach oben ab. (Also könnte später das Majorantenkriterium in Frage kommen.)
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ausprobieren: Abschätzen nach oben
Antwort 2:	Ich betrachte als erstes die Fälle $x = \pm 1$.
Feedback 2	
Bewertung	1
Sprung	Ausprobieren: Der Fall |x| = 1
Antwort 3 :	Ich benutze das Quotientenkriterium.
Feedback 3	
Bewertung	0
Sprung	Ausprobieren: Quotientenkriterium
Antwort 4 :	Ich benutze das Wurzelkriterium.
Feedback 4	
Bewertung	0
Sprung	Ausprobieren: Wurzelkriterium

Anfängliches Ausprobieren

Antwort 5 :	Ich schätze den Bruchterm nach unten ab. (Also könnte später das Minorantenkriterium in Frage kommen.)
Feedback 5	
Bewertung	0
Sprung	Ausprobieren: Abschätzen nach unten
Antwort 6 :	Ich habe alles vorbereitet.
Feedback 6	
Bewertung	0
Sprung	Schriftliche Lösung vorbereiten

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Sie wollen nach oben abschätzen und mit dem Majorantenkriterium Konvergenz zeigen.

Warum liegt das nahe? Man kann in der Tat durch genaues Anschauen des Reihenterms

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$$

vermuten, dass sich für bestimmte $x \in \mathbb{R}$ eine Majorante finden lässt. Sehen Sie sich den Term an und überlegen Sie, woran man das erkennen kann.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Unten im Nenner hat man den Term x^{2k}, der für $|x| > 1$ und $k \to \infty$ exponentiell schnell gegen ∞ läuft:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}$$

Wegen des immer durch ± 1 beschränkten Sinus oben im Zähler, und wegen k im Nenner, können wir vermuten, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}$ "kleiner" ist als $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}}$. Und diese zweite Reihe konvergiert bekanntlich für $|x| > 1$! Wir können also höchstwahrscheinlich $|a_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ **nach oben abschätzen**, das **Majorantenkriterium** anwenden und so für $|x| > 1$ die (absolute) Konvergenz unserer Reihe zeigen.

Aber wie sieht es für $|x| < 1$ aus? Überlegen Sie anhand des Terms und seiner Komponenten, ob Sie dafür Konvergenz oder Divergenz der Reihe vermuten. Was ist Ihre Vermutung für den Fall $|x| < 1$?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Konvergenz
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ausprobieren: Abschätzen nach oben
Antwort 2 :	Divergenz
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Korrekt!

Zunächst könnte man für $|x| < 1$ denken, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}$ sich wegen $x^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ungefähr wie die divergente harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ verhält.

Allerdings läuft bei $|x| < 1$ auch der Sinusterm oben im Zähler für $k \to \infty$ gegen 0:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}$$

Wir wissen grob, dass sich $\sin(y)$ um 0 herum ähnlich verhält wie das Argument y. Für $|x| < 1$ geht der Sinusausdruck also wegen des Arguments x^{6k} ungefähr in sechster Potenz gegen 0!

Wir können deshalb vermuten, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}$ für $|x| < 1$ doch konvergiert und wir das wieder mit Abschätzen nach oben und dem Majorantenkriterium zeigen können. Möglicherweise hilft uns dabei auch die **Ungleichung** $|\sin(y)| \le |y|,\ y \in \mathbb{R}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Nein - auch wenn man es vielleicht nicht direkt sieht, war das nicht richtig.

Zunächst könnte man für $|x| < 1$ denken, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}$ sich wegen $x^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ungefähr wie die divergente harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ verhält.

Allerdings läuft bei $|x| < 1$ auch der Sinusterm oben im Zähler für $k \to \infty$ gegen 0:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}$$

Wir wissen grob, dass sich $\sin(y)$ um 0 herum ähnlich verhält wie das Argument y. Für $|x| < 1$ geht der Sinusausdruck also wegen des Arguments x^{6k} ungefähr in sechster Potenz gegen 0!

Wir können deshalb vermuten, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}$ für $|x| < 1$ doch konvergiert und wir das wieder mit Abschätzen nach oben und dem Majorantenkriterium zeigen können. Möglicherweise hilft uns dabei auch die **Ungleichung** $|\sin(y)| \le |y|,\ y \in \mathbb{R}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach oben

Es bleibt noch der Fall $|x| = 1$ bzw. $x = \pm 1$.

Dieser Fall wird bei den anderen Ansätzen besprochen, daher geht es hier zurück.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zu den anderen Ansätzen
Sprung 1:	Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Ja, sich zunächst einmal speziell die Fälle $x = \pm 1$ anzuschauen, könnte hilfreich sein.

Wie kommt man auf diese Idee? Nun, im Term $a_k = \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k+x^{2k}}$ fallen die beiden Teilterme x^{2k} und x^{6k} auf. Das Verhalten dieser beiden Teilterme für $k \to \infty$ ist bekanntlich unterschiedlich: Im Fall $|x| > 1$ laufen sie gegen unendlich, in den Fällen $x = \pm 1$ bleiben Sie wegen des immer geraden Exponenten konstant bei 1, und im Fall $|x| < 1$ konvergieren sie gegen 0. Eventuell lohnt es sich also, auch für die gesamte Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diese Fälle zu unterscheiden.

In den Fällen $x = \pm 1$ erhält man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((\pm 1)^{6k}\right)}{k+(\pm 1)^{2k}}$. Wie verhält sich die Reihe hier also? Vereinfachen Sie für diese Fälle $x = \pm 1$ den Reihenglied-Term und geben Sie an:

Multiple-Choice

Antwort 1:	Divergenz
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ausprobieren: Der Fall |x| = 1
Antwort 2 :	Konvergenz
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Einstellungen

Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Korrekt!

Für die Fälle $x = \pm 1$ kann man grob schätzen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((\pm 1)^{6k}\right)}{k + (\pm 1)^{2k}} \underset{6k \text{ und } 2k \text{ gerade}}{\hat{=}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1)}{k+1} \hat{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{konstant}}{k+1} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

(Wenn wir wie hier jeweils die gesamten Reihen mit Summenzeichen schreiben, können wir nicht einfach Gleichheitszeichen benutzen - schließlich wir noch gar nicht, ob die genannten Reihen überhaupt konvergieren/divergieren. Später beim sauberen Aufschreiben der Lösung sind die genauen Abschätzungen am Reihenglied-Term a_k durchzuführen!)

Hier verhält sich unsere Reihe also so ähnlich wie die **harmonische Reihe**, und divergiert damit vermutlich ebenfalls. Um das dann später wasserdicht zu beweisen, müssen wir irgendwie $a_k = \frac{\sin(1)}{k+1} \geq \ldots \geq c \cdot \frac{1}{k}$ nach unten abschätzen, wobei $c \in \mathbb{R}$ irgendein passend gewählter fester Vorfaktor ist. Daraus folgt dann die Divergenz mit dem **Minorantenkriterium**.

Soviel als Vorbereitung für die Fälle $x = \pm 1$. Wir müssen jetzt aber natürlich noch für die anderen Fälle von x Lösungsansätze finden.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Andere Ansätze versuchen

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Nein, das war nicht richtig. Wir gehen es genau durch:

Für die Fälle $x = \pm 1$ können wir zunächst vereinfachen zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((\pm 1)^{6k}\right)}{k + (\pm 1)^{2k}} \underset{6k \text{ und } 2k \text{ gerade}}{\hat{=}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1)}{k+1}.$$

(Wenn wir wie hier jeweils die gesamten Reihen mit Summenzeichen schreiben, können wir nicht einfach Gleichheitszeichen benutzen - schließlich wir noch gar nicht, ob die genannten Reihen überhaupt konvergieren/divergieren.)

Erinnert Sie das bereits an eine bestimmte Reihe, die bekanntermaßen konvergiert oder divergiert?

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einstellungen

Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Sprung 1: Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

In den Fällen $x = \pm 1$ verhält sich die Reihe ungefähr wie die **harmonische Reihe**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1)}{k+1} \hat{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{konstant}}{k+1} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

(Natürlich müssen wir das später beim sauberen Aufschreiben der Lösung genau abschätzen!)

Was folgern Sie nun bezüglich der Konvergenz/Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Der Fall |x| = 1

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist bekanntlich divergent. Mit unserer groben Vermutung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1)}{k+1} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

für die Fälle $x = \pm 1$ können wir also davon ausgehen, dass dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.

Um das dann später wasserdicht zu beweisen, müssen wir irgendwie den Reihenglied-Term $a_k = \frac{\sin(1)}{k+1} \geq \ldots \geq c \cdot \frac{1}{k}$ nach unten abschätzen, wobei $c \in \mathbb{R}$ irgendein passend gewählter fester Vorfaktor ist. Daraus folgt dann die Divergenz mit dem **Minorantenkriterium**.

Soviel als Vorbereitung für die Fälle $x = \pm 1$. Wir müssen jetzt aber natürlich noch für die anderen Fälle von x Lösungsansätze finden.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Andere Ansätze versuchen

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Also gut, versuchen wir es einmal mit dem **Quotientenkriterium**.

Bestimmen Sie dazu $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Man erhält

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{\sin\left(x^{6(k+1)}\right)}{(k+1) + x^{2(k+1)}}}{\frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)\left(k + x^{2k}\right)}{\sin\left(x^{6k}\right)\left(k + 1 + x^{2k+2}\right)}\right|.$$

Falls Sie sich nicht mehr sicher sind, wie das **Quotientenkriterium** benutzt wird, schauen Sie es sich nochmal genau an.

Entscheiden Sie dann: Lässt sich das Quotientenkriterium hier gut und mühelos anwenden?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Nein.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ausprobieren: Quotientenkriterium
Antwort 2 :	Ja.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Einstellungen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Korrekt. Ihnen ist vermutlich aufgefallen, dass sich in dem Bruchterm in

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)\left(k + x^{2k}\right)}{\sin\left(x^{6k}\right)\left(k + 1 + x^{2k+2}\right)}\right|$$

nichts weiter kürzen lässt. Dieses Kürzen in $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ ist aber oft ein Hauptgrund, warum sich das Quotientenkriterium überhaupt lohnt.
Zudem kann man bei diesem Bruchausdruck kaum sein Verhalten für $k \to \infty$ ansehen.

Wir können also vermuten, dass das Quotientenkriterium diesmal nicht die beste Wahl ist, entweder gar nicht funktioniert oder unnötig viel Arbeit macht. Wahrscheinlich ist es besser, andere Wege auszuprobieren.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Also zurück zu etwas anderem.

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Inhalt 2: Ich möchte es trotzdem mit dem Quotientenkriterium versuchen.

Sprung 2: Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Nein, vermutlich haben Sie nicht recht.

Was Ihnen sofort auffallen sollte: In dem Bruchterm in

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)\left(k + x^{2k}\right)}{\sin\left(x^{6k}\right)\left(k + 1 + x^{2k+2}\right)}\right|$$

lässt sich nichts weiter kürzen. Dieses Kürzen in $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ ist aber oft ein Hauptgrund, warum sich das Quotientenkriterium überhaupt lohnt.
Zudem kann man bei diesem Bruchausdruck kaum sein Verhalten für $k \to \infty$ ansehen.

Wir können also vermuten, dass das Quotientenkriterium diesmal nicht die beste Wahl ist, entweder gar nicht funktioniert oder unnötig viel Arbeit macht. Wahrscheinlich ist es besser, andere Wege auszuprobieren.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Also zurück zu etwas anderem.

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Einstellungen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Inhalt 2: Ich möchte es trotzdem mit dem Quotientenkriterium versuchen.

Sprung 2: Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Okay, dann versuchen wir es dennoch mit dem Quotientenkriterium.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Wenn wir das Grenzwertverhalten des großen Bruchterms besser einschätzen wollen, können wir versuchen ihn irgendwie gewinnbringend in Teilbrüche aufzuteilen. Das kann man z.B. wie folgt versuchen:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)\left(k+x^{2k}\right)}{\sin(x^{6k})\left(k+1+x^{2k+2}\right)}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)}{\sin(x^{6k})}\right| \cdot \left|\frac{k+x^{2k}}{k+1+x^{2k+2}}\right|$$

Dann kann man aber sehen:

- Für $|x| > 1$ hat der linke Faktor ein "chaotisches" Verhalten. Die Terme x^{6k+6} bzw. x^{6k} werden für steigendes k betragsmäßig immer größer und erzeugen irgendwelche Sinus-Werte in $[-1, 1]$. Der Bruchterm daraus kann alle möglichen reellen Zahlen annehmen (etwa auch so etwas ähnliches wie $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$). Wir können nicht einmal einschätzen, ob diese Werte für $k \to \infty$ überhaupt beschränkt sind. Deshalb ist es auch egal, ob wir für den rechten Faktor irgendwie Konvergenz nachweisen können; wegen des linken Faktors können wir weder auf Konvergenz noch auf Divergenz der Folge $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ schließen.

- Im Fall $|x| < 1$ gehen x^{6k+6} bzw. x^{6k} für $k \to \infty$ gegen 0. Wegen $\sin(y) \xrightarrow{y \to 0} 0$ gehen auch die beiden Sinusterme im linken Faktor gegen 0 - wir erhalten damit einen Grenzwert der Form "$\frac{0}{0}$". Mit unseren bisherigen Mitteln können wir nicht herausfinden, ob er konvergiert oder divergiert. Deshalb bringt es uns auch hier nichts, noch den rechten Faktor anzusehen, und wieder können wir weder auf Konvergenz noch auf Divergenz der Folge $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ schließen.

In den oben untersuchten Fällen für x lässt sich also das Quotientenkriterium nicht anwenden. Übrig bleibt aber noch $|x| = 1$. Versuchen Sie jetzt dort das Quotientenkriterium!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einstellungen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Sprung 1: Ausprobieren: Quotientenkriterium

Inhalt 2: Kann man den Bruchterm nicht auch anders in Faktoren aufteilen?

Sprung 2: Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Ja, man kann stattdessen auch folgendermaßen in Faktoren aufteilen:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)\left(k+x^{2k}\right)}{\sin(x^{6k})\left(k+1+x^{2k+2}\right)}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k+6}\right)}{k+1+x^{2k+2}}\right| \cdot \left|\frac{k+x^{2k}}{\sin(x^{6k})}\right|$$

Allerdings bringt uns das wieder nichts.

- Im Fall $|x| > 1$ kann man zeigen, dass für $k \to \infty$ der linke Faktor gegen 0 und der rechte gegen ∞ läuft. (Leiten Sie das unbedingt selbst auf Ihrem Papier her!) Bei so einem Grenzwert der Art "$0 \cdot \infty$" kann man nicht ohne weiteres sagen, wie und ob er überhaupt konvergiert. Wir kommen so zu keiner Aussage.

- Im Fall $|x| < 1$ läuft ebenfalls der linke Faktor gegen 0, der rechte gegen ∞. (Überlegen Sie auch hier selbst, warum.) Wieder kann man keine Aussage treffen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück

Sprung 1: Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Im Fall $|x| = 1$, also $x = 1$ oder $x = -1$, bekommt man:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{\sin\left((\pm 1)^{6k+6}\right)}{\sin((\pm 1)^{6k})}\right| \cdot \left|\frac{k+(\pm 1)^{2k}}{k+1+(\pm 1)^{2k+2}}\right| \\ &= \left|\frac{\sin(1)}{\sin(1)}\right| \cdot \left|\frac{k+1}{k+2}\right| \\ &= 1 \cdot \left|\frac{k+1}{k+2}\right|\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir, dass $6k, 6k+6, 2k, 2k+2$ allesamt immer gerade Zahlen sein müssen.

Wogegen konvergiert nun $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$? Bestimmen Sie das selbst auf dem Papier!

Einstellungen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Man kann geschickt kürzen und erhält für $|x| = 1$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k+1}{k+2}\right| = \left|\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Kann man durch Anwendung des Quotientenkriteriums daraus auf irgendetwas schließen?

Multiple-Choice

Antwort 1: Nein.

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Ausprobieren: Quotientenkriterium

Antwort 2 : Ja.

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Ausprobieren: Quotientenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Einstellungen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Korrekt!

Im Fall $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 1$ führt das Quotientenkriterium zu keiner Aussage. Zwar ist $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k+1}{k+2}\right| < 1\ \forall k$, aber das reicht eben nicht aus! Für Konvergenz muss man $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für in festes $q < 1$ zeigen können, was hier wegen des Grenzwerts 1 nicht möglich ist. Damit kann weder Konvergenz noch Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gefolgert werden

(Man kann auch direkt mit dem Grenzwert argumentieren, was dann im Skript Quotienten*test* heißt: Um Konvergenz folgern zu können, müsste $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow{k\to\infty} q$ für ein festes $q < 1$ gelten. Für die Divergenz müsste dagegen $q > 1$ sein. Und für $q = 1$ lässt sich keine Aussage treffen.)

Das Quotientenkriterium hilft uns also überhaupt nicht! Wir müssen einen anderen Ansatz versuchen. Unten geht es zurück.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Quotientenkriterium

Ihre Antwort war nicht korrekt:

Im Fall $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 1$ führt das Quotientenkriterium zu keiner Aussage. Zwar ist $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k+1}{k+2}\right| < 1\ \forall k$, aber das reicht eben nicht aus! Für Konvergenz muss man $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für in festes $q < 1$ zeigen können, was hier wegen des Grenzwerts 1 nicht möglich ist. Damit kann weder Konvergenz noch Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gefolgert werden

(Man kann auch direkt mit dem Grenzwert argumentieren, was dann im Skript Quotienten*test* heißt: Um Konvergenz folgern zu können, müsste $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow{k\to\infty} q$ für ein festes $q < 1$ gelten. Für die Divergenz müsste dagegen $q > 1$ sein. Und für $q = 1$ lässt sich keine Aussage treffen.)

Das Quotientenkriterium hilft uns also überhaupt nicht! Wir müssen einen anderen Ansatz versuchen. Unten geht es zurück.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Einstellungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Gut, versuchen wir das **Wurzelkriterium**.

Bilden Sie also den Term $\sqrt[k]{|a_k|}$ und schauen Sie anhand des entstehenden Terms, ob das Wurzelkriterium weiterhilft.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ausprobieren: Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Es ist

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|}.$$

Was können Sie hier schon über die Anwendung des Wurzelkriteriums sagen? Lässt sich das Kriterium hier gut und mühelos anwenden?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Nein.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ausprobieren: Wurzelkriterium
Antwort 2 :	Ja.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Ausprobieren: Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Einstellungen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Korrekt!

Das Wurzelkriterium lohnt sich tendenziell eher dann, wenn man den $\sqrt[k]{|a_k|}$-Term vereinfachen kann, etwa indem die äußere k-te Wurzel innen von einer Potenz hoch k aufgehoben wird. Beim Term $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|}$ dürfte Ihnen aufgefallen sein, dass man eben nicht mehr weiter vereinfachen kann - und dass deshalb das Wurzelkriterium vermutlich schwer, wenn überhaupt, anwendbar ist.

Man kann vielleicht noch trickreich abschätzen und darauf dann das Wurzelkriterium anwenden, aber besser sollte man andere Ansätze ausprobieren.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zu anderen Ansätzen
Sprung 1:	Anfängliches Ausprobieren
Inhalt 2:	Trotzdem möchte ich es mit dem Wurzelkriterium versuchen.
Sprung 2:	Ausprobieren: Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Nein.

Das Wurzelkriterium lohnt sich tendenziell eher dann, wenn man den $\sqrt[k]{|a_k|}$-Term vereinfachen kann, etwa indem die k-te Wurzel mit einer Potenz hoch k aufgehoben wird. Beim Term $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|}$ sollte Ihnen aber auffallen, dass man eben nicht mehr weiter vereinfachen kann - und dass deshalb das Wurzelkriterium vermutlich schwer, wenn überhaupt, anwendbar ist.

Man kann vielleicht noch trickreich abschätzen und darauf dann das Wurzelkriterium anwenden, aber besser sollte man andere Ansätze ausprobieren.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zu anderen Ansätzen
Sprung 1:	Anfängliches Ausprobieren

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Inhalt 2:	Trotzdem möchte ich es mit dem Wurzelkriterium versuchen.
Sprung 2:	Ausprobieren: Wurzelkriterium

Einstellungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Okay, versuchen wir es trotzdem.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|}$$

Sehen Sie sich den Term unter der Wurzel genau an und lassen Sie im Kopf k gegen ∞ laufen. Wie verhält sich der Term dann im Unendlichen? Ergibt sich eine Fallunterscheidung für x? Können Sie störende Summanden wegfallen lassen, weil sie langsamer wachsen als andere? Wie wirkt sich die k-te Wurzel aus? Halten Sie bei alldem im Hinterkopf: Für Konvergenz nach dem Wurzelkriterium möchte man, dass $\sqrt[k]{|a_k|}$ ab irgendeinem k unterhalb einer Konstante $C < 1$ liegt.

Schreiben Sie Ihre Vermutung auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ausprobieren: Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Einstellungen

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|}$$

Es fallen zuerst die Terme x^{6k} und x^{2k} auf, die ein unterschiedliches Verhalten zeigen für $|x| > 1$ bzw. $|x| < 1$.

- Im Fall $|x| > 1$ kann man vermuten, dass sich $|a_k|$ für $k \to \infty$ ungefähr so verhält wie $\left|\frac{1}{x^{2k}}\right| = \frac{1}{x^{2k}}$, da $|\sin(z)| \leq 1\ \forall z \in \mathbb{R}$ gilt und da das Wachstum von k vernachlässigbar ist gegenüber dem von x^{2k}.

  Aus diesem Term kann man dann leicht die k-te Wurzel ziehen, und der resultierende von k unabhängige Ausdruck ist selbst echt kleiner als 1:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|} \approx \sqrt[k]{\frac{1}{x^{2k}}} = \frac{1}{x^2} \underset{|x|>1}{<} 1$$

- Im Fall $|x| < 1$ fällt zuerst auf, dass x^{6k} und x^{2k} beide gegen 0 gehen. Da sich außerdem $\sin(y)$ um 0 herum fast genauso wie y verhält, verhält sich unser $|a_k|$ für $k \to \infty$ ungefähr wie $\left|\frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}\right| = \frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}$.

  Mit der Summe im Nenner ist der Ausdruck noch etwas unhandlich. Wir wollen noch durch Abschätzen nach oben einen der Summanden loswerden. Da x^{6k} sehr schnell gegen 0 geht, können wir sehr grob den Summanden k "wegschätzen", so dass sich leicht die k-te Wurzel ziehen lässt, und der resultierende von k unabhängige Ausdruck ist trotzdem wieder kleiner als 1:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|} \approx \sqrt[k]{\frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}} \underset{\text{Wurzelfkt. monoton}}{\leq} \sqrt[k]{\frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}} = \sqrt[k]{x^{4k}} = x^4 \underset{|x|<1}{<} 1$$

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ausprobieren: Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Einstellungen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Wir erhalten also die zwei Schätzungen

$$\sqrt[k]{|a_k|} \approx \frac{1}{x^2} \text{ für } |x| > 1$$

sowie

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq x^4 \text{ für } |x| < 1.$$

Wie funktioniert hier jetzt das Wurzelkriterium, grob skizziert? Schreiben Sie auf.

Bedenken Sie:

Um mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu folgern, muss man zeigen, dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq C$ ist für ein festes $C < 1$ und fast alle $k \in \mathbb{N}$.

Es reicht nicht, $\sqrt[k]{|a_k|} \leq 1$ zu zeigen! Das wäre z.B. bei $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{k+1} < 1$ erfüllt; man käme dabei aber unendlich nahe an 1 heran und könnte deshalb nicht das Wurzelkriterium anwenden.

Ist dagegen $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$, folgt mit dem Wurzelkriterium die Divergenz.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ausprobieren: Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

- Für $|x| > 1$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \approx \frac{1}{x^2} \overset{|x|>1}{<} 1.$

  (Hier ist $\frac{1}{x^2}$ unser C.)

- Für $|x| < 1$ ist $\sqrt[k]{|a_k|} \leq x^4 \overset{|x|<1}{<} 1.$

  (Diesmal ist x^4 unser C.)

Also können wir sowohl für $|x| > 1$ als auch für $|x| < 1$ mit dem Wurzelkriterium die (sogar absolute) Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgern!

Allerdings: Die Art, wie wir soeben das Wurzelkriterium angewendet haben, ist durchaus etwas vertrackt. Sie sollten sich das nicht unbedingt als typischen Anwendungsfall für dieses Kriterium merken. Wir sehen uns besser noch andere Ansätze an, die für unsere Reihe besser geeignet sind. Dort probieren wir dann auch den Fall $|x| = 1$ aus.

Inhaltsseite

Einstellungen

Ausprobieren: Wurzelkriterium

Inhalt 1: Zurück zu den anderen Ansätzen

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach unten

Sie wollen nach unten abschätzen und mit dem Minorantenkriterium Divergenz zeigen.

Allerdings kann man bereits durch genaues Anschauen des Reihenterms

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k + x^{2k}}$$

vermuten, dass dies für die meisten $x \in \mathbb{R}$ wahrscheinlich nicht zu einer Lösung führen wird. Sehen Sie sich den Term noch einmal an und überlegen Sie, woran man das erkennen kann. Erst dann klicken Sie weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ausprobieren: Abschätzen nach unten

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach unten

Unten im Nenner hat man den Term x^{2k}, der für $|x| > 1,\ k \to \infty$ exponentiell schnell gegen ∞ läuft:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k + x^{2k}}$$

Wegen des immer durch ± 1 beschränkten Sinus oben im Zähler können wir vermuten, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ "kleiner" ist als $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}}$. Diese zweite Reihe konvergiert aber bekanntlich für $|x| > 1$. Wir können also höchstwahrscheinlich $|a_k|$ **nach oben abschätzen**, das **Majorantenkriterium** anwenden und so für $|x| > 1$ die (absolute) Konvergenz unserer Reihe zeigen.

Wie sieht es für $|x| < 1$ aus? Schreiben Sie auf, ob Sie dafür Konvergenz oder Divergenz der Reihe vermuten, und auch was jeweils für das eine oder das andere spricht. Erst danach klicken Sie weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einstellungen

Ausprobieren: Abschätzen nach unten

Sprung 1: Ausprobieren: Abschätzen nach unten

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach unten

Zunächst könnte man für $|x| < 1$ denken, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ sich wegen $x^{2k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ungefähr wie die divergente harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ verhält.

Allerdings läuft bei $|x| < 1$ auch der Sinusterm oben im Zähler gegen 0:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k + x^{2k}}$$

Wir wissen grob, dass sich $\sin(y)$ um 0 herum ähnlich verhält wie das Argument y. Für $|x| < 1$ geht der Sinusausdruck also wegen des Arguments x^{6k} ungefähr in sechster Potenz gegen 0! Wir können deshalb vermuten, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ für $|x| < 1$ doch konvergiert und wir das wieder mit **Abschätzen nach oben** und dem **Majorantenkriterium** zeigen können.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ausprobieren: Abschätzen nach unten

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ausprobieren: Abschätzen nach unten

Es bleibt noch der Fall $|x| = 1$ bzw. $x = \pm 1$. Möglicherweise lohnt sich dabei tatsächlich das Abschätzen nach unten.

Dieser Fall wird bei den anderen Ansätzen besprochen, daher geht es hier zurück.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zu den anderen Ansätzen

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schriftliche Lösung vorbereiten

Einstellungen

Schriftliche Lösung vorbereiten

Also gut, Sie haben für alle $x \in \mathbb{R}$ einen Ansatz, mit dem Sie Konvergenz/Divergenz zeigen können.

Bedenken Sie: Alles, was wir bisher gerechnet und geschrieben haben, ist Nebenrechnung und Vorbereitung gewesen. Sie sollten das auch in einer Klausur als Nebenrechnung markieren, die nicht gewertet werden soll.

Bevor wir gleich die saubere schriftliche Lösung angehen, fassen wir noch einmal unseren Plan zusammen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Schriftliche Lösung vorbereiten

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schriftliche Lösung vorbereiten

Fangen wir mit dem Fall $|x| > 1$ an.

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ dann konvergent oder divergent, und wie kann man das zeigen?

Multiple-Choice

Antwort 1: Man kann mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz zeigen.

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 2: Man kann mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz zeigen.

Feedback 2

Bewertung 1

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 3 : Man kann mit dem Minorantenkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 4 : Man kann mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz zeigen.

Schriftliche Lösung vorbereiten

Einstellungen

Feedback 4

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 5 : Man kann mit dem Quotientenkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 5

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 6 : Man kann mit dem Wurzelkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 6

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schriftliche Lösung vorbereiten

Ja, mit Ihrer Auswahl klappt es. Weiter mit dem Fall $|x| < 1$.

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ dann konvergent oder divergent, und wie kann man das zeigen?

Multiple-Choice

Antwort 1: Man kann mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz zeigen.

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 2: Man kann mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz zeigen.

Feedback 2

Bewertung 1

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 3 : Man kann mit dem Minorantenkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 3

Schriftliche Lösung vorbereiten

Einstellungen

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 4 : Man kann mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz zeigen.

Feedback 4

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 5 : Man kann mit dem Quotientenkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 5

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 6 : Man kann mit dem Wurzelkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 6

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schriftliche Lösung vorbereiten

Korrekt, auch in diesem Fall konvergiert die Reihe. Als letztes bleibt noch der Fall $|x| = 1$.

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ dann konvergent oder divergent, und wie kann man das zeigen?

Multiple-Choice

Antwort 1: Man kann mit dem Minorantenkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 2 : Man kann mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz zeigen.

Feedback 2

Schriftliche Lösung vorbereiten

Einstellungen

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 3 : Man kann mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz zeigen.

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 4 : Man kann mit dem Wurzelkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 4

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 5 : Man kann mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz zeigen.

Feedback 5

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Antwort 6 : Man kann mit dem Quotientenkriterium die Divergenz zeigen.

Feedback 6

Bewertung 0

Sprung Schriftliche Lösung vorbereiten

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schriftliche Lösung vorbereiten

Nein, Ihre Auswahl führt nicht zu einer Lösung. Schauen Sie sich den jeweiligen Ansatz unbedingt noch einmal an.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zum Ausprobieren der Ansätze

Sprung 1: Anfängliches Ausprobieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schriftliche Lösung vorbereiten

Schriftliche Lösung vorbereiten

Einstellungen

Korrekt!

- Für $|x| > 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}$ (absolut), was wir mit dem Majorantenkriterium oder dem Wurzelkriterium beweisen werden.
- Auch für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe (absolut), was wieder mit dem Majorantenkriterium oder dem Wurzelkriterium gezeigt wird.
- Für $|x| = 1$ divergiert die Reihe, was wir mit dem Minorantenkriterium und der harmonischen Reihe als Minorante beweisen werden.

Nun können wir endlich das saubere Aufschreiben der schriftlichen Lösung durchführen. Was ab jetzt folgt, ist keine Nebenrechnung mehr!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Saubere schriftliche Lösung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung

Wir haben also die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}}_{a_k}$$

und unterscheiden die Fälle $|x| > 1, \ |x| < 1, \ |x| = 1$.

Wir fangen an mit $|x| > 1$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ich löse den Fall mit dem Majorantenkriterium.

Sprung 1: Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Inhalt 2: Ich löse den Fall mit dem Wurzelkriterium.

Sprung 2: Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Einstellungen

Fall $|x| > 1:$

Wir zeigen die Konvergenz mit dem Majorantenkriterium. Es ist

$$|a_k| = \left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right| \leq \ldots$$

(Beachten Sie die Betragsstriche bei $|a_k|$. Beim Majorantenkriterium sind diese nötig!)

Wir wollen als erstes $|\sin(x^{6k})|$ nach oben abschätzen.Welche Ungleichung eignet sich dafür in diesem Fall $|x| > 1$ am besten?

Multiple-Choice

Antwort 1:	$|\sin(y)| \leq 1\ \forall y \in \mathbb{R}$
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium
Antwort 2 :	$|\sin(y)| \leq |y|\ \forall y \in \mathbb{R}$
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Ja, das ist korrekt!

Die Gründe dafür hatten wir bereits beim anfänglichen Ausprobieren herausgefunden.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Einstellungen

Nein, die Ungleichung $|\sin(y)| \leq |y|$ klappt hier nicht gut.

Wir würden damit die Abschätzung

$$|a_k| = \left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right| \leq \left|\frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}\right| = \frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}$$

erhalten. Der Term ganz rechts verhält sich aber im Fall $|x| > 1$ für $k \to \infty$ ungefähr wie $\frac{x^{6k}}{x^{2k}} = x^{4k}$. Dieser Ausdruck läuft aber gegen unendlich, die Reihe darüber wäre ganz sicher keine Majorante! Die benutzte Abschätzung war also viel zu grob.

Stattdessen nutzen wir hier $|\sin(y)| \leq 1\ \forall y \in \mathbb{R}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Wir schätzen ab und erhalten:

$$|a_k| = \left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right| \leq \frac{1}{|k+x^{2k}|} \stackrel{k+x^{2k}\geq 0}{=} \frac{1}{k+x^{2k}}$$

Können Sie bereits eine mögliche Majorante erahnen? Erkennen Sie einen bekannten Teilterm, bei dem die Reihe darüber konvergiert? Schätzen Sie weiter nach oben dagegen ab und wenden Sie das Majorantenkriterium an.

Schreiben Sie zuerst und klicken Sie dann auf weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Majorantenkriterium

Einstellungen

Eine vollständige Abschätzung ist

$$|a_k| = \left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right| \leq \frac{1}{|k+x^{2k}|} \stackrel{k+x^{2k}\geq 0}{=} \frac{1}{k+x^{2k}} \stackrel{x\neq 0}{\leq} \frac{1}{x^{2k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}}$ konvergiert bekanntlich für $|x| > 1$. Wir haben also eine konvergente Majorante gefunden, und nach dem Majorantenkriterium konvergiert für $|x| > 1$ auch unsere Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (sogar absolut).

Weiter geht es mit dem Fall $|x| < 1$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Ich löse den nächsten Fall wieder mit dem Majorantenkriterium.
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium
Inhalt 2:	Ich löse den nächsten Fall mit dem Wurzelkriterium.
Sprung 2:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fall $|x| > 1:$

Wir zeigen die Konvergenz mit dem Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|}.$$

Wir wollen jetzt $|\sin(x^{6k})|$ nach oben abschätzen.Welche Ungleichung eignet sich dafür in diesem Fall $|x| > 1$ am besten?

Multiple-Choice

Antwort 1:	$|\sin(y)| \leq 1\ \forall y \in \mathbb{R}$
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Einstellungen

Antwort 2 :	$|\sin(y)| \leq |y|\ \forall y \in \mathbb{R}$
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Ja, das ist korrekt!

Die Gründe dafür hatten wir bereits beim anfänglichen Ausprobieren herausgefunden.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Nein, die Ungleichung $|\sin(y)| \leq |y|$ ist hier wohl zu grob.

Wir würden damit die Abschätzung

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|} \leq \sqrt[k]{\left|\frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}\right|} = \sqrt[k]{\frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}}$$

erhalten. Der Term ganz rechts verhält sich aber im Fall $|x| > 1$ für $k \to \infty$ ungefähr wie $\sqrt[k]{\frac{x^{6k}}{x^{2k}}} = x^4 > 1$. Wir dürfen aber nicht über die 1 hinausschießen, um mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz zu zeigen.

Stattdessen nutzen wir hier $|\sin(y)| \leq 1\ \forall y \in \mathbb{R}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Einstellungen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Eine kurze Zwischenfrage:

Warum können wir überhaupt bei $\sqrt[k]{|a_k|}$ unter der Wurzel Abschätzungen betreiben, obwohl außendrum die Wurzel ist?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Weil die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium
Antwort 2 :	Weil die Wurzelfunktion hier nur positive Werte annimmt.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium
Antwort 3 :	Egal, welche Funktion "drumherum" ist, man kann immer innen Abschätzungen machen.
Feedback 3	
Bewertung	0
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Einstellungen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Korrekt.

Bei streng monoton steigenden Funktionen f gilt

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow f(x) \leq f(x), \\ x \geq y &\Leftrightarrow f(x) \geq f(x), \\ x < y &\Leftrightarrow f(x) < f(x), \\ x > y &\Leftrightarrow f(x) > f(x). \end{aligned}$$

Deshalb können wir unter der Wurzel abschätzen. Bei einer Lösung in einer schriftlichen Prüfung sollten Sie es dazuschreiben, wenn Sie Monotonie auf diese Art nutzen.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter zur Abschätzung
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Nein, das stimmt nicht.

Nehmen wir zum Beispiel die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, die für $x > 0$ positiv ist. Diese Funktion verläuft aber fallend. Also obwohl $2 < 3$ gilt, hat man

$$f(2) > f(3) \quad \textit{bzw.} \quad \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{3}.$$

Es kommt deshalb bei Abschätzungen für einen Term mit äußerer Funktion f darauf an, dass die äußere Funktion streng monoton steigend ist! Für diese gilt nämlich

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow f(x) \leq f(x) \quad \textit{bzw.} \\ x \geq y &\Leftrightarrow f(x) \geq f(x) \quad \textit{bzw.} \\ x < y &\Leftrightarrow f(x) < f(x) \quad \textit{bzw.} \\ x > y &\Leftrightarrow f(x) > f(x). \end{aligned}$$

Deshalb können wir unter der Wurzel abschätzen. Bei einer Lösung in einer schriftlichen Prüfung sollten Sie das dann auch dazuschreiben.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter zur Abschätzung

Einstellungen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Wegen der streng monotonen Steigung der Wurzelfunktion können wir unter der Wurzel Abschätzungen durchführen und erhalten mit der Ungleichung $|\sin(y)| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{|a_k|} &= \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k + x^{2k}}\right|} \\ &\leq \sqrt[k]{\frac{1}{|k + x^{2k}|}} \\ &\underset{k+x^{2k} \geq 0}{=} \sqrt[k]{\frac{1}{k + x^{2k}}} \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt noch den störenden Summanden k loswerden. Wie kann man dafür abschätzen? Schreiben Sie auf und klicken Sie dann weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Einstellungen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| > 1 mit Wurzelkriterium

Wir können k einfach wegfallen lassen, da wir dadurch den Nenner kleiner machen, und erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{|a_k|} &= \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k + x^{2k}}\right|} \\ &\leq \sqrt[k]{\frac{1}{|k + x^{2k}|}} \\ &\underset{k+x^{2k} \geq 0}{=} \sqrt[k]{\frac{1}{k + x^{2k}}} \\ &\underset{k>0, x\neq 0}{\leq} \sqrt[k]{\frac{1}{x^{2k}}} \\ &= \frac{1}{x^2} \overset{|x|>1}{<} 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert also für $|x| > 1$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (sogar absolut).

Weiter geht es mit dem Fall $|x| < 1$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Ich löse den nächsten Fall mit dem Majorantenkriterium.
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium
Inhalt 2:	Ich löse den nächsten Fall wieder mit dem Wurzelkriterium.
Sprung 2:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Fall $|x| < 1$:

Wir zeigen die Konvergenz mit dem Majorantenkriterium. Es ist

$$|a_k| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}\right| \leq \ldots$$

(Beachten Sie die Betragsstriche bei $|a_k|$. Beim Majorantenkriterium sind diese nötig!)

Wir wollen wieder $\left|\sin\left(x^{6k}\right)\right|$ nach oben abschätzen.Welche Ungleichung eignet sich dafür in diesem Fall $|x| < 1$ am besten?

Multiple-Choice

Antwort 1:	$\lvert\sin(y)\rvert \leq \lvert y\rvert \ \forall y \in \mathbb{R}$
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium
Antwort 2 :	$\lvert\sin(y)\rvert \leq 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Ja, das ist korrekt!

Die Gründe dafür hatten wir bereits beim anfänglichen Ausprobieren herausgefunden.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Nein, die Ungleichung $|\sin(y)| \leq |y|$ klappt hier nicht gut.

Wir würden damit die Abschätzung

$$|a_k| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}\right| \leq \left|\frac{x^{6k}}{k + x^{2k}}\right| = \frac{x^{6k}}{k + x^{2k}}$$

erhalten. Der Term ganz rechts verhält sich aber im Fall $|x| > 1$ für $k \to \infty$ ungefähr wie $\frac{x^{6k}}{x^{2k}} = x^{4k}$. Dieser Ausdruck läuft aber gegen unendlich, die Reihe darüber wäre ganz sicher keine Majorante! Die benutzte Abschätzung war also viel zu grob.

Stattdessen nutzen wir hier $|\sin(y)| \leq 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Wir schätzen ab und erhalten:

$$|a_k| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}\right| \leq \left|\frac{x^{6k}}{k + x^{2k}}\right| = \frac{x^{6k}}{k + x^{2k}}$$

Können Sie bereits eine mögliche Majorante erahnen? Erkennen Sie einen bekannten Teilterm, bei dem die Reihe darüber konvergiert? Schätzen Sie weiter nach oben dagegen ab und wenden Sie das Majorantenkriterium an.

Schreiben Sie zuerst und klicken Sie dann auf weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Majorantenkriterium

Eine vollständige Abschätzung ist

$$|a_k| = \left|\frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}\right| \leq \left|\frac{x^{6k}}{k + x^{2k}}\right| = \frac{x^{6k}}{k + x^{2k}} \overset{k+x^{2k}\geq 1}{\leq} x^{6k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{6k}$ ist eine **geometrische Reihe** und konvergiert bekanntlich für $|x| < 1$. Wir haben also eine konvergente Majorante gefunden, und nach dem Majorantenkriterium konvergiert für $|x| < 1$ auch unsere Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (sogar absolut).

Jetzt bleibt nur noch der Fall $|x| = 1$, den wir mit dem Minorantenkriterium lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| = 1 mit Minorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fall $|x| < 1$:

Wir zeigen die Konvergenz mit dem Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}\right|}.$$

Wir wollen wieder $\left|\sin\left(x^{6k}\right)\right|$ nach oben abschätzen. Welche Ungleichung eignet sich dafür in diesem Fall $|x| < 1$ am besten?

Multiple-Choice

Antwort 1:	$\lvert\sin(y)\rvert \leq \lvert y\rvert \ \forall y \in \mathbb{R}$
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium
Antwort 2 :	$\lvert\sin(y)\rvert \leq 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Ja, das ist korrekt!

(Mit der anderen Ungleichung $|\sin(y)| \leq 1$ würde man die Abschätzung

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k + x^{2k}}\right|} \leq \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k + x^{2k}}\right|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k + x^{2k}}}$$

erhalten. Zum weiteren Abschätzen gäbe es dann hauptsächlich noch zwei Möglichkeiten:

- *Entweder man ließe sehr grob das k im Nenner weg. Dann erhielte man $\sqrt[k]{|a_k|} = \ldots \leq \ldots = \sqrt[k]{\frac{1}{k + x^{2k}}} \leq \sqrt[k]{\frac{1}{x^{2k}}} = \frac{1}{x^2} \underset{|x|<1}{>} 1$. Man darf aber beim Abschätzen nach oben nicht über die 1 hinausschießen, um mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz zu zeigen. So würde es also nicht klappen.*
- *Oder man ließe das x^{2k} im Nenner weg. Das wäre eine sehr feine Abschätzung, da dieser Summand für $|x| < 1$ sowieso gegen 0 geht. Dann erhielte man $\sqrt[k]{|a_k|} = \ldots \leq \ldots = \sqrt[k]{\frac{1}{k + x^{2k}}} \leq \sqrt[k]{\frac{1}{k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$.*
  (Dieser letzte Grenzwert gehört ebenso wie $\sqrt[k]{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ nicht unbedingt zu den allerwichtigsten Grenzwerten, die Sie auf jeden Fall kennen müssen. Dennoch kann es hilfreich sein, sich diese zu merken.)
  Auch diese Abschätzung würde nicht helfen, da wir fürs Wurzelkriterium ein konstantes $C < 1$ als obere Schranke für $\sqrt[k]{|a_k|}$ finden müssen.))

Stattdessen nutzen wir also die Ungleichung $|\sin(y)| \leq |y| \ \forall y \in \mathbb{R}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Nein, die Ungleichung $|\sin(y)| \leq 1$ *ist hier zu grob.*

Wir würden damit die Abschätzung

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|} \leq \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k+x^{2k}}\right|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k+x^{2k}}}$$

erhalten. Zum weiteren Abschätzen gibt es dann hauptsächlich noch zwei Möglichkeiten:

- *Entweder wir lassen sehr grob das* k *im Nenner weg. Dann erhalten wir* $\sqrt[k]{|a_k|} = \ldots \leq \ldots = \sqrt[k]{\frac{1}{k+x^{2k}}} \leq \sqrt[k]{\frac{1}{x^{2k}}} = \frac{1}{x^2} \underset{|x|<1}{>} 1$. *Wir dürfen aber beim Abschätzen nach oben nicht über die* 1 *hinausschießen, um mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz zu zeigen. So klappt es also nicht.*

- *Oder wir lassen das* x^{2k} *im Nenner weg. Das ist eine sehr feine Abschätzung, da dieser Summand für* $|x| < 1$ *sowieso gegen* 0 *geht. Dann erhalten wir* $\sqrt[k]{|a_k|} = \ldots \leq \ldots = \sqrt[k]{\frac{1}{k+x^{2k}}} \leq \sqrt[k]{\frac{1}{k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
  (Dieser letzte Grenzwert gehört ebenso wie $\sqrt[k]{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ *nicht unbedingt zu den allerwichtigsten Grenzwerten, die Sie auf jeden Fall kennen müssen. Dennoch kann es hilfreich sein, sich diese zu merken.)*
  Auch diese Abschätzung hilft uns nicht, da wir fürs Wurzelkriterium ein konstantes $C < 1$ *als obere Schranke für* $\sqrt[k]{|a_k|}$ *finden müssen.*

Stattdessen nutzen wir also die Ungleichung $|\sin(y)| \leq |y| \; \forall y \in \mathbb{R}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Falls Sie nicht eben schon das Wurzelkriterium verwendet haben - eine Zwischenfrage:

Warum können wir überhaupt bei $\sqrt[k]{|a_k|}$ *unter der Wurzel Abschätzungen betreiben, obwohl außendrum die Wurzel ist?*

Multiple-Choice

Antwort 1:	Weil die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium
Antwort 2 :	Weil die Wurzelfunktion hier nur positive Werte annimmt.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium
Antwort 3 :	Egal, welche Funktion "drumherum" ist, man kann immer innen Abschätzungen machen.
Feedback 3	
Bewertung	0
Sprung	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Korrekt.

Bei streng monoton steigenden Funktionen f *gilt*

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow f(x) \leq f(x) \text{ bzw.} \\ x \geq y &\Leftrightarrow f(x) \geq f(x) \text{ bzw.} \\ x < y &\Leftrightarrow f(x) < f(x) \text{ bzw.} \\ x > y &\Leftrightarrow f(x) > f(x). \end{aligned}$$

Deshalb können wir unter der Wurzel abschätzen. Bei einer Lösung in einer schriftlichen Prüfung sollten Sie das dann auch dazuschreiben.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter zur Abschätzung
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Nein, das stimmt nicht.

Nehmen wir zum Beispiel die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, *die für* $x > 0$ *positiv ist. Diese Funktion verläuft aber fallend. Also obwohl* $2 < 3$ *gilt, hat man*

$$f(2) > f(3) \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{3}.$$

Es kommt deshalb bei Abschätzungen für einen Term mit äußerer Funktion f *darauf an, dass die äußere Funktion streng monoton steigend ist! Für diese gilt nämlich*

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow f(x) \leq f(x) \quad \text{bzw.} \\ x \geq y &\Leftrightarrow f(x) \geq f(x) \quad \text{bzw.} \\ x < y &\Leftrightarrow f(x) < f(x) \quad \text{bzw.} \\ x > y &\Leftrightarrow f(x) > f(x). \end{aligned}$$

Deshalb können wir unter der Wurzel abschätzen. Bei einer Lösung in einer schriftlichen Prüfung sollten Sie das dann auch dazuschreiben.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter zur Abschätzung
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Wegen der streng monotonen Steigung der Wurzelfunktion können wir unter der Wurzel Abschätzungen durchführen und erhalten *(mit der zuvor genannten Sinus-Ungleichung):*

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{|a_k|} &= \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|} \\ &\leq \sqrt[k]{\left|\frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}\right|} \\ &\underset{k+x^{2k}\geq 0}{=} \sqrt[k]{\frac{|x^{6k}|}{k+x^{2k}}} \end{aligned}$$

Eine Möglichkeit zum weiteren Abschätzen ist jetzt, dass man am Ende nur noch den Zähler oben behält - denn aus diesem können wir problemlos die k-te Wurzel ziehen, und er läuft wegen $|x| < 1$ *gegen 0. Schätzen Sie selbst weiter ab, sodass Sie dieses Ziel erreichen und das Wurzelkriterium anwenden können.*

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| < 1 mit Wurzelkriterium

Eine vollständige Abschätzung, die zum Ziel führt, lautet etwa:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{|a_k|} &= \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(x^{6k})}{k+x^{2k}}\right|} \\ &\leq \sqrt[k]{\left|\frac{x^{6k}}{k+x^{2k}}\right|} \\ &\underset{k+x^{2k}\geq 0}{=} \sqrt[k]{\frac{|x^{6k}|}{k+x^{2k}}} \\ &\underset{k+x^{2k}\geq 1}{\leq} \sqrt[k]{|x^{6k}|} \\ &\underset{6k \text{ gerade}}{=} \sqrt[k]{x^{6k}} \\ &= x^6 \overset{|x|<1}{<} 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert also für $|x| < 1$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (sogar absolut).

Jetzt bleibt nur noch der Fall $|x| = 1$, *den wir mit dem Minorantenkriterium lösen.*

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| = 1 mit Minorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| = 1 mit Minorantenkriterium

Einstellungen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| = 1 mit Minorantenkriterium

Fall $|x| = 1$:

Wir zeigen die Divergenz mit dem Minorantenkriterium. Für $|x| = 1$ gilt

$$a_k = \frac{\sin\left((\pm 1)^{6k}\right)}{k + (\pm 1)^{2k}} \overset{6k \text{ und } 2k \text{ gerade}}{=} \frac{\sin(1)}{k+1}.$$

(Beachten Sie: Anders als beim Majorantenkriterium dürfen hier beim Minorantenkriterium keine Betragsstriche um a_k verwendet werden!)

Wir wollen ja nach unten gegen eine divergente Reihe als Minorante abschätzen. Wie schon am Anfang dieser eÜbung erklärt, sollte man hier die Ähnlichkeit zu einer harmonischen Reihe mit Reihenglied $b_k = c \cdot \frac{1}{k}$ (mit irgendeiner festen Zahl c) erkennen und gegen ein solches b_k abschätzen. Dazu muss man den störenden Summanden $+1$ im Nenner irgendwie wegschätzen. Schreiben Sie auf, wie Sie das tun würden, um dann im nächsten Schritt das Minorantenkriterium anwenden zu können.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| = 1 mit Minorantenkriterium

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Saubere schriftliche Lösung: Fall |x| = 1 mit Minorantenkriterium

Wir schätzen nach unten ab, indem wir den Nenner größer machen, und erhalten

$$a_k = \frac{\sin\left((\pm 1)^{6k}\right)}{k + (\pm 1)^{2k}} = \frac{\sin(1)}{k+1} \overset{k \geq 1}{\geq} \frac{\sin(1)}{k+k} = \frac{\sin(1)}{2k} = \underbrace{\frac{\sin(1)}{2}}_{\text{fester Vorfaktor}} \cdot \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1)}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{\sin(1)}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist eine **harmonische Reihe** und divergiert. Wir haben also eine divergente Minorante gefunden, und nach dem Minorantenkriterium divergiert für $|x| = 1$ auch unsere Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Saubere schriftliche Lösung: Ergebnis

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Saubere schriftliche Lösung: Ergebnis

Wir haben also insgesamt gezeigt, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}$$

divergiert für $|x| = 1$ und absolut konvergiert für $|x| > 1$ oder $|x| < 1$.

Damit ist die Aufgabe gelöst!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zu einer Ergebnis-Zusammenfassung

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Gegeben war die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin\left(x^{6k}\right)}{k + x^{2k}}}_{a_k},$$

von der man bestimmen sollte, für welche $x \in \mathbb{R}$ sie konvergiert bzw. divergiert.

- Durch anfängliches Probieren und "Schmierrechnungen" haben Sie herausgefunden, dass es wegen der Teilterme x^{6k} und x^{2k} hier sinnvoll ist, die Fälle $|x| > 1,\ |x| < 1,\ |x| = 1$ zu unterscheiden.

- Ebenfalls durch Probieren haben Sie herausgefunden, dass in den Fällen $|x| > 1$ sowie $|x| < 1$ die Reihe wahrscheinlich konvergiert und das man das am besten mit dem Majorantenkriterium zeigen kann. Mit etwas zusätzlichen Abschätzungen kann man aber auch das Wurzelkriterium dafür verwenden. Auf jeden Fall war es schon beim Ausprobieren hilfreich, die Ungleichungen $|\sin(y)| \leq 1$ und $|\sin(y)| \leq |y|$ zu kennen.
  Für $|x| = 1$ ließ sich Divergenz vermuten, was man am ehesten mit dem Minorantenkriterium und der harmonischen Reihe zeigen kann.

- Schließlich haben Sie für die verschiedenen Fälle mithilfe von passenden Abschätzungen und den jeweiligen Kriterien die Konvergenz bzw. Divergenz wasserdicht bewiesen und sauber aufgeschrieben:
  - Für $|x| > 1$ konvergiert die Reihe (absolut).
  - Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe ebenfalls (auch wieder absolut).
  - Für $|x| = 1$ divergiert die Reihe.

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Einstellungen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ende der Aufgabe!

Sprung 1: Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

1. BSA zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt

Deutsch (de)

Meine Kurse ► 17ws-02656 ► Lange eÜbungen ► Aufgabe zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt ► Bearbeiten ► Erweitert ► Bearbeiten

Aufgabe zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Wichtig"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Vorbemerkung

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Der grundsätzliche Arbeitsauftrag für die Aufgabe lautet:

Untersuchen Sie, ob die durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x \sin x}, & -\pi < x \leq 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{\tan x}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

gegebene Funktion f im Nullpunkt stetig bzw. differenzierbar ist.

Diese Aufgabe werden Sie nun Schritt für Schritt im Folgenden lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Gliederung der Aufgabe

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Gliederung der Aufgabe

Es ist also sowohl **Stetigkeit** als auch **Differenzierbarkeit** einer Funktion

$$f:\ (-\pi, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

in einem Punkt zu untersuchen. Nach der Stetigkeit/Differenzierbarkeit von f auf dem Rest der angegebenen Definitionsmenge ist explizit *nicht* gefragt. (Man darf hier davon ausgehen, dass der Definitionsbereich insgesamt sinnvoll gewählt ist.)

- Im ersten Teil der Aufgabe wird daher die Stetigkeit von f an der Stelle $x = 0$ untersucht.
- Im zweiten Teil der Aufgabe wird die Differenzierbarkeit von f an der Stelle $x = 0$ untersucht.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Eine theoretische Frage vorneweg: Wie kann man allgemein begründen, ob eine Funktion f im Nullpunkt *stetig* ist? Wählen Sie *alle* richtigen Aussagen aus den folgenden aus.

Multiple-Choice - Mehrere Antworten

Antwort 1 : Eine Funktion f ist stetig in $x = 0,\ 0 \in D_f$, wenn der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\uparrow 0} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ beide existieren und gleich sind.

Feedback 1

Bewertung 0

Sprung Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Antwort 2: Eine Funktion f ist stetig in $x = 0, 0 \in D_f$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in D_f$ mit $|x| \leq \delta$ gilt.

Feedback 2

Bewertung 1

Sprung Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Antwort 3 : Eine Funktion f ist stetig in $x = 0, 0 \in (a, b) \subset D_f$, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Intervall (a, b) mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$ gilt.

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Antwort 4 : Eine Funktion f ist stetig in $x = 0, 0 \in (a, b)$, $[a, b] \subset D_f$, nach dem Zwischenwertsatz, wenn $f(a) < f(0) < f(b)$ und wenn f auf dem Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

Feedback 4

Bewertung 0

Sprung Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Richtig! Nur das ε/δ-**Kriterium** zur Stetigkeit im Nullpunkt war richtig formuliert, alle anderen Aussagen wiesen Fehler auf.

Falls Sie wissen wollen, welche Fehler dies genau sind, gelangen Sie über den Button unten zu Erläuterungen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Erläuterungen zu fehlerhaften Kriterien

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Inhalt 2: Weiter

Sprung 2: Stetigkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Leider nicht richtig. Nur das ε/δ-**Kriterium** zur Stetigkeit im Nullpunkt war richtig formuliert. Sie haben mindestens eine falsche Aussage ausgewählt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Erläuterungen zu fehlerhaften Kriterien

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Klicken Sie an, zu welcher der drei *falschen* Aussagen Sie eine Erläuterung sehen möchten, oder klicken Sie auf „Weiter".

1)

Eine Funktion f ist stetig in $x = 0,\ 0 \in D_f$, wenn der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\uparrow 0} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ beide existieren und gleich sind.

2)

Eine Funktion f ist stetig in $x = 0, 0 \in (a, b) \subset D_f$, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Intervall (a, b) mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$ gilt.

3)

Eine Funktion f ist stetig in $x = 0, 0 \in (a, b)$, $[a, b] \subset D_f$, nach dem Zwischenwertsatz, wenn $f(a) < f(0) < f(b)$ und wenn f auf dem Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

Inhaltsseite

Einstellungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Inhalt 1:	1)
Sprung 1:	Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen
Inhalt 2:	2)
Sprung 2:	Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen
Inhalt 3:	3)
Sprung 3:	Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen
Inhalt 4:	Weiter
Sprung 4:	Stetigkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

„Eine Funktion f ist stetig in $x = 0, 0 \in D_f$, wenn der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ beide existieren und gleich sind."

Bei dieser Aussage fehlt ein entscheidendes Kriterium. Der Wert von rechtsseitigem und linksseitigem Grenzwert an der Stelle $x = 0$ muss zusätzlich auch dem *Funktionswert* von f an dieser Stelle entsprechen!

Ein einfaches Beispiel: Die Funktion $g: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 37, & x = 0 \end{cases}$$

ist *nicht stetig* im Nullpunkt, obwohl $\lim_{x \uparrow 0} g(x) = \lim_{x \downarrow 0} g(x) = 0$ gilt.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zu den fehlerhaften Kriterien
Sprung 1:	Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Einstellungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

„Eine Funktion f ist stetig in $x = 0, 0 \in (a,b) \subset D_f$, wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Intervall (a,b) mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ gibt, so dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(0)$ gilt."

Bei dieser Aussage muss es heißen:

„... wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Intervall (a,b) mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(0)$"

Dieses **Folgenkriterium der Stetigkeit** wird jedoch meistens für den Gegenbeweis verwendet: Um zu zeigen, dass eine Funktion f an der Stelle $x = 0$ *nicht* stetig ist, reicht es natürlich, *eine* Folge zu finden, bei der $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq f(0)$ gilt.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zu den fehlerhaften Kriterien
Sprung 1:	Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

„Eine Funktion f ist stetig in $x = 0, 0 \in (a,b)$, $[a,b] \subset D_f$, nach dem Zwischenwertsatz, wenn $f(a) < f(0) < f(b)$ und wenn f auf dem Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt."

Diese Umkehrung des **Zwischenwertsatzes** gilt natürlich nicht.

Ein einfaches Beispiel: Die Funktion $g: \ [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & x = -1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

ist *nicht stetig* im Nullpunkt, obwohl g auf dem Intervall $[-1,1]$ jeden Wert zwischen $g(-1) = 0$ und $g(1) = 1$ annimmt.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zu den fehlerhaften Kriterien
Sprung 1:	Stetigkeit im Nullpunkt - Vorüberlegungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt

Nun zurück zu unserer Funktion f.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise

Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise

Welchen *praktischen Weg* würden Sie nun einschlagen, um die Stetigkeit von f an der Stelle $x = 0$ zu untersuchen?

Multiple-Choice

Antwort 1 :	Anwendung des ε/δ-Kriteriums der Stetigkeit
Feedback 1	
Bewertung	0
Sprung	Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise
Antwort 2:	Berechnung des linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwertes und Vergleich mit dem Funktionswert
Feedback 2	
Bewertung	1
Sprung	Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise
Antwort 3 :	Anwendung des Folgenkriteriums der Stetigkeit
Feedback 3	
Bewertung	0
Sprung	Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise

Richtig, um die Stetigkeit in einem Punkt zu untersuchen, bietet es sich normalweise an, den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert dort zu bestimmen und diese mit dem Funktionswert zu vergleichen.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise

Einstellungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Herangehensweise

Meistens eignet sich weder das ε/δ-Kriterium noch das Folgenkriterium (∗) in der Praxis gut, um die Stetigkeit in einem Punkt zu untersuchen. Man sollte lieber den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert dort bestimmen und diese mit dem Funktionswert vergleichen.

(∗) Das Folgenkriterium der Stetigkeit wird jedoch manchmal für den Gegenbeweis verwendet, also um zu zeigen, dass eine Funktion f an der Stelle $x = 0$ *nicht* stetig ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Bestimmen Sie an der Stelle 0 den linksseitigen Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x \sin x}, & -\pi < x \leq 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{\tan x}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x \sin x}, & -\pi < x \leq 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{\tan x}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Welchen linksseitigen Grenzwert an der Stelle 0 haben Sie bestimmt? Geben Sie den Wert ins Eingabefeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(-|\+)?0*0((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Einstellungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Korrekt!

Der linksseitige Grenzwert der Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x\sin x}, & -\pi<x\leq 0\\ \frac{3}{x}-\frac{3}{\tan x}, & 0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

ist leicht zu bestimmen:

Da wir den *links*seitigen Grenzwert an der Stelle 0 bestimmen, haben wir $x\leq 0$ und betrachten also den oberen Zweig. $\sqrt{x\sin x}$ ist definiert und stetig im Nullpunkt (warum?). Der linksseitige Grenzwert von f ist deshalb einfach der Funktionswert von $\sqrt{x\sin x}$ für $x=0$:

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) \overset{\sqrt{x\sin x}\text{ stetig in }0}{=} \sqrt{0\cdot 0}=0=f(0)$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Nein, das war nicht richtig.

Der linksseitige Grenzwert der Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x\sin x}, & -\pi<x\leq 0\\ \frac{3}{x}-\frac{3}{\tan x}, & 0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

ist eigentlich sehr leicht zu bestimmen:

Da wir den *links*seitigen Grenzwert an der Stelle 0 bestimmen, haben wir $x\leq 0$ und betrachten also den oberen Zweig. $\sqrt{x\sin x}$ ist definiert und stetig im Nullpunkt (warum?). Für den linksseitigen Grenzwert von f an der Stelle 0 müssen Sie deshalb einfach nur 0 in den oberen Zweig einsetzen.

Bestimmen Sie diesen Wert und klicken Sie erst dann weiter.

Inhaltsseite

Einstellungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Es ist

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) \overset{\sqrt{x\sin x}\text{ stetig in }0}{=} \sqrt{0\cdot 0}=0=f(0).$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Für den rechtsseitigen Grenzwert erhält man den Ansatz

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x)=\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{\tan x}\right)=\lim_{x\downarrow 0} 3\left(\frac{\tan x - x}{x\tan x}\right).$$

Überlegen Sie sich an dieser Stelle, wie Sie bei der Berechnung weiter vorgehen würden!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Der Ausdruck $\lim_{x\downarrow 0} 3\left(\frac{\tan x-x}{x\tan x}\right)$ führt beim Einsetzen von 0 auf einen Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$". Es bezeichne $Z(x):=\tan x - x$ den (diff'baren) Zähler und $N(x):=x\tan x$ den (diff'baren) Nenner des Ausdrucks.

Dann bietet es sich hier an, im Hinblick auf die **Regel von de L'Hospital** zu untersuchen, ob der Ausdruck $\frac{Z'(x)}{N'(x)}$ einen Grenzwert für $x\downarrow 0$ hat.

Bilden Sie den Ausdruck $\frac{Z'(x)}{N'(x)}$ und vereinfachen Sie Ihn so weit wie möglich.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einstellungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Man erhält:

$$Z'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1 \;\text{ und }\; N'(x)=\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}$$

Es ergibt sich also folgender Quotient, wobei mithilfe von Additionstheoremen und Brucherweitern ein wenig vereinfacht wird:

$$\frac{Z'(x)}{N'(x)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}}=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x + x}=\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x + x}=\frac{\sin^2 x}{\frac{1}{2}\sin(2x)+x}=\frac{2\sin^2 x}{\sin(2x)+2x}$$

Allerdings führt jetzt

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{Z'(x)}{N'(x)}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{2\sin^2 x}{\sin(2x)+2x}$$

bei Einsetzen von 0 immer noch auf einen Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$".

Man kann es noch ein weiteres Mal mit l'Hospital versuchen. Vermutlich wird man nämlich im nächsten Schritt einen Grenzwert ablesen können, da unten rechts im Nenner der Summand $(2x)'=2$ entstehen muss.

Leiten Sie also noch einmal den Zähler $U(x):=2\sin^2 x$ und den Nenner $V(x):=\sin(2x)+2x$ ab!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Einstellungen

Stetigkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Die Ableitungen sind $U'(x)=4\sin x\cos x$ und $V'(x)=2\cos(2x)+2$ und der Quotient daraus ist

$$\frac{U'(x)}{V'(x)}=\frac{4\sin x\cos x}{2\cos(2x)+2}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos(2x)+1}.$$

Hier kann man nun endlich den Grenzwert unkompliziert ablesen: Mit den Grenzwertsätzen ist

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{U'(x)}{V'(x)}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos(2x)+1}=\frac{2\cdot 0\cdot 1}{1+1}=0.$$

Bestimmen Sie mit diesem Wissen jetzt den ursprünglichen Grenzwert $\lim_{x\downarrow 0} 3\left(\frac{\tan x - x}{x\tan x}\right)$ und geben Sie den Wert ins Eingabfeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (-|\+)?0*0((,|\.)0*)?

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Stetigkeit im Nullpunkt

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Stetigkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt

Stetigkeit im Nullpunkt

Korrekt.

Auch unser ursprünglicher Grenzwert muss 0 betragen, denn mit zweimaligem Anwenden von L'Hospital gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} 3\left(\frac{\tan x - x}{x\tan x}\right) = \lim_{x\downarrow 0} 3\frac{Z(x)}{N(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0} 3\frac{Z'(x)}{N'(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0} 3\frac{U'(x)}{V'(x)} = 3\cdot 0 = 0.$$

Also haben wir gezeigt, dass

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = f(0) = 0 = \lim_{x\downarrow 0} f(x)$$

gilt.

Damit ist die Funktion f im Nullpunkt stetig!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter mit der Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetigkeit im Nullpunkt

Nein, das war nicht richtig.

Auch unser ursprünglicher Grenzwert muss 0 betragen, denn mit zweimaligem Anwenden von L'Hospital gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} 3\left(\frac{\tan x - x}{x\tan x}\right) = \lim_{x\downarrow 0} 3\frac{Z(x)}{N(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0} 3\frac{Z'(x)}{N'(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0} 3\frac{U'(x)}{V'(x)} = 3\cdot 0 = 0.$$

Also haben wir gezeigt, dass

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = f(0) = 0 = \lim_{x\downarrow 0} f(x)$$

gilt.

Damit ist die Funktion f im Nullpunkt stetig!

Inhaltsseite

Stetigkeit im Nullpunkt

Inhalt 1: Weiter mit der Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Nun soll die Differenzierbarkeit der Funktion f im Nullpunkt untersucht werden. Auch hier spielen rechtsseitige und linksseitige Grenzwerte eine Rolle.

Überlegen Sie sich, welcher linksseitige und welcher rechtsseitige Grenzwert für die Frage der Differenzierbarkeit zu untersuchen sind, und warum.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar, wenn dort der **Grenzwert des Differenzenquotienten**, die sogenannte **Ableitung**

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

existiert.

In vielen Fällen muss getestet werden, ob sowohl der linksseitige wie auch der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten bei $x = 0$ existiert und die beiden gleich sind:

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{?}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Berechnen Sie also $\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ und geben Sie den Wert ins Eingabefeld ein.

(Den Funktionsterm von f sollten Sie bereits auf Ihrem Papier aufgeschrieben haben.)

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	-0*1((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Korrekt! Man erhält

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{\underbrace{x}_{<0}} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{-|x|} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} -\sqrt{\frac{x\sin x}{x^2}} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} -\sqrt{\frac{\sin x}{x}} \\ &\underset{\substack{\sqrt{\ }\text{ stetig in } 0,\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}}{=} -1.\end{aligned}$$

(Beachten Sie:

Da hier der linksseitige Grenzwert bestimmt wird, ist sowieso $x < 0$. Und da man sich der 0 immer mehr annähert, ist irgendwann auch $-\pi < x$, sodass $\sin(x) < 0$ gilt. Deshalb ist der Ausdruck unter der Wurzel > 0.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Das war nicht richtig.

Man erhält zunächst

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{\underbrace{x}_{<0}} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{-|x|} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} -\sqrt{\frac{x\sin x}{x^2}} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} -\sqrt{\frac{\sin x}{x}}.\end{aligned}$$

(Beachten Sie:

Da hier der linksseitige Grenzwert bestimmt wird, ist sowieso $x < 0$. Und da man sich der 0 immer mehr annähert, ist irgendwann auch $-\pi < x$, sodass $\sin(x) < 0$ gilt. Deshalb ist der Ausdruck unter der Wurzel > 0.)

Jetzt sollten Sie den Grenzwert aber bestimmen können! Tun Sie das und klicken Sie erst dann weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Ihnen sollte der **bekannte Grenzwert** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ eingefallen sein.

Damit und mit der Stetigkeit der Wurzelfunktion im Nullpunkt bekommen wir insgesamt den linksseitigen Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{\underbrace{x}_{<0}} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{-|x|} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} -\sqrt{\frac{x\sin x}{x^2}} \\ &= \lim_{x\uparrow 0} -\sqrt{\frac{\sin x}{x}} \\ &\underset{\substack{\sqrt{\ } \text{ stetig in } 0, \\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1}}{=} -1.\end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten haben wir gerade bestimmt, weiter geht es mit dem rechtsseitigen:

Bilden Sie den Ausdruck $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ und vereinfachen Sie ihn zunächst.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Man erhält:

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{3}{x} - \frac{3}{\tan x}}{x} = \lim_{x\downarrow 0} 3\frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$$

Überlegen Sie sich, wie Sie nun weiter vorgehen würden.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Der Ausdruck $\lim_{x\downarrow 0} 3\left(\frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}\right)$ führt beim Einsetzen von 0 auf einen Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$". Es bezeichne $Z(x) := \tan x - x$ den (diff'baren) Zähler und $N(x) := x^2 \tan x$ den (diff'baren) Nenner des Ausdrucks.

Wieder bietet es sich an, im Hinblick auf die Regel von de L'Hospital zu untersuchen, ob der Ausdruck $\frac{Z'(x)}{N'(x)}$ einen Grenzwert für $x \downarrow 0$ hat.

Bilden Sie den Ausdruck $\frac{Z'(x)}{N'(x)}$ und vereinfachen Sie Ihn so weit wie möglich.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Man erhält:

$$Z'(x) = \tfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \ \text{ und } \ N'(x) = 2x\tan x + \tfrac{x^2}{\cos^2 x}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{Z'(x)}{N'(x)} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{1-\cos^2 x}{2x\sin x\cos x + x^2} \\ &= \frac{\sin^2 x}{2x\sin x\cos x + x^2}\end{aligned}$$

Überlegen Sie sich, wie Sie nun weiter vorgehen würden im Hinblick auf die Grenzwertbetrachtung für $x \downarrow 0$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Der Ausdruck

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{Z'(x)}{N'(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x\sin x\cos x + x^2}$$

führt beim Einsetzen von 0 immer noch auf einen Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$".

Man kann aber vermuten, dass wegen x^2 im Nenner und wegen $(x^2)'' = 2$ wahrscheinlich höchstens noch zwei Anwendungen von L'Hospital nötig sind, bis man einen Grenzwert ablesen kann.

Bestimmen Sie also den Grenzwert $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{Z'(x)}{N'(x)}$ mit de L'Hospital. Geben Sie dann diesen Wert als Dezimalzahl ins Eingabefeld ein. Zwei Nachkommastellen sind dabei ausreichend.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: ((\+)?0*0(,|\.)33(3)*)|(1/3)

Feedback 1

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Bewertung 1

Sprung Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Korrekt!

Unter der Vorannahme, *dass der Grenzwert am Ende auch existiert*, erhält man mit zweimaligem Anwenden von L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{2x\sin(x)\cos(x)+x^2} &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x\sin(2x)+x^2} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+2x} \\ &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+2x} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\cos(2x)}{2\cos(2x)+2\cos(2x)-4x\sin(2x)+2} \\ &= \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1 + 2\cdot 1 - 4\cdot 0\cdot 0 + 2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(Da wir hier direkt in der Rechnung L'Hospital benutzen, müssen wir auch oben die Annahme der Grenzwert-Existenz davorschreiben.)

Haben wir mit dem Grenzwert $\frac{1}{3}$ schon die Frage der Differenzierbarkeit gelöst? Überlegen Sie erst und klicken Sie dann weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Einstellungen

Nein, Ihre Eingabe war nicht richtig.

Unter der Voraussetzung, *dass der Grenzwert am Ende auch existiert*, erhält man mit zweimaligem Anwenden von L'Hospital zunächst

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(x)}{2x\sin(x)\cos(x)+x^2} &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(x)}{x\sin(2x)+x^2}\\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+2x}\\ &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+2x}\\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{2\cos(2x)}{2\cos(2x)+2\cos(2x)-4x\sin(2x)+2}.\end{aligned}$$

(Da wir hier direkt in der Rechnung L'Hospital benutzen, müssen wir auch oben die Annahme der Grenzwert-Existenz davorschreiben.)

Jetzt sollten Sie den Grenzwert aber bestimmen können. Tun Sie das und klicken Sie erst dann weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(x)}{2x\sin(x)\cos(x)+x^2} &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(x)}{x\sin(2x)+x^2}\\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+2x}\\ &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+2x}\\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{2\cos(2x)}{2\cos(2x)+2\cos(2x)-4x\sin(2x)+2}\\ &= \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1+2\cdot 1-4\cdot 0\cdot 0+2}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Haben wir mit dem Grenzwert $\frac{1}{3}$ schon die Frage der Differenzierbarkeit gelöst? Überlegen Sie erst und klicken Sie dann weiter.

Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Einstellungen

Nein, natürlich ist f nicht differenzierbar! Wir haben doch herausgefunden, dass sich der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten *unterscheiden*:

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1\neq 1=\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Damit kann der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *nicht existieren.*

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass die Funktion f mit

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x\sin x}, & -\pi<x\le 0\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{\tan x}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

im Nullpunkt zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Ende der Aufgabe!
Sprung 1:	Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Einstellungen

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Nein, noch nicht ganz! Dazu müssen wir erst noch L'Hospital vom Anfang zu Ende führen und den errechneten Grenzwert einsetzen:

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\downarrow 0}3\frac{Z(x)}{N(x)}=\lim_{x\downarrow 0}3\frac{Z'(x)}{N'(x)}=3\cdot\frac{1}{3}=1$$

Ist also f im Nullpunkt differenzierbar?

Multiple-Choice

Antwort 1 :	Ja.
Feedback 1	
Bewertung	0
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt
Antwort 2:	Nein.
Feedback 2	
Bewertung	1
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Genau, natürlich nicht, denn wir haben ja herausgefunden, dass

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1\neq 1=\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

2. BSA zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ▶ 17ws-02656 ▶ Lange eÜbungen ▶ Aufgabe zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt mit Parameter ▶ Bearbeiten ▶ Erweitert ▶ Bearbeiten

Aufgabe zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einem Punkt mit Parameter

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Wichtig"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Einstellungen

Vorbemerkung

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Der grundsätzliche Arbeitsauftrag für die Aufgabe lautet:

Es sei $\beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die durch

$$f_\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh^2(2x)}{x}, & x < 0 \\ \dfrac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)}, & x > 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion f_β im Nullpunkt für jedes β stetig ergänzbar ist.

Untersuchen Sie ferner, für welche β die stetig ergänzte Funktion im Nullpunkt auch differenzierbar ist.

Diese Aufgabe werden Sie nun Schritt für Schritt im Folgenden lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Gliederung der Aufgabe

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Gliederung der Aufgabe

Es ist also nach der **stetigen Ergänzbarkeit** und **Differenzierbarkeit** einer Funktion

$$f_\beta : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

in einem Punkt gefragt. (Man darf hier davon ausgehen, dass der Definitionsbereich insgesamt sinnvoll gewählt und die Funktion dort auch stetig und differenzierbar ist.)

- Im ersten Teil der Aufgabe wird daher die stetige Ergänzbarkeit von f_β an der Stelle $x = 0$ nachgewiesen und die Ergänzung durchgeführt.
- Im zweiten Teil der Aufgabe wird die Differenzierbarkeit der so ergänzten Funktion abhängig von β an der Stelle $x = 0$ untersucht.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite

einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt

Um zu untersuchen, ob eine Funktion in einer **Definitionslücke** stetig ergänzbar ist, bietet es sich normalerweise an, dort den *linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert* zu bestimmen.

Nur, wenn diese beide existieren und gleich sind, kann die Funktion stetig ergänzt werden. Dazu setzt man den errechneten Grenzwert als *Funktionswert* an der fraglichen Stelle fest.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Los geht's.

Sprung 1: Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Linksseitiger Grenzwert

Fangen wir also direkt an:

Versuchen Sie, den linksseitigen Grenzwert $\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x)$ zunächst alleine zu bestimmen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Wahrscheinlich ist Ihnen mit Einsetzen von $x = 0$ aufgefallen, dass der Term

$$\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sinh^2(2x)}{x}$$

auf einen Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$" führt. Durch die normalen **Grenzwertsätze** können wir also hier **nicht** den Grenzwert bestimmen, wir brauchen andere Mittel.

Was haben Sie zur Bestimmung des Grenzwerts benutzt?

Inhaltsseite

Inhalt 1: L'Hospital

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Inhalt 2: Zerlegung in Faktoren, deren Grenzwerte bekannt sind

Sprung 2: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite

einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Ja, bei einem Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$" ist es eine naheliegende Idee, es mit **L'Hospital** zu versuchen. Sehr oft ist das erfolgreich, auch wenn man den Satz eventuell mehrfach anwenden muss.

Probieren Sie es also aus. Es bezeichne $Z(x) := \sinh^2(2x)$ den (diff'baren) Zähler und $N(x) := x$ den (diff'baren) Nenner des Ausdrucks.

Bilden Sie den Bruch $\frac{Z'(x)}{N'(x)}$ und berechnen Sie seinen Grenzwert für $x \uparrow 0$. Geben Sie diesen Wert dann ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (-|\+)?0*0((,|\.)0*)?

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Korrekt! Man erhält:

$$\frac{Z'(x)}{N'(x)} = \frac{2\sinh(2x)\cdot\cosh(2x)\cdot 2}{1} = 4\sinh(2x)\cosh(2x) \xrightarrow[x\uparrow 0]{} 4\cdot 0\cdot 1 = 0$$

L'Hospital hat also hier schnell zum Ziel geführt. *Da der Grenzwert existiert,* dürfen wir mit dem Satz von L'Hospital insgesamt berechnen:

$$\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{Z'(x)}{N'(x)} = 0$$

Weiter geht es mit dem rechtsseitigen Grenzwert.

Inhaltsseite

Einstellungen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Nein, das war nicht richtig.

Man erhält zunächst mithilfe der **Kettenregel**:

$$\frac{Z'(x)}{N'(x)} = \frac{2\sinh(2x)\cdot\cosh(2x)\cdot 2}{1} = 4\sinh(2x)\cosh(2x)$$

Davon sollten Sie jetzt unbedingt den Grenzwert für $x \uparrow 0$ selbst bestimmen können! Tun Sie das und geben Sie den Wert dann auf der vorigen Frageseite ein.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frageseite

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Wir schreiben einfach mal das Quadrat als Produkt aus:

$$\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh(2x)\cdot\sinh(2x)}{x}$$

Können Sie hier einen Weg erkennen, wie Sie die Grenzwertberechnung auf einen Ihnen bekannten Grenzwert zurückführen können? Erst wenn Sie überlegt haben, klicken Sie weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Einstellungen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Beim blaugefärbten Teil in

$$\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh(2x)\cdot\sinh(2x)}{x}$$

könnte Ihnen auffallen, dass dieser ähnlich aussieht wie $\frac{\sinh(y)}{y}$, und dieser Ausdruck wiederum geht für $y \to 0$ gegen 1.

Wie schaffen Sie es, den blauen Faktor so umzuformen, dass Sie insgesamt den Grenzwert mithilfe von $\frac{\sinh(y)}{y} \xrightarrow[x\uparrow 0]{} 1$ bestimmen können? Schreiben Sie auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Unten im Nenner wollen wir $2x$ stehen haben, passend zum Argument des $\sinh$ oben im Zähler. Dazu können wir wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\uparrow 0}\sinh(2x)\cdot\frac{\sinh(2x)}{x}\\ &= \lim_{x\uparrow 0}\sinh(2x)\cdot 2\cdot\frac{\sinh(2x)}{2x}\\ &= \lim_{x\uparrow 0} 2\cdot\sinh(2x)\cdot\frac{\sinh(2x)}{2x}\end{aligned}$$

Bestimmen Sie jetzt den Grenzwert und geben Sie diesen Wert ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	`(-|\+)?0*0((,|\.)0*)?`
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	

Einstellungen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Bewertung	0
Sprung	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Korrekt! Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\uparrow 0}\sinh(2x)\cdot\frac{\sinh(2x)}{x}\\ &= \lim_{x\uparrow 0}\sinh(2x)\cdot 2\cdot\frac{\sinh(2x)}{2x}\\ &= \lim_{x\uparrow 0} 2\cdot\underbrace{\sinh(2x)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\sinh(2x)}{2x}}_{\to 1}\\ &\underset{\text{GW-Sätze}}{=} 2\cdot 0\cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Damit ist der linksseitige Grenzwert bestimmt und wir machen gleich mit dem rechtsseitigen weiter.

Beachten Sie aber noch:

- Unseren speziellen Term konnten wir hier in Faktoren unterteilen, deren Grenzwerte wir kennen. Beispiele dafür sind $\frac{\sinh y}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1,\ \frac{\sin y}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1,\ \frac{\arcsin y}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1$ etc., ebenso gilt bei den Kehrwerten $\frac{y}{\sinh y} \xrightarrow{y\to 0} 1,\ \frac{y}{\sin y} \xrightarrow{y\to 0} 1,\ \frac{y}{\arcsin y} \xrightarrow{y\to 0} 1$ etc. Übrigens gelten die Grenzwerte **nicht** analog mit $\cosh,\ \cos,\ \arccos$ etc. - überlegen Sie, warum.
- Dieses Vorgehen klappt jedenfalls nur, wenn der Term ebensolche speziellen Faktoren enthält, und auch dann nicht immer. Generell empfiehlt es sich eher, es zuerst mit **L'Hospital** zu versuchen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Nein, das war nicht korrekt. Sie sollten aber mit dem bereits gegebenen unbedingt in der Lage sein, diesen Grenzwert zu bestimmen!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frageseite

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Linksseitiger Grenzwert

Einstellungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Rechtsseitiger Grenzwert

Nun müssen wir uns den rechtsseitigen Grenzwert der Funktion an der Stelle $x = 0$ anschauen. Auch hier haben wir wieder einen Bruchausdruck, der für $x \downarrow 0$ gegen einen Ausdruck der Form "$\frac{0}{0}$" geht:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)}\\ &= \ldots\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x)$. Welchen Ansatz haben Sie dafür gewählt?

Inhaltsseite

Inhalt 1: L'Hospital

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Inhalt 2: Zerlegung in Faktoren, deren Grenzwerte bekannt sind

Sprung 2: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Ja, wieder bietet sich L'Hospital direkt an. Tun Sie das; leiten Sie also Zähler und Nenner einzeln ab, und schauen Sie, ob beim entstehenden Ausdruck der Grenzwert existiert.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Einstellungen

Wir setzen zunächst die Existenz des Grenzwertes voraus. (Das sollten Sie schreiben, da nur in diesem Fall die Gleichheitszeichen in der Rechnung unten gültig sind.) Wir hoffen also, dass nach genügend häufigem Ableiten von Zähler und Nenner tatsächlich irgendwann ein Grenzwert existiert.

Nun leiten wir oben und unten einzeln ab und erhalten für alle $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)} \\ &\underset{„\frac{0}{0}“,\ \text{l'H}}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\sin(\beta x)\cdot\cos(\beta x)\cdot\beta}{\cosh(x)} \\ &= \ldots\end{aligned}$$

Wenn wir uns für den Nenner den **Funktionswert** $\cosh(0)$ in Erinnerung rufen, sehen wir, dass tatsächlich einmaliges Ableiten gereicht hat und wir hier schon den Grenzwert bestimmen können.

Tun Sie das und geben Sie den Grenzwert ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden	
Antwort 1:	(-|\+)?0*0((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Einstellungen

Korrekt! *Unter der Annahme, dass der Grenzwert existiert,* erhalten wir für alle $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)} \\ &\underset{„\frac{0}{0}“,\ \text{l'H}}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\sin(\beta x)\cdot\cos(\beta x)\cdot\beta}{\cosh(x)} \\ &\underset{\text{GW-Sätze}}{=} \frac{2\cdot 0\cdot 1\cdot\beta}{1} = 0\end{aligned}$$

Der rechtsseitige Grenzwert existiert also tatsächlich.

Was können wir jetzt für die stetige Ergänzbarkeit von f_β an der Stelle 0 folgern? Schreiben Sie auf.

Inhaltsseite	
Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Nein, das war nicht korrekt.

Sie sollten aber den Grenzwert selbst bestimmen können. Schauen Sie sich dazu notfalls noch einmal die Werte **trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen** bei Null an.

Inhaltsseite	
Inhalt 1:	Zurück zur Frageseite
Sprung 1:	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

OK. Wie können Sie in

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)} \\ &= \ldots\end{aligned}$$

den Ausdruck so in Faktoren mit bekannten Grenzwerten aufteilen, dass man die Grenzwertsätze anwenden kann? Schreiben Sie auf.

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Einstellungen

Inhaltsseite	
Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Wir ziehen zunächst alle Faktoren auseinander und versuchen dann, diese so umzuformen, dass wir bei allen den Grenzwert für $x \downarrow 0$ erkennen. Das Problem liegt ja beim Faktor $\frac{1}{\sinh(x)}$. Wir können das durch Erweitern mit x und durch Benutzen bestimmter Grenzwerte lösen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \sin(\beta x)\cdot\sin(\beta x)\cdot\frac{1}{\sinh(x)} \\ &= \lim_{x\downarrow 0} \sin(\beta x)\cdot\frac{\sin(\beta x)}{x}\cdot\frac{x}{\sinh(x)} \\ &\underset{\text{für } \beta\neq 0}{=} \lim_{x\downarrow 0} \sin(\beta x)\cdot\beta\cdot\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}\cdot\frac{x}{\sinh(x)}\end{aligned}$$

Um dann den Faktor $\frac{\sin(\beta x)}{x}$ so umzuformen, dass der Grenzwert erkennbar ist, müssen wir ihn in der letzten Zeile noch mit β erweitern. Dadurch handeln wir uns aber eine Fallunterscheidung ein - den Fall $\beta = 0$ müssen wir separat behandeln.

Deshalb ist das Vorgehen hier nicht das sinnvollste. Wir erledigen es besser mit L'Hospital, dabei muss man wahrscheinlich nicht mit β erweitern, sodass man auch keine Fallunterscheidung dabei einhandelt.

Inhaltsseite	
Inhalt 1:	Zum Vorgehen mit L'Hospital
Sprung 1:	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert
Inhalt 2:	Ich möchte trotzdem das jetzige Verfahren zuende führen.
Sprung 2:	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einige Grenzwerte

Es gilt z.B. $\frac{\sinh y}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1,\ \frac{\sin y}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1,\ \frac{\arcsin y}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1$ etc.

Ebenso gilt bei den Kehrwerten $\frac{y}{\sinh y} \xrightarrow{y\to 0} 1,\ \frac{y}{\sin y} \xrightarrow{y\to 0} 1,\ \frac{y}{\arcsin y} \xrightarrow{y\to 0} 1$ etc.

Einige Grenzwerte

Einstellungen

Inhaltsseite	
Inhalt 1:	Zurück
Sprung 1:	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Ok. Zumindest für $\beta \neq 0$ konnten wir gerade schon umformen zu

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \sin(\beta x)\cdot\sin(\beta x)\cdot\frac{1}{\sinh(x)} \\ &= \lim_{x\downarrow 0} \sin(\beta x)\cdot\frac{\sin(\beta x)}{x}\cdot\frac{x}{\sinh(x)} \\ &\underset{\beta\neq 0}{=} \lim_{x\downarrow 0} \sin(\beta x)\cdot\beta\cdot\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}\cdot\frac{x}{\sinh(x)}.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie diesen Grenzwert, und überprüfen Sie, ob man auch für $\beta = 0$ den gleichen Grenzwert für $\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x)$ herausbekommt.

Falls es einen einheitlichen Grenzwert für alle $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, geben Sie diesen unten ins Eingabefeld ein. Ansonsten geben Sie das Zeichen '#' ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden	
Antwort 1:	(-|\+)?0*0((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Korrekt!

Für $\beta \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)} = \lim_{x\downarrow 0}\ \sin(\beta x)\cdot\sin(\beta x)\cdot\frac{1}{\sinh(x)} \\
&= \lim_{x\downarrow 0}\ \sin(\beta x)\cdot\frac{\sin(\beta x)}{x}\cdot\frac{x}{\sinh(x)} \\
&\underset{\beta\neq 0}{=} \lim_{x\downarrow 0}\ \underbrace{\sin(\beta x)}_{\underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow}0}\cdot\beta\cdot\underbrace{\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}}_{\underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow}1}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sinh(x)}}_{\underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow}1} \\
&\underset{\text{GW-Sätze}}{=} 0\cdot\beta\cdot 1\cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

Für $\beta = 0$ gilt sowieso

$$\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(0\cdot x)}{\sinh(x)} = \lim_{x\downarrow 0} 0 = 0.$$

Also gilt der rechtsseitige Grenzwert für alle $\beta \in \mathbb{R}$.

Was können wir jetzt für die stetige Ergänzbarkeit von f_β an der Stelle 0 folgern? Schreiben Sie auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Nein, das war nicht korrekt.

Das sollten Sie aber können! Vielleicht hilft es Ihnen, sich nochmal passende Grenzwerte anzuschauen.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zur Frageseite
Sprung 1:	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt - Rechtsseitiger Grenzwert

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt

Ist f_β stetig ergänzbar im Nullpunkt?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Ja.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt
Antwort 2 :	Nein.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt

Korrekt! Wir haben soeben nachgewiesen, dass

$$\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) = 0$$

für alle $\beta \in \mathbb{R}$ gilt. Da also die beiden Grenzwerte existieren und gleich sind, ist die Funktion f_β im Nullpunkt stetig ergänzbar!

Als stetige Ergänzung sei jetzt die Funktion $\widetilde{f_\beta}$ definiert mit

$$\widetilde{f_\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh^2(2x)}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \dfrac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)}, & x > 0. \end{cases}$$

Im zweiten Teil der Aufgabe geht es darum, herauszufinden, für welche β die Funktion $\widetilde{f_\beta}$ im Nullpunkt differenzierbar ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stetige Ergänzbarkeit im Nullpunkt

Nein!

Wir haben doch gerade nachgewiesen, dass

$$\lim_{x\uparrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) = 0$$

für alle $\beta \in \mathbb{R}$ gilt. Da also die beiden Grenzwerte existieren und gleich sind, ist die Funktion f_β im Nullpunkt stetig ergänzbar!

Als stetige Ergänzung sei jetzt die Funktion $\widetilde{f_\beta}$ definiert mit

$$\widetilde{f_\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh^2(2x)}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \dfrac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)}, & x > 0. \end{cases}$$

Im zweiten Teil der Aufgabe geht es darum, herauszufinden, für welche β die Funktion $\widetilde{f_\beta}$ im Nullpunkt differenzierbar ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Die Funktion $\widetilde{f_\beta}$ ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar, wenn dort der **Grenzwert des Differenzenquotienten**, die sogenannte **Ableitung**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x) - \widetilde{f_\beta}(0)}{x - 0}$$

existiert.

Dies ist äquivalent dazu, dass sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten bei $x = 0$ existieren und gleich sind:

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x) - \widetilde{f_\beta}(0)}{x - 0} \overset{?}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x) - \widetilde{f_\beta}(0)}{x - 0}$$

Meistens untersucht man die Differenzierbarkeit mit diesem letzteren Ansatz.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzenquotient von links

Berechnen Sie also $\lim\limits_{x\uparrow 0}\dfrac{\widetilde{f_\beta}(x) - \widetilde{f_\beta}(0)}{x - 0}$.

Welches Verfahren haben Sie diesmal genutzt?

Inhaltsseite

Inhalt 1:	L'Hospital
Sprung 1:	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links
Inhalt 2:	Zerlegung in Faktoren, deren Grenzwerte bekannt sind
Sprung 2:	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Ja, da der Bruch in

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f}_\beta(x)-\widetilde{f}_\beta(0)}{x-0}=\lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}$$

wieder auf einen Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$" führt, kann man es tatsächlich auch hier mit L'Hospital versuchen.

Leiten Sie also wieder Zähler und Nenner separat ab, und klicken Sie erst dann weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Unter Voraussetzung der Existenz des Grenzwertes erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f}_\beta(x)-\widetilde{f}_\beta(0)}{x-0} &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}\\ &\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\uparrow 0}\frac{4\sinh(2x)\cosh(2x)}{2x}.\end{aligned}$$

Nach dem ersten Ableiten bekommt man also wieder einen Grenzwertausdruck der Form „$\frac{0}{0}$". Ist es erfolgversprechend, jetzt weiter Zähler und Nenner abzuleiten? *Vermutlich ja!* Denn wir sehen, dass nach einem weiteren Ableiten im Nenner nur noch eine konstante 2 steht. Wir haben dann also keine störende 0 mehr unten im Grenzwertausdruck.

Rechnen Sie weiter und bestimmen Sie so den Grenzwert. Geben Sie diesen ins Eingabefeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(\+)?0*4((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Sprung Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Korrekt! Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f}_\beta(x)-\widetilde{f}_\beta(0)}{x-0} &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}\\ &\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\uparrow 0}\frac{4\sinh(2x)\cosh(2x)}{2x}\\ &\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\uparrow 0}\frac{4\left(2\cosh^2(2x)+2\sinh^2(2x)\right)}{2}\\ &\underset{\text{GW-Sätze}}{=} \frac{4\cdot(2\cdot 1+2\cdot 0)}{2}=\frac{8}{2}=4.\end{aligned}$$

Da der Grenzwert am Ende existiert, erhalten wir mit mehrfacher Anwendung von L'Hospital die Gültigkeit dieser Rechnung.

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist damit bestimmt, wir machen weiter mit dem rechtsseitigen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Nein, das war nicht korrekt.

Mit einem weiteren Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f}_\beta(x)-\widetilde{f}_\beta(0)}{x-0} &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}\\ &\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\uparrow 0}\frac{4\sinh(2x)\cosh(2x)}{2x}\\ &\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\uparrow 0}\frac{4\left(2\cosh^2(2x)+2\sinh^2(2x)\right)}{2}.\end{aligned}$$

Jetzt sollten Sie den Grenzwert aber bestimmen können! Schauen Sie sich notfalls nochmal die Werte der Hyperbelfunktionen an. Erst wenn Sie den Grenzwert berechnet haben, klicken Sie weiter.

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f}_\beta(x)-\widetilde{f}_\beta(0)}{x-0} &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}\\ &\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\uparrow 0}\frac{4\sinh(2x)\cosh(2x)}{2x}\\ &\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\uparrow 0}\frac{4\left(2\cosh^2(2x)+2\sinh^2(2x)\right)}{2}\\ &\underset{\text{GW-Sätze}}{=} \frac{4\cdot(2\cdot 1+2\cdot 0)}{2}=\frac{8}{2}=4.\end{aligned}$$

Da der Grenzwert am Ende existiert, erhalten wir mit mehrfacher Anwendung von L'Hospital die Gültigkeit dieser Rechnung.

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist damit bestimmt, wir machen weiter mit dem rechtsseitigen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Ja, man kann beim Term $\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}=\frac{\sinh(2x)}{x}\cdot\frac{\sinh(2x)}{x}$ - der für x gegen 0 auch wieder zu einem Grenzwertausdruck der Form „$\frac{0}{0}$" führt - auf die Idee kommen, zweifach den Grenzwert $\frac{\sinh y}{y}\xrightarrow{y\to 0}1$ zu nutzen. Die Form ist ja schon sehr ähnlich.

Um diesen Hilfsgrenzwert nutzen zu können, muss man nur noch wenig umformen. Tun Sie das, bestimmen Sie damit den obigen Grenzwert, und geben Sie diesen ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (\+)?0*4((,|\.)0*)?

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Korrekt! Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f}_\beta(x)-\widetilde{f}_\beta(0)}{x-0} &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh(2x)}{x}\cdot\frac{\sinh(2x)}{x}\\ &= \lim_{x\uparrow 0} 2\cdot\underbrace{\frac{\sinh(2x)}{2x}}_{\to 1}\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{\sinh(2x)}{2x}}_{\to 1}\\ &\underset{\text{GW-Sätze}}{=} 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1=4.\end{aligned}$$

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist damit bestimmt, wir machen weiter mit dem rechtsseitigen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Nein, das war nicht richtig. Wir gehen es etwas kleinschrittiger durch.

Zunächst formen wir um zu

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0} &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh(2x)}{x}\cdot\frac{\sinh(2x)}{x}\\ &= \lim_{x\uparrow 0} 2\cdot\frac{\sinh(2x)}{2x}\cdot 2\cdot\frac{\sinh(2x)}{2x}.\end{aligned}$$

Wenden Sie hier jetzt $\frac{\sinh y}{y}\xrightarrow{y\to 0} 1$ an und bestimmen Sie damit den Grenzwert. Erst dann klicken Sie weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von links

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0} &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh^2(2x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sinh(2x)}{x}\cdot\frac{\sinh(2x)}{x}\\ &= \lim_{x\uparrow 0} 2\cdot\underbrace{\frac{\sinh(2x)}{2x}}_{\to 1}\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{\sinh(2x)}{2x}}_{\to 1}\\ &\underset{\text{GW-Sätze}}{=} 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 4.\end{aligned}$$

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist damit bestimmt, wir machen weiter mit dem rechtsseitigen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Differenzenquotient von rechts

Wir bestimmen jetzt noch $\lim_{x\downarrow 0}\frac{\tilde{f}_\beta(x)-\tilde{f}_\beta(0)}{x-0}$. Rechnen Sie selbst.

Wie sind Sie vorgegangen?

Inhaltsseite

Inhalt 1: L'Hospital

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Inhalt 2: Zerlegung in Faktoren, deren Grenzwerte bekannt sind

Sprung 2: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Gut, benutzen wir L'Hospital.

Wir setzen also wieder die Existenz des Grenzwerts voraus und erhalten beim ersten Mal separaten Ableitens von Zähler und Nenner für $\beta\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0} &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(\beta x)}{x\cdot\sinh(x)}\\ &\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{2\sin(\beta x)\cos(\beta x)\cdot\beta}{\sinh(x)+x\cosh(x)}\\ &= \dots\end{aligned}$$

Der letzte Bruch führt immer noch auf einen Grenzwertausdruck der Form "$\frac{0}{0}$". Wir müssen also nochmals separat Zähler und Nenner ableiten. Tun Sie das und bestimmen Sie den Grenzwert. Erst dann klicken Sie weiter.

(Wir können übrigens schon erkennen, dass wir mit einem weiteren Mal Ableiten wahrscheinlich fertig sind: Im Nenner haben wir den einzelnen Summanden $\sinh(x)$. Abgeleitet ergibt das den Summanden $\sinh'(x)=\cosh(x)$, und der geht für $x\to 0$ gegen 1. Sofern uns nicht ein anderer Summand in die Quere kommt, haben wir dann also im Nenner keinen 0-Grenzwert mehr stehen.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Insgesamt bekommen wir für $\beta\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0} &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(\beta x)}{x\cdot\sinh(x)}\\ &\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{2\sin(\beta x)\cos(\beta x)\cdot\beta}{\sinh(x)+x\cosh(x)}\\ &\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{", l'H}}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{2\beta\left(\beta\cos^2(\beta x)-\beta\sin^2(\beta x)\right)}{2\cosh(x)+x\sinh(x)}\\ &\underset{\text{GW-Sätze}}{=} \frac{2\beta\cdot(\beta\cdot 1-\beta\cdot 0)}{2\cdot 1+0\cdot 0} = \beta^2.\end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Parameter bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Okay, Sie wollen es wieder mit Hilfsgrenzwerten und passender Zerlegung versuchen.

Ihnen sollte aber auffallen, dass man bei $\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(\beta x)}{x\cdot\sinh(x)}$ wieder mit β erweitern muss, so wie zuvor beim rechtsseitigen Grenzwert zur Stetigkeit. Dazu muss man dann auch wieder eine Fallunterscheidung in $\beta\neq 0$ sowie $\beta=0$ vornehmen!

Das ist aber zusätzliche Arbeit. Mit L'Hospital haben wir diese Arbeit wahrscheinlich nicht, da man dabei meistens den Bruch nicht noch erweitern muss. Es ist deshalb zu empfehlen, hier mit L'Hospital zu arbeiten.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zum Vorgehen mit L'Hospital

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Inhalt 2: Ich möchte trotzdem das jetzige Verfahren zuende führen.

Sprung 2: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Einstellungen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Zuerst für $\beta\neq 0$, dafür erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0} &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(\beta x)}{x\cdot\sinh(x)}\\ &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin(\beta x)}{x}\cdot\frac{\sin(\beta x)}{\sinh(x)}\\ &\underset{\beta\neq 0,\ x\neq 0}{=} \lim_{x\downarrow 0}\beta\cdot\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}\cdot\beta\cdot\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}\cdot\frac{x}{\sinh(x)}\\ &= \dots\end{aligned}$$

Bestimmen Sie jetzt den Grenzwert - und bestimmen Sie auch, ob im Fall $\beta=0$ der Grenzwert der gleiche ist. Erst danach klicken Sie weiter!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Für $\beta\neq 0$ bekommen wir den Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0} &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(\beta x)}{x\cdot\sinh(x)}\\ &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin(\beta x)}{x}\cdot\frac{\sin(\beta x)}{\sinh(x)}\\ &\underset{\beta\neq 0,\ x\neq 0}{=} \lim_{x\downarrow 0}\beta\cdot\underbrace{\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}}_{\to 1}\cdot\beta\cdot\underbrace{\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sinh(x)}}_{\to\frac{1}{1}=1}\\ &\underset{\text{GW-Sätze}}{=} \beta\cdot 1\cdot\beta\cdot 1\cdot 1=\beta^2.\end{aligned}$$

Außerdem müssen wir uns noch den Grenzwert im Fall $\beta=0$ ansehen. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0} &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(\beta x)}{x\cdot\sinh(x)} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{0^2}{x\cdot\sinh(x)}\\ &= \lim_{x\downarrow 0} 0 = 0(=\beta^2).\end{aligned}$$

Wir können also kombinieren: Für alle $\beta\in\mathbb{R}$ ist $\lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^2(\beta x)}{x\cdot\sinh(x)}=\beta^2$.

Inhaltsseite

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Differenzenquotient von rechts

Einstellungen

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Parameter bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Parameter bestimmen

Soeben haben wir den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten bestimmt, Damit können wir die Frage nach der Differenzierbarkeit beantworten!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Wir haben eben gezeigt:

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}=4 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}=\beta^2$$

Bestimmen Sie damit jetzt alle $\beta\in\mathbb{R}$, für die die Funktion $\widetilde{f_\beta}$ im Nullpunkt differenzierbar ist. Geben Sie diese Werte durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld, von klein nach groß geordnet.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	-0*2((\.|,)0*)?;(\+)?0*2((\.|,)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen
Antwort 2 :	(\+)?0*2((\.|,)0*)?
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen
Antwort 3 :	.*
Feedback 3	
Bewertung	0

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Einstellungen

Sprung Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Korrekt!

$\tilde{f}_\beta$ ist an der Stelle $x=0$ differenzierbar, falls

$$\begin{aligned} & \lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}\\ \Leftrightarrow\quad & 4=\beta^2\\ \Leftrightarrow\quad & \beta=-2 \text{ oder } \beta=2. \end{aligned}$$

Für $\beta\in\{-2,2\}$ ist $\widetilde{f_\beta}$ also im Nullpunkt differenzierbar, für alle anderen β nicht.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Nein, das war nicht korrekt.

Sie haben vermutlich beim Wurzelziehen nicht richtig aufgepaßt. Für $x\in\mathbb{R}$ und eine echt-positive Zahl $p\in\mathbb{R}_{>0}$ gilt aber

$x^2=p \quad\Leftrightarrow\quad x=\sqrt{p}$ oder $x=-\sqrt{p}$.

Beachten Sie das und rechnen Sie noch einmal alle $\beta\in\mathbb{R}$ aus, für welche die Funktion $\widetilde{f_\beta}$ differenzierbar ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Einstellungen

Man erhält:

$\tilde{f}_\beta$ ist an der Stelle $x=0$ differenzierbar, falls

$$\begin{aligned} & \lim_{x\uparrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}\\ \Leftrightarrow\quad & 4=\beta^2\\ \Leftrightarrow\quad & \beta=-2 \text{ oder } \beta=2. \end{aligned}$$

Für $\beta\in\{-2,2\}$ ist $\widetilde{f_\beta}$ also im Nullpunkt differenzierbar, für alle anderen β nicht.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Ergebniszusammenfassung

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Nein, das war nicht korrekt.

Diese Rechnung ist so fundamental, dass Sie sie **unbedingt** beherrschen müssen! Deshalb geht es hier wieder zurück zur Frageseite.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück

Sprung 1: Differenzierbarkeit im Nullpunkt - Parameter bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Zusammenfassung der Ergebnisse

Einstellungen

Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass die durch

$$f_\beta(x)=\begin{cases}\dfrac{\sinh^2(2x)}{x}, & x<0\\[2ex] \dfrac{\sin^2(\beta x)}{\sinh(x)}, & x>0\end{cases}$$

gegebene Funktion f_β im Nullpunkt für jedes $\beta\in\mathbb{R}$ stetig ergänzbar ist.

Die stetig ergänzte Funktion $\widetilde{f_\beta}$ ist im Nullpunkt außerdem differenzierbar für $\beta\in\{-2,2\}$.

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ende der Aufgabe!

Sprung 1: Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

BSA zur Partialbruchzerlegung

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ▶ 17ws-02656 ▶ Lange eÜbungen ▶ Aufgabe zur Partialbruchzerlegung ▶ Bearbeiten ▶ Erweitert ▶ Bearbeiten

Aufgabe zur Partialbruchzerlegung

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Wichtig"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Einstellungen

Vorbemerkung

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung lautet wie folgt:

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung (PBZ) der gebrochenrationalen Funktion

$$R(x) = \frac{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Aufgabe werden Sie im Folgenden Schritt für Schritt lösen.

Der Term mag kompliziert aussehen; tatsächlich ist er schwieriger und langwieriger als in vielen Übungs- oder Prüfungs-Aufgaben. Allerdings können Sie damit gut das PBZ-Prinzip üben, und wir werden sehen, dass man auch solche großen Terme mit etwas Fleiß problemlos in den Griff kriegt. PBZ-Aufgaben kann man fast immer rein nach Schema lösen, es sind also meist "dankbare" Aufgaben.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Wie man bei einer PBZ vorgeht

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Wie man bei einer PBZ vorgeht

Wir machen uns noch einmal klar, was eine PBZ ist und wie man dabei vorgeht. Zuerst, was eine PBZ grob gesagt ist:

Eine **Partialbruchzerlegung** einer reellen rationalen Funktion $R(x)$ ist eine andere Darstellung von $R(x)$, nämlich eine Darstellung als Summe von einer Polynomfunktion $P(x)$ sowie von Brüchen der Form $\frac{A_i}{(x-u)^i}$ und $\frac{B_j x + C_j}{(x^2 + vx + w)^j}$. Dabei ist der quadratische Ausdruck in der letzteren Form irreduzibel. Das sind die sogenannten Partialbrüche.

Die Darstellung als eine solche Summe einfacher Brüche kann z.B. beim Integrieren rationaler Funktionen hilfreich sein, aber auch beim Lösen bestimmter Differentialgleichungen und bei anderen Anwendungen.

Inhaltsseite

Wie man bei einer PBZ vorgeht

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Wie man bei einer PBZ vorgeht

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Wie man bei einer PBZ vorgeht

Einstellungen

Wie man bei einer PBZ vorgeht

Wie sind im Genauen die Schritte für eine Partialbruchzerlegung einer reellen rationalen Funktion $R(x)$ =

1. **Kleinerer Grad im Zähler:**
   Zuerst überprüft man, ob das Zählerpolynom $Z(x)$ einen echt kleineren Grad als das Nennerpolyno

   Falls ja:
   Dann muss man in diesem Schritt nichts machen. Man kann direkt mit der eigentlichen Partialbruch $\frac{Z(x)}{N(x)}$ anfangen. Zur Einheitlichkeit setzen wir noch $P(x) := 0,\ Q(x) := Z(x)$. Weiter zu Schri

   Falls nein:
   Bestimme z.B. durch Polynomdivision Polynome P und Q mit $Z = P \cdot N + Q,\ \operatorname{grad}(Q) <$ gra
   $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{P(x)N(x) + Q(x)}{N(x)} = P(x) + \frac{Q(x)}{N(x)}$ und wir machen die eigentliche Partia
   auf $\frac{Q(x)}{N(x)}$.

2. **Nenner vollständig faktorisieren:**
   Nun haben wir eine rationale Funktion $\frac{Q(x)}{N(x)}$, bei der der obere Grad kleiner als der untere ist. Fall
   Nennerpolynom $N(x)$ noch nicht faktorisiert ist, muss es jetzt vollständig in irreduzible Faktoren fal

3. **Partialbrüche aufstellen:**
   Wir haben

$$\begin{aligned} R(x) &= P(x) + \frac{Q(x)}{N(x)} \\ &\underset{\substack{\text{Nenner}\\\text{vollständig}\\\text{faktorisiert}}}{=} P(x) + \frac{Q(x)}{(x-u_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-u_m)^{r_m} \cdot (x^2+v_1x+w_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 - \end{aligned}$$

   Beachte: Wir wollen im Nenner keine Vorfaktoren $\neq 1$. Falls es welche gibt, packen wir diese als K
   ins Zählerpolynom $Q(x)$.

   Nun hat $\frac{Q(x)}{N(x)}$ eine eindeutige Darstellung als Summe von Partialbrüchen:

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{N(x)} = \quad & \frac{A_{11}}{(x-u_1)^1} + \ldots + \frac{A_{1r_1}}{(x-u_1)^{r_1}} \quad + \quad \ldots \quad + \quad \frac{A_{m1}}{(x-u_m)^1} + \ldots + \frac{}{(x -} \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+v_1x+w_1)^1} + \ldots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2+v_1x+w_1)^{s_1}} \quad + \quad \ldots \\ & + \frac{B_{n1}x + C_{n1}}{(x^2+v_nx+w_n)^1} + \ldots + \frac{B_{ns_n}x + C_{ns_n}}{(x^2+v_nx+w_n)^{s_n}} \end{aligned}$$

   Jeder Faktor $(x-u_i)^{r_i}$ des Nennerpolynoms $N(x)$ bekommt also die Summanden
   $\frac{A_{i1}}{(x-u_i)^1} + \ldots + \frac{A_{ir_i}}{(x-u_i)^{r_i}}$, insgesamt r_i Stück.
   Genauso bekommt jeder Faktor $\left(x^2 + v_jx + w_j\right)^{s_j}$ von $N(x)$ die Summanden

Wie man bei einer PBZ vorgeht

$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2+v_jx+w_j)^1} + \ldots + \frac{B_{js_j}x + C_{js_j}}{(x^2+v_jx+w_j)^{s_j}}$, insgesamt s_j Stück.

4. **Werte der Unbekannten herausfinden:**
Wir multiplizieren die obige Gleichung auf beiden Seiten mit $N(x)$. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(x) = \;& A_{11}\cdot N(x):(x-u_1)^1 + \ldots + A_{1r_1}\cdot N(x):(x-u_1)^{r_1} \\ &+ \ldots \\ &+ A_{m1}\cdot N(x):(x-u_m)^1 + \ldots + A_{mr_m}\cdot N(x):(x-u_m)^{r_m} \\ &+ (B_{11}x+C_{11})\cdot N(x):(x^2+v_1x+w_1)^1 + \ldots \\ &+ (B_{1s_1}x+C_{1s_1})\cdot N(x):(x^2+v_1x+w_1)^{s_1} \\ &+ \ldots \\ &+ (B_{n1}x+C_{n1})\cdot N(x):(x^2+v_nx+w_n)^1 + \ldots \\ &+ (B_{ns_n}x+C_{ns_n})\cdot N(x):(x^2+v_nx+w_n)^{s_n}. \end{aligned}$$

und die Summe auf der rechten Seite ist selbst ein Polynom! Damit kann man jetzt die Werte für un Unbekannten A_{ik}, B_{jl}, C_{jl} herausfinden. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die wichtigster **Koeffizientenvergleich** und **Einsetzen verschiedener x-Stellen**.

Falls es für Sie mit den vielen Indizes und Parametern sehr kompliziert aussieht: Im Folgenden machen v für unsere konkret gegebene rationale Funktion. Wir werden sehen, dass das Prinzip eigentlich sehr einfa

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler

Wir fangen an mit dem ersten Schritt:

Es ist zu überprüfen, ob in unserer rationalen Funktion
$R(x) = \frac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4}{(x^2+2x+1)(x^2+1)^2} =: \frac{Z(x)}{N(x)}$ gilt
$\operatorname{grad}(Z(x)) < \operatorname{grad}(N(x))$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Kleinerer Grad im Zähler

Was gilt für $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4}{(x^2+2x+1)(x^2+1)^2}$?

Multiple-Choice

Antwort 1:	$\operatorname{grad}(Z(x)) = \operatorname{grad}(N(x))$
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren
Antwort 2 :	$\operatorname{grad}(Z(x)) < \operatorname{grad}(N(x))$
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Kleinerer Grad im Zähler
Antwort 3 :	$\operatorname{grad}(Z(x)) > \operatorname{grad}(N(x))$
Feedback 3	
Bewertung	0
Sprung	Kleinerer Grad im Zähler

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler

Nein, das war nicht korrekt.

Bedenken Sie für den Grad von Polynom-Produkten, dass
$\operatorname{grad}(P_1(x)\cdot P_2(x)) = \operatorname{grad}(P_1(x)) + \operatorname{grad}(P_2(x))$ gilt. Man muss zum Bestimmen des Grades den Term nicht erst ausmultiplizieren.

Der Grund dafür lässt sich leicht erkennen. Die höchsten x-Potenzen der einzelnen Faktoren ergeben zusammenmultipliziert gerade die höchste x-Potenz des ausmultiplizierten Gesamt-Polynoms, und alle anderen Summanden haben eine niedrigere x-Potenz. Ein Beispiel ist

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\left((x^3+2x^2)(x^4-3x+4)^2\right) &= \operatorname{grad}\left((x^3+2x^2)(x^4-3x+4)(x^4-3x+4)\right) \\ &= \operatorname{grad}(x^3\cdot x^4\cdot x^4+\ldots) \\ &= 3+4+4 = 11. \end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zur Frage

Einstellungen

Kleinerer Grad im Zähler

Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Korrekt.

Zähler und Nenner von $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4}{(x^2+2x+1)(x^2+1)^2}$ haben beide den Grad 6. Bevor wir die eigentliche Partialbruchzerlegung anwenden können, müssen wir zuerst R schreiben als $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = P(x) + \frac{Q(x)}{N(x)}$ mit $\operatorname{grad}(Q) < \operatorname{grad}(N)$.

Es führt also kein Weg daran vorbei, wir müssen den Nenner $N(x) = (x^2+2x+1)(x^2+1)^2$ ausmultiplizieren. Tun Sie das.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Durch Ausmultiplizieren erhält man ein Polynom 6. Grades:
$N(x) = (x^2+2x+1)(x^2+1)^2 = x^6 + \ldots$

Geben Sie die Koeffizienten für jede x-Potenz an:

ZuordnungDie erste Antwort sollte zur Seite mit der Antwort "richtig" verzweigen

Bewertung bei richtiger Antwort :	1
Sprung bei richtiger Antwort :	Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren
Bewertung bei falscher Antwort :	0
Sprung bei falscher Antwort :	Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren
Antwort 1 :	x^6
Zugeordnete Antwort 1 :	+1

Einstellungen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Antwort 2 :	x^5
Zugeordnete Antwort 2 :	+2
Antwort 3 :	x^4
Zugeordnete Antwort 3 :	+3
Antwort 4 :	x^3
Zugeordnete Antwort 4 :	+4
Antwort 5 :	x^2
Zugeordnete Antwort 5 :	+3
Antwort 6 :	x^1
Zugeordnete Antwort 6 :	+2
Antwort 7 :	x^0
Zugeordnete Antwort 7 :	+1

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Das war nicht richtig. Sie müssen aber *unbedingt* einfache Terme ausmultiplizieren können!

Man hat zunächst $\begin{aligned} N(x) &= (x^2+2x+1)(x^2+1)^2 = (x^2+2x+1)(x^4+2x^2+1) \\ &= x^6+2x^4+x^2+\ldots \end{aligned}$
und benutzt dabei das Distributivgesetz. Multiplizieren Sie also jetzt auch den Rest vollständig aus..

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Einstellungen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Insgesamt ist

$$\begin{aligned} N(x) &= \left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+1\right)^2 = \left(x^2+2x+1\right)\left(x^4+2x^2+1\right) \\ &= \left[x^6+2x^4+x^2\right]+\left[2x^5+4x^3+2x\right]+\left[x^4+2x^2+1\right] \\ &= x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1. \end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Korrekt! Es ist

$$\begin{aligned} N(x) &= \left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+1\right)^2 = \left(x^2+2x+1\right)\left(x^4+2x^2+1\right) \\ &= \left[x^6+2x^4+x^2\right]+\left[2x^5+4x^3+2x\right]+\left[x^4+2x^2+1\right] \\ &= x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1. \end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Mit dem ausmultiplizierten Nenner müssen wir jetzt eine Darstellung

$$R(x) = \frac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1} = P(x) + \frac{Q(x)}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x}$$

bestimmen. Standardmäßig geht das immer per **Polynomdivision**, und der dabei entstehende Rest liefert uns das Q. Man kann es hier aber auch mit genauem Hinsehen lösen - Zähler und Nenner sind sic auffällig ähnlich.

Wie machen Sie es?

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Mit Polynomdivision
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Einstellungen

Kleinerer Grad im Zähler - Nenner ausmultiplizieren

Inhalt 2:	Mit genauem Hinsehen
Sprung 2:	Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Also gut, führen Sie die Polynomdivision

$Z(x) : N(x) = \left(x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4\right) : \left(x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x\right.$

durch.

Sie erhalten dadurch P, Q mit $\dfrac{Z(x)}{N(x)} = P(x) + \dfrac{Q(x)}{N(x)}$ und $\mathrm{grad}(Q) < \mathrm{grad}(N)$.

Geben Sie die Terme von $P(x)$ und $Q(x)$ ins Eingabefeld ein, durch Semikolon getrennt, zuerst P und d Q.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	`((\+)?0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*2((,|\.)0*)?(\*)?(x|X)\+0*3((,|\.)0*)?)|((\+)?0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*3((,|\.)0*)?\+0*2((,|\.)0*)?(\*)?(x|X))`
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Einstellungen

Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Korrekt! Die Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{l} \left(x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4\right) \\ -\underline{\left(x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1\right)} \\ \hfill 2x+3 \end{array} : \left(x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1\right) = 1$$

mit Rest $2x+3$.

$$\Rightarrow \quad R(x) = \frac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1} = 1 + \frac{2x+3}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2}$$

und da beim Summanden rechts der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist, können wir uns diesen jet herausgreifen und darauf endlich mit der eigentlichen Partialbruchzerlegung anfangen! Das machen wir i folgenden Schritten.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Nenner vollständig faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Das war nicht richtig. So etwas grundlegendes wie Polynomdivision müssen Sie aber unbedingt beherrschen!

Schlagen Sie nach, wie das Verfahren der schriftlichen **Polynomdivision** durchgeführt wird (etwa hier), und rechnen Sie dann noch einmal.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zur Frage
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Einstellungen

Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Also gut, für $\dfrac{Z(x)}{N(x)} = \dfrac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}$ wollen Sie durch genaues Hinsehen P, Q bestimmen mit $\dfrac{Z(x)}{N(x)} = P(x) + \dfrac{Q(x)}{N(x)}$ und $\mathrm{grad}(Q) < \mathrm{grad}(N)$.

Geben Sie die Terme von $P(x)$ und $Q(x)$ ins Eingabefeld ein, durch Semikolon getrennt, zuerst P und dann Q.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	`((\+)?0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*2((,|\.)0*)?(\*)?(x|X)\+0*3((,|\.)0*)?)|((\+)?0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*3((,|\.)0*)?\+0*2((,|\.)0*)?(\*)?(x|X))`
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Einstellungen

Korrekt!

Man sieht recht schnell

$$\begin{aligned} Z(x) &= x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4\\ &= \left[x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1\right]+2x+3\,.\\ &= N(x)+2x+3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{N(x)+2x+3}{N(x)} = 1+\frac{2x+3}{N(x)} = 1+\frac{2x+3}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}$$

und da beim Summanden rechts der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist, können wir uns diesen jetzt herausgreifen und darauf endlich mit der eigentlichen Partialbruchzerlegung anfangen! Das machen wir in den folgenden Schritten.

(Bedenken Sie, dass dieses Verfahren mit dem "genauen Hinsehen" hier recht einfach klappt, da Zähler und Nenner so extrem ähnlich waren. Sonst geht das meist nicht so leicht. Im Allgemeinen ist es sicherer, die Polynomdivision zu nutzen.)

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Nenner vollständig faktorisieren
Inhalt 2:	Nochmal zum Vorgehen mit Polynomdivision
Sprung 2:	Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Nein, das war nicht richtig. Sie sollten diesen Schritt aber auf jeden Fall selbst durchführen können!

Vielleicht sehen Sie sich stattdessen lieber das Vorgehen mit **schriftlicher Polynomdivision** an - das führt hier sicherer zum Ziel.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zum Vorgehen mit Polynomdivision
Sprung 1:	Kleinerer Grad im Zähler - Polynomdivision

Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Einstellungen

Inhalt 2:	Zurück zur Frage
Sprung 2:	Kleinerer Grad im Zähler - Genaues Hinsehen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Nenner vollständig faktorisieren

Wir haben die Darstellung

$$\begin{aligned} R(x) &= 1+\frac{2x+3}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}\\ &= 1+\frac{2x+3}{(x^2+2x+1)\,(x^2+1)^2} =: 1+\widetilde{R}(x) \end{aligned}$$

gefunden - und da beim Summanden $\widetilde{R}(x)$ der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist, können wir darauf jetzt unsere eigentliche Partialbruchzerlegung starten.

Erster Schritt ist dafür die vollständige Faktorisierung des Nenners - vergisst man nämlich diesen Schritt, kann man nicht die korrekten Partialbrüche zu den Faktoren des Nenners aufstellen!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Nenner vollständig faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Nenner vollständig faktorisieren

Ist der Nenner von $\widetilde{R}(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+2x+1)\,(x^2+1)^2}$ bereits vollständig in irreduzible Faktoren faktorisiert oder muss er noch weiter faktorisiert werden?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Man muss noch weiter faktorisieren.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Nenner vollständig faktorisieren
Antwort 2 :	Der Nenner ist schon vollständig faktorisiert.
Feedback 2	

Nenner vollständig faktorisieren

Einstellungen

Bewertung	0
Sprung	Nenner vollständig faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Nenner vollständig faktorisieren

Korrekt!

Der Nenner von $\dfrac{2x+3}{(x^2+2x+1)\,(x^2+1)^2}$ ist noch nicht vollständig faktorisiert:

- Der Faktor $\left(x^2+2x+1\right)$ kann mit der 1. binomischen Formel noch faktorisiert werden zu $(x+1)^2$.
- Beim anderen quadratischen Faktor $\left(x^2+1\right)$ sieht man allerdings leicht, dass dieser für alle reellen x nur echt-positive Werte annimmt, also keine Nullstellen hat und damit irreduzibler quadratischer Faktor ist.

Es ist also

$$\widetilde{R}(x) = \frac{2x+3}{(x^2+2x+1)\,(x^2+1)^2} = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,.$$

Der Bruch ist jetzt bereit für das Aufstellen der Partialbrüche. Das machen wir im nächsten Schritt.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Partialbrüche aufstellen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Nenner vollständig faktorisieren

Nein, das war nicht korrekt. Sie müssen sich unbedingt noch einmal die **binomischen Formeln** ansehen und üben, um damit umformbare Terme schnell und sicher erkennen zu können.

Tatsächlich ist der der Nenner von $\dfrac{2x+3}{(x^2+2x+1)\,(x^2+1)^2}$ noch nicht vollständig faktorisiert.

Geben Sie an, welcher der beiden verschiedenen Faktoren mithilfe einer binomischen Formel noch weiter faktorisiert werden kann: Der linke ($\left(x^2+2x+1\right)$) oder der rechte ($\left(x^2+1\right)^2$)?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Der linke

Nenner vollständig faktorisieren

Einstellungen

Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Nenner vollständig faktorisieren
Antwort 2 :	Der rechte
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Diese Seite

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Nenner vollständig faktorisieren

Nein, das war wieder nicht richtig - Sie müssen das aber beherrschen!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zur Frage
Sprung 1:	Nenner vollständig faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Nenner vollständig faktorisieren

Korrekt!

- Der Faktor $\left(x^2+2x+1\right)$ kann mit der 1. binomischen Formel noch faktorisiert werden zu $(x+1)^2$.
- Beim anderen quadratischen Faktor $\left(x^2+1\right)$ sieht man allerdings leicht, dass dieser für alle reellen x nur echt-positive Werte annimmt, also keine Nullstellen hat und damit irreduzibler quadratischer Faktor ist.

Es ist also

$$\widetilde{R}(x) = \frac{2x+3}{(x^2+2x+1)\,(x^2+1)^2} = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,.$$

Der Bruch ist jetzt bereit für das Aufstellen der Partialbrüche. Das machen wir im nächsten Schritt.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter

Einstellungen

Nenner vollständig faktorisieren

Sprung 1: Partialbrüche aufstellen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partialbrüche aufstellen

Wir haben $\widetilde{R}(x) = \dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ und wollen dafür jetzt die passenden Partialbrüche aufstellen.

Bei der Beschreibung der PBZ-Schritte am Anfang wurde erklärt, wie man dies macht:

- Jedes $\dfrac{\ldots}{\ldots(x-u)^n\ldots}$ (wobei n der maximale Exponent ist) bekommt die Summanden
$$\frac{A_1}{(x-u)^1} + \frac{A_2}{(x-u)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-u)^n}.$$
- Ebenso bekommt jedes irreduzible $\dfrac{\ldots}{\ldots(x^2+vx+w)^m\ldots}$ die Summanden
$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+vx+w)^1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+vx+w)^2} + \ldots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+vx+w)^m}$$
.

Stellen Sie also jetzt alle Partialbrüche für $\widetilde{R}(x)$ auf. Die Werte für die Unbekannten A_i, B_j, C_j kennen wir natürlich noch nicht, das gehen wir erst im darauffolgenden Schritt an.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partialbrüche aufstellen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partialbrüche aufstellen

Wieviele Partialbrüche haben Sie für $\widetilde{R}(x) = \dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ aufgestellt, und wieviele Unbekannte $A, B, C, \ldots$ haben Sie insgesamt?

Geben Sie das nacheinander durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein, zuerst die Anzahl der Partialbrüche, dann die Anzahl der Unbekannten.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Einstellungen

Partialbrüche aufstellen

Antwort 1: `(\+)?0*4((,|\.)0*)?;(\+)?0*6((,|\.)0*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Partialbrüche aufstellen

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Partialbrüche aufstellen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partialbrüche aufstellen

Korrekt!

Wir haben insgesamt die Zerlegung
$$\begin{aligned}\widetilde{R}(x) &= \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Die Unbekannten A, B, C, D, E, F müssen wir nun im nächsten Schritt bestimmen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partialbrüche aufstellen

Das war nicht richtig. Das Aufstellen der Partialbrüche ist aber ein wichtiger Schritt, den Sie unbedingt selbständig erledigen sollten!

Gehen Sie also möglichst zurück und versuchen es konzentriert noch einmal.

Nur falls Sie überhaupt nicht weiterkommen, klicken Sie hier auf "Weiter".

Inhaltsseite

Einstellungen

Partialbrüche aufstellen

Inhalt 1: Zurück zum Partialbruch-Schema

Sprung 1: Partialbrüche aufstellen

Inhalt 2: Weiter

Sprung 2: Partialbrüche aufstellen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partialbrüche aufstellen

Wir gehen jeden irreduziblen Faktor des Nenners von $\widetilde{R}(x) = \dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ durch:

- Unser erster irreduzibler Faktor ist $(x+1)$. Er hat den Exponenten 2 und bekommt deswegen die zwei Summanden $\dfrac{A}{x+1}$ und $\dfrac{B}{(x+1)^2}$.
Man beachte, wie der Exponent im Nenner von 1 bis 2 durchläuft.
Da der irreduzible Faktor **linear** ist, steht oben im Zähler jeweils nur eine einzelne Unbekannte A bzw. B.
- Unser zweiter irreduzibler Faktor ist (x^2+1). Auch er hat den Exponenten 2 und bekommt deshalb die zwei Summanden $\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ und $\dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$.
Wieder läuft der Exponent im Nenner von 1 bis 2 durch.
Da der irreduzible Faktor **quadratisch** ist, steht diesmal oben im Zähler jeweils ein linearer Term $Cx+D$ bzw. $Ex+F$.

Insgesamt erhalten wir also die Zerlegung
$$\begin{aligned}\widetilde{R}(x) &= \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Die Unbekannten A, B, C, D, E, F müssen wir nun im nächsten Schritt bestimmen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden

Einstellungen

Werte der Unbekannten herausfinden

Wir haben
$$\frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$
und wollen jetzt noch die Werte der Unbekannten bestimmen. Dies ist der letzte, aber auch arbeitsaufwändigste Schritt.

Als erstes multipliziert man die obige Gleichung mit dem Originalnenner $N(x) = (x+1)^2(x^2+1)^2$. Dadurch heben sich auf beiden Seiten der Gleichung alle Nenner weg, und man hat dort nur noch Polynome stehen.

Tun Sie das also!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden

Werte der Unbekannten herausfinden

Einstellungen

Es ist

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+3 = A\cdot(x+1)\left(x^2+1\right)^2 + B\cdot\left(x^2+1\right)^2 + (Cx+D)\cdot(x+1)^2\left(x^2+1\right) + (Ex+F)\cdot(x+1)^2$$

und wir haben am Ende links und rechts nur noch Polynome stehen (keine rationalen Funktionen mehr).

Um jetzt die Werte A, B, C, D, E, F zu bestimmen, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- **Koeffizientenvergleich:**
  Wenn man die rechte Seite komplett ausmultipliziert, hat man zu jeder x-Potenz den zugehörigen Ko ein Ausdruck mit A, B, C, D, E, F. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienter der linken Seite die konkreten Koeffizienten gegeben sind, können wir diese also mit den Ausdrücker gleichsetzen und erhalten ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung uns die Werte für A, B, C
- **x-Stellen einsetzen:**
  Alternativ kann man direkt in die obige Gleichung bis zu 6 (wegen unserer 6 Unbekannten) verschied einsetzen. Denn wenn die Polynome auf beiden Seiten gleich sein sollen, müssen insbesondere aucl beliebigen eingesetzten x-Stellen jeweils übereinstimmen. Dadurch erhält man ebenfalls ein lineares dessen Lösung uns die Werte für A, B, C, D, E, F liefert.
- **Gemischtes Vorgehen:**
  Man kann auch die beiden vorigen Methoden kombinieren. Üblicherweise setzt man dabei erst ein pa einige Unbekannte direkt zu bestimmen, um dann für die restlichen Unbekannten einen Koeffizienten Wir stellen dieses Vorgehen hier nicht dar.

Für welches der beiden ersten Vorgehen entscheiden Sie sich?

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Koeffizientenvergleich
Sprung 1:	Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich
Inhalt 2:	x-Stellen einsetzen
Sprung 2:	Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Also gut, Sie wollen in

$$2x+3 = A\cdot(x+1)\left(x^2+1\right)^2 + B\cdot\left(x^2+1\right)^2 + (Cx+D)\cdot(x+1)^2\left(x^2+1\right) + (Ex+F)\cdot(x+1)^2$$

zur Bestimmung von A, B, C, D, E, F einen Koeffizientenvergleich durchführen.

Bedenken Sie: Dazu müssen Sie als erstes die rechte Seite komplett ausmultiplizieren. Bei einem größeren Term wie hier - mit faktorenreichen Summanden wie $(Cx+D)\cdot(x+1)^2\left(x^2+1\right)$ - bedeutet das viel Rechenarbeit. Deshalb kann eventuell das Einsetzen verschiedener x-Stellen schneller zum Ergebnis führen. Falls Sie möchten, können Sie hier zu diesem Verfahren wechseln und probieren, ob es tatsächlich schneller geht.

Sofern Sie beim Koeffizientenvergleich bleiben: Multiplizieren Sie jetzt die rechte Seite der Gleichung komplett aus!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Man hat

$$\begin{aligned}
2x+3 = {} & A\cdot(x+1)\left(x^2+1\right)^2 + B\cdot\left(x^2+1\right)^2 \\
& + (Cx+D)\cdot(x+1)^2\left(x^2+1\right) + (Ex+F)\cdot(x+1)^2 \\
= {} & A\cdot(x+1)\left(x^4+2x^2+1\right) + B\cdot\left(x^4+2x^2+1\right) \\
& + (Cx+D)\cdot\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+1\right) + (Ex+F)\cdot\left(x^2+2x+1\right) \\
= {} & A\left(x^5+2x^3+x+x^4+2x^2+1\right) \\
& + B\left(x^4+2x^2+1\right) \\
& + (Cx+D)\left(x^4+2x^3+x^2+x^2+2x+1\right) \\
& + E\left(x^3+2x^2+x\right) \\
& + F\left(x^2+2x+1\right) \\
= {} & A\left(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1\right) \\
& + B\left(x^4+2x^2+1\right) \\
& + C\left(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x\right) \\
& + D\left(x^4+2x^3+2x^2+2x+1\right) \\
& + E\left(x^3+2x^2+x\right) \\
& + F\left(x^2+2x+1\right).
\end{aligned}$$

Sie sehen, man hat hier einen ordentlichen Batzen Rechenarbeit. Und auf der nächsten Seite geht es noch ein bisschen weiter!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Wir wollen ja letztlich die Koeffizienten vergleichen und müssen deshalb im letzten Schritt noch umformen zu

$$\begin{aligned}
2x+3 = {} & \ldots \\
= {} & A\left(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1\right) \\
& + B\left(x^4+2x^2+1\right) \\
& + C\left(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x\right) \\
& + D\left(x^4+2x^3+2x^2+2x+1\right) \\
& + E\left(x^3+2x^2+x\right) \\
& + F\left(x^2+2x+1\right) \\
= {} & (A+C)\,x^5 + (A+B+2C+D)\,x^4 + (\ldots)\,x^3 + (\ldots)\,x^2 + (\ldots)\,x^1 + (\ldots)\,x^0.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der x^i erhalten wir jeweils durch zweifache Anwendung des Distributivgesetzes. Führen Sie das für alle restlichen Koeffizienten durch und geben Sie die Ausdrücke in der Reihenfolge

Koeff. von x^3 **;** Koeff. von x^2 **;** Koeff. von x^1 **;** Koeff. von x^0

durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein. Verwenden Sie nur Großbuchstaben, ganze Zahlen und die Zeichen + bzw. -. Die Unbekannten sortieren Sie aufsteigend.

(Der Koeffizient von x^5 wäre in dieser Schreibweise "A+C", der von x^4 "A+B+2C+D".)

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	2A\+2C\+2D\+(1)?E;2A\+2B\+2C\+2D\+2E\+(1)?F;(1)?A\+(1)?C\+2D\+(1)?E\+2F;(1)?A\+(1)?B\+(1)?D\+(1)?F
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Korrekt! Es ist

$$
\begin{aligned}
2x+3 = \; & \ldots \\
= \; & A\left(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1\right) \\
& +B\left(x^4+2x^2+1\right) \\
& +C\left(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x\right) \\
& +D\left(x^4+2x^3+2x^2+2x+1\right) \\
& +E\left(x^3+2x^2+x\right) \\
& +F\left(x^2+2x+1\right) \\
= \; & (A+C)\,x^5+(A+B+2C+D)\,x^4+(2A+2C+2D+E)\,x^3 \\
& +(2A+2B+2C+2D+2E+F)\,x^2+(A+C+2D+E+2F)\,x+(A+B+
\end{aligned}
$$

Der Koeffizientenvergleich der x^i ganz am Anfang und ganz am Ende - die ja für Gleichheit übereinstimm - liefert uns nun folgendes lineares Gleichungssystem:

$$
\left[\begin{array}{rcl}
A+C & = & 0 \\
A+B+2C+D & = & 0 \\
2A+2C+2D+E & = & 0 \\
2A+2B+2C+2D+2E+F & = & 0 \\
A+C+2D+E+2F & = & 2 \\
A+B+D+F & = & 3
\end{array}\right]
$$

Wir müssen "nur" noch das Gleichungssystem lösen und haben dann die Partialbruchzerlegung komplett. Das machen wir im Folgenden.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Nein, das war nicht richtig. Überprüfen Sie genau Ihre Termumformungen und schauen Sie, wo Ihr Fehler

Es ist

$$
\begin{aligned}
2x+3 = \; & \ldots \\
= \; & A\left(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1\right) \\
& +B\left(x^4+2x^2+1\right) \\
& +C\left(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x\right) \\
& +D\left(x^4+2x^3+2x^2+2x+1\right) \\
& +E\left(x^3+2x^2+x\right) \\
& +F\left(x^2+2x+1\right) \\
= \; & (A+C)\,x^5+(A+B+2C+D)\,x^4+(2A+2C+2D+E)\,x^3 \\
& +(2A+2B+2C+2D+2E+F)\,x^2+(A+C+2D+E+2F)\,x+(A+B+
\end{aligned}
$$

Der Koeffizientenvergleich der x^i ganz am Anfang und ganz am Ende - die ja für Gleichheit übereinstimm - liefert uns nun folgendes lineares Gleichungssystem:

$$
\left[\begin{array}{rcl}
A+C & = & 0 \\
A+B+2C+D & = & 0 \\
2A+2C+2D+E & = & 0 \\
2A+2B+2C+2D+2E+F & = & 0 \\
A+C+2D+E+2F & = & 2 \\
A+B+D+F & = & 3
\end{array}\right]
$$

Wir müssen "nur" noch das Gleichungssystem lösen und haben dann die Partialbruchzerlegung komplett. Das machen wir im Folgenden.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Wir können das lineare Gleichungssystem

$$
\left[\begin{array}{rcl}
A+C & = & 0 \\
A+B+2C+D & = & 0 \\
2A+2C+2D+E & = & 0 \\
2A+2B+2C+2D+2E+F & = & 0 \\
A+C+2D+E+2F & = & 2 \\
A+B+D+F & = & 3
\end{array}\right]
$$

auf verschiedene Arten lösen. Die zwei typischsten sind:

- **Gauß-Algorithmus:**
  Man schreibt das LGS in Matrixform

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right)
$$

  und bringt es mit elementaren Zeilenumformungen auf Stufenform. Die Werte von A, B, C, D, E, F lassen sich dann ablesen.
- **Manuelles Lösen:**
  Man kann das LGS auch nur mit den grundlegenden Lösungsverfahren, die man aus der Schul-Mittelstufe kennt, lösen: Äquivalenzumformungen, Additionsverfahren, Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren.

Welches Verfahren wählen Sie?

Inhaltsseite

Inhalt 1: Gauß-Algorithmus

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Inhalt 2: Manuelles Lösen

Sprung 2: Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Also gut, Sie wollen das LGS

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right)
$$

mit dem Gauß-Agorithmus lösen.

Das ist eine gute Wahl. Man kann damit nämlich auch größere lineare Gleichungssysteme systematisch lösen, ohne wild herumprobieren zu müssen.
In der Schule haben Sie vermutlich nur LGS mit 3 Unbekannten gehabt - aber auch größere LGS so wie dieses hier lassen sich nach genau demselben Prinzip lösen. Setzen Sie sich einfach dran!

Lösen Sie also das LGS mit dem Gauß-Algorithmus. Sie bekommen dadurch die Werte für A, B, C, D, E, F.

Geben Sie diese Werte als Kommazahlen in der Reihenfolge

A ; B ; C ; D ; E ; F

durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (\+)?0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*0(,|\.)250*;-0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*0(,|\.)750*;-0*1(,|\.)50*;(\+)?0*1((,|\.)0*)?

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Sehr gut! Mit dem Gauß-Algorithmus löst man auf:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&2&1&0&0&0\\ 2&0&2&2&1&0&0\\ 2&2&2&2&2&1&0\\ 1&0&1&2&1&2&2\\ 1&1&0&1&0&1&3\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0\\ 0&2&0&2&2&1&0\\ 0&0&0&2&1&2&2\\ 0&1&-1&1&0&1&3\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&-2&0&2&1&0\\ 0&0&0&2&1&2&2\\ 0&0&-2&0&0&1&3\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&1&1\\ 0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac{3}{2}\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac{3}{2}\\ 0&0&0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&\frac{1}{4}\\ 0&0&1&0&0&0&-1\\ 0&0&0&1&0&0&\frac{3}{4}\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac{3}{2}\\ 0&0&0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

Daran kann man ablesen:

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -1, \quad D = \frac{3}{4}, \quad E = -\frac{3}{2}, \quad F = 1$$

Geben Sie damit jetzt noch die Partialbruchzerlegung unserer ursprünglichen Funktion $R(x)$ an!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Sprung 1: Partialbruchzerlegung vollständig bestimmt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Nein, das war nicht korrekt. Untersuchen Sie Ihre Rechnung auf Flüchtigkeits- und Rechenfehler und vergleichen Sie eventuell mit dem hier gezeigten Weg.

Man eliminiert zuerst alle Einträge unter der ersten Stufe ganz links:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&2&1&0&0&0\\ 2&0&2&2&1&0&0\\ 2&2&2&2&2&1&0\\ 1&0&1&2&1&2&2\\ 1&1&0&1&0&1&3\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0\\ 0&2&0&2&2&1&0\\ 0&0&0&2&1&2&2\\ 0&1&-1&1&0&1&3\end{array}\right)$$

Das gleiche macht man mit den weiteren Stufen, wobei man zwischendurch manchmal auch Zeilen vertauschen oder mit Zahlen $\neq 0$ multiplizieren muss:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&-2&0&2&1&0\\ 0&0&0&2&1&2&2\\ 0&0&-2&0&0&1&3\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&1&1\\ 0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac{3}{2}\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac{3}{2}\\ 0&0&0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

Schließlich eliminieren wir - von ganz unten anfangend - alle Einträge *über* den Stufen und erhalten:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&\frac{1}{4}\\ 0&0&1&0&0&0&-1\\ 0&0&0&1&0&0&\frac{3}{4}\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac{3}{2}\\ 0&0&0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

Daran kann man ablesen:

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -1, \quad D = \frac{3}{4}, \quad E = -\frac{3}{2}, \quad F = 1$$

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Geben Sie damit jetzt noch die Partialbruchzerlegung unserer ursprünglichen Funktion $R(x)$ an!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partialbruchzerlegung vollständig bestimmt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Also gut, Sie wollen das LGS

$$\left[\begin{array}{rcl} A + C &=& 0\\ A + B + 2C + D &=& 0\\ 2A + 2C + 2D + E &=& 0\\ 2A + 2B + 2C + 2D + 2E + F &=& 0\\ A + C + 2D + E + 2F &=& 2\\ A + B + D + F &=& 3\end{array}\right]$$

manuell mit Äquivalenzumformungen, Additionsverfahren, Einsetzungsverfahren & Gleichsetzungsverfahren lösen.

Das ist sicherlich möglich - man kann jedes LGS so lösen. Allerdings gibt es gerade bei einem größeren Gleichungssystem wie hier sehr viele Möglichkeiten, wie man vorgehen kann, und es wird sehr schnell sehr unübersichtlich. Man muss viel herumprobieren und zwischendurch eventuell "die Richtung ändern".

Lösen Sie also das LGS manuell. Sie bekommen dadurch die Werte für A, B, C, D, E, F.

Geben Sie diese Werte als Kommazahlen in der Reihenfolge

A;B;C;D;E;F

durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(\+)?0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*0(,|\.)250*;-0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*0(,|\.)750*;-0*1(,|\.)50*;(\+)?0*1((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich
Antwort 2 :	.*

Einstellungen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Korrekt, sehr gut!

Man kann natürlich auf viele verschiedene Arten das LGS manuell lösen, die hier nicht alle dargestellt werden können. Stattdessen gehen wir im Folgenden nur einen recht schnellen von diesen Wegen durch.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Nein, das war nicht richtig. Überprüfen Sie Ihre eigenen Schritte auf Fehler!

Man kann natürlich auf viele verschiedene Arten das LGS manuell lösen, die hier nicht alle dargestellt werden können. Stattdessen gehen wir im Folgenden nur einen recht schnellen von diesen Wegen durch.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Einstellungen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Wir beschriften noch die einzelnen Gleichungen und lösen jetzt manuell das LGS:

$$\begin{bmatrix} \text{(I)} & A+C & = & 0 \\ \text{(II)} & A+B+2C+D & = & 0 \\ \text{(III)} & 2A+2C+2D+E & = & 0 \\ \text{(IV)} & 2A+2B+2C+2D+2E+F & = & 0 \\ \text{(V)} & A+C+2D+E+2F & = & 2 \\ \text{(VI)} & A+B+D+F & = & 3 \end{bmatrix}$$

Als erstes greifen wir uns eine möglichst kurze und einfach aussehende Gleichung heraus - hier ist das z.B. Gleichung I. Diese können wir äquivalent umformen zu $C=-A$, und somit lässt sich durch Einsetzen in jede Zeile das System auf fünf Variablen reduzieren:

$$\underset{\text{einsetzen}}{\overset{C=-A}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} \text{(I')} & 0 & = & 0 \\ \text{(II')} & -A+B+D & = & 0 \\ \text{(III')} & 2D+E & = & 0 \\ \text{(IV')} & 2B+2D+2E+F & = & 0 \\ \text{(V')} & 2D+E+2F & = & 2 \\ \text{(VI)} & A+B+D+F & = & 3 \end{bmatrix}$$

Auch an dieser Stelle kann man wieder bei der kürzesten Gleichung ansetzen - diesmal $\mathrm{III'}$. Sie lässt sich äquivalent umformen zu $E=-2D$. Außerdem kann man direkt $\mathrm{III'}$ in $\mathrm{V'}$ einsetzen und erhält $2F=2 \Leftrightarrow F=1$. Wir setzen beides ein und haben dann nur noch drei Variablen:

$$\underset{\text{einsetzen}}{\overset{E=-2D \text{ und } F=1}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} \text{(I')} & 0 & = & 0 \\ \text{(II')} & -A+B+D & = & 0 \\ \text{(III'')} & 0 & = & 0 \\ \text{(IV'')} & 2B-2D & = & -1 \\ \text{(V'')} & 2 & = & 2 \\ \text{(VI')} & A+B+D & = & 2 \end{bmatrix}$$

Und wieder setzen wir an der kürzesten Gleichung an: $\mathrm{IV''}$ lässt sich äquivalent umformen zu $D=B+\frac{1}{2}$. Weiterhin erhält man durch $VI'-II'$ noch $2A=2 \Leftrightarrow A=1$ und erhält:

$$\underset{\text{einsetzen}}{\overset{D=B+\frac{1}{2} \text{ und } A=1}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} \text{(I')} & 0 & = & 0 \\ \text{(II'')} & B & = & \frac{1}{4} \\ \text{(III'')} & 0 & = & 0 \\ \text{(IV''')} & -1 & = & -1 \\ \text{(V'')} & 2 & = & 2 \\ \text{(VI')} & B & = & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Damit sind wir endlich fertig! Es ist

$$A=1, \quad B=\frac{1}{4}, \quad C=-A=-1, \quad D=B+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}, \quad E=-2D=-\frac{3}{2}, \quad F=1.$$

Geben Sie damit jetzt noch die Partialbruchzerlegung unserer ursprünglichen Funktion $R(x)$ an!

Einstellungen

Werte der Unbekannten herausfinden - Koeffizientenvergleich

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partialbruchzerlegung vollständig bestimmt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Also gut, Sie wollen in

$$\begin{aligned} 2x+3 = \quad & A\cdot(x+1)\left(x^2+1\right)^2 && + \quad B\cdot\left(x^2+1\right)^2 \\ & +(Cx+D)\cdot(x+1)^2\left(x^2+1\right) && + \quad (Ex+F)\cdot(x+1)^2 \end{aligned}$$

zur Bestimmung von A, B, C, D, E, F verschiedene x-Stellen einsetzen.

Das scheint erst einmal eine gute Idee zu sein, denn bei der anderen Methode - dem Koeffizientenvergleich - müsste man die rechte Seite der Gleichung komplett ausmultiplizieren. Diese Arbeit sparen wir uns hier, wir setzen 6 verschiedene x-Stellen ein und erhalten dadurch recht schnell ein Gleichungssystem für A, B, C, D, E, F. 6 Stellen müssen es übrigens deshalb sein, da wir genau 6 Unbekannte eindeutig bestimmen wollen.

Welche x-Stellen wählt man sich dafür? Man kann alle reellen Zahlen einsetzen. Üblicherweise versucht man aber zuerst, Nullstellen von $N(x)$ einzusetzen, denn dadurch fallen einige Summanden auf der rechten Seite ganz weg und man erhält kurze Gleichungen mit wenigen Unbekannten. Die einzige mögliche Nullstelle ist hier $x=-1$. Ansonsten versuchen wir möglichst "einfache" x-Stellen wie $0, 1, 2, \ldots$ einzusetzen, damit man mit den entstehenden Gleichungen einigermaßen schnell rechnen kann.

Wir wählen hier die sechs x-Stellen $-1, 0, 1, -2, 2, -3$. Setzen Sie diese jeweils ein und schreiben Sie die entstehenden Gleichungen auf!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Einstellungen

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Mit Einsetzen der x-Stellen $0, 1, -1, 2, -2, -3$ und einigen wenigen Umformungen erhält man folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} B & = & \frac{1}{4} \\ A+B+D+F & = & 3 \\ 8A+4B+8C+8D+4E+4F & = & 5 \\ -25A+25B-10C+5D-2E+F & = & -1 \\ 75A+25B+90C+45D+18E+9F & = & 7 \\ -200A+100B-120C+40D-12E+4F & = & -3 \end{bmatrix}$$

Hier sollte Ihnen auffallen: Dieses LGS wird wahrscheinlich aufwendig zu lösen sein. Es gibt nur wenige Nullen, d.h. in den meisten der Gleichungen kommen jeweils alle Unbekannten vor. Zudem sind die Koeffizienten teilweise recht hohe Zahlen, was ebenfalls mehr Kopfrechenarbeit bedeuten kann.

Wie kam es dazu? Das Problem ist, dass unser Nenner $N(x)=(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2$ nur einen Linearfaktor hat - und damit nur eine Nullstelle, die man als x-Stelle einsetzen kann - und dafür noch einen irreduziblen quadratischen Faktor, diesen auch noch in zweiter Potenz. Dadurch konnte man beim x-Stellen-Einsetzen nur wenige Null-Summanden erzeugen, und deshalb haben wir jetzt dieses "ungemütliche" lineare Gleichungssystem oben. Der Koeffizientenvergleich wird vielleicht doch schneller zum Erfolg führen - falls Sie möchten, geht es hier zu diesem Vorgehen.

Sofern Sie trotzdem beim jetzigen Verfahren bleiben:

Man kann noch $B=\frac{1}{4}$ in die restlichen 5 Gleichungen einsetzen und erhält dadurch ein etwas kleineres, wenn auch immer noch dichtbesetztes LGS. Tun Sie das!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Mit Einsetzen von $B = \frac{1}{4}$ und mit ein wenig Umformung erhält man das etwas einfachere System

$$\left[\begin{array}{rcl} A + D + F &=& \frac{11}{4} \\ 2A + 2C + 2D + E + F &=& 1 \\ -25A - 10C + 5D - 2E + F &=& -\frac{29}{4} \\ 75A + 90C + 45D + 18E + 9F &=& \frac{3}{4} \\ -200A - 120C + 40D - 12E + 4F &=& -28 \end{array}\right]$$

Da auch dieses LGS immer noch sehr dicht besetzt ist, ist ein manuelles Lösen (wie in der Schul-Mittelstufe) wahrscheinlich zu kompliziert. Wir schreiben stattdessen das Gleichungssystem (ohne B) in Matrixform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -25 & -10 & 5 & -2 & 1 & -\frac{29}{4} \\ 75 & 90 & 45 & 18 & 9 & \frac{3}{4} \\ -200 & -120 & 40 & -12 & 4 & -28 \end{array}\right)$$

und lösen es mit dem **Gauß-Algorithmus**, wir bringen es also mit elementaren Zeilenumformungen auf Stufenform.

Sie bekommen dadurch die Werte für A, C, D, E, F.
Geben Sie diese Werte als Kommazahlen in der Reihenfolge

A;C;D;E;F

durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(\+)?0*1((,|\.)0*)?;-0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*0(,|\.)750*;-0*1(,|\.)50*;(\+)?0*1((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Sehr gut! Das war ein recht "harter Brocken", aber mit etwas Fleiß und mit dem Gauß-Algorithmus lässt sich das LGS schließlich auflösen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -25 & -10 & 5 & -2 & 1 & -\frac{29}{4} \\ 75 & 90 & 45 & 18 & 9 & \frac{3}{4} \\ -200 & -120 & 40 & -12 & 4 & -28 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -10 & 30 & -2 & 26 & \frac{123}{2} \\ 0 & 90 & -30 & 18 & -66 & -\frac{411}{2} \\ 0 & -120 & 240 & -12 & 204 & 522 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 30 & 3 & 21 & 39 \\ 0 & 0 & -30 & -27 & -21 & -3 \\ 0 & 0 & 240 & 48 & 144 & 252 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -24 & -60 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Daran kann man

$$A = 1, \quad C = -1, \quad D = \frac{3}{4}, \quad E = -\frac{3}{2}, \quad F = 1,$$

ablesen, und zuvor hatten wir schon $B = \frac{1}{4}$ gezeigt.

Geben Sie damit jetzt noch die Partialbruchzerlegung unserer ursprünglichen Funktion $R(x)$ an!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Partialbruchzerlegung vollständig bestimmt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

Nein, das war nicht richtig. Untersuchen Sie Ihre Rechnung auf Flüchtigkeits- und Rechenfehler und vergleichen Sie eventuell mit dem hier gezeigten Weg.

Zugegebenermaßen ist das LGS ein recht "harter Brocken", aber mit etwas Fleiß und mit dem Gauß-Algorithmus lässt es sich genauso auflösen wie jedes andere. Man eliminiert zuerst alle Einträge unter der ersten Stufe ganz links:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -25 & -10 & 5 & -2 & 1 & -\frac{29}{4} \\ 75 & 90 & 45 & 18 & 9 & \frac{3}{4} \\ -200 & -120 & 40 & -12 & 4 & -28 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -10 & 30 & -2 & 26 & \frac{123}{2} \\ 0 & 90 & -30 & 18 & -66 & -\frac{411}{2} \\ 0 & -120 & 240 & -12 & 204 & 522 \end{array}\right)$$

Das gleiche macht man mit den weiteren Stufen, wobei man zwischendurch manchmal auch Zeilen vertauschen oder mit Zahlen $\neq 0$ multiplizieren muss:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 30 & 3 & 21 & 39 \\ 0 & 0 & -30 & -27 & -21 & -3 \\ 0 & 0 & 240 & 48 & 144 & 252 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -24 & -60 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Schließlich eliminieren wir - von ganz unten anfangend - alle Einträge *über* den Stufen und erhalten:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Daran kann man

$$A = 1, \quad C = -1, \quad D = \frac{3}{4}, \quad E = -\frac{3}{2}, \quad F = 1,$$

Werte der Unbekannten herausfinden - x-Stellen einsetzen

ablesen, und zuvor hatten wir schon $B = \frac{1}{4}$ gezeigt.

Geben Sie damit jetzt noch die Partialbruchzerlegung unserer ursprünglichen Funktion $R(x)$ an!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Partialbruchzerlegung vollständig bestimmt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partialbruchzerlegung vollständig bestimmt

Damit haben wir endlich die Partialbruchzerlegung komplett. Es ist

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(x) &= \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2} \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2} + \frac{-x+\frac{3}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

und wir dürfen nicht unsere eigentliche Funktion $R(x)$ vergessen. Diese hat mit Obigem die folgende Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} R(x) &= 1 + \frac{2x+3}{(x^2+2x+1)\,(x^2+1)^2} \\ &= 1 + \widetilde{R}(x) \\ &= 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2} + \frac{-x+\frac{3}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Das vorliegende Aufgabenstellung haben wir also erledigt!

Dennoch folgt auf den nächsten Seiten noch ein Exkurs.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Unsere Aufgabenstellung hat *nicht* verlangt, dass wir außer der PBZ noch eine Stammfunktion von $R(x)$ bestimmen sollen. Wir sind deshalb auf der vorigen Seite schon mit der Aufgabe fertig gewesen. *(Lesen Sie immer sorgfältig die Aufgabenstellung durch, vor allem in Prüfungen!)*

Es gibt aber eben auch Aufgabenstellungen, bei denen zu einer rationalen Funktion zuerst die PZB und dann auch eine Stammfunktion bestimmt werden soll. Deshalb wollen wir auf den folgenden Seiten noch durchspielen, was man in diesem Fall machen müsste.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Exkurs: Wie die PZB beim Integrieren hilft

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Exkurs: Wie die PZB beim Integrieren hilft

Einer der Dinge, für die die Partialbruchzerlegung hilfreich ist, ist das Integrieren rationaler Funktionen. M eine Funktion wie unser

$$R(x) = \frac{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)^2}$$

direkt in dieser Form mit "normalen" Methoden wie partieller Integration oder der Substitutionsregel integr ist das praktisch aussichtslos. Stellt man den Term jedoch als Summe von Partialbrüchen dar, gibt es gelingsichere Methoden, denn die einzelnen Partialbrüche sind alle einfach mit bestimmten Formeln zu ir

- $\int \frac{G}{x-u}dx = G \cdot \ln|x-u| + c$
- $\int \frac{G}{(x-u)^n}dx = \frac{-G}{(n-1)\cdot(x-u)^{n-1}} + c$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
- $\int \frac{J}{x^2+vx+w}dx = \frac{2J}{\sqrt{4w-v^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+v}{\sqrt{4w-v^2}}\right) + c$
- $\int \frac{Hx+J}{x^2+vx+w}dx = \frac{H}{2} \cdot \ln|x^2+vx+w| + \left(J - \frac{v \cdot H}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{4w-v^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x +}{\sqrt{4w}}\right.$
- Bei Integralen der Form $\int \frac{Hx+J}{(x^2+vx+w)^n}dx$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ werden die Formeln noch etwas komplizierter, wir zeigen sie hier nicht. Sie können diese natürlich gerne nachschlagen, wenn Sie wol Wir werden jedoch sehen, dass bei unserem speziellen Partialbruch elementare Formeln bzw. Integra ausreichen!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Wir integrieren also unsere Funktion

$$R(x) = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2} + \frac{-x+\frac{3}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Zu Ihrer Hilfe noch einmal die Formeln von voriger Seite:

- $\int \frac{G}{x-u}dx = G \cdot \ln|x-u| + c$
- $\int \frac{G}{(x-u)^n}dx = \frac{-G}{(n-1)\cdot(x-u)^{n-1}} + c$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
- $\int \frac{J}{x^2+vx+w}dx = \frac{2J}{\sqrt{4w-v^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+v}{\sqrt{4w-v^2}}\right) + c$
- $\int \frac{Hx+J}{x^2+vx+w}dx = \frac{H}{2} \cdot \ln|x^2+vx+w| + \left(J - \frac{v \cdot H}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{4w-v^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x -}{\sqrt{4w}}\right.$

Wir lassen uns den letzten Summanden für später übrig und erledigen zunächst die ersten vier. Man erhä

$$\begin{aligned}\int R(x)dx = & \int 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2} + \frac{-x+\frac{3}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2}dx \\ = & \int 1\,dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}dx + \int \frac{-x+\frac{3}{4}}{x^2+1}dx + \int \frac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2}dx \\ = & K \cdot x + L \cdot \ln|x+1| + M \cdot \frac{1}{x+1} + N \cdot \ln|x^2+1| + O \cdot \arctan(P \cdot x) \quad + \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Werte von K, L, M, N, O, P und geben Sie diese Werte als Kommazahlen in der R

K;L;M;N;O;P

durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(\+)?0*1((,|\.)0*)?;(\+)?0*1((,|\.)0*)?;-0*0(,|\.)250*;-0*0(,|\.)50*;(\+)?0*0(,|\.)750*;(\
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Nein, das war nicht richtig. Vielleicht haben Sie sich einfach verrechnet?

Sie müssen jedenfalls unbedingt in der Lage sein, systematisch in solche Formeln einzusetzen und damit die korrekten Ausdrücke zu bestimmen. Deshalb geht es unten zurück zur Frage.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frage

Sprung 1: Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Korrekt, gut! Es ist

$$\int R(x)dx = x + \ln|x+1| - \frac{\frac{1}{4}}{x+1} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{3}{4}\arctan(x) \quad + \quad \int \frac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2}dx$$

Jetzt müssen wir nur noch das Integral ganz rechts bestimmen. Können Sie jetzt schon sehen, wie man mit elementaren Mitteln darangehen kann? Überlegen Sie, und klicken Sie erst dann weiter.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Hier kann man sich zunutze machen, dass sich Summen im Zähler auseinanderziehen lassen. Es ist

$$\int \frac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{-\frac{3}{2}x}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx.$$

Hier sollten Sie langsam sehen, wie man weiterkommt. Beim einen Summanden hilft eine elementare Integrationsregel, beim anderen gibt es ein passendes Standardintegral.

Integrieren Sie jetzt also die beiden Summanden!

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

- Es ist $\int \frac{-\frac{3}{2}x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{3}{4}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$ und spätestens jetzt sollten Sie erkennen, das oben im Zähler die innere Ableitung $2x$ von $(x^2+1)^{-2}$ steht. Damit drängt sich die Substitutionsregel auf, und zwar mit $y := x^2+1 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 2x \;\Leftrightarrow\; dy = 2x\,dx$. Es folgt

$$\begin{aligned}-\frac{3}{4}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx &= -\frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2}2x\,dx \\ &= -\frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2}dy \\ &= -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{y}\right) + c = \frac{\frac{3}{4}}{x^2+1} + c.\end{aligned}$$

- $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right)$ ist ein Standardintegral, welches Sie in Ihrer Formelsammlung finden sollten.

Damit sind wir durch! Schreiben Sie noch das vollständige Integral $\int R(x)dx$ auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Exkurs: Wie die PBZ beim Integrieren hilft

Einstellungen

Insgesamt haben wir

$$\int R(x)dx = x + \ln|x+1| - \frac{\frac{1}{4}}{x+1} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{3}{4}\arctan(x) + \frac{\frac{3}{4}}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\arctan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Auch der Exkurs ist damit fertig bearbeitet. Auf der nächsten Seite werden noch einmal alle Ergebnisse festgehalten.

Inhaltsseite	
Inhalt 1:	Zur Zusammenfassung der Ergebnisse
Sprung 1:	Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Zusammenfassung der Ergebnisse

Einstellungen

Zur Partialbruchzerlegung der Funktion $R(x) = \frac{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+4x+4}{(x^2+2x+1)(x^2+1)^2}$ haben wir folgende Schritte unternommen:

- Zuerst haben wir erkannt, daß der Zählergrad nicht kleiner als der Nennergrad ist, und per Polynomdivision mit dem ausmultiplizierten Nenner umgeformt zu
$$R(x) = 1 + \frac{2x+3}{(x^2+2x+1)\,(x^2+1)^2} =: 1 + \widetilde{R}(x).$$
- Wir haben den Nenner faktorisiert zu $\widetilde{R}(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.
- Auf dieser Grundlage haben wir für $\widetilde{R}(x)$ die Partialbrüche $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$ aufgestellt.
- Per Koeffizientenvergleich oder per x-Stellen-Einsetzen haben wir schließlich die Werte der Unbekannten bestimmt und die Partialbruchzerlegung
$$R(x) = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2} + \frac{-x+\frac{3}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{3}{2}x+1}{(x^2+1)^2}$$
erhalten.

- Als Exkurs haben wir noch geschaut, wie man eine solche in PBZ vorliegende Funktion integrieren kann, und
$$\int R(x)dx = x + \ln|x+1| - \frac{\frac{1}{4}}{x+1} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{3}{4}\arctan(x) + \frac{\frac{3}{4}}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\arctan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$
bestimmt.

Klicken Sie unbedingt noch auf den untenstehende Button, damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird!

Inhaltsseite	
Inhalt 1:	Ende der Aufgabe!
Sprung 1:	Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

BSA zur analytischen Geometrie

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ▶ 17ss-02263 ▶ Lange Aufgaben ▶ Projektionsgerade von Gerade auf Ebene ▶ Bearbeiten ▶ Erweitert ▶ Bearbeiten

Projektionsgerade von Gerade auf Ebene

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Nachschlagen"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Inhaltsseite

Einstellungen

Vorbemerkung

Inhalt 1:	Zur Aufgabe!
Sprung 1:	Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung lautet wie folgt:

Gegeben sei die Ebene $E=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \,:\, 2x_1-3x_2+x_3=4\}$ und die Gerade
$$G=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Bestimmen Sie die Projektionsgerade G_P, die durch die orthogonale Projektion von G auf E entsteht. Geben Sie außerdem den Bogenmaß-Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden G und G_P an, und zwar den kleineren der beiden möglichen Winkel.

Diese Aufgabe werden Sie nun Schritt für Schritt lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz für die Projektionsgerade

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz für die Projektionsgerade

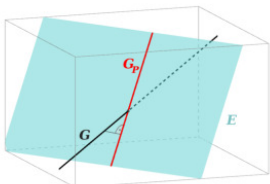
Ansatz für die Projektionsgerade

Einstellungen

Der erste Schritt ist also die Bestimmung von G_P.

Um die Projektionsgerade G_P von $G=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}$ auf $E=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \,:\, 2x_1-3x_2+x_3=4\}$ zu bestimmen, kann man verschiedene Verfahren anwenden.

Zunächst eine Visualisierung der gefragten Objekte (in der Klausur natürlich nicht von Ihnen gefordert):



Überlegen Sie zuerst selbst, wie sie an die Bestimmung von G_P herangehen können, und versuchen Sie die ersten Schritte selbst zu rechnen.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz für die Projektionsgerade

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz für die Projektionsgerade

Welchen Ansatz haben Sie gewählt, um die Projektionsgerade G_P von $G=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}$ auf $E=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \,:\, 2x_1-3x_2+x_3=4\}$ zu bestimmen?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Aufstellen einer Hilfsebene, die G enthält und auf E senkrecht steht, sodass man durch Schneiden der beiden Ebenen die Projektionsgerade erhält
Feedback 1	
Bewertung	1

Einstellungen

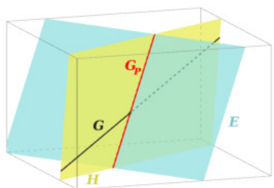
Ansatz für die Projektionsgerade

Sprung	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene
Antwort 2:	Bestimmen des Richtungsvektors von G_P durch zweifaches Anwenden des Kreuzprodukts
Feedback 2	
Bewertung	1
Sprung	Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt
Antwort 3:	Bestimmen des Schnittpunkts von G und E sowie eines Lotfußpunkts von einem Punkt der Geraden G auf die Ebene E, dann verläuft die Projektionsgerade G_P durch diese beiden Punkte
Feedback 3	
Bewertung	1
Sprung	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene

Ja, man kann die Hilfsebene H aufstellen, die G enthält und auf E senkrecht steht. Durch Schneiden der beiden Ebenen erhält man dann die Projektionsgerade G_P. Das Verfahren klappt, weil die Projektionsrichtung ja genau senkrecht zur Ebene E verlaufen muss. Am Ende sieht es dann folgendermaßen aus:



Im Folgenden wird also zunächst die Hilfsebene aufgestellt und dann der Schnitt der beiden Ebenen berechnet.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene

Die Hilfsebene H soll also $G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ enthalten und senkrecht auf $E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \}$ stehen.

Welche Form von H lässt sich mit den gegebenen Informationen am einfachsten bestimmen?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Parameterform von H
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - Parameterform bestimmen
Antwort 2 :	Koordinatenform/Normalenform von H
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - Koordinatenform bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - Parameterform bestimmen

Stimmt, mit den gegebenen Informationen lässt sich sehr schnell die Parameterform von H bestimmen. Man muss nämlich nur die Parameterform der Geraden

$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ um einen zweiten Richtungsvektor erweitern.

Dadurch ist direkt sichergestellt, dass die Hilfsebene G enthält.

Da die Hilfsebene außerdem senkrecht auf E stehen soll, kann man als zweiten Richtungsvektor einfach den Normalenvektor von E wählen, der sich direkt aus der Koordinatenform $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$ von E ablesen lässt.

Bestimmen Sie also mit diesem Normalenvektor die Parameterform der Hilfsebene H.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - Koordinatenform bestimmen

Nein, das stimmt nicht ganz. Um die Koordinatenform von H zu bestimmen, braucht man zuerst einen Normalenvektor von H. Der lässt sich zwar mit etwas Rechnung herausfinden, aber hier geht es einfacher.

Schon mit den gegebenen Informationen lässt sich ohne weitere Rechnung die Parameterform von H bestimmen. Man muss nämlich nur die Parameterform der Geraden

$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ um einen zweiten Richtungsvektor erweitern.

Dadurch ist direkt sichergestellt, dass die Hilfsebene G enthält.

Da die Hilfsebene außerdem senkrecht auf E stehen soll, muss der zweite Richtungsvektor ein Normalenvektor von E sein. Dieser lässt sich wiederum direkt aus der Koordinatenform $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$ von E ablesen.

Bestimmen Sie also einen Normalenvektor von E und damit die Parameterform der Hilfsebene H.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Für die Hilfsebene, die durch G verläuft und senkrecht auf E steht, erhält man die Parameterform

$$H = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die Projektionsgerade G_P muss man nun noch die Schnittmenge von H und G bestimmen. Setzen Sie dafür die Komponenten von H in die Koordinatenform $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$ von E ein und schreiben Sie die entstehende Gleichung auf!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Einstellungen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Komponentenweises Einsetzen von H in E liefert

$$2(1 - t + 2u) - 3(2t - 3u) + 1(1 + t + u) = 4.$$

Damit kann man nun herausfinden, mit welcher Wahl der Parameter t und u man im Schnitt der beiden Ebenen H und E landet: Man löst dazu die Gleichung nach t oder nach u auf. Lösen Sie also nach t auf!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Man erhält die Äquivalenzumformung

$$\begin{aligned} & 2(1 - t + 2u) - 3(2t - 3u) + 1(1 + t + u) = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 - 2t + 4u - 6t + 9u + 1 + t + u = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & -7t + 14u = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & t = 2u - \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Was macht man nun mit diesem Ergebnis?

Zur Erinnerung:

H ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t, u \in \mathbb{R}.$

E ist gegeben durch $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4.$

Multiple-Choice

Antwort 1:	Man ersetzt in H das t durch $2u - \frac{1}{7}$, sodass u als einziger Parameter zurückbleibt und man eine Gerade erhält, die im Schnitt von H und E liegt.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden
Antwort 2 :	Man setzt $u = 0$ und erhält $t = 2u - \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$, was man dann beides in H einsetzt. Man bekommt also einen Punkt, der im Schnitt von H und E liegt.

Einstellungen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

$u = 0$ zu setzen ergibt wenig Sinn:

$t = 2u - \frac{1}{7}$ gibt an, welche Beziehung die Parameter in

$H = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t, u \in \mathbb{R} \right\}$ zueinander haben müssen, damit man Punkte im Schnitt von H und E erhält. Es gibt offenbar unendlich viele Kombinationen, die das erfüllen.

Mit einer Festlegung wie $u = 0$ würde man dagegen nur einen einzelnen Punkt erhalten, obwohl die Schnittmenge ja größer ist, nämlich eine Gerade.

Deshalb geht es hier zurück.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zur Frageseite
Sprung 1:	Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Ansatz: Senkrechte Hilfsebene - H und E schneiden

Einstellungen

Genau!

$t = 2u - \frac{1}{7}$ gibt an, welche Beziehung die Parameter in H zueinander haben müssen, um im Schnitt von H und E zu "landen".

Einsetzen in H ergibt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\\frac{2}{7}\\\frac{1}{7}\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\ u\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wie erwartet, ist der Schnitt von H und E also eine Gerade - und zwar nach unserer Konstruktion genau die gesuchte Projektionsgerade G_P!

Wir schreiben noch die vollständige Parameterdarstellung von G_P auf:

$$G_P = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}\right\}$$

Nun geht es weiter mit dem Winkel zwischen G und G_P.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Schnittwinkel der beiden Geraden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

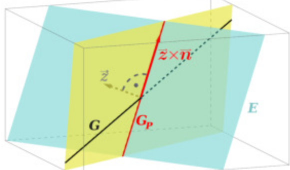
Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt

Einstellungen

Ja, man kann den Richtungsvektor der Projektionsgerade mit einer zweifachen Anwendung des Kreuzprodukts bestimmen. Wie macht man das und warum funktioniert es?

Man bildet zuerst das Kreuzprodukt vom G-Richtungsvektor mit dem E-Normalenvektor. Der dadurch entstandene Vektor $\vec{z}$ ist dann auf jeden Fall ein Normalenvektor derjenigen Ebene, die durch G verläuft und senkrecht auf E steht. Im Bild ist diese Ebene gelbgrün; der Vektor $\vec{z}$ ist grau eingezeichnet, einfachheitshalber ausgehend vom Schnittpunkt von G mit E:



Man mache sich klar, dass $\vec{z}$ durch seine Konstruktion sowohl parallel zur Ebene E liegen muss als auch senkrecht zu G_P steht.
Das heißt, wenn man jetzt noch einen weiteren Vektor bestimmt, der in der Ebene E senkrecht zu $\vec{z}$ steht, dann erhält man einen Richtungsvektor von G_P. Das schafft man, indem man ein zweites Mal ein Kreuzprodukt bestimmt, und zwar von $\vec{z}$ mit dem Normalenvektor von E (beispielhaft eingezeichnet in rot als $\vec{z}\times\vec{n}$)!

(In einer Klausur müssten Sie das Zwischenergebnis $\vec{z}$ nicht gesondert hinschreiben oder überhaupt eigens bezeichnen. Sie können direkt die zweifache Kreuzprodukt-Rechnung bis zum G_P-Richtungsvektor durchführen.)

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Bestimmen Sie also zu $E = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4\}$ und $G = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}$ das Kreuzprodukt

$$\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

und geben Sie die Koeffizienten durch Semikolon getrennt in der Form $x_1;x_2;x_3$ ins Antwortfeld ein:

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Einstellungen

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(-|\+)?0((\.|,)0*)?;(\+)?7((\.|,)0*)?;(\+)?21((\.|,)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor
Antwort 2:	(-|\+)?0((\.|,)0*)?;-7((\.|,)0*)?;-21((\.|,)0*)?
Feedback 2	
Bewertung	1
Sprung	Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor
Antwort 3 :	.*
Feedback 3	
Bewertung	0
Sprung	Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Korrekt! Es ist

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-3\cdot1-2\cdot1\\1\cdot(-1)-1\cdot2\\2\cdot2-(-1)\cdot(-3)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3\cdot1-(-3)\cdot1\\1\cdot2-1\cdot(-5)\\-5\cdot(-3)-2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\\21\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Da für eine Gerade die Skalierung ihres Richtungsvektors egal ist, können wir uns diesen Vektor noch etw "schöner" skalieren. Wir wählen also für den Richtungsvektor $\vec{x_{G_P}}$ der Projektionsgeraden z.B.

$$\vec{x_{G_P}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}0\\7\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Für die vollständige Bestimmung der Projektionsgeraden G_P fehlt jetzt nur noch ein Stützvektor.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Einstellungen

Sprung 1:	Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Fast korrekt. Es ist

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-3\cdot1-2\cdot1\\1\cdot(-1)-1\cdot2\\2\cdot2-(-1)\cdot(-3)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3\cdot1-(-3)\cdot1\\1\cdot2-1\cdot(-5)\\-5\cdot(-3)-2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\\21\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Sie haben möglicherweise beim ersten Kreuzprodukt die Reihenfolge der Vektoren umgekehrt und stattdessen wie folgt gerechnet:

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\cdot1-(-3)\cdot1\\1\cdot2-1\cdot(-1)\\(-1)\cdot(-3)-2\cdot2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3\cdot1-(-3)\cdot(-1)\\(-1)\cdot2-1\cdot5\\5\cdot(-3)-2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-7\\-21\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Um den Richtungsvektor der Projektionsgeraden zu bestimmen, ist aber sowieso beides richtig. Da für eine Gerade die Skalierung des Richtungsvektors egal ist, können wir diesen Vektor beliebig skalieren. Wir wählen also für den Richtungsvektor $\vec{x_{G_P}}$ der Projektionsgeraden z.B.

$$\vec{x_{G_P}} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}0\\-7\\-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Für die vollständige Bestimmung der Projektionsgeraden G_P fehlt jetzt nur noch ein Stützvektor.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Einstellungen

Nein, das ist nicht korrekt.

Sie sollten das **Kreuzprodukt** aber auf jeden Fall beherrschen, sehen Sie sich noch einmal die Definition und Beispiele im Vorlesungsskript an.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frage

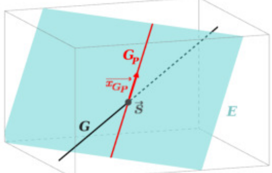
Sprung 1: Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Richtungsvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Wir haben also einen Richtungsvektor $\vec{x_{G_P}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ für die Projektionsgerade gefunden.

Für die vollständige Bestimmung von G_P braucht man noch einen **Stützvektor**. Das kann ein beliebiger Punkt sein, von dem wir wissen, dass er auf G_P liegen muss. Dafür ist es naheliegend, den Schnittpunkt $\vec{s}$ von G und E zu wählen, da dieser sicher auf G_P liegt und da man ihn recht einfach bestimmen kann.



Versuchen Sie also selbständig, den Schnittpunkt von G und E zu bestimmen.
Sie sollten dazu bereits ein Verfahren aus dem Schulunterricht kennen, ansonsten gibt es auch eine Formel in der Formelsammlung dazu.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zum Verfahren aus der Schule

Sprung 1: Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Inhalt 2: Zur Bestimmung mit Formelsammlung

Sprung 2: Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Einstellungen

Korrekt! Es ist

$$\begin{aligned} & 2\cdot(1-t) - 3\cdot(0+2t) + 1\cdot(1+t) = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 - 2t - 6t + 1 + t = 3 - 7t = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 7t = -1 \\ \Leftrightarrow\quad & t = -\frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Setzen Sie dies jetzt noch in $G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ ein, um den Schnittpunkt $\vec{s}$ zu erhalten.

Sie erhalten einen Vektor $\vec{s} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$. Geben Sie $s_1; s_2; s_3$ durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `(\+)?(0)*8((,|\.)(0)*)?;-(0)*2((,|\.)(0)*)?;(\+)?(0)*6((,|\.)(0)*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Einstellungen

Das Verfahren aus dem Schulunterricht, wenn die Gerade in Parameterform und die Ebene in Koordinatenform gegeben ist:

Für den Schnittpunkt von G und E setzt man $G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ komponentenweise in die Gleichung $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$ von E ein und erhält

$$2\cdot(1-t) - 3\cdot(0+2t) + 1\cdot(1+t) = 4.$$

Vereinfachen Sie dies und lösen Sie nach t auf, um dann den Schnittpunkt zu bestimmen. Geben Sie den gefundenen Wert für t ins Eingabefeld ein, als auf zwei Stellen gerundete Kommazahl oder als vollständig gekürzten Bruch in der Form "a/b":

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `-(0)*0(,|\.)14(\.)*|-1\/7|-1\/7|-1\/7|−1\/7|−1\/7`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Nein, das war nicht korrekt. So eine Rechnung müssen Sie aber unbedingt beherrschen!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Deshalb geht es hier zurück.

Sprung 1: Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Einstellungen

Korrekt! Einsetzen von $t = -\frac{1}{7}$ in G liefert

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \vec{s}.$$

Mit dem Schnittpunkt $\vec{s}$ von G und E haben wir auch einen Stützvektor gefunden. Jetzt können wir die Projektionsgerade G_P vollständig angeben.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Gerade bestimmt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Das war nicht richtig. Sie hatten entweder einen falschen Ansatz oder einen Fehler in der Rechnung.

Einsetzen von $t = -\frac{1}{7}$ in G liefert

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \vec{s}.$$

Mit dem Schnittpunkt $\vec{s}$ von G und E haben wir auch einen Stützvektor gefunden. Jetzt können wir die Projektionsgerade G_P vollständig angeben.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Gerade bestimmt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Einstellungen

In Formelsammlungen finden Sie eine Formel für die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene (z.B. in Web-Formelsammlungen, oder auch in "Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik", 4. Auflage, S. 29):

- Hat man eine Ebene gegeben durch $\vec{x} \cdot \vec{n} = d$,
- dazu eine Gerade gegeben durch $\vec{x} = \vec{l} + t \cdot \vec{r}, \quad t \in \mathbb{R}$,
- dann ist der Schnittpunkt $\vec{s}$ von Gerade und Ebene gegeben durch

$$\vec{s} = \vec{l} + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{l}}{\vec{n} \cdot \vec{r}} \vec{r}.$$

(Das klappt auch nur, wenn Gerade und Ebene sich tatsächlich in genau einem Punkt schneiden. Sind sie stattdessen parallel zueinander, sodass es entweder gar keinen oder unendlich viele gemeinsame Punkte gibt, dann ist $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ und damit der obige Ausdruck nicht definiert.)

Nutzen Sie jetzt diese Formel, um den Schnittpunkt $\vec{s}$ von
$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Ebene
$E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \}$ zu berechnen.

Sie erhalten einen Vektor $\vec{s} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$. Geben Sie $s_1; s_2; s_3$ durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `(\+)?(0)*8((,|\.)(0)*)?;-(0)*2((,|\.)(0)*)?;(\+)?(0)*6((,|\.)(0)*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Einstellungen

Nicht korrekt. Gehen Sie die Daten nochmal genau durch! Die Schnittpunkt-Formel war

$$\vec{s} = \vec{l} + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{l}}{\vec{n} \cdot \vec{r}} \vec{r}$$

für eine Ebene $\vec{x} \cdot \vec{n} = d$ und eine Gerade $\vec{x} = \vec{l} + t \cdot \vec{r}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Wenn wir diese Formel auf unser $G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ und
$E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \}$ anwenden wollen, haben wir folgendes:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = 4, \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie das in die Formel ein und berechnen Sie den Schnittpunkt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frage

Sprung 1: Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Stützvektor

Einstellungen

Korrekt! Einsetzen unserer Daten in die Formel von voriger Seite liefert

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4 - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit dem Schnittpunkt $\vec{s}$ von G und E haben wir auch einen Stützvektor gefunden. Jetzt können wir die Projektionsgerade G_P vollständig angeben.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

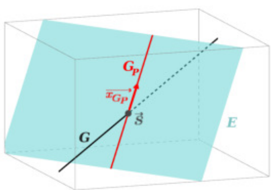
Sprung 1: Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Gerade bestimmt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Gerade bestimmt

Mit Stütz- und Richtungsvektor können wir jetzt die Parameterform der Projektionsgerade G_P angeben: Es ist

$$G_P = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \vec{x} = \vec{s} + r \cdot \vec{x}_{G_P} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}.$$



Im nächsten Schritt geht es weiter mit dem Winkel zwischen G und G_P.

Ansatz: Zweifaches Kreuzprodukt - Gerade bestimmt

Einstellungen

Inhaltsseite

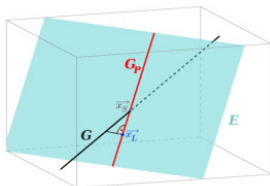
Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Schnittwinkel der beiden Geraden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt

Ja, man kann den Schnittpunkt $\vec{x_S}$ von G und E sowie einen Lotfußpunkt $\vec{x_L}$ von G auf E bestimmen. Dann muss die Projektionsgerade G_P genau durch diese beiden Punkte verlaufen:



Beide Punkte kann man durch Schneiden einer Gerade mit einer Ebene bestimmen:

- Für $\vec{x_S}$ schneidet man G mit E.
- Für $\vec{x_L}$ bildet man eine Gerade, die von irgendeinem Punkt von G ausgeht und als Richtung den Normalenvektor von E besitzt. Diese (Lot-)Gerade schneidet man dann mit E.

Das machen wir also in den folgenden Schritten.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Zuerst zum Schnittpunkt $\vec{x_S}$ von G und E.

Versuchen Sie selbständig, diesen zu bestimmen. Sie sollten dazu bereits ein ganz elementares Verfahren aus dem Schulunterricht kennen, ansonsten gibt es auch eine Formel in der Formelsammlung dazu.

Welches Vorgehen haben Sie benutzt?

Einstellungen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zum Verfahren aus der Schule
Sprung 1:	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt
Inhalt 2:	Zur Bestimmung mit Formelsammlung
Sprung 2:	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

In Formelsammlungen finden Sie eine Formel für die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene (z.B. in Web-Formelsammlungen, oder auch in "Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik", 4. Auflage, S. 29):

- Hat man eine Ebene gegeben durch $\vec{x}\cdot\vec{n}=d$,
- dazu eine Gerade gegeben durch $\vec{x}=\vec{l}+t\cdot\vec{r}, \quad t\in\mathbb{R}$,
- dann ist der Schnittpunkt $\vec{x_S}$ von Gerade und Ebene gegeben durch

$$\vec{x_S}=\vec{l}+\frac{d-\vec{n}\cdot\vec{l}}{\vec{n}\cdot\vec{r}}\vec{r}.$$

(Das klappt auch nur, wenn Gerade und Ebene sich tatsächlich in genau einem Punkt schneiden. Sind sie stattdessen parallel zueinander, sodass es entweder gar keinen oder unendlich viele gemeinsame Punkte gibt, dann ist $\vec{n}\cdot\vec{r}=0$ und damit der obige Ausdruck nicht definiert.)

Nutzen Sie jetzt diese Formel, um den Schnittpunkt $\vec{x_S}$ von $G=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\,:\,\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\,t\in\mathbb{R}\right\}$ mit der Ebene $E=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\,:\,2x_1-3x_2+x_3=4\right\}$ zu berechnen.

Sie erhalten einen Vektor $\vec{x_S}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}$. Geben Sie $s_1;s_2;s_3$ durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(\+)?(0)*8((,|\.)(0)*)?;-(0)*2((,|\.)(0)*)?;(\+)?(0)*6((,|\.)(0)*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Einstellungen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Nicht korrekt. Gehen Sie die Daten nochmal genau durch! Die Schnittpunkt-Formel war

$$\vec{x_S}=\vec{l}+\frac{d-\vec{n}\cdot\vec{l}}{\vec{n}\cdot\vec{r}}\vec{r}$$

für eine Ebene $\vec{x}\cdot\vec{n}=d$ und eine Gerade $\vec{x}=\vec{l}+t\cdot\vec{r}, \quad t\in\mathbb{R}$.

Wenn wir diese Formel auf unser $G=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\,:\,\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\,t\in\mathbb{R}\right\}$ und $E=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\,:\,2x_1-3x_2+x_3=4\right\}$ anwenden wollen, haben wir folgendes:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\quad d=4,\quad \vec{l}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Setzen Sie das in die Formel ein und berechnen Sie den Schnittpunkt.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zur Frage
Sprung 1:	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Einstellungen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Korrekt! Einsetzen unserer Daten in die Formel von voriger Seite liefert

$$\begin{aligned}\vec{x_S}&=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{4-\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mit $\vec{x_S}$ haben wir schonmal einen Punkt gefunden, der auf jeden Fall auf der Projektionsgeraden G_P liegen muss. Als zweiten Punkt bestimmen wir noch einen Lotfußpunkt $\vec{x_L}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Ansatz: Lotfußpunkt und Schnittpunkt - Lotfußpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Das Verfahren aus dem Schulunterricht, wenn die Gerade in Parameterform und die Ebene in Koordinatenform gegeben ist:

Dafür setzt man $G=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\,:\,\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\,t\in\mathbb{R}\right\}$ komponentenweise in die Gleichung $2x_1-3x_2+x_3=4$ von E ein und erhält

$$2\cdot(1-t)-3\cdot(0+2t)+1\cdot(1+t)=4.$$

Vereinfachen Sie dies und lösen Sie nach t auf, um dann den Schnittpunkt zu bestimmen. Geben Sie den gefundenen Wert für t ins Eingabefeld ein, als auf zwei Stellen gerundete Kommazahl oder als vollständig gekürzten Bruch in der Form "a/b":

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	-(0)*0(,|\.)14(\.)*|-1\/7|-1\/7|-1\/7|−1\/7|−1\/7
Feedback 1	

Einstellungen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Bewertung	1
Sprung	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Nein, das war nicht korrekt. So eine Rechnung müssen Sie aber unbedingt beherrschen!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Deshalb geht es hier zurück
Sprung 1:	Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Korrekt! Es ist

$$\begin{aligned}&2\cdot(1-t)-3\cdot(0+2t)+1\cdot(1+t)=4\\\Leftrightarrow\quad&2-2t-6t+1+t=3-7t=4\\\Leftrightarrow\quad&7t=-1\\\Leftrightarrow\quad&t=-\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Setzen Sie dies jetzt noch in $G=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\,:\,\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\,t\in\mathbb{R}\right\}$ ein, um den Schnittpunkt $\vec{x_S}$ zu erhalten.

Sie erhalten einen Vektor $\vec{x_S}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}$. Geben Sie $s_1;s_2;s_3$ durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Einstellungen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Antwort 1: `(\+)?(0)*8((,|\.)(0)*)?;-(0)*2((,|\.)(0)*)?;(\+)?(0)*6((,|\.)(0)*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Korrekt! Einsetzen von $t = -\frac{1}{7}$ in G liefert

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix} = \vec{x_S}.$$

Mit $\vec{x_S}$ haben wir schonmal einen Punkt gefunden, der auf jeden Fall auf der Projektionsgeraden G_P liegen muss. Als zweiten Punkt bestimmen wir noch einen Lotfußpunkt $\vec{x_L}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Lotfußpunkt und Schnittpunkt - Lotfußpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Einstellungen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Schnittpunkt

Das war nicht richtig. Sie hatten entweder einen falschen Ansatz oder einen Fehler in der Rechnung.

Einsetzen von $t = -\frac{1}{7}$ in G liefert

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix} = \vec{s}.$$

Mit $\vec{x_S}$ haben wir schonmal einen Punkt gefunden, der auf jeden Fall auf der Projektionsgeraden G_P liegen muss. Als zweiten Punkt bestimmen wir noch einen Lotfußpunkt $\vec{x_L}$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Lotfußpunkt und Schnittpunkt - Lotfußpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Lotfußpunkt und Schnittpunkt - Lotfußpunkt

Um einen Lotfußpunkt $\vec{x_L}$ zu bestimmen, müssen wir von irgendeinem Ausgangspunkt auf der Geraden G das Lot auf E fällen. Am einfachsten wählt man dafür den Stützvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, da wir bei diesem ohne weitere Rechnung schon wissen, dass er auf G liegt (und vom Schnittpunkt $\vec{x_S}$ verschieden ist).

Vom Stützvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ausgehend muss die Lotgerade dann eine zu E senkrechte Richtung haben.

Diese Gerade schneidet man schließlich mit E, um einen Lotfußpunkt zu erhalten.

Bestimmen Sie die Lotgerade in Parameterform!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Lotfußpunkt und Schnittpunkt - Lotfußpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Ansatz: Lotfußpunkt und Schnittpunkt - Lotfußpunkt

Da die Ebene $E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4\right\}$ in Normalenform gegeben ist, kann man den zu E senkrechten Normalenvektor $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ direkt ablesen und erhält als Lotgerade

$$\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Den Lotfußpunkt $\vec{x_L}$ erhält man durch Schneiden dieser Geraden mit E. Das Verfahren dafür haben Sie eben schon beim Bestimmen von $\vec{x_S}$ gesehen. Berechnen Sie also $\vec{x_L} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}$ und geben Sie $l_1; l_2; l_3$ durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `(\+)?(0)*16((,|\.)(0)*)?;-(0)*3((,|\.)(0)*)?;(\+)?(0)*15((,|\.)(0)*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Einstellungen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Korrekt! Komponentenweises Einsetzen der Lotgeraden in E liefert

$$\begin{aligned} 2 + 4t + 9t + 1 + t = 14t + 3 &= 4 \\ \Leftrightarrow \qquad t &= \tfrac{1}{14} \end{aligned}$$

und mit Einsetzen von $t = \frac{1}{14}$ in die Parameterform der Lotgeraden bekommt man den Lotfußpunkt

$$\vec{x_L} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{14}\\-\frac{3}{14}\\\frac{15}{14}\end{pmatrix}.$$

Wir haben jetzt also zwei Punkte $\vec{x_S}$ und $\vec{x_L}$, die beide auf der Geraden G_P liegen müssen.

Wie erhält man daraus eine Parameterform der Projektionsgeraden? Überlegen Sie und schreiben Sie Ihre Lösung auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Projektionsgerade

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Nein, das war nicht korrekt. Sie sollten diese Rechnung aber unbedingt beherrschen! Gehen Sie es noch einmal Schritt für Schritt durch.

Um die Lotgerade mit der Ebene E zu schneiden, setzen wir die Vektorkomponenten der Lotgeraden (also erste Komponente $1 + 2t$, zweite Komponente $0 - 3t$, dritte Komponente $1 + t$) in E ein. Das liefert uns die Gleichung

$$2 + 4t + 9t + 1 + t = 14t + 3 = 4.$$

Lösen Sie nach t auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Einstellungen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Auflösen nach t liefert

$$\begin{aligned} 2+4t+9t+1+t = 14t+3 &= 4\\ \Leftrightarrow \qquad 14t &= 1\\ \Leftrightarrow \qquad t &= \tfrac{1}{14}. \end{aligned}$$

Dieses t gibt uns an, mit welchem Vorfaktor wir den Lotgeraden-Richtungsvektor auf den Stützvektor addieren müssen, um den Lotfußpunkt $\vec{x_L}$ zu erhalten. Tun Sie das also! Zur Erinnerung: Die Lotgerade ist

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Ansatz: Schnittpunkt und Lotfußpunkt - Lotfußpunkt

Mit Einsetzen von $t = \frac{1}{14}$ in die Parameterform der Lotgeraden bekommt man schließlich den Lotfußpunkt

$$\vec{x_L} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{14}\\-\frac{3}{14}\\\frac{15}{14}\end{pmatrix}.$$

Wir haben jetzt also zwei Punkte $\vec{x_S}$ und $\vec{x_L}$, die beide auf der Geraden G_P liegen müssen.

Wie erhält man daraus eine Parameterform der Projektionsgeraden? Überlegen Sie und schreiben Sie Ihre Lösung auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Ansatz: Lotfußpunkt und Schnittpunkt - Projektionsgerade

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Ansatz: Lotfußpunkt und Schnittpunkt - Projektionsgerade

Um mithilfe der zwei Punkte $\vec{x_L}$ und $\vec{x_S}$ die Projektionsgerade in Parameterform anzugeben, nimmt man

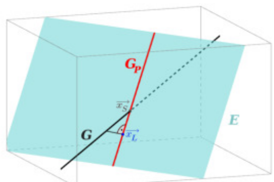
- einen der beiden als Stützvektor, egal welchen;
- und als Richtungsvektor den Vektor $\vec{x_S} - \vec{x_L}$, der von $\vec{x_L}$ nach $\vec{x_S}$ zeigt, oder $\vec{x_L} - \vec{x_S}$, oder irgendein beliebiges Vielfaches davon. Für den Richtungsvektor ist die genaue Skalierung und das Vorzeichen des Vektors unerheblich.

Wir wählen hier $\vec{x_S} = \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$ als Stützvektor und

$$14 \cdot (\vec{x_L} - \vec{x_S}) = 14 \cdot \left(\begin{pmatrix}\frac{16}{14}\\-\frac{3}{14}\\\frac{15}{14}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix} \right) = 14 \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{14}\\\frac{3}{14}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$ als Richtungsvektor,

dann erhalten wir die Parameterform der Projektionsgeraden als

$$G_P = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \vec{x_S} + r \cdot (\vec{x_L} - \vec{x_S}) = \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\, r \in \mathbb{R} \right\}.$$



Im nächsten Schritt geht es weiter mit dem Winkel zwischen G und G_P.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Schnittwinkel der beiden Geraden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

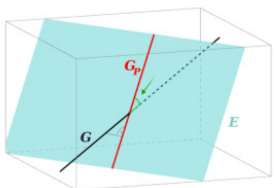
Schnittwinkel der beiden Geraden

Wir haben zur Geraden $G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\, t \in \mathbb{R} \right\}$ die Projektionsgerade

$G_P = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\, r \in \mathbb{R} \right\}$ bei senkrechter Projektion auf die Ebene E

bestimmt.

Für diese Aufgabe fehlt nun noch der (kleinere) Schnittwinkel zwischen diesen beiden Geraden. Dazu bestimmt man den Winkel zwischen den beiden zugehörigen *Richtungsvektoren*.



Grundsätzlich haben wir für einen Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ folgende Formel (im Skript bzw. in Formelsammlungen zu finden):

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \in [-1, 1] \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \right) \in [0, \pi]$$

Dabei muss man aber darauf achten, dass man mit dieser Formel - abhängig von den Vektoren - mal den kleineren, mal den größeren der beiden Schnittwinkel *zwischen den beiden Geraden* erhält. Falls wir den größeren erhalten, müssen wir bei dieser Aufgabenstellung stattdessen den Winkel von π (180°) abziehen. Dazu gleich mehr.

Der erste Schritt, um unseren Schnittwinkel zu bestimmen, ist jedenfalls das Ausrechnen von $\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$ durch Einsetzen der beiden Richtungsvektoren. Tun Sie das!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Schnittwinkel der beiden Geraden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden

Einstellungen

Schnittwinkel der beiden Geraden

Geben Sie nun ins Antwortfeld den Wert $\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$ ein, den Sie durch Einsetzen der beiden Richtungsvektoren von G und G_P bestimmt haben:

(Geben Sie mindestens die ersten drei Nachkommastellen an. Sie müssen nicht runden.)

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(\+)?(0)*0(,|\.)645(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)*
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Schnittwinkel der beiden Geraden
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Schnittwinkel der beiden Geraden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden

Das stimmt nicht - vermutlich haben Sie sich irgendwo verrechnet. Wir gehen es nochmal durch.

Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ erhält man:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{-1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2}} = \ldots$$

(Mit vertauschten x und y wäre das Ergebnis trotzdem dasselbe: Sowohl beim Skalarprodukt im Zähler als auch beim Ausdruck im Nenner ist die Reihenfolge egal.)

Rechnen Sie das weiter bis zum Ergebnis und tragen Sie Ihr Ergebnis erneut ein.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück

Schnittwinkel der beiden Geraden

Einstellungen

Sprung 1: Schnittwinkel der beiden Geraden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden

Ja, mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} \approx 0,645.$$

(Mit vertauschten x und y wäre das Ergebnis trotzdem dasselbe: Sowohl beim Skalarprodukt im Zähler als auch beim Ausdruck im Nenner ist die Reihenfolge egal.)

Bestimmen Sie jetzt noch durch Anwenden des $\arccos$ den Wert für α. Achten Sie darauf, nicht mit dem gerundeten Wert zu rechnen, sondern mit dem Bruch-Wurzel-Ausdruck.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Schnittwinkel der beiden Geraden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden

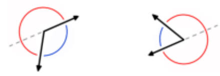
Schnittwinkel der beiden Geraden

Einstellungen

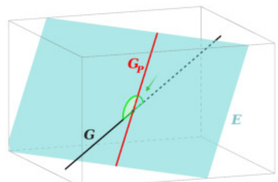
Unter der Voraussetzung $\alpha \in [0, \pi]$ erhalten wir den Bogenmaß-Winkel

$$\alpha \overset{\alpha \in [0,\pi]}{=} \arccos(\cos(\alpha)) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{60}}\right) \approx 0,869.$$

Warum diese Anmerkung zu α? Definiert für Argumente in $[-1, 1]$, erzeugt der $\arccos$ nur Werte in $[0, \pi]$, obwohl erst 2π eine ganze Umdrehung ist. Man bekommt bei dieser Rechnung als Winkel zwischen zwei Vektoren also immer den kleineren Teil der Drehung, in zwei Beispielen blau eingezeichnet:



Speziell bei zwei sich schneidenden **Geraden** ergänzen sich zwei benachbarte Schnittwinkel (unten grün eingezeichnet) immer zu π (bzw. 180°). Davon ist hier nach Aufgabenstellung der kleinere gefordert:



Ist der eben errechnete Bogenmaß-Winkel $\alpha \approx 0,869$ der kleinere Schnittwinkel?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Ja.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Schnittwinkel der beiden Geraden
Antwort 2 :	Nein.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Schnittwinkel der beiden Geraden

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden

Einstellungen

Korrekt.

π ist eine halbe Drehung (entspricht 180°). Mit $\pi \approx 3,1416$ sehen wir sofort $\alpha \approx 0,869 \leq \frac{\pi}{2}$. Also ist α tatsächlich der gesuchte kleinere Schnittwinkel von G und G_P!

Damit ist auch der letzte Teil der Aufgabe gelöst. Beachten Sie noch: Für die Winkelbestimmung war hier ein Taschenrechner nötig. In einer vergleichbaren Klausuraufgabe - wo Sie üblicherweise keinen Taschenrechner benutzen dürfen - sind die Objekte oft so gewählt, dass ein eher "glatter" Bogenmaß-Winkel wie $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ etc. herauskommt. Deshalb sollten Sie sich ein wenig mit den **trigonometrischen Wertetabellen** vertraut machen!

Bevor wir aber zur Ergebnis-Zusammenfassung kommen, noch ein Zwischengedanke...

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Schnittwinkel der beiden Geraden - Wenn man den größeren Schnittwinkel erhält

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden

Nein, das war nicht richtig. Machen Sie sich unbedingt nochmal das **Bogenmaß** klar.

π ist eine halbe Drehung, in Grad: 180°. Wir wissen $\pi \approx 3,1416$, also $\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$ und man kann $\alpha \approx 0,869 \leq \frac{\pi}{2}$ folgern. Also muss α tatsächlich der kleinere Schnittwinkel sein!

Damit ist auch der letzte Teil der Aufgabe gelöst. Beachten Sie noch: Für die Winkelbestimmung war hier ein Taschenrechner nötig. In einer vergleichbaren Klausuraufgabe - wo Sie üblicherweise keinen Taschenrechner benutzen dürfen - sind die Objekte oft so gewählt, dass ein eher "glatter" Bogenmaß-Winkel wie $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ etc. herauskommt. Deshalb sollten Sie sich ein wenig mit den **trigonometrischen Wertetabellen** vertraut machen!

Bevor wir aber zur Ergebnis-Zusammenfassung kommen, noch ein Zwischengedanke...

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Schnittwinkel der beiden Geraden - Wenn man den größeren Schnittwinkel erhält

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden - Wenn man den größeren Schnittwinkel erhält

Einstellungen

Der folgende Abschnitt gehört nicht mehr zur schriftlichen Lösung der Aufgabenstellung. Wir wollen dennoch durchgehen, was passiert, wenn man bei der Winkel-Berechnung nicht direkt den kleinen, sondern den größeren Schnittwinkel erhält:

Nehmen wir z.B. an, es wäre als Richtungsvektor der Geraden G stattdessen der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vorgegeben (das ist der ursprüngliche Richtungsvektor multipliziert mit (-1), also immer noch die gleiche Gerade). Wir nennen den Winkel diesmal β. Dann wäre die Rechnung wie folgt:

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-5}{\sqrt{60}} \approx -0,645.$$

Bestimmen Sie auch hier durch Anwenden des $\arccos$ (auf den ungerundeten Bruch-Wurzel-Term) den Winkel β.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Schnittwinkel der beiden Geraden - Wenn man den größeren Schnittwinkel erhält

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden - Wenn man den größeren Schnittwinkel erhält

Man bekommt

$$\beta \overset{\beta \in [0,\pi]}{=} \arccos(\cos(\beta)) = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{60}}\right) \approx 2,2725.$$

Wieder erinnert man sich an $\pi \approx 3,1416$ und sieht damit sofort $\beta > \frac{\pi}{2}$. Ihnen muss also auffallen, dass Sie mit β den größeren der beiden Schnittwinkel berechnet haben. Die Aufgabenstellung fordert jedoch den kleineren.

Wie erhält man jetzt aus β den anderen, kleineren Schnittwinkel? Klicken Sie erst weiter, wenn Sie es sich selbst überlegt haben.

Schnittwinkel der beiden Geraden - Wenn man den größeren Schnittwinkel erhält

Einstellungen

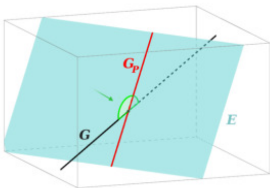
Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Schnittwinkel der beiden Geraden - Wenn man den größeren Schnittwinkel erhält

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Schnittwinkel der beiden Geraden - Wenn man den größeren Schnittwinkel erhält

Wir haben mit $\beta \approx 2,2725$ den größeren Bogenmaß-Schnittwinkel wie hier veranschaulicht:



Den kleineren Schnittwinkel im Bogenmaß erhalten wir, indem wir β von π - also von der halben Umdrehung - abziehen: Somit ist der geforderte kleinere Bogenmaß-Schnittwinkel gegeben durch $\pi - \beta \approx 3,1416 - 2,2725 \approx 0,869$.

Nun aber wirklich zur Zusammenfassung.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zur Ergebniszusammenfassung
Sprung 1:	Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

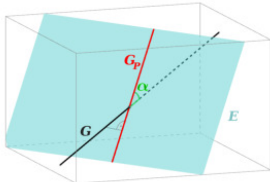
Einstellungen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Wir haben zur Geraden G und zur Ebene E die Projektionsgerade

$$G_P = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} = \vec{s} + r \cdot \overrightarrow{x_{G_P}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

bestimmt, die durch orthogonale Projektion von G auf E entsteht.



Für den (kleineren) Schnittwinkel α haben wir den Bogenmaß-Wert

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{(60)}}\right) \approx 0,869$$

berechnet.

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Ende der Aufgabe!
Sprung 1:	Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

1. BSA zu separablen Differentialgleichungen

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ► 17ss-02263 ► Lange Aufgaben ► Gewöhnliche Differentialgleichung 1 ► Bearbeiten ► Erweitert ► Bearbeiten

Gewöhnliche Differentialgleichung 1

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Nachschlagen"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Inhaltsseite

Vorbemerkung

Einstellungen

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung lautet:

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit

$$f(t, y) = \cos(t) \cdot \sin^2(y).$$

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie die stationären Lösungen der Differentialgleichung.
3. Untersuchen Sie für das Anfangswertproblem $y' = f(t, y), \;\; y(0) = \frac{\pi}{2}$ die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Bestimmen Sie im Fall der Existenz eine Lösung des Anfangswertproblems.

Dies werden Sie im Folgenden Schritt für Schritt lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Art der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Art der DGL

Als allererstes bestimmen wir, um welche Art von Differentialgleichung es sich bei $y' = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$ handelt. Zum Untersuchen einer DGL hilft das ungemein, da es für bestimmte Arten von DGLs "Rezepte" zum Lösen gibt.

Überlegen Sie also!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Art der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Art der DGL

Was für eine Art von DGL ist $y' = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$?

Art der DGL

Einstellungen

Multiple-Choice

Antwort 1 : Lineare DGL erster Ordnung

Feedback 1

Bewertung 0

Sprung Art der DGL - Lineare DGL erster Ordnung?

Antwort 2 : Bernoulli-DGL

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Art der DGL - Bernoulli-DGL?

Antwort 3: Separable DGL

Feedback 3

Bewertung 1

Sprung Art der DGL - Separable DGL?

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Art der DGL - Lineare DGL erster Ordnung?

Nein!

Eine lineare DGL erster Ordnung ist von der Form $y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$ mit reellen Funktionen a und b.

Auf unseren Term $f(t, y) = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$ trifft das aber nicht zu: $y(t)$ darf in einer linearen DGL als Faktor an einer Funktion $a(t)$ stehen, aber nicht in einem echt verketteten Ausdruck wie $\sin^2(y)$ auftauchen.

(Falls Sie sich fragen, wann man y und wann man $y(t)$ schreibt: Grundsätzlich ist beides korrekt. Aus Einfachheit und zur Übersicht schreibt man meistens y; wenn explizit betont werden soll, dass y eine Funktion in t ist, schreibt man eher $y(t)$.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Deshalb geht es hier zurück.

Sprung 1: Art der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite

einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Art der DGL - Bernoulli-DGL?

Nein!

Eine Bernoulli-DGL ist von der Form $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\alpha$ mit reellen Funktionen a, b sowie einem $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Auf unseren Term $f(t, y) = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$ trifft das aber nicht zu: In einer Bernoulli-DGL darf $y(t)$ höchstens als Faktor an einer Funktion $b(t)$ stehen und einen Exponenten haben, aber nicht in einem echt verketteten Ausdruck wie $\sin^2(y)$ auftauchen.

(Falls Sie sich fragen, wann man y und wann man $y(t)$ schreibt: Grundsätzlich ist beides korrekt. Aus Einfachheit und zur Übersicht schreibt man meistens y; wenn explizit betont werden soll, dass y eine Funktion in t ist, schreibt man eher $y(t)$.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Deshalb geht es hier zurück.

Sprung 1: Art der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Art der DGL - Separable DGL?

Korrekt, es handelt sich um eine separable DGL!

Eine separable DGL ist von der Form $y'(t) = \omega(t) \cdot g(y(t))$ mit stetigen reellen Funktionen ω, g. Man hat also ein Produkt aus zwei Faktoren, wobei der eine nur von t abhängt, der andere nur von y. Offensichtlich trifft das auf unsere Gleichung zu:

$$y' = \underbrace{\cos(t)}_{\omega(t)} \cdot \underbrace{\sin^2(y)}_{g(y(t))}$$

Zu separablen DGLs kann man mithilfe der "Separation der Variablen" Lösungen finden. Das wird uns gleich helfen.

(Falls Sie sich fragen, wann man y und wann man $y(t)$ schreibt: Grundsätzlich ist beides korrekt. Aus Einfachheit und zur Übersicht schreibt man meistens y; wenn explizit betont werden soll, dass y eine Funktion in t ist, schreibt man eher $y(t)$.)

Wir beginnen jetzt jedenfalls mit den eigentlichen Aufgabenteilen, zuerst mit dem Definitionsbereich der DGL.

Inhaltsseite

Art der DGL - Separable DGL?

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Definitionsbereich der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Definitionsbereich der DGL

Wir bestimmen den maximalen Definitionsbereich D_f der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$.

Man muss also schauen, für welche Kombinationen von t und y der Term $f(t, y) = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$ definiert ist. Bestimmen Sie dies und schreiben Sie den Definitionsbereich auf. Erst danach klicken Sie weiter!.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Definitionsbereich der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Definitionsbereich der DGL

$f(t, y)$ ist als Produkt von $\cos(t)$ und $\sin^2(y)$ genau dann definiert, wenn alle beiden Faktoren definiert sind. Da im einen Faktor nur t und im anderen nur y als Variable vorkommt, ist das hier ganz einfach zu bestimmen:

- $\cos(t)$ ist offenbar definiert für alle $t \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2(y)$ ist ebenfalls definiert für alle $y \in \mathbb{R}$.

Als Schnitt dieser beiden erhält man dann für $f(t, y) = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$ den maximalen Definitionsbereich

$$D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Damit ist der erste Aufgabenteil gelöst.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stationäre Lösungen der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Einstellungen

Jetzt zu den **stationären Lösungen** der DGL.

Da eine stationäre Lösung $y(t)$ nach Definition konstant sein soll, muss ihre Ableitung $y'(t)$ überall gleich 0 sein. In unserem Fall bedeutet das

$$y'(t) = \cos(t) \cdot \sin^2(y(t)) \overset{!}{=} 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Bei einer separablen DGL wie in dieser Aufgabe sind die stationären Lösungen besonders einfach zu bestimmen: Man findet sie durch das Gleichsetzen von $g(y) = \sin^2(y) \overset{!}{=} 0$ und Auflösen nach y.

Tun Sie dies jetzt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stationäre Lösungen der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Für welche Werte $r \in \mathbb{R}$ bekommen wir stationäre Lösungen $y(t) = r$ zu unserer DGL $y' = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$?

Geben Sie alle dafür möglichen Werte durch Semikolon getrennt in der Form

$$Wert1; Wert2; \ldots$$

von klein nach groß geordnet ins Eingabefeld ein. Falls es keine stationäre Lösungen gibt, geben Sie das Unterstrich-Zeichen "_" ein. Falls es unendlich viele verschiedene stationäre Lösungen gibt, geben Sie das Und-Zeichen "&" ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	\&
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Stationäre Lösungen der DGL
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Stationäre Lösungen der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Einstellungen

Korrekt. Für $y \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} g(y) = \sin^2(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \sin(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y &= k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist also die Funktion

$$y_k(t) = k\pi, \quad t \in \mathbb{R}$$

eine stationäre Lösung unserer DGL.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stationäre Lösungen der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Das war nicht korrekt. Für $y \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} g(y) = \sin^2(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \sin(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y &= k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Beachten Sie bei dieser Äquivalenzumformung, dass es durchaus Sonderfälle gibt, bei denen man äquivalent aus einem quadratischen Ausdruck die Wurzel ziehen kann. Etwa wenn 0 auf einer Seite steht: Es gilt für $z \in \mathbb{R}$: $z^2 = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; z = 0$.
Die **Nullstellen des Sinus (und Kosinus)** sollten Sie außerdem unbedingt kennen!

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist also die Funktion

$$y_k(t) = k\pi, \quad t \in \mathbb{R}$$

eine stationäre Lösung unserer DGL.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stationäre Lösungen der DGL

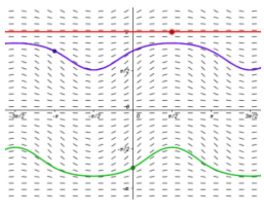
Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Einstellungen

Wir wollen uns die Situation kurz grafisch klarmachen.

Als Differentialgleichung **erster Ordnung** kann $y' = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$ in der Ebene visualisiert werden. Jeder Punkt (t, y) in der Ebene erhält durch die DGL einen Steigungswert y'. Diese Werte lassen sich als kleine Vektoren mit entsprechender Steigung in die Ebene zeichnen, und man erhält ein sogenanntes *Richtungsfeld*. In einem Richtungsfeld kann man erkennen, wie Lösungsgraphen ungefähr verlaufen können: Der Graph muss nämlich der Richtung der Vektoren folgen.



- Eingezeichnet sind drei mögliche Lösungsgraphen der DGL. Diese erfüllen zum Beispiel die Anfangsbedingungen $y(0) = -\frac{3}{4}\pi$ bzw. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ bzw. $y(-\pi) = \frac{3}{4}\pi$.
- Vektorsteigungen gibt es für alle t und alle y, da der Definitionsbereich der DGL ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.
- Im gezeigten Ausschnitt erkennt man bei $y = 0, \;\pi, \;-\pi$ an den horizontalen Vektorsteigungen stationäre (konstante) Lösungen. Insgesamt gibt es diese nur bei $y = k\pi$. Woanders kann es keine stationären Lösungen geben; im Richtungsfeld erkennt man das daran, dass ein konstant horizontaler Graph auf anderer Höhe die Vektorrichtungen verletzen würde.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP

Wir kommen jetzt zum letzten und größten Aufgabenteil: Man soll zum AWP

$$y'(t) = \cos(t) \cdot \sin^2(y(t)), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersuchen.

Wir fangen zuerst mit der Existenz an, indem wir eine Lösung bestimmen!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Lösung des AWP

Sprung 1: Lösung des AWP - Allgemeines Lösungsverfahren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Lösung des AWP - Allgemeines Lösungsverfahren

Zunächst zum allgemeinen Vorgehen bei separablen DGLs mit AWP $y' = \omega(t) \cdot g(y),\ y(t_0) = y_0$ für stetige reelle Funktionen ω, g. Diese kann man mit der sogenannten "Separation der Variablen" lösen.

Die Voraussetzung für die Anwendung ist $g(y_0) \neq 0$. Das braucht man, weil im Verlauf des Verfahrens durch $g(y)$ geteilt wird. Deshalb gilt auch am Ende die gefundene Lösung $y(t)$ nur auf dem größtmöglichen Bereich um t_0 herum, auf dem noch $g(y(t)) \neq 0 \ \ \forall t$ ist. Wir nutzen dann die Leibniz-Notation $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ und formen die DGL um:

$$\begin{aligned}
& y'(t) &&= \omega(t) \cdot g(y(t)) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dt} &&= \omega(t) \cdot g(y(t)) \\
\overset{g(y(t))\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{\frac{dy}{dt}}{g(y(t))} &&= \omega(t) \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{\frac{dy}{dt}}{g(y(t))} dt &&= \int \omega(t) dt + c \ \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{g(y(t))} dy &&= \int \omega(t) dt + c \ \text{ für ein } c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Die Hauptidee bei dieser Umformung ist es, am Ende auf der linken Seite der Gleichung einen Ausdruck nur abhängig von y zu haben, auf der rechten Seite einen Ausdruck nur abhängig von t. Das erklärt auch den Namen "Separation der Variablen".

(Das c wird eigentlich bereits durch die unbestimmten Integrale impliziert, ist hier aber zur besseren Erinnerung dazugeschrieben.)

Aus der entstehenden Gleichung erhält man c durch die Anfangsbedingung und dann die Funktion y durch Umformen der Gleichung.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP - Separation der Variablen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Separation der Variablen

Lösung des AWP - Separation der Variablen

Einstellungen

Zurück zu unserer Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{\cos(t)}_{\omega(t)} \cdot \underbrace{\sin^2(y)}_{g(y)}$$

mit AWP $y(0) = \frac{\pi}{2}$. Mit diesem Anfangswert ist $g(y(0)) = g(\frac{\pi}{2}) = \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1^2 \neq 0$, genau wie wir folgende Separation der Variablen benötigen:

In einer geeigneten Umgebung für t um $t_0 = 0$ ist $\sin^2(y(t)) \neq 0$ und man kann den Term durch Divisi
Seite bringen. Tun Sie das und führen Sie die Umformung gemäß dem "Rezept" auf voriger Seite durch. S
erhalten schließlich eine Gleichung der Form

$$\int \frac{1}{A} dy = \int B\, dt + c \text{ für ein } c \in \mathbb{R}..$$

Geben Sie die möglichst weit vereinfachten Terme A und B in der Form $A; B$ durch Semikolon getrennt
Eingabefeld ein. Benutzen Sie dabei die Zeichen +-*/^)(sowie Kleinbuchstaben für Variablen und Funktio
Leerstellen sollen nicht eingegeben werden. Funktionsargumente wie in $g(t)$ werden eingeklammert.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	`(((\+)?sin\^2y(\(t)?\))|((\+)?(\+)?sin\^2\(y(\(t)?\)\))|(\+)?(\+)?sin\(y(\(t)?\)\)^2|(\+)?(\+)?\(((\+)?sin` `\));(cost|cos\(t\))`
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Lösung des AWP - Separation der Variablen
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösung des AWP - Separation der Variablen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Separation der Variablen

Lösung des AWP - Separation der Variablen

Einstellungen

Korrekt! Man hat als Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
& y' &&= \cos(t) \cdot \sin^2(y) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dt} &&= \cos(t) \cdot \sin^2(y) \\
\overset{\sin^2(y)\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{\frac{dy}{dt}}{\sin^2(y)} &&= \cos(t) \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{\frac{dy}{dt}}{\sin^2(y)} dt &&= \int \cos(t) dt + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{\sin^2(y)} dy &&= \int \cos(t) dt + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Um die Gleichung weiter nach der Funktion y auflösen zu können, müssen wir jetzt die beiden Stammfunktionen bestimmen. Tun Sie das.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Separation der Variablen

Lösung des AWP - Separation der Variablen

Einstellungen

Das war nicht korrekt. Gehen Sie unbedingt Ihre Umformungsschritte genau durch und vergleichen Sie sie mit den untenstehenden. Offenbar haben Sie dabei einen Fehler gemacht.

Man hat als Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
& y' &&= \cos(t) \cdot \sin^2(y) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dt} &&= \cos(t) \cdot \sin^2(y) \\
\overset{\sin^2(y)\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{\frac{dy}{dt}}{\sin^2(y)} &&= \cos(t) \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{\frac{dy}{dt}}{\sin^2(y)} dt &&= \int \cos(t) dt + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{\sin^2(y)} dy &&= \int \cos(t) dt + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Um die Gleichung weiter nach der Funktion y auflösen zu können, müssen wir jetzt die beiden Stammfunktionen bestimmen. Tun Sie das.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Geben Sie die Stammfunktionen $\int \frac{1}{\sin^2(y)} dy = C$ und $\int \cos(t) dt = D$ in der Form $C; D$ durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld unten ein.

Lassen Sie dabei jegliche additive Konstante $+c,\ c \in \mathbb{R}$ weg und vereinfachen Sie die beiden Terme soweit wie möglich. Benutzen Sie die Zeichen +-*/^)(sowie Kleinbuchstaben für Variablen und Funktionsnamen. Leerstellen sollen nicht eingegeben werden. Funktionsargumente wie in $g(t)$ werden eingeklammert.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	`(-coty(\(t)?\)|-cot\(y(\(t)?\)\)|-cot\(y(\(t)?\)\));` `((\+)?sint|(\+)?sin\(t\)|(\+)?sin\(t\))`
Feedback 1	

Einstellungen

Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Bewertung	1
Sprung	Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Das war nicht korrekt.

Beides sind aber Standardintegrale, die Sie kennen oder zumindest leicht nachschlagen können müssen!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Deshalb geht es hier zurück.
Sprung 1:	Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Korrekt! Beide Stammfunktionen sind Standardintegrale, bei denen man keine großen Rechnungen durchführen muss. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} y' &= \cos(t)\cdot\sin^2(y) \\ &\dots \\ \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sin^2(y)}dy &= \int \cos(t)dt + c \quad \text{für ein } c\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad -\cot(y) &= \sin(t) + c \quad \text{für ein } c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Obwohl wir damit die Lösung y noch nicht genau kennen, wissen wir, dass sie auf jeden Fall obige Gleichung erfüllen muss. Insbesondere muss die Gleichung auch dann gelten, wenn man die Anfangsbedingung $t_0 = 0,\ y(t_0) = y_0 = \frac{\pi}{2}$ einsetzt. Dadurch kann man den passenden Wert für c herausfinden und schließlich noch nach y auflösen, um den Funktionsterm der Lösung zu erhalten.

Tun Sie das!

Einstellungen

Lösung des AWP - Stammfunktionen bestimmen

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Setzen Sie also die Anfangsbedingung $(t_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ in die Gleichung

$$-\cot(y) = \sin(t) + c$$

ein. Bestimmen Sie dann durch Umformen, welchen Wert c haben muss, damit die Funktion die Anfangsbedingung erfüllt. Geben Sie schließlich diesen Wert ins Antwortfeld ein, gerundet auf zwei Nachkommastellen.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(-|\+)?(0)*0((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Nein, Ihre Eingabe war nicht korrekt.

Einsetzen von $t_0 = 0,\ y(t_0) = y_0 = \frac{\pi}{2}$ führt zu $-\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) + c$.

Lösen Sie dies nach c auf!

(Dazu benötigen Sie natürlich auch den Wert von $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$*, schlagen Sie diesen notfalls nach.)*

Inhaltsseite

Einstellungen

Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Inhalt 1:	Zurück zur Antworteingabe
Sprung 1:	Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Korrekt, es ist

$$\begin{aligned} -\cot\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin(0) + c \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 0 + c \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= c. \end{aligned}$$

Jetzt bleibt nur noch, die durch Einsetzen von $c = 0$ entstehende Gleichung

$$-\cot(y) = \sin(t)$$

nach y aufzulösen, um den Lösungsterm zu erhalten. Tun Sie dies.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Lösungsterm bestimmen

Für das Auflösen nach y benötigt man nur eine kurze Umformung. **Da** $\cot$ **ganz** $\mathbb{R}$ **als Wertebereich hat**, kann man ohne weitere Einschränkungen die Umkehrfunktion arccot anwenden und erhält

$$\begin{aligned} -\cot(y) &= \sin(t) \\ \Leftrightarrow \quad \cot(y) &= -\sin(t) \\ \Leftrightarrow \quad y &= \operatorname{arccot}(-\sin(t))\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Lösung $y(t)$ gefunden, welche zumindest in einer Umgebung von $t_0 = 0$ das AWP $y' = \cos(t)\cdot\sin^2(y),\quad y(0) = \frac{\pi}{2}$ löst.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Einstellungen

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Die Funktion $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))$, unsere Lösung des AWP, haben wir eben für alle $t\in\mathbb{R}$ aufgestellt. Jetzt müssen wir aber nochmal aufpassen:

Für die Durchführung der Separation der Variablen musste gelten $g(y(t)) = \sin^2(y(t)) \neq 0$. Wir können also um $t_0 = 0$ herum nur soweit sicherstellen, dass unser gefundenes $y(t)$ wirklich eine Lösung der DGL ist, solange $g(y(t)) \neq 0$ gilt.

Wir müssen jetzt also von $t_0 = 0$ ausgehend "nach links und rechts" schauen, wann zuerst $g(y(t)) = 0$ wird. An diesen Stellen hört dann der Gültigkeitsbereich unserer Lösung y auf, und eventuell müssen wir den Bereich für die Lösung entsprechend weiter einschränken.

Versuchen Sie das selbst, indem Sie $g(y(t))$ bestimmen!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Indem wir unsere gefundene Lösung $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))$ einsetzen, erhalten wir

$$g(y(t)) = \sin^2(y(t)) = \sin^2(\operatorname{arccot}(-\sin(t))).$$

Können Sie damit bereits überprüfen, wann es ausgehend von $t_0 = 0$ nach links und rechts die ersten Nullstellen von $g(y(t))$ gibt? Überlegen Sie genau!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Tatsächlich reicht schon die Darstellung $g(y(t)) = \sin^2(\operatorname{arccot}(-\sin(t)))$!

Einstellungen

Es ist nämlich $\operatorname{arccot}(x) \in (0, \pi)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ und damit $\sin(\operatorname{arccot}(x)) > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. *(Machen Sie sich das am Verlauf des Sinus klar!)* Daraus folgt dann

$$g(y(t)) = \sin^2(\operatorname{arccot}(-\sin(t))) \neq 0\ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Was können wir jetzt über die Gültigkeit unserer gefundenen AWP-Lösung $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))$ sagen? Schreiben Sie auf!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich
Inhalt 2:	Ich habe den Term von g(y(t)) noch weiter umgeformt.
Sprung 2:	Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Ja, man kann den Term für $g(y(t))$ auch noch umformen. Es gilt nämlich die Gleichheit

$$\sin^2(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{1}{1+x^2}\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

und damit

$$g(y(t)) = \sin^2(\operatorname{arccot}(-\sin(t))) = \frac{1}{1+\sin^2(t)}.$$

An diesem Term kann man dann sofort $g(y(t)) \neq 0\ \ \forall t \in \mathbb{R}$ erkennen. Eine Formel wie die obige ist aber schon ziemlich speziell und kann kaum als Prüfungswissen verlangt werden.

Auch hier: Was können wir jetzt über die Gültigkeit unserer gefundenen AWP-Lösung $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))$ sagen? Schreiben Sie auf!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Was gilt für die gefundene DGL-Lösung $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))$?

Einstellungen

Multiple-Choice

Antwort 1:	Diese Lösung löst unsere DGL für alle $t \in \mathbb{R}$.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich
Antwort 2 :	DIese Lösung löst unsere DGL nur für $t \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Korrekt!

Unsere gefundene Lösung ist um $t_0 = 0$ herum solange gültig, wie $g(y(t))$ keine Nullstelle hat. Eben haben wir aber gezeigt $g(y(t)) \neq 0\ \ \forall t \in \mathbb{R}$, der Term hat also gar keine Nullstellen.

Deshalb ist unser gefundenes $y(t)$ für alle reellen t gültig. Wir erhalten also für unser AWP $y(0) = \frac{\pi}{2}$ die Lösung

$$y:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \operatorname{arccot}(-\sin(t))\,.$$

Die Existenz einer Lösung ist damit gezeigt.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Graph

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Lösung des AWP - Gültigkeitsbereich

Das war nicht richtig.

Einstellungen

Unsere gefundene Lösung ist um $t_0 = 0$ herum solange gültig, wie $g(y(t))$ keine Nullstelle hat. Eben haben wir aber gezeigt $g(y(t)) \neq 0\ \ \forall t \in \mathbb{R}$, der Term hat also gar keine Nullstellen.

Deshalb ist unser gefundenes $y(t)$ für alle reellen t gültig. Wir erhalten also für unser AWP $y(0) = \frac{\pi}{2}$ die Lösung

$$y:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \operatorname{arccot}(-\sin(t))\,.$$

Die Existenz einer Lösung ist damit gezeigt.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Graph

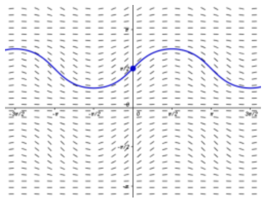
Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Graph

Wir haben also mittels Separation der Variablen die DGL-Lösung

$$y:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \operatorname{arccot}(-\sin(t))$$

für das AWP $y(0) = \frac{\pi}{2}$ gefunden. Zum Veranschaulichung sehen wir uns dies noch einmal im Richtungsfeld an (auch wenn Sie es in einer Prüfung höchstwahrscheinlich nicht zeichnen müssten):



Im Richtungsfeld kann man schon erkennen, dass die Lösung vermutlich eindeutig ist: Man sieht keine andere Möglichkeit, von diesem Anfangswert ausgehend den Vektorrichtungen zu folgen. Natürlich reicht eine solche anschauliche Vermutung aber nicht aus.

Inhaltsseite

Lösung des AWP - Graph

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Einstellungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Entsprechend der Aufgabenstellung untersuchen wir jetzt noch die Eindeutigkeit unserer AWP-Lösung.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Üblicherweise versucht man mit dem **Satz von Picard-Lindelöf**, die (lokale) Eindeutigkeit einer DGL-Lösung zu zeigen. Sehr grob gesagt ist dabei die (lokale) **Lipschitz-Stetigkeit** von $f(t, y)$ bezüglich der Variable y die Voraussetzung, aus der man dann die (lokale) Eindeutigkeit der Lösung folgern kann.

Schauen Sie sich unbedingt alle Definitionen dazu noch einmal an, falls Sie sie nicht mehr im Kopf haben.

Wie kann man Lipschitz-Stetigkeit auf einfache Art zeigen? Unter anderem folgende Möglichkeiten sollten Sie kennen:

- Ist $f(t, y)$ für y aus ganz $\mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit **beschränkter partieller Ableitung nach** y, dann ist $f(t, y)$ global lipschitzstetig in y.
- Ist $f(t, y)$ auf einem **beschränkten und abgeschlossenen Rechteck** stetig sowie stetig partiell differenzierbar nach y, dann ist die Funktion zumindest auf diesem Rechteck lipschitzstetig in y.

Welchen Ansatz schätzen Sie hier sinnvoller ein?

Multiple-Choice

Antwort 1:	Globale Beschränktheit der partiellen Ableitung
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Lösung des AWP - Eindeutigkeit
Antwort 2 :	Stetige partielle Differenzierbarkeit nach y auf abgeschlossenem Rechteck

Einstellungen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Nein, das Nachweisen der Lipschitz-Stetigkeit durch stetige partielle Differenzierbarkeit nach y auf einem beschränkten und abgeschlossenen Rechteck ist hier nicht die beste Wahl.

Damit können wir nämlich nicht Lipschitz-Stetigkeit für y aus ganz $\mathbb{R}$ nachweisen, und deshalb dann nur die lokale, nicht jedoch die globale Version des Satzes von Picard-Lindelöf anwenden. Wir würden also nur die lokale Eindeutigkeit der gefundenen Lösung zeigen können, nicht die globale Eindeutigkeit.

Unsere Lösung $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))$ ist aber gültig auf ganz $\mathbb{R}$, und vielleicht sogar auch eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$. Wir sollten es besser zuerst mit dem anderen Ansatz versuchen.

Wir nutzen also stattdessen die Beschränktheit der partiellen Ableitung.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Der Ansatz über die Beschränktheit der Ableitung ist hier eine gute Wahl. Man kann damit im besten Fall für y aus ganz $\mathbb{R}$ Lipschitz-Stetigkeit zeigen und damit dann den Satz von Picard-Lindelöf sogar in der globalen Version anwenden.

Denn unsere Lösung $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ gültig und vielleicht sogar auch auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig. Also wollen wir das gegebenenfalls auch nachweisen können!

Leiten Sie also $f(t,y) = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$ partiell nach y ab!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Man erhält die partielle Ableitung

$$\partial_y f(t,y) = \cos(t) \cdot 2\sin(y) \cdot \cos(y).$$

Was können Sie über die Beschränktheit/Unbeschränktheit der partiellen Ableitung nach y sagen? Schreiben Sie auf.

Multiple-Choice

Antwort 1:	Die partielle Ableitung ist beschränkt.
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Lösung des AWP - Eindeutigkeit
Antwort 2 :	Die partielle Ableitung ist unbeschränkt.
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Ja! Bekanntlich gilt $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit

$$\begin{aligned} |\partial_y f(t,y)| &= |\cos(t) \cdot 2\sin(y) \cdot \cos(y)| \\ &= |\cos(t)| \cdot |2\sin(y)| \cdot |\cos(y)| \\ &\leq 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \quad \forall t,y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Auch wenn das eine recht grobe Abschätzung ist, wissen wir jetzt jedenfalls, dass die partielle Ableitung nach y nach unten beschränkt ist durch -2 und nach oben durch $+2$.

Schreiben Sie auf, was das für die Eindeutigkeit unserer Lösung bedeutet. Achten Sie insbesondere darauf, wie Sie den Satz von Picard-Lindelöf anwenden.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Einstellungen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Nein, das stimmt nicht!

Gehen Sie es genau durch. Zuerst müssen Sie unbedingt wissen, dass $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schreiben Sie mithilfe dieser Abschätzungen auf, was für $|\partial_y f(t,y)|$ gelten muss.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Mit den eben genannten Abschätzungen für $\sin$ und $\cos$ erhält man

$$\begin{aligned} |\partial_y f(t,y)| &= |\cos(t) \cdot 2\sin(y) \cdot \cos(y)| \\ &= |\cos(t)| \cdot |2\sin(y)| \cdot |\cos(y)| \\ &\leq 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \quad \forall t,y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Auch wenn das eine recht grobe Abschätzung ist, wissen wir jetzt jedenfalls, dass die partielle Ableitung nach y nach unten beschränkt ist durch -2 und nach oben durch $+2$.

Schreiben Sie auf, was das für die Eindeutigkeit unserer Lösung bedeutet.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Wir haben eben gezeigt, dass die partielle Ableitung $\partial_y f(t,y)$ beschränkt ist. Wie folgt daraus, dass $f(t,y) = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$ lipschitz-stetig in y ist? Falls Sie den Zusammenhang noch nicht kennen, machen Sie sich das unbedingt klar!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Wie folgt aus der Beschränktheit der partiellen Ableitung die Lipschitz-Stetigkeit in y? Man kann es z.B. mit dem **Mittelwertsatz** zeigen. Wir schauen uns das bei unserem $f(t,y) = \cos(t) \cdot \sin^2(t)$ an:

- Wir haben eben gezeigt $|\partial_y f(t,y)| \leq 2$.
- Also gilt mit dem MWS für beliebige $t, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{f(t,y_1) - f(t,y_2)}{y_1 - y_2} \right| \overset{\text{MWS}}{=} |\partial_y f(t,\xi)| \leq 2 \text{ für ein } \xi \in [y_1, y_2]$$

$$\Rightarrow \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq 2 \cdot |y_1 - y_2|$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ lipschitz-stetig in } y$$

Mit diesem Ergebnis können wir jetzt den Satz von Picard-Lindelöf anwenden. Tun Sie das, und achten Sie dabei genau auf die Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP - Eindeutigkeit

Jetzt haben wir alles, um den Satz von Picard-Lindelöf anwenden zu können:

- Das Anfangstupel $(0, \frac{\pi}{2})$ liegt im Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von $f(t,y)$.
- $f(t,y)$ ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}$ stetig.
- $f(t,y)$ ist bzgl. y lipschitz-stetig.

$\overset{\text{Satz von P-L}}{\Rightarrow}$ Das AWP $y' = f(t,y),\ y(0) = \frac{\pi}{2}$ hat genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Unsere schon gefundene Lösung $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))\,,\ t \in \mathbb{R}$ zum AWP $y(0) = \frac{\pi}{2}$ ist also eindeutig! Damit ist auch die letzte Teilaufgabe gelöst.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zur Ergebniszusammenfassung
Sprung 1:	Zusammenfassung der Ergebnisse

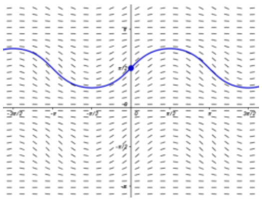
Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Einstellungen

Wir haben zur separablen DGL $y' = f(t, y) = \cos(t) \cdot \sin^2(y)$...

- zuerst den Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der DGL bestimmt,
- dann die unendlich vielen stationären Lösungen $y_k(t) = k\pi,\ t \in \mathbb{R}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ bestimmt,
- und schließlich zum Anfangswertproblem $y' = f(t, y),\ y(0) = \frac{\pi}{2}$ durch Separation der Variablen die Lösung $y(t) = \operatorname{arccot}(-\sin(t))$ erhalten, die für $t \in \mathbb{R}$ gültig und außerdem eindeutig ist.



Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ende der Aufgabe!

Sprung 1: Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

2. BSA zu separablen Differentialgleichungen

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ► 17ss-02263 ► Lange Aufgaben ► Gewöhnliche Differentialgleichung 2 ► Bearbeiten ► Erweitert ► Bearbeiten

Gewöhnliche Differentialgleichung 2

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Nachschlagen"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Inhaltsseite

Einstellungen

Vorbemerkung

Inhalt 1:	Zur Aufgabe!
Sprung 1:	Aufgabenstellung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung lautet diesmal:

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit

$$f(t,y) = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}.$$

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie die stationären Lösungen der Differentialgleichung.
3. Untersuchen Sie für das Anfangswertproblem $y' = f(t, y), \quad y(0) = 0$ die Existenz von Lösungen. Bestimmen Sie im Fall der Existenz eine Lösung des Anfangswertproblems.

Dies werden Sie im Folgenden Schritt für Schritt lösen.

(Beachten Sie: In dieser Aufgabenstellung ist beim AWP nicht nach der Eindeutigkeit von Lösungen gefragt.)

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Art der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Art der DGL

Als allererstes bestimmen wir, um welche Art von Differentialgleichung es sich bei $y' = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$ handelt. Zum Untersuchen einer DGL hilft das ungemein, da es für bestimmte Arten von DGLs "Rezepte" zum Lösen gibt.

Überlegen Sie also!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Art der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Art der DGL

Was für eine Art von DGL ist $y' = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$?

Multiple-Choice

Antwort 1 :	Lineare DGL erster Ordnung
Feedback 1	
Bewertung	0
Sprung	Art der DGL - Lineare DGL erster Ordnung?
Antwort 2 :	Bernoulli-DGL
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Art der DGL - Bernoulli-DGL?
Antwort 3:	Separable DGL
Feedback 3	
Bewertung	1
Sprung	Art der DGL - Separable DGL?

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Art der DGL - Lineare DGL erster Ordnung?

Nein!

Eine lineare DGL erster Ordnung ist von der Form $y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$ mit reellen Funktionen a und b.

Auf unseren Term $f(t,y) = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$ trifft das aber nicht zu: $y(t)$ darf in einer linearen DGL als Faktor an einer Funktion $a(t)$ stehen, aber nicht in einem echt verketteten Ausdruck wie $\sqrt{1-y^2}$ auftauchen.

(Falls Sie sich fragen, wann man y und wann man $y(t)$ schreibt: Grundsätzlich ist beides korrekt. Aus Einfachheit und zur Übersicht schreibt man meistens y; wenn explizit betont werden soll, dass y eine Funktion in t ist, schreibt man eher $y(t)$.)

Inhaltsseite

Einstellungen

Art der DGL - Lineare DGL erster Ordnung?

Inhalt 1:	Deshalb geht es hier zurück.
Sprung 1:	Art der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Art der DGL - Bernoulli-DGL?

Nein!

Eine Bernoulli-DGL ist von der Form $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\alpha$ mit reellen Funktionen a, b sowie einem $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Auf unseren Term $f(t,y) = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$ trifft das aber nicht zu: In einer Bernoulli-DGL darf $y(t)$ höchstens als Faktor an einer Funktion $b(t)$ stehen und einen Exponenten haben, aber nicht in einem echt verketteten Ausdruck wie $\sqrt{1-y^2}$ auftauchen.

(Falls Sie sich fragen, wann man y und wann man $y(t)$ schreibt: Grundsätzlich ist beides korrekt. Aus Einfachheit und zur Übersicht schreibt man meistens y; wenn explizit betont werden soll, dass y eine Funktion in t ist, schreibt man eher $y(t)$.)

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Deshalb geht es hier zurück.
Sprung 1:	Art der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Art der DGL - Separable DGL?

Einstellungen

Art der DGL - Separable DGL?

Korrekt, es handelt sich um eine separable DGL!

Eine separable DGL ist von der Form $y'(t) = \omega(t) \cdot g(y(t))$ mit stetigen reellen Funktionen ω, g. Man hat also ein Produkt aus zwei Faktoren, wobei der eine nur von t abhängt, der andere nur von y. Offensichtlich trifft das auf unsere Gleichung zu:

$$y' = \underbrace{\frac{\pi}{2}e^{2t}}_{\omega(t)} \cdot \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{g(y(t))}$$

Zu separablen DGLs kann man mithilfe der "Separation der Variablen" Lösungen finden. Das wird uns gleich helfen.

(Falls Sie sich fragen, wann man y und wann man $y(t)$ schreibt: Grundsätzlich ist beides korrekt. Aus Einfachheit und zur Übersicht schreibt man meistens y; wenn explizit betont werden soll, dass y eine Funktion in t ist, schreibt man eher $y(t)$.)

Wir beginnen jetzt jedenfalls mit den eigentlichen Aufgabenteilen, zuerst mit dem Definitionsbereich der DGL.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Definitionsbereich der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Definitionsbereich der DGL

Als erstes bestimmen wir den maximalen Definitionsbereich D_f der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$.

Man muss also schauen, für welche Kombinationen von t und y der Term $f(t, y) = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$ definiert ist. Bestimmen Sie dies.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Definitionsbereich der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Definitionsbereich der DGL

Einstellungen

Definitionsbereich der DGL

$f(t, y)$ ist als Produkt von $\frac{\pi}{2}e^{2t}$ und $\sqrt{1-y^2}$ genau dann definiert, wenn alle beiden Faktoren definiert sind. Da im einen Faktor nur t und im anderen nur y als Variable vorkommt, ist das hier ganz einfach zu bestimmen:

- $\frac{\pi}{2}e^{2t}$ ist offenbar definiert für alle $t \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt{1-y^2}$ ist genau dann definiert, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, also

$$\begin{aligned} & 0 && \leq 1-y^2 \\ \Leftrightarrow\quad & y^2 && \leq 1 \\ \Leftrightarrow\quad & -1 && \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Damit erhält man für $f(t, y) = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$ den maximalen Definitionsbereich

$$D_f = \mathbb{R} \times [-1, 1].$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stationäre Lösungen der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Jetzt zu den **stationären Lösungen** der DGL.

Da eine stationäre Lösung $y(t)$ nach Definition konstant sein soll, muss ihre Ableitung $y'(t)$ überall gleich 0 sein. In unserem Fall bedeutet das

$$y'(t) = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-(y(t))^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

und da der Faktor $\frac{\pi}{2}e^{2t}$ nie 0 sein kann, ist dies äquivalent zu

$$\sqrt{1-(y(t))^2} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Bei einer separablen DGL wie hier sind die stationären Lösungen übrigens immer auf diesem Weg zu bestimmen: Man findet sie durch das Gleichsetzen von $g(y) \stackrel{!}{=} 0$ und Auflösen nach y.

Tun Sie das also jetzt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einstellungen

Stationäre Lösungen der DGL

Sprung 1: Stationäre Lösungen der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Welche Werte $r \in \mathbb{R}$ haben Sie gefunden, die für stationäre Lösungen $y(t) = r\ \forall t \in \mathbb{R}$ zur Differentialgleichung $y' = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$ infrage kommen?

Geben Sie alle dafür möglichen Werte durch Semikolon getrennt in der Form

$$Wert1; Wert2; \ldots$$

ins Eingabefeld ein, Reihenfolge egal.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `((\+)?0*1((\.|,)0*)?;-0*1((\.|,)0*)?)|(-0*1((\.|,)0*)?;(\+)?0*1((\.|,)0*)?)`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Stationäre Lösungen der DGL

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Stationäre Lösungen der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Einstellungen

Stationäre Lösungen der DGL

Korrekt! Es ist

$$\begin{aligned} & y'(t) && = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-(y(t))^2} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & 0 && = \sqrt{1-(y(t))^2} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & 0 && = 1-(y(t))^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & (y(t))^2 && = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & y(t) && = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \vee\, y(t) = -1 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die für unsere DGL möglichen stationären Lösungen sind also

$$y_1(t) = 1\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad y_{-1}(t) = -1\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Falls die Lösung auch noch eine Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = r$ für ein beliebiges t_0 erfüllen soll, dann klappt das natürlich nur, wenn dabei $r = 1$ oder $r = -1$ ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stationäre Lösungen der DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Stationäre Lösungen der DGL

Das war nicht korrekt. Es ist

$$\begin{aligned} & y'(t) && = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-(y(t))^2} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & 0 && = \sqrt{1-(y(t))^2} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & 0 && = 1-(y(t))^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & (y(t))^2 && = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & y(t) && = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \vee\, y(t) = -1 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die für unsere DGL möglichen stationären Lösungen sind also

$$y_1(t) = 1\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ und } y_{-1}(t) = -1\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Falls die Lösung auch noch eine Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = r$ für ein beliebiges t_0 erfüllen soll, dann klappt das natürlich nur, wenn dabei $r = 1$ oder $r = -1$ ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Stationäre Lösungen der DGL

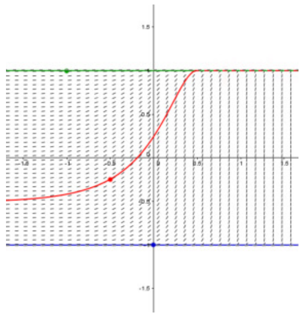
Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Stationäre Lösungen der DGL

Wir wollen uns die Situation kurz grafisch klarmachen (nur zum besseren Verständnis, in einer Klausur wird das kaum nötig sein).

Als Differentialgleichung erster Ordnung kann $y' = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$ in der Ebene visualisiert werden. Jeder Punkt (t, y) in der Ebene erhält durch die DGL einen Steigungswert y'. Diese Werte lassen sich als Vektoren mit entsprechender Steigung in die Ebene zeichnen, und man erhält ein sogenanntes *Richtungsfeld*. In einem Richtungsfeld kann man erkennen, wie Lösungsgraphen ungefähr verlaufen können: Der Graph muss nämlich der Richtung der Vektoren folgen.



- Eingezeichnet sind drei mögliche Lösungen der DGL. Diese erfüllen zum Beispiel die Anfangsbedingungen $y(-1) = 1$ bzw. $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ bzw. $y(0) = -1$.
- Man erkennt grob den Definitionsbereich der DGL wieder: Für alle t, aber nur für $y \in [-1, 1]$ sind überhaupt Vektorsteigungen definiert.
- Wie schon zuvor gezeigt, gibt es bei 1 und -1 stationäre (konstante) Lösungen. Woanders kann es keine solchen geben; im Richtungsfeld erkennt man das auch daran, dass ein konstanter Graph durch die "Mitte" des Richtungsfelds die Richtung der Vektoren verletzen würde.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP mit y(0)=0

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Zurück zur Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{\frac{\pi}{2}e^{2t}}_{\omega(t)} \cdot \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{g(y(t))}$$

mit AWP $y(0) = 0$. Mit diesem Anfangswert ist $g(y(0)) = g(0) = \sqrt{1-0^2} = 1 \neq 0$, genau wie wir es für das folgende Verfahren benötigen.

Wir fangen mit der Separation der Variablen an. In einer geeigneten Umgebung um $t_0 = 0$ ist $\sqrt{1-y^2} \neq 0$ und wir können den Term durch Division auf die linke Seite bringen:

$$\begin{aligned}
& y'(t) &&= \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dt} &&= \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2} \\
\overset{\sqrt{1-y^2}\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-y^2}} &&= \frac{\pi}{2}e^{2t} \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-y^2}}dt &&= \int \frac{\pi}{2}e^{2t}dt + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy &&= \int \frac{\pi}{2}e^{2t}dt + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Um die Gleichung weiter nach der Funktion y auflösen zu können, müssen wir jetzt die beiden Stammfunktionen bestimmen. Tun Sie das.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Einstellungen

Lösung des AWP mit y(0)=0

Jetzt also zur Existenz von Lösungen zum Anfangswertproblem $y' = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = 0$

Da der Anfangswert weder 1 noch -1 ist, gibt es für dieses AWP keine stationäre Lösung; wir müssen also stattdessen schauen, ob es eine nicht-stationäre Lösung gibt. Dafür nutzen wir am besten das "Standardrezept" zum Lösen von separablen DGLs.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsverfahren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsverfahren

Separable DGLs mit AWP $y' = \omega(t) \cdot g(y), \quad y(t_0) = y_0$ für stetige reelle Funktionen ω, g kann man mit der sogenannten "Separation der Variablen" lösen.

Die Voraussetzung für die Anwendung ist $g(y_0) \neq 0$. Das braucht man, weil im Verlauf des Verfahrens durch $g(y)$ geteilt wird. Deshalb gilt auch am Ende die gefundene Lösung $y(t)$ nur auf dem größtmöglichen Bereich um t_0 herum, auf dem noch $g(y(t)) \neq 0 \ \ \forall t$ ist. Wir nutzen dann die Leibniz-Notation $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ und formen die DGL um:

$$\begin{aligned}
& y'(t) &&= \omega(t) \cdot g(y(t)) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dt} &&= \omega(t) \cdot g(y(t)) \\
\overset{g(y(t))\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{\frac{dy}{dt}}{g(y(t))} &&= \omega(t) \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{\frac{dy}{dt}}{g(y(t))}dt &&= \int \omega(t)dt + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{g(y(t))}dy &&= \int \omega(t)dt + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Die Hauptidee bei dieser Umformung ist es, am Ende auf der linken Seite der Gleichung einen Ausdruck nur abhängig von y zu haben, auf der rechten Seite einen Ausdruck nur abhängig von t. Das erklärt auch den Namen "Separation der Variablen".

(Das c wird eigentlich bereits durch die unbestimmten Integrale impliziert, ist hier aber zur besseren Erinnerung dazugeschrieben.)

Aus der entstehenden Gleichung erhält man c durch die Anfangsbedingung und dann die Funktion y durch Umformen der Gleichung.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Einstellungen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Man erhält die beiden Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = D \cdot \arcsin(y) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

und

$$\int \frac{\pi}{2}e^{2t}dt = \frac{\pi}{E} \cdot e^{2t} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $D, E \in \mathbb{R}$ so, dass beide Gleichheiten oben gültig sind, und geben Sie $D; E$ als Dezimalzahlen durch Semikolon getrennt ins Eingabefeld ein (bei Kommazahlen reichen die ersten zwei Nachkommastellen):

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(\+)?(0)*1((,|\.)0*)?;(\+)?(0)*4((,|\.)0*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Nein, das war nicht richtig.

Beide Funktionen sind jedoch mit Nachschlagen von Standard-Stammfunktionen und mit grundlegendem Wissen über die Ableitung der Exponentialfunktion sehr leicht zu integrieren! Das müssen Sie unbedingt können.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Deshalb hier zurück.
Sprung 1:	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Stammfunktionen bestimmen

Korrekt!

Beide Stammfunktionen sind Standardintegrale, bei denen man keine großen Rechnungen durchführen muss:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \arcsin(y) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \int \omega(t) dt &= \int \frac{\pi}{2} e^{2t} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2t} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} & y'(t) &&= \frac{\pi}{2} e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2} \\ \Leftrightarrow & &&\dots \\ \overset{\sqrt{1-y^2} \neq 0}{\Leftrightarrow} & \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy &&= \int \frac{\pi}{2} e^{2t} dt + c \ \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \arcsin(y) &&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2t} + c \ \text{ für ein } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obwohl wir damit die Lösung y noch nicht genau kennen, wissen wir, dass sie auf jeden Fall die Gleichung in der letzten Zeile erfüllen muss. Insbesondere muss die Gleichung auch dann gelten, wenn man die Anfangsbedingung $t_0 = 0,\ y(t_0) = y_0 = 0$ einsetzt. Dadurch kann man den passenden Wert für c herausfinden und schließlich noch nach y auflösen, um den Funktionsterm der Lösung zu erhalten. Genau das machen wir im Folgenden.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Setzen Sie also die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ($t_0 = 0,\ y_0 = 0$) in die Gleichung

$$\arcsin(y(t)) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2t} + c$$

ein. Bestimmen Sie dann durch Umformen, welchen Wert c haben muss, damit die Funktion die Anfangsbedingung erfüllt. Geben Sie schließlich diesen Wert ins Antwortfeld ein, gerundet auf zwei Nachkommastellen.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Einstellungen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Antwort 1:	`-(0)*0(,|\.)7(8|9)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)*`
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Nein, Ihre Eingabe war nicht korrekt.

Einsetzen von $t_0 = 0,\ y(t_0) = y_0 = 0$ führt zu

$$\arcsin(0) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} e^0 + c.$$

Lösen Sie dies nach c auf!

(Dazu benötigen Sie natürlich auch den Wert von $\arcsin$ an der Stelle 0, schlagen Sie diesen notfalls nach.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Antworteingabe

Sprung 1: Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Einstellungen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Korrekt, es ist

$$\begin{aligned} & \arcsin(0) &&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} e^0 + c \\ \Leftrightarrow & 0 &&= \frac{\pi}{4} + c \\ \Leftrightarrow & c &&= -\frac{\pi}{4} \approx 0,785. \end{aligned}$$

Jetzt bleibt nur noch, die durch Einsetzen von $c = -\frac{\pi}{4}$ entstehende Gleichung

$$\arcsin(y) = \frac{\pi}{4} e^{2t} - \frac{\pi}{4}$$

nach y aufzulösen, um den Lösungsterm zu erhalten. Tun Sie dies.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Lösungsterm bestimmen

Für das Auflösen nach y benötigt man nur einen Umformungsschritt. Allerdings muss man für die Äquivalenz genau mit den möglichen Wertebereichen auf der linken und rechten Seite aufpassen. $\arcsin$ hat den Wertebereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und man erhält

$$\begin{aligned} & \arcsin(y) &&= \tfrac{\pi}{4} e^{2t} - \tfrac{\pi}{4} \\ \overset{-1 \leq y \leq 1}{\Leftrightarrow} & y &&= \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\left(e^{2t} - 1\right)\right) \quad \wedge \quad t \leq \tfrac{\ln(3)}{2}, \end{aligned}$$

denn es ist

$$\begin{aligned} & -\tfrac{\pi}{2} \leq \tfrac{\pi}{4} e^{2t} - \tfrac{\pi}{4} \leq \tfrac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & t \leq \tfrac{\ln(3)}{2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir mit der Separation der Variablen eine Lösung $y(t)$ gefunden, welche zumindest in einer Umgebung von $t_0 = 0$ das AWP $y' = \frac{\pi}{2} e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2},\ \ y(0) = 0$ löst.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Die Funktion $y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t} - 1\right)\right)$, unsere Lösung der DGL, haben wir eben für alle $t \leq \frac{\ln(3)}{2}$ aufgestellt. Jetzt müssen wir aber nochmal aufpassen:

Für die Durchführung der Separation der Variablen musste gelten $g(y(t)) = \sqrt{1 - (y(t))^2} \neq 0$. Wir können also um $t_0 = 0$ herum nur soweit sicherstellen, dass unser gefundenes $y(t)$ wirklich eine Lösung der DGL ist, solange $g(y(t)) \neq 0$ gilt.

Wir müssen jetzt also von $t_0 = 0$ ausgehend "nach links und rechts" schauen, wann zuerst $g(y(t)) = 0$ wird. An diesen Stellen hört dann der Gültigkeitsbereich unserer Lösung y auf, und eventuell müssen wir den Bereich für die Lösung entsprechend weiter einschränken.

Versuchen Sie das selbst!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Wir wollen den Term $g(y(t))$ so vereinfachen, dass man die Nullstellen erkennt. Die wohl einfachste Möglichkeit dafür ist die Benutzung des **trigonometrischen Pythagoras** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\begin{aligned} g(y(t)) &= \sqrt{1 - (y(t))^2} = \sqrt{1 - \sin^2\left(\tfrac{\pi}{4}(e^{2t} - 1)\right)} \\ &= \sqrt{\cos^2\left(\tfrac{\pi}{4}(e^{2t} - 1)\right)} = \left|\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\left(e^{2t} - 1\right)\right)\right|. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie nun - ausgehend von der Anfangsstelle $t_0 = 0$ - nach links und rechts die erste Nullstelle von $g(y(t))$, falls vorhanden.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Links und rechts von der Anfangsstelle $t_0 = 0$ können wir mit $g(y(t)) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right)\right)\right|$ erkennen:

- Für $t < 0$ ist $0 < e^{2t} < 1$, also $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}\underbrace{\left(e^{2t}-1\right)}_{\in(-1,0)} < 0$. Für Argumente aus dem Bereich $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ hat $\cos$ keine Nullstelle, also ist unsere Lösung $y(t)$ für $t < 0$ problemlos gültig.

- Für $t > 0$ hat der Ausdruck $\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right)\right)\right|$ die erste Nullstelle dort, wo das Argument des Kosinus gleich $\frac{\pi}{2}$ ist:

$$\begin{aligned} & \tfrac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right) &= \tfrac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & e^{2t}-1 &= 2 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{2t} &= 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2t &= \ln(3) \\ \Leftrightarrow \quad & t &= \tfrac{\ln(3)}{2} \end{aligned}$$

  Für $t > 0$ ist unsere Lösung y also gültig bis zur Stelle $\frac{\ln(3)}{2}$. Wegen $g\left(y\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)\right) = 0$ gehört diese Stelle selbst nicht mehr zum Gültigkeitsbereich.

Insgesamt erhalten wir als Gültigkeitsbereich für unsere AWP-Lösung $y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right)\right)$ das Intervall $\left(-\infty, \frac{\ln(3)}{2}\right)$.

Inhaltsseite

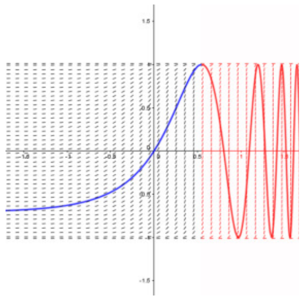
Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Dieses Ergebnis können wir uns auch wieder im Richtungsfeld ansehen.

Die Funktion $y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right)\right)$ würde auf ganz $\mathbb{R}$ wie folgt verlaufen:



Man erkennt, dass die Funktionssteigung im blauen Bereich noch genau den Vektorrichtungen folgt; das ist der Bereich $\left(-\infty, \frac{\ln(3)}{2}\right)$, in dem sie die DGL löst.

Genau nach $t = \frac{\ln(3)}{2} \approx 0,55$ verletzt die Funktionssteigung dann erstmals die Vektorrichtungen. Es mag weiter rechts zwar noch vereinzelte t geben, an denen die Funktionssteigung nochmal korrekt wird; es ist aber jedenfalls keine durchgehende Gültigkeit mehr gegeben. Im roten Bereich löst diese Funktion also *nicht* die DGL.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Graph
Inhalt 2:	Ist es Zufall, dass der Gültigkeitsbereich genau bis zur Extremstelle von y geht?
Sprung 2:	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Es ist kein Zufall, dass der Gültigkeitsbereich gerade bei einer Extremstelle von y endet:

Wie eben gezeigt, löst y auf $\left(-\infty, \frac{\ln(3)}{2}\right)$ die DGL, erfüllt dort also die Gleichung $y' = f(t,y) = \omega(t) \cdot g(y)$. Nach voriger Rechnung ist aber $t = \frac{\ln(3)}{2}$ Nullstelle von $g(y(t))$, also

$$\lim_{t \uparrow \frac{\ln(3)}{2}} y'(t) = \lim_{t \uparrow \frac{\ln(3)}{2}} f(t, y(t)) = \lim_{t \uparrow \frac{\ln(3)}{2}} \omega(t) \cdot \underbrace{g(y(t))}_{\to 0} = 0$$

und an der Stelle muss entweder ein Sattelpunkt oder eben ein Extrempunkt vorliegen.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück
Sprung 1:	Lösung des AWP mit y(0)=0 - Gültigkeitsbereich

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

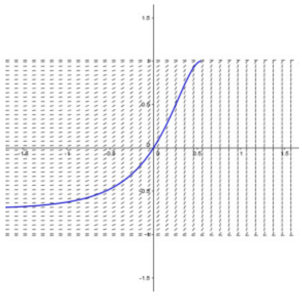
Lösung des AWP mit y(0)=0 - Graph

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Graph

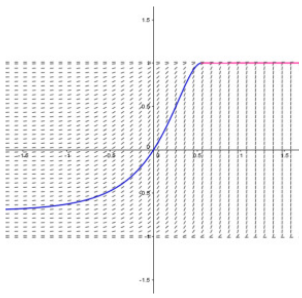
Unsere für das AWP $y(0) = 0$ gefundene DGL-Lösung ist also

$$y: \left(-\infty, \tfrac{\ln(3)}{2}\right) \longrightarrow [-1, 1], \; t \longrightarrow \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right)\right).$$

Man wird es in einer Klausuraufgabe wahrscheinlich nicht zeichnen müssen, aber zur Visualisierung hier der Graph im Richtungsfeld:



Die Gültigkeit der Lösung endet da, wo $g(y(t)) = 0$ wird, also hier bei $t = \frac{\ln(3)}{2}$. Andererseits ist $y\left(\frac{\ln(3)}{2}\right) = 1$. Wie wir zuvor herausgefunden haben, gibt es für diesen y-Wert eine stationäre Lösung, die wir also für $t \geq \frac{\ln(3)}{2}$ "dranhängen" können:



Das ist dann die Funktion

Lösung des AWP mit y(0)=0 - Graph

Einstellungen

$$y^*(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right)\right), & x < \frac{\ln(3)}{2} \\ 1, & x \geq \frac{\ln(3)}{2}. \end{cases}$$

Spätestens bei drangehängten stationären Abschnitten ist im Allgemeinen die Eindeutigkeit nicht mehr sichergestellt (auch wenn man bei dieser speziellen DGL am Richtungsfeld erkennen kann, dass es diesmal die eindeutige Fortsetzung ist). Man könnte sich noch fragen, ob die gefundene Lösung zumindest für $t < \frac{\ln(3)}{2}$ eindeutig ist; das ist allerdings hier nicht Teil der Aufgabenstellung und wird deshalb hier nicht behandelt.

Die Aufgabe haben wir somit gelöst!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Ergebniszusammenfassung

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Dokumentation zu dieser Seite

Einstellungen

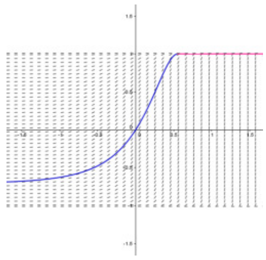
Zusammenfassung der Ergebnisse

Einstellungen

Wir haben zur separablen DGL $y' = f(t,y) = \frac{\pi}{2}e^{2t} \cdot \sqrt{1-y^2}$...

- zuerst den Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \times [-1,1]$ der DGL bestimmt,
- dann die zwei stationären Lösungen $y_-1(t) = -1,\ t \in \mathbb{R}$ und $y_1(t) = 1,\ t \in \mathbb{R}$ gefunden,
- und schließlich zum Anfangswertproblem $y' = f(t,y),\ y(0) = 0$ durch Separation der Variablen die Lösung $y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right)\right)$ erhalten, die für $t \in \mathbb{R}_{<\frac{\ln(3)}{2})}$ gültig ist. Durch Anhängen der passenden stationären Lösung erhält man die auf ganz $\mathbb{R}$ gültige Lösung

$$y^*(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(e^{2t}-1\right)\right), & x < \frac{\ln(3)}{2} \\ 1, & x \geq \frac{\ln(3)}{2}. \end{cases}$$



Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Ende der Aufgabe!

Sprung 1: Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

BSA zu linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ► 17ss-02263 ► Lange Aufgaben ►
Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung ► Bearbeiten ► Erweitert ► Bearbeiten

Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Nachschlagen"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Inhaltsseite

Vorbemerkung

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung & Vorgehensweise

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung & Vorgehensweise

Die Aufgabenstellung lautet wie folgt:

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Lösung für das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 1, \\ y''(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe werden Sie im Folgenden lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Aufgabenstellung & Vorgehensweise

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung & Vorgehensweise

Es handelt sich offenbar um eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung (da die höchste vorkommende Ableitung die dritte ist) mit nicht von t abhängenden Koeffizienten. Bei solchen kann man sich an folgendem Vorgehen orientieren:

- Definitionsbereich der DGL sowie Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des AWP klären
- Lösungsgesamtheit der DGL bestimmen
  - Lösungsgesamtheit der homogenen DGL bestimmen
  - Partikuläre Lösung bestimmen
  - Zusammensetzen der Lösungsgesamtheit
- Anfangswertproblem lösen

Wir beginnen also auf der nächsten Seite mit dem ersten Punkt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Definitionsbereich, Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Definitionsbereich, Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit nicht von t abhängigen Koeffizienten machen bei Definitionsbereich, Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen üblicherweise wenig Probleme. Höchstens der von t abhängige Summand ganz rechts kann Definitionslücken oder Unstetigkeitsstellen haben. Zur hier gegebenen DGL:

Man kann die DGL äquivalent umformen zu

$$y''' = -9y - 3y' + 5y'' + 2e^{3t} = f(t, y, y', y'').$$

- Offenbar ist $f(t, y, y', y'')$ definiert auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Jeder mögliche reelle Startpunkt liegt also im Inneren des Definitionsbereichs.
- Außerdem ist die Funktion $f(t, y, y', y'')$ linear in den Argumenten y, y', y'' und damit auch Lipschitz-stetig in diesen Argumenten.
- Im Argument t ist f offensichtlich zumindest stetig.

Darauf kann man jetzt den **Satz von Picard-Lindelöf** anwenden und erhält, dass zu dieser DGL jedes Anfangswertproblem mit 3 Anfangsbedingungen der Art

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \\ x_0, y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsgesamtheit bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsgesamtheit bestimmen

Nun zum Bestimmen der Lösungsgesamtheit!

Wie bei allen linearen DGLs höherer Ordnung mit nicht von t abhängigen Koeffizienten erhält man die Lösungsgesamtheit der hier gefragten DGL, indem man

- eine beliebige feste *partikuläre Lösung* y_p der inhomogenen Gleichung $y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}$ nimmt
- und darauf noch die Lösungsgesamtheit der zugehörigen *homogenen Gleichung* $y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 0$ addiert.

Die Lösungen sind also alle von der Form $y = y_p + y_h$, wobei y_h eine der (unendlich vielen) Lösungen der homogenen Gleichung ist.

Im Folgenden bestimmen wir zuerst die Lösungsgesamtheit der zugehörigen homogenen DGL und danach eine partikuläre Lösung.

Inhaltsseite

Lösungsgesamtheit bestimmen

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung

Der erste Schritt zur Lösungsgesamtheit der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 0$$

ist das Aufstellen des zugehörigen **charakteristischen Polynoms** $p(\lambda)$. Dies kann man an der obigen Form der Gleichung, bei der alle $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$-Terme auf einer Seite und 0 auf der anderen Seite stehen, direkt ablesen.
(Das ist wichtig - sollte bei einer anderen Aufgabe die Gleichung nicht in dieser Form gegeben sein, müssen Sie sie erst entsprechend umstellen, bevor Sie das charakteristische Polynom ablesen können!)

Lesen Sie also das charakteristische Polynom ab.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung

Man erhält zur homogenen DGL $y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 0$ ein charakteristisches Polynom $p(\lambda) = s \cdot \lambda^3 + u \cdot \lambda^2 + v \cdot \lambda + w$ mit $s, u, v, w \in \mathbb{R}$.

Geben Sie die Koeffizienten als Dezimalzahlen in der Reihenfolge $s; u; v; w$ durch Semikolon getrennt ins Antwortfeld ein (bei Kommazahlen reichen die ersten beiden Nachkommastellen):

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `(\+)?0*1((,|\.)0*)?;-0*5((,|\.)0*)?;(\+)?0*3((,|\.)0*)?;(\+)?0*9((,|\.)0*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom

Antwort 2 : `.*`

Einstellungen

Lösungsges. der homogenen Gleichung

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom

Nein, das war nicht korrekt.

Aus einer homogenen DGL

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

kann man direkt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

ablesen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frage

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom

Korrekt!

Das charakteristische Polynom der homogenen DGL lautet
$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9.$

Beachten Sie unbedingt:

Hier war die gegebene DGL von Anfang an in einer Form, bei der man das char. Polynom direkt ablesen kann. Wenn das aber nicht der Fall ist - z.B. bei der äquivalenten DGL $3y'''(t) = 15y''(t) - 9y'(t) - 27y(t) + 6e^{3t}$ - sollten Sie die DGL schon gleich am Anfang passend äquivalent umformen. Die höchste Ableitung (hier $y'''(t)$) soll dann den Koeffizienten 1 haben, und rechts vom Gleichheitszeichen soll nur die Inhomogenität stehen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Man muss nun das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9$ faktorisieren, um dessen Nullstellen und deren Vielfachheit herauszubekommen.

Welche Nullstellen von $p(\lambda)$ haben Sie bestimmt? Geben Sie diese in der Form

$$\text{Nullstelle1;Nullstelle2;...}$$

ins Antwortfeld ein, Reihenfolge egal.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (\+)?3((\.|,)(0)*)?;-1((\.|,)(0)*)?

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Antwort 2: -1((\.|,)(0)*)?;(\+)?3((\.|,)(0)*)?

Feedback 2

Bewertung 1

Sprung Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Antwort 3 : .*

Feedback 3

Bewertung 0

Sprung Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Genau. Man erhält

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda+1)(\lambda-3)^2$$

mit der zweifachen Nullstelle 3 und der einfachen Nullstelle -1. (Dabei lässt sich z.B. die Nullstelle -1 durch Probieren herausfinden, der Rest mit Polynomdivision.)

Mit diesen Informationen kann man bereits die Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung bestimmen.

Einstellungen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Nein, das ist nicht korrekt.

Man hat $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9$ und möchte dieses Polynom faktorisieren. Ein möglicher Ansatz ist es, durch probierendes Einsetzen für λ eine erste Nullstelle zu finden. Dazu bieten sich ganze Zahlen mit kleinem Betrag an, also etwa $0, 1, -1, 2, -2$.

Tun Sie dies also jetzt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Wenn man also z.B. nacheinander $0, 1, -1$ in $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9$ einsetzt, ergibt sich -1 als eine Nullstelle von $p(\lambda)$. Damit ist

$$p(\lambda) = q(\lambda) \cdot (\lambda+1),$$

wobei $q(\lambda)$ ein quadratisches Polynom sein muss. Dieses q wollen wir herausfinden, und das kann man etwa mit der **Polynomdivision** $(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9) : (\lambda+1)$ schaffen.

Führen Sie die Polynomdivision durch, um q zu erhalten. Faktorisieren Sie dann q und geben Sie schließlich die Nullstellen von q in der Form

$$\text{Nullstelle1;Nullstelle2;...}$$

ins Antwortfeld ein, Reihenfolge egal:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (\+)?3((\.|,)(0)*)?(;(\+)?3((\.|,)(0)*)?)?

Feedback 1

Bewertung 1

Einstellungen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Sprung Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Korrekt. Es ist

$$\begin{array}{rrrrl}
(\lambda^3 & -5\lambda^2 & +3\lambda & +9) & : (\lambda+1) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \\
-(\lambda^3 & +\lambda^2) & & & \\
 & -6\lambda^2 & +3\lambda & +9 & \\
 & -(-6\lambda^2 & -6\lambda) & & \\
 & & 9\lambda & +9 & \\
 & & -(9\lambda & +9) & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

und $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$ hat die zweifache Nullstelle $+3$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Einstellungen

Ihre Eingabe war nicht korrekt. Stattdessen ist

$$\begin{array}{llll} (\lambda^3 & -5\lambda^2 & +3\lambda & +9) \quad : (\lambda+1) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \\ -(\lambda^3 & +\lambda^2) & & \\ & -6\lambda^2 & +3\lambda & +9 \\ & -(-6\lambda^2 & -6\lambda) & \\ & & 9\lambda & +9 \\ & & -(9\lambda & +9) \\ & & & 0 \end{array}$$

und $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ hat die zweifache Nullstelle $+3$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Charakteristisches Polynom faktorisieren

Man erhält also

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2$$

mit der einfachen Nullstelle -1 und der zweifachen Nullstelle $+3$.

Mit diesen Informationen kann man jetzt die Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung bestimmen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Einstellungen

Mit dem vollständig faktorisierten charakteristischen Polynom kann man die Lösungsgesamtheit einer homogenen DGL leicht bestimmen. Allgemein ist das Vorgehen wie folgt:

Für jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms bilden wir einen eigenen "Baustein". Und zwar erhält jede *reelle* Nullstelle a mit Vielfachheit p die Summe

$$\gamma_0 t^0 e^{at} + \gamma_1 t^1 e^{at} + \ldots + \gamma_{p-1} t^{p-1} e^{at}, \quad \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1} \in \mathbb{R},$$

also genau soviele Summanden wie die Vielfachheit der Nullstelle a.
(Bei komplexen Nullstellen ist es etwas anders, die **Formel** dazu findet man im Vorlesungsskript.)
Am Ende summiert man die Bausteine von allen Nullstellen zusammen und erhält damit die Lösungsgesamtheit der homogenen DGL.

Auf der nächsten Seite wenden wir das Vorgehen auf die vorliegende homogene Gleichung an.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Das charakteristische Polynom unserer homogenen Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2$$

und man kann die Lösungsgesamtheit ablesen:

- Die erste Nullstelle ist -1. Da sie die Vielfachheit Eins hat, liefert sie uns genau einen Summanden, und zwar $\alpha_1 \cdot e^{(-1)t}$.
- Die zweite Nullstelle ist 3. Diese hat die Vielfachheit Zwei und liefert deshalb zwei Summanden $\alpha_2 \cdot e^{3t} + \alpha_3 \cdot te^{3t}$.

Damit haben wir alle Nullstellen abgearbeitet. Schreiben Sie nun die Lösungsgesamtheit auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Lösungsges. der homogenen Gleichung - Zusammensetzen

Einstellungen

Wir brauchen nur alle Summanden zusammensetzen und erhalten die Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung:

$$\alpha_1 \cdot e^{-t} \; + \; \alpha_2 \cdot e^{3t} + \alpha_3 \cdot te^{3t}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Die Lösungsgesamtheit der homogenen DGL ist die Menge aller dieser Linearkombinationen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Mit diesem Unterabschnitt der Aufgabe sind wir damit fertig.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partikuläre Lsg. der inhomogenen DGL

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lsg. der inhomogenen DGL

Wir suchen jetzt eine partikuläre Lösung der *inhomogenen* DGL

$$y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}.$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partikuläre Lösung - Verfahren für exp/sin/cos-Terme

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lösung - Verfahren für exp/sin/cos-Terme

Im Allgemeinen ist es gar nicht so simpel, bei inhomogenen linearen DGLs höherer Ordnung die partikuläre Lösung zu bestimmen. Für den Spezialfall, dass die Inhomogenität ein Polynom oder ein Exp/Sin/Cos-Ausdruck in t ist, gibt es jedoch **einfache Verfahren** im Vorlesungsskript.

Wegen $2e^{3t}$ auf der rechten Seite können wir vermutlich das Verfahren für Exp/Sin/Cos-Term benutzen. Dazu muss man (wie im Skript angegeben) noch sicherstellen, dass es sich bei $2e^{3t}$ um einen Term der Form $e^{\kappa t} \cdot (b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t))$ handelt, wobei $\kappa, \omega, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ feste Zahlen sind.

Falls dies zutrifft, geben Sie Werte für

$$\kappa; \omega; b_1; b_2$$

mit Semikolon getrennt in dieser Reihenfolge ein, sodass die beiden Ausdrücke übereinstimmen. Falls die Terme nicht in Übereinstimmung gebracht werden können, geben Sie stattdessen das Zeichen # ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Partikuläre Lösung - Verfahren für exp/sin/cos-Terme

Einstellungen

Antwort 1: `(\+)?3((\.|,)(0)*)?;(-|\+)?0((\.|,)(0)*)?;(-|\+)?(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)+((\.|,)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)*)?;(\+)?2((\.|,)(0)*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Partikuläre Lösung - Verfahren für exp/sin/cos-Terme

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Partikuläre Lösung - Verfahren für exp/sin/cos-Terme

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lösung - Verfahren für exp/sin/cos-Terme

Korrekt.

Mit $\kappa = 3, \omega = 0, b_1 \in \mathbb{R}$ beliebig und $b_2 = 2$ ist

$$e^{\kappa t} \cdot (b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t)) = 2e^{3t}.$$

Das **Verfahren** sagt uns nun, dass unter diesen Voraussetzungen eine partikuläre Lösung gegeben ist durch

$$y_p(t) = t^r e^{\kappa t} \cdot (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) = c_2 \cdot t^r e^{3t}.$$

Von diesem Ausdruck sind κ, ω bereits bekannt, aber die Koeffizienten c_1, c_2 sowie der Vorfaktor t^r sind neu und müssen noch bestimmt werden. In unserem Fall fällt c_1 weg, r und c_2 müssen wir herausfinden.

Man beachte: Bei der Lösungsgesamtheit der homogenen DGL waren die Vorfaktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus ganz $\mathbb{R}$ wählbar, und das lieferte eine Menge von Lösungsfunktionen für die homogene DGL.
Hier bei der partikulären Lösung muss man jedoch für die Unbekannten c_2 und r die speziellen Werte herausfinden, für welche die Funktion $c_2 \cdot t^r e^{3t}$ überhaupt eine Lösung der inhomogenen DGL ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lösung - Verfahren für exp/sin/cos-Terme

Partikuläre Lösung - Verfahren für exp/sin/cos-Terme

Nein, mit diesen Werten klappt es nicht.

Stattdessen gilt für $\kappa = 3, \omega = 0, b_1 \in \mathbb{R}$ beliebig und $b_2 = 2$

$$e^{\kappa t} \cdot (b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t)) = e^{3t} \cdot (b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1) = 2e^{3t}.$$

Das **Verfahren** sagt uns nun, dass unter diesen Voraussetzungen eine partikuläre Lösung gegeben ist durch

$$y_p(t) = t^r e^{\kappa t} \cdot (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) = c_2 \cdot t^r e^{3t}.$$

Von diesem Ausdruck sind κ, ω bereits bekannt, aber die Koeffizienten c_1, c_2 sowie der Vorfaktor t^r sind neu und müssen noch bestimmt werden. In unserem Fall fällt c_1 weg, r und c_2 müssen wir herausfinden.

Man beachte: Bei der Lösungsgesamtheit der homogenen DGL waren die Vorfaktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus ganz $\mathbb{R}$ wählbar, und das lieferte eine Menge von Lösungsfunktionen für die homogene DGL.
Hier bei der partikulären Lösung muss man jedoch für die Unbekannten c_2 und r die speziellen korrekten Werte herausfinden, für welche die Funktion $c_2 \cdot t^r e^{3t}$ überhaupt eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Bei der Bestimmung von c_2 und r für die partikuläre Lösung $y_p(t) = c_2 \cdot t^r e^{3t}$ sollte man mit dem Exponenten r starten. (Denn danach für die Bestimmung von c_2 muss man den Term noch ableiten, und das geht am besten, wenn der Exponent des Faktors t^r bereits bestimmt ist.)

Wir bestimmen also zuerst r. Für die Inhomogenität

$$2e^{3t} = (b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t)) \cdot e^{\kappa t}$$

muss man prüfen, ob $\kappa + i\omega = 3 + i \cdot 0 = 3$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der DGL ist. Dann ist nämlich r genau die Vielfachheit dieser Nullstelle im charakteristischen Polynom, bzw. 0, falls $\kappa + i\omega$ gar keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Prüfen Sie jetzt, ob 3 eine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist, und bestimmen Sie damit r.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Wir hatten das charakteristische Polynom ja schon zuvor bestimmt und faktorisiert. Es ist

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2$$

und tatsächlich ist in unserem Fall 3 eine zweifache Nullstelle von $p(\lambda)$. Nun muss r genau die Vielfachheit dieser Nullstelle sein, also $r = 2$.

Wir haben damit

$$y_p(t) = c_2 \cdot t^2 e^{3t}$$

und müssen noch c_2 herausfinden. Dazu berechnet man alle nötigen Ableitungen von $y_p(t)$ und setzt diese in die DGL $y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}$ ein (unsere partikuläre Lösung soll ja gerade die DGL erfüllen). Durch Lösen der entstehenden Gleichung erhält man schließlich den Wert für c_2.

Bestimmen Sie jetzt die Ableitungen $y_p'(t), y_p''(t), y_p'''(t)$.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Man erhält die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p(t) &= c_2 \cdot t^2 e^{3t}, \\ y_p'(t) &= c_2 \cdot 2te^{3t} + c_2 \cdot t^2 3e^{3t} = c_2 \cdot e^{3t}(2t + 3t^2), \\ y_p''(t) &= c_2 \cdot 3e^{3t}(3t^2 + 2t) + c_2 \cdot e^{3t}(6t + 2) = c_2 \cdot e^{3t}(9t^2 + 12t + 2), \\ y_p'''(t) &= c_2 \cdot 3e^{3t}(9t^2 + 12t + 2) + c_2 \cdot e^{3t}(18t + 12) = c_2 \cdot e^{3t}(27t^2 + 54t + 18). \end{aligned}$$

Setzen Sie diese nun in die inhomogene DGL $y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}$ ein und bestimmen Sie mithilfe der entstehenden Gleichung den Wert für c_2.

Geben Sie schließlich c_2 als Kommazahl ins Antwortfeld ein.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (\+)?0(\.|,)25(0)*

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Antwort 2 : .*

Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Korrekt! Einsetzen der Ableitungen in die inhomogene DGL führt zu

$$\begin{array}{llllllllll} & c_2 e^{3t}(27t^2 + 54t + 18) & & c_2 e^{3t} & \cdot(27t^2 + 54t + 18 & & & & & \\ -5\cdot & c_2 e^{3t}(9t^2 + 12t + 2) & = & & -45t^2 - 60t - 10 & = & c_2 e^{3t} \cdot 8 & \stackrel{!}{=} & 2e^{3t} & \Leftrightarrow \quad c_2 \\ +3\cdot & c_2 e^{3t}(3t^2 + 2t) & & & +9t^2 + 6t & & & & & \\ +9\cdot & c_2 e^{3t} \cdot t^2 & & & +9t^2) & & & & & \end{array}$$

Mit $r = 2$ und $c_2 = \frac{1}{4}$ erhalten wir also eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y_p(t) = c_2 \cdot t^r e^{3t} = \frac{1}{4} t^2 e^{3t}$$

Für die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL muss man jetzt nur noch zusammensetzen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsgesamtheit zusammensetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Ihr eingegebener Wert war nicht korrekt.

Einsetzen der Ableitungen in die inhomogene DGL führt zu

$$\begin{array}{llllllllll} & c_2 e^{3t}(27t^2 + 54t + 18) & & c_2 e^{3t} & \cdot(27t^2 + 54t + 18 & & & & & \\ -5\cdot & c_2 e^{3t}(9t^2 + 12t + 2) & = & & -45t^2 - 60t - 10 & = & c_2 e^{3t} \cdot 8 & \stackrel{!}{=} & 2e^{3t} & \Leftrightarrow \quad c_2 \\ +3\cdot & c_2 e^{3t}(3t^2 + 2t) & & & +9t^2 + 6t & & & & & \\ +9\cdot & c_2 e^{3t} \cdot t^2 & & & +9t^2) & & & & & \end{array}$$

Mit $r = 2$ und $c_2 = \frac{1}{4}$ erhalten wir also eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y_p(t) = c_2 \cdot t^r e^{3t} = \frac{1}{4} t^2 e^{3t}$$

Für die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL muss man jetzt nur noch zusammensetzen.

Partikuläre Lösung - Unbekannte bestimmen

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsgesamtheit zusammensetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsgesamtheit zusammensetzen

Wie bereits erwähnt, sind alle Lösungen der inhomogenen DGL von der Form

$$y = y_p + y_h,$$

wobei y_p eine feste partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist und y_h irgendeine der vielen Lösungen der homogenen DGL. Beides haben wir soeben bestimmt und müssen dies jetzt nur noch durch Addieren zusammensetzen.

Schreiben Sie also die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Lösungsgesamtheit zusammensetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Lösungsgesamtheit zusammensetzen

Wir erhalten die Lösungsgesamtheit

$$y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t) = \underbrace{\frac{1}{4} t^2 e^{3t}}_{\text{partik. Lösung}} + \underbrace{\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} + \alpha_3 t e^{3t}}_{\text{Lösungsges. der homog. DGL}}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Für jede beliebige Wahl von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ ist also dieses $y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t)$ eine Lösung der inhomogenen DGL.

Damit ist der erste Teil der Aufgabe geschafft. Als nächstes lösen wir das Anfangswertproblem.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Anfangswertproblem lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfangswertproblem lösen

Anfangswertproblem lösen

Für die Differentialgleichung

$$y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}$$

mit der soeben bestimmten Lösungsgesamtheit

$$y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t) = \frac{1}{4}t^2e^{3t} + \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} + \alpha_3 te^{3t}, \qquad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$$

wollen wir noch das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 1, \\ y''(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lösen. Man muss also herausfinden, für welche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Funktion $y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ sowie ihre Ableitungen an der Stelle 0 diese Werte annehmen. Dazu müssen zuerst alle nötigen Ableitungen bestimmt werden. Tun Sie dies.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Anfangswertproblem lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfangswertproblem lösen

Etwas Vorarbeit hatten wir ja schon bei den Ableitungen der partikulären Lösung geleistet. Jedenfalls gilt

$$\begin{aligned} y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t) &= \frac{1}{4}t^2e^{3t} + \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} + \alpha_3 te^{3t}, \\[1em] y'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t) &= e^{3t}\left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}t^2\right) - \alpha_1 e^{-t} + 3\alpha_2 e^{3t} + \alpha_3\left(e^{3t} + 3te^{3t}\right) \\ &= e^{3t}\left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}t^2\right) - \alpha_1 e^{-t} + e^{3t}\left(3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_3 t\right), \\[1em] y''_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t) &= e^{3t}\left(\frac{9}{4}t^2 + 3t + \frac{1}{2}\right) + \alpha_1 e^{-t} + 3e^{3t}\left(3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_3 t\right) + e^{3t}\cdot 3\alpha_3 \\ &= e^{3t}\left(\frac{9}{4}t^2 + 3t + \frac{1}{2}\right) + \alpha_1 e^{-t} + 3e^{3t}\left(3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_3 t\right). \end{aligned}$$

Nun kann man die Werte an der Stelle 0 bestimmen und mit den Anfangswerten gleichsetzen. Tun Sie dies und schreiben Sie das entstehende Gleichungssystem auf.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Anfangswertproblem lösen

Sprung 1: Anfangswertproblem lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfangswertproblem lösen

Wir setzen die Stelle 0 in die Ableitungen ein und setzen am Ende mit den jeweiligen Anfangswerten gleich. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(0) &= \frac{1}{4}\cdot 0\cdot 1 + \alpha_1\cdot 1 + \alpha_2\cdot 1 + \alpha_3\cdot 0\cdot 1 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 \overset{!}{=} 2 \\[1em] y'_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(0) &= 1\cdot(0+0) - \alpha_1\cdot 1 + 1\cdot(3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_3\cdot 0) \\ &= -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \overset{!}{=} 1 \\[1em] y''_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(0) &= 1\cdot\left(0 + 0 + \frac{1}{2}\right) + \alpha_1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_3\cdot 0) \\ &= \frac{1}{2} + \alpha_1 + 9\alpha_2 + 6\alpha_3 \overset{!}{=} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Übersetzen Sie dies nun in ein lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Mit nur ein wenig Umformen in der letzten Zeile haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 2, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1 + 9\alpha_2 + 6\alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

und das liefert uns als lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das System und bestimmen Sie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ so, dass $y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t)$ Lösung des Anfangswertproblems ist. Geben Sie schließlich die Werte als Kommazahlen in der Reihenfolge

$$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$$

mit Semikolon getrennt ins Antwortfeld ein.

Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1:	(\+)?0(\.|,)75(0)*;(\+)?1(\.|,)25(0)*;-2((\.|,)(0)*)?
Feedback 1	
Bewertung	1
Sprung	Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem
Antwort 2 :	.*
Feedback 2	
Bewertung	0
Sprung	Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Korrekt!

Das Gleichungssystem lässt sich wie gewohnt per Gauß-Verfahren lösen, also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

und das liefert die Werte $\alpha_1 = \frac{3}{4},\ \alpha_2 = \frac{5}{4},\ \alpha_3 = -2$. Dies sind also die Parameter, für welche unsere Funktion $y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t)$ die (nach Satz von Picard-Lindelöf eindeutige) Lösung des gefragten Anfangswertproblems ist:

$$y_{3/4,\ 5/4,\ -2}(t) = \frac{1}{4}t^2e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^3t - 2te^{3t}$$

*Beachten Sie: Um Lösung des Anfangswertproblems zu sein, muss die Funktion $y_{3/4,\ 5/4,\ -2}(t)$ gleichzeitig eine Lösung der inhomogenen DGL sein **und** die Anfangsbedingungen des AWP erfüllen.*

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Ihre Eingabe war nicht korrekt. Vielleicht haben Sie sich auch nur verrechnet.

Das Gleichungssystem lässt sich jedenfalls wie gewohnt per Gauß-Verfahren lösen, also im ersten Schritt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots$$

Führen Sie den Gauß-Algorithmus zuende und bestimmen Sie damit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sodass $y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t)$ Lösungs des AWP ist.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frageseite

Sprung 1: Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Inhalt 2: Direkt weiter

Sprung 2: Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Anfangswertproblem lösen - Lineares Gleichungssystem

Man hat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

und das liefert die Werte $\alpha_1 = \frac{3}{4},\ \alpha_2 = \frac{5}{4},\ \alpha_3 = -2$. Dies sind also die Parameter, für welche unsere Funktion $y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t)$ die (nach Satz von Picard-Lindelöf eindeutige) Lösung des gefragten Anfangswertproblems ist:

$$y_{3/4,\ 5/4,\ -2}(t) = \frac{1}{4}t^2e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^3t - 2te^{3t}$$

*Beachten Sie: Um Lösung des Anfangswertproblems zu sein, muss die Funktion $y_{3/4,\ 5/4,\ -2}(t)$ gleichzeitig eine Lösung der inhomogenen DGL sein **und** die Anfangsbedingungen des AWP erfüllen.*

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Einstellungen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Wir haben zur linearen DGL dritter Ordnung mit nicht von t abhängigen Koeffizienten

$$y'''(t) - 5y''(t) + 3y'(t) + 9y(t) = 2e^{3t}$$

die Lösungsgesamtheit

$$y_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(t) = \underbrace{\frac{1}{4}t^2e^{3t}}_{\text{partik. Lösung}} + \underbrace{\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} + \alpha_3 te^{3t}}_{\text{Lösungsges. der homog. DGL}}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

bestimmt.

Anschließend haben wir für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 1, \\ y''(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

noch per linearem Gleichungssystem die Parameter $\alpha_1 = \frac{3}{4},\ \alpha_2 = \frac{5}{4}, \alpha_3 = -2$ so bestimmt, dass

$$y_{\,3/4,\ 5/4,\ -2}(t) = \frac{1}{4}t^2e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^3t - 2te^{3t}$$

zusätzlich auch das AWP löst.

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Ende der Aufgabe!
Sprung 1:	Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

BSA zu homogenen linearen DGL-Systemen

Deutsch (de)

Einstellungen

Meine Kurse ► 17ss-02263 ► Lange Aufgaben ► Homogenes lineares System von DGLs ► Bearbeiten ► Erweitert ► Bearbeiten

Homogenes lineares System von DGLs

Vorschau | Bearbeiten | Ergebnisse | Freitext-Bewertung

Kurzform | Erweitert

Fragen importieren | Cluster einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Vorbemerkung

Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie möglichst viele kleine Ideen und mathematische Werkzeuge zu einem Thema in den Blick nehmen können. Sie ist deshalb vom Schwierigkeitsgrad her auf Klausurniveau oder auch etwas höher angesiedelt. Sie werden Schritt für Schritt durch die gesamte Aufgabe geleitet und erhalten zwischendurch Tipps. Hier geht es nicht darum, Sie „auf ein richtiges Ergebnis hin" zu testen.

Vielmehr können Sie hier den Prozess des Aufgabenlösens trainieren, und dazu sollten Sie alle Gedanken selbst nachvollziehen und Rechnungen immer auf dem Papier selbst aufschreiben.

Lassen Sie sich Zeit bei den einzelnen Schritten und geben Sie nicht zu früh auf. So können Sie einerseits für die Klausur trainieren, bei der Sie keine Hilfestellung haben werden, und andererseits üben, einen mathematischen Sachverhalt formal korrekt aufzuschreiben.

1) Beim Bearbeiten dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Symbole treffen:

- **„Nachschlagen"**: Bei Begriffen/Konzepten, die Sie kennen und ggfs. nachschlagen sollten.
- **„Aufschreiben"**: Überall dort, wo Sie etwas aufschreiben sollen - zum Rechnen und zum schriftlichen Festhalten von Lösungen.
- **„Achtung"**: Immer dann, wenn Sie Ihren eigenen Gedankengang sehr genau überdenken sollen - z. B. an typischen Fehlerstellen.

2) Falls Sie merken, dass Ihre Konzentration deutlich nachlässt, brechen Sie die Bearbeitung besser ab und machen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder dort weiter. Sie haben nichts davon, wenn Sie nur noch passiv lesen und auf "Weiter" klicken.

3) Bedenken Sie, dass diese Aufgaben nur vorgefertigte Wege darstellen können. Manchmal gibt es neben den gezeigten noch weitere Lösungswege.

Falls Sie sich nicht sicher sind, notieren Sie Ihre Fragen und nutzen Sie die Beratungsstunden!

Inhaltsseite

Einstellungen

Vorbemerkung

Inhalt 1: Zur Aufgabe!

Sprung 1: Aufgabenstellung & Wahl des Vorgehens

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung & Wahl des Vorgehens

Die Aufgabenstellung lautet:

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Sie werden dies nun Schritt für Schritt lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Aufgabenstellung & Wahl des Vorgehens

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Aufgabenstellung & Wahl des Vorgehens

Zur Lösung eines homogenen linearen DGL-Systems wie

$$\vec{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \vec{y} \qquad \text{bzw. äquivalent} \qquad \begin{bmatrix} y_1'(t) & = & 4y_1(t) + 5y_2(t) \\ y_2'(t) & = & -y_1(t) - 2y_2(t) \end{bmatrix}$$

findet man im Vorlesungsskript zwei verschiedene **Lösungsverfahren**:

- Eigenvektormethode:
  Dies funktioniert nur, wenn die Matrix diagonalisierbar ist. Durch Basiswechsel wird das System auf diagonale Form gebracht. Die entstehenden Gleichungen haben dann alle nur noch jeweils eine Variable und sind dann sehr einfach zu lösen.
- Entkopplungsmethode:
  Durch geschicktes Differenzieren und Einsetzen wird das System auf eine lineare DGL höherer Ordnung geführt und mit deren Hilfe die Lösung bestimmt. Dieses Verfahren klappt am besten bei Systemen mit 2×2-Matrix (bei größeren wird es schnell kompliziert) - allerdings kann diese Matrix dann beliebig sein, auch nicht-diagonalisierbar.

Rechnen Sie die ersten kleinen Schritte zur Lösung der Aufgabe. Welches Verfahren haben Sie gewählt?

Inhaltsseite

Einstellungen

Aufgabenstellung & Wahl des Vorgehens

Inhalt 1: Eigenvektormethode

Sprung 1: Eigenvektormethode

Inhalt 2: Entkopplungsmethode

Sprung 2: Entkopplungsmethode

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode

Sie haben die Eigenvektormethode gewählt. Das ist eine durchaus gute Idee, da sie oft schneller durchzuführen ist als die Entkopplungsmethode.

Man will hier durch einen Basiswechsel mit Eigenvektoren das DGL-System auf Diagonalgestalt bringen. Dazu muss die Matrix A diagonalisiert werden. Wir hoffen zunächst, dass A tatsächlich diagonalisierbar ist, und berechnen einfach mal die Eigenwerte.

Bestimmen Sie also das charakteristische Polynom von A.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Eigenvektormethode - Charakteristisches Polynom

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A

$$p(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) = \ \dots \ ,$$

faktorisieren Sie es und geben Sie die Nullstellen von $p(\lambda)$ in der Form

Nullstelle1;Nullstelle2

durch Semikolon getrennt ein, Reihenfolge egal.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `((\+)?3((\.|,)0*)?;-1((\.|,)0*)?)|(-1((\.|,)0*)?;(\+)?3((\.|,)0*)?)`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Eigenvektormethode - Eigenwerte

Antwort 2 : .*

Einstellungen

Eigenvektormethode - Charakteristisches Polynom

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Eigenvektormethode - Eigenwerte

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Eigenwerte

Korrekt. Es ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) = (4-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)\cdot 5 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 8 + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1) \end{aligned}$$

mit den Nullstellen $3, -1$. Dies sind also auch genau die Eigenwerte der Matrix A. Insbesondere wissen wir jetzt, dass A in der Tat diagonalisierbar ist; für eine 2×2-Matrix mit zwei Eigenwerten gilt das zwangsläufig.

Bestimmen Sie jetzt zu den beiden Eigenwerten jeweils einen Eigenvektor. Wir beginnen mit dem Eigenwert 3.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Eigenvektormethode - Eigenvektor zum EW 3

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Eigenwerte

Nein, diese Werte waren nicht korrekt. Stattdessen ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) = (4-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)\cdot 5 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 8 + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1) \end{aligned}$$

mit den Nullstellen $3, -1$. Dies sind also auch genau die Eigenwerte der Matrix A. Insbesondere wissen wir jetzt, dass A in der Tat diagonalisierbar ist; für eine 2×2-Matrix mit zwei Eigenwerten gilt das zwangsläufig.

Bestimmen Sie jetzt zu den beiden Eigenwerten jeweils einen Eigenvektor. Wir beginnen mit dem Eigenwert 3.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Einstellungen

Eigenvektormethode - Eigenwerte

Sprung 1: Eigenvektormethode - Eigenvektor zum EW 3

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Eigenvektor zum EW 3

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert 3, indem wir das Gleichungssystem $(A - 3 \cdot I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 4-3 & 5 \\ -1 & -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daran kann man einen Lösungsvektor (und damit Eigenvektor) $\vec{x_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ablesen.

(Natürlich wäre auch jedes reelle Vielfache dieses Vektors ein solcher Eigenvektor zum EW 3.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter mit dem Eigenwert -1

Sprung 1: Eigenvektormethode - Eigenvektor zum EW -1

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Eigenvektor zum EW -1

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert -1, indem wir das Gleichungssystem $(A + 1 \cdot I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 4-(-1) & 5 \\ -1 & -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daran kann man einen Lösungsvektor (und damit Eigenvektor) $\vec{x_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ablesen.

(Erneut ist auch jedes reelle Vielfache dieses Vektors ein solcher Eigenvektor zum EW -1.)

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Eigenvektormethode - System auf Diagonalgestalt umformen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - System auf Diagonalgestalt umformen

Einstellungen

Eigenvektormethode - System auf Diagonalgestalt umformen

Die soeben bestimmten Eigenvektoren schreiben wir als Basiswechselmatrix $T := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, dann gilt nämlich

$$\begin{aligned} & & T^{-1} \cdot A \cdot T &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow & A &= T \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \end{aligned}$$

und mit der Substitution $\vec{z} = T^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} = T\vec{z}$ können wir das Differentialgleichungssystem auf Diagonalgestalt umformen:

$$\begin{aligned} & & \vec{y}' &= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y} \\ &\Leftrightarrow & \vec{y}' &= T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}\vec{y} \quad \mid \cdot T^{-1} \text{ von links} \\ &\Leftrightarrow & T^{-1}\vec{y}' \overset{\text{Ableiten ist}}{\underset{\text{linear}}{=}} (T^{-1}\vec{y})' &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}\vec{y} \\ &\Leftrightarrow & \vec{z}' &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{z}, \end{aligned}$$

was man auch schreiben kann als

$$\begin{bmatrix} z_1'(t) &= 3 \cdot z_1(t) \\ z_2'(t) &= -1 \cdot z_2(t) \end{bmatrix}.$$

Diese beiden Gleichungen enthalten jetzt nur noch jeweils eine Variable und sind einfach zu lösen.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Wie lautet die Lösungsgesamtheit des DGL-Systems

$$\begin{bmatrix} z_1'(t) &= 3 \cdot z_1(t) \\ z_2'(t) &= -1 \cdot z_2(t) \end{bmatrix}?$$

Multiple-Choice

Antwort 1: $z_1(t) = \alpha e^{3t}$,
$z_2(t) = \beta e^{-t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Einstellungen

Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Antwort 2 : $z_1(t) = \alpha \cdot 3e^t$,
$z_2(t) = \beta \cdot (-e^t), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Nein!

Dass $3 \cdot e^t$ **nicht** die DGL $z_1'(t) = 3z_1(t)$ erfüllt, kann man schon ganz schnell durch Ableiten bemerken. Es ist

$$(3 \cdot e^t)' = 3 \cdot e^t \neq 3 \cdot 3 \cdot e^t.$$

Genauso sieht man, dass $-1 \cdot e^t$ nicht die DGL $z_2'(t) = -1 \cdot z_2(t)$ erfüllt.

Es handelt sich um einen sehr grundlegenden Differentialgleichungstyp, dessen Lösung Sie unbedingt kennen sollten.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zurück zur Frage

Sprung 1: Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Einstellungen

Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Korrekt. Das System

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{z} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} z_1'(t) &= 3 \cdot z_1(t) \\ z_2'(t) &= -1 \cdot z_2(t) \end{bmatrix}$$

wird gelöst durch

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} \\ \beta e^{-t} \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} z_1(t) &= \alpha e^{3t}, \\ z_2(t) &= \beta e^{-t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nun muss man nur noch mit $\vec{y} = T\vec{z}$ rücksubstituieren. Dazu nimmt man am besten einfach die Vektordarstellung rechts und multipliziert von links mit $T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Führen Sie dies durch und bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit des ursprünglichen DGL-Systems.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit

$$\vec{y} = T\vec{z} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} \\ \beta e^{-t} \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

und schreiben Sie diese in der Form

$$\vec{y} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Geben Sie dann in der Reihenfolge $a; b; c; d$ durch Semikolon getrennt ins Antwortfeld ein:

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: `(\+)?5((\.|,)0*)?;-1((\.|,)0*)?;(\+)?1((\.|,)0*)?;-1((\.|,)0*)?`

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Korrekt. Es ist

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha e^{3t}\\ \beta e^{-t}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5\alpha e^{3t}+\beta^{-t}\\ -\alpha e^{3t}-\beta e^{-t}\end{pmatrix}\\ &= \alpha e^{3t}\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}+\beta e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe bereits gelöst.

Sie haben neben der Ergebniszusammenfassung noch die Möglichkeit, den anderen Lösungsweg zur Entkopplungsmethode durchzuarbeiten.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zur Ergebniszusammenfassung
Sprung 1:	Zusammenfassung der Ergebnisse
Inhalt 2:	Ich möchte auch die Entkopplungsmethode durchgehen.
Sprung 2:	Entkopplungsmethode

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Eigenvektormethode - Lösung bestimmen

Ihre Eingabe war nicht korrekt. Überprüfen Sie Ihre Rechnung!

Es ist

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha e^{3t}\\ \beta e^{-t}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5\alpha e^{3t}+\beta^{-t}\\ -\alpha e^{3t}-\beta e^{-t}\end{pmatrix}\\ &= \alpha e^{3t}\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}+\beta e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe bereits gelöst.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zur Ergebniszusammenfassung
Sprung 1:	Zusammenfassung der Ergebnisse
Inhalt 2:	Ich möchte auch die Entkopplungsmethode durchgehen.
Sprung 2:	Entkopplungsmethode

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite

einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode

Sie haben die Entkopplungsmethode gewählt. Dies führt auf jeden Fall zur Lösung, auch in nicht-diagonalisierbaren Fällen. Jedoch kann sie manchmal etwas unübersichtlicher sein als die Eigenvektormethode.

Wie funktioniert das Verfahren also? Wir schreiben das DGL-System zuerst als einzelne Gleichungen.

$$\begin{aligned}I: \quad y_1'(t) &= 4y_1(t)+5y_2(t)\\ II: \quad y_2'(t) &= -y_1(t)-2y_2(t)\end{aligned}$$

Dann geht man geschickt vor:

• I **differenzieren, dort dann** • II **einsetzen, und in der entstehenden Gleichung nochmal** • I **einsetzen.**		• II **differenzieren, dort dann** • I **einsetzen, und in der entstehenden Gleichung nochmal** • II **einsetzen.**
• **Es entsteht eine lineare DGL 2. Ordnung, die nur noch y_1 enthält, was man leicht lösen kann. Mit der Lösung lässt sich dann auch y_2 bestimmen.**	***oder umgekehrt***	• **Es entsteht eine lineare DGL 2. Ordnung in y_2, die man leicht lösen kann. Mit der Lösung lässt sich dann auch y_1 bestimmen.**

Die beiden vorliegenden Gleichungen enthalten jeweils alle beiden Variablen y_1 und y_2. Deshalb ist es hier egal, ob man das linke oder rechte Vorgehen benutzt.

(Falls jedoch eine der beiden Gleichungen nur eine der beiden Variablen enthalten würde, könnte man diese nicht zum Differenzieren benutzen. Sie können sich über den Button unten ein Beispiel dazu anzeigen lassen.)

Wir gehen das Verfahren jetzt schrittweise durch. Wählen Sie das linke oder das rechte Vorgehen? Differenzieren Sie entsprechend die Gleichung I bzw. II.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Beispiel für den Sonderfall
Sprung 1:	Entkopplungsmethode - Beispiel für einen Sonderfall
Inhalt 2:	Weiter nach der linken Seite
Sprung 2:	Entkopplungsmethode - Differenzieren
Inhalt 3:	Weiter nach der rechten Seite
Sprung 3:	Entkopplungsmethode - Differenzieren

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Beispiel für einen Sonderfall

Nehmen wir einmal an, wir hätten es mit einem anderen DGL-System

$$\begin{aligned}I: \quad y_1'(t) &= 2y_1(t)+3y_2(t)\\ II: \quad y_2'(t) &= 4y_2(t)\end{aligned}$$

zu tun.

In diesem Fall würde es natürlich nichts bringen, II zu differenzieren, da wir auch in $y_2''(t)=4y_2'(t)$ nirgendwo die erste Gleichung einsetzen können.

Darum müsste man hier damit beginnen, I zu differenzieren.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Zurück zu unserer Aufgabe
Sprung 1:	Entkopplungsmethode

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Differenzieren

$$\begin{aligned}I: \quad y_1'(t) &= 4y_1(t)+5y_2(t)\\ II: \quad y_2'(t) &= -y_1(t)-2y_2(t)\end{aligned}$$

I differenzieren:

$$y_1''(t)=4y_1'(t)+5y_2'(t)$$

Setzen Sie dort nun für $y_2'(t)$ die rechte Seite der Gleichung II ein.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Entkopplungsmethode - Einsetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Differenzieren

$$\begin{aligned}I: \quad y_1'(t) &= 4y_1(t)+5y_2(t)\\ II: \quad y_2'(t) &= -y_1(t)-2y_2(t)\end{aligned}$$

II differenzieren:

$$y_2''(t)=-y_1'(t)-2y_2'(t)$$

Setzen Sie dort nun für $y_1'(t)$ die rechte Seite der Gleichung I ein.

Inhaltsseite

Entkopplungsmethode - Differenzieren

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Entkopplungsmethode - Einsetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Einsetzen

$$\begin{aligned}I: \quad y_1'(t) &= 4y_1(t)+5y_2(t)\\ II: \quad y_2'(t) &= -y_1(t)-2y_2(t)\end{aligned}$$

I differenzieren:

$$y_1''(t)=4y_1'(t)+5y_2'(t)$$

II einsetzen:

$$\begin{aligned}y_1''(t) &= 4y_1'(t)+5\cdot(-y_1(t)-2y_2(t))\\ &= 4y_1'(t)-5y_1(t)-10y_2(t)\end{aligned}$$

Nun will man noch den letzten y_2-Summanden loswerden. Formen Sie dazu die Gleichung I nach y_2 um und setzen sie dies entsprechend oben ein.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter
Sprung 1:	Entkopplungsmethode - Nochmal einsetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Einsetzen

$$\begin{aligned}I: \quad y_1'(t) &= 4y_1(t)+5y_2(t)\\ II: \quad y_2'(t) &= -y_1(t)-2y_2(t)\end{aligned}$$

II differenzieren:

$$y_2''(t)=-y_1'(t)-2y_2'(t)$$

I einsetzen:

$$\begin{aligned}y_2''(t) &= -(4y_1(t)+5y_2(t))-2y_2'(t)\\ &= -4y_1(t)-5y_2(t)-2y_2'(t)\end{aligned}$$

Nun will man noch den letzten y_1-Summanden loswerden. Formen Sie dazu die Gleichung II nach y_1 um und setzen sie dies entsprechend oben ein.

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Weiter

Einstellungen

Entkopplungsmethode - Einsetzen

Sprung 1: Entkopplungsmethode - Nochmal einsetzen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Nochmal einsetzen

$$\begin{aligned} I: \quad y_1'(t) &= 4y_1(t) + 5y_2(t) \\ II: \quad y_2'(t) &= -y_1(t) - 2y_2(t) \end{aligned}$$

I differenzieren:

$$y_1''(t) = 4y_1'(t) + 5y_2'(t)$$

II einsetzen:

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= 4y_1'(t) + 5\cdot(-y_1(t) - 2y_2(t)) \\ &= 4y_1'(t) - 5y_1(t) - 10y_2(t) \end{aligned}$$

I einsetzen:

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= 4y_1'(t) - 5y_1(t) - 10\left(\frac{1}{5}y_1'(t) - \frac{4}{5}y_1(t)\right) \\ &= 4y_1'(t) - 5y_1(t) - 2y_1'(t) + 8y_1(t) \\ &= 2y_1'(t) + 3y_1(t) \end{aligned}$$

Dabei haben wir $y_1'(t) = 4y_1(t) + 5y_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{5}y_1'(t) - \frac{4}{5}y_1(t) = y_2(t)$ genutzt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Nochmal einsetzen

Einstellungen

Entkopplungsmethode - Nochmal einsetzen

II differenzieren:

$$y_2''(t) = -y_1'(t) - 2y_2'(t)$$

I einsetzen:

$$\begin{aligned} y_2''(t) &= -(4y_1(t) + 5y_2(t)) - 2y_2'(t) \\ &= -4y_1(t) - 5y_2(t) - 2y_2'(t) \end{aligned}$$

II einsetzen:

$$\begin{aligned} y_2''(t) &= -4(-y_2'(t) - 2y_2(t)) - 5y_2(t) - 2y_2'(t) \\ &= 4y_2'(t) + 8y_2(t) - 5y_2(t) - 2y_2'(t) \\ &= 2y_2'(t) + 3y_2(t) \end{aligned}$$

Dabei haben wir $y_2'(t) = -y_1(t) - 2y_2(t) \Leftrightarrow y_1(t) = -y_2'(t) - 2y_2(t)$ genutzt.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Wir erhalten also für y_1 eine lineare DGL zweiter Ordnung

$$y_1''(t) = 2y_1'(t) + 3y_1(t)$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Zum Lösen dieser DGL muss man die Nullstellen von $p(\lambda)$ bestimmen. Tun Sie dies!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Einstellungen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Wir erhalten also für y_2 eine lineare DGL zweiter Ordnung

$$y_2''(t) = 2y_2'(t) + 3y_2(t)$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Zum Lösen dieser DGL muss man die Nullstellen von $p(\lambda)$ bestimmen. Tun Sie dies!

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Das charakteristische Polynom faktorisiert zu

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

mit den (einfachen) Nullstellen 3 und -1. Mit diesen Informationen lässt sich bereits die Lösungsgesamtheit der DGL $y_1''(t) = 2y_1'(t) + 3y_1(t)$ bestimmen.

Nach dem **Lösungsverfahren aus dem Skript für lineare DGL zweiter Ordnung** hat die Lösungsgesamtheit die Form

$$\alpha e^{at} + \beta e^{bt}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie ins Antwortfeld die Werte $a; b$ getrennt durch Semikolon ein, sodass damit die Lösungsgesamtheit der DGL gegeben ist.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (-1((\.|,)0*)?;(\+)?3((\.|,)0*)?)|((\+)?3((\.|,)0*)?;-1((\.|,)0*)?)

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Einstellungen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Das charakteristische Polynom faktorisiert zu

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

mit den (einfachen) Nullstellen 3 und -1. Mit diesen Informationen lässt sich bereits die Lösungsgesamtheit der DGL $y_2''(t) = 2y_2'(t) + 3y_2(t)$ bestimmen.

Nach dem **Lösungsverfahren aus dem Skript für lineare DGL zweiter Ordnung** hat die Lösungsgesamtheit die Form

$$\alpha e^{at} + \beta e^{bt}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie ins Antwortfeld die Werte $a; b$ getrennt durch Semikolon ein, sodass damit die Lösungsgesamtheit der DGL gegeben ist.

Kurzantwort - Reguläre Ausdrücke verwenden

Antwort 1: (-1((\.|,)0*)?;(\+)?3((\.|,)0*)?)|((\+)?3((\.|,)0*)?;-1((\.|,)0*)?)

Feedback 1

Bewertung 1

Sprung Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Antwort 2 : .*

Feedback 2

Bewertung 0

Sprung Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Korrekt! Die Lösungsgesamtheit von $y_1''(t) = 2y_1'(t) + 3y_1(t)$ lautet

$$y_1(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Durch ein letztes Mal Einsetzen davon in die Gleichung

$$I: \ y_1'(t) = 4y_1(t) + 5y_2(t)$$

erhält man dann noch $y_2(t)$. Führen Sie dies durch.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - Andere Komponente bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Einstellungen

Ihre Eingabe war nicht korrekt. Sie sollten sich das Verfahren für lineare DGLs höherer Ordnung noch einmal ansehen; dazu gibt es auch eine eigene **eÜbung**.

Die Lösungsgesamtheit von $y_1''(t) = 2y_1'(t) + 3y_1(t)$ lautet

$$y_1(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Durch ein letztes Mal Einsetzen davon in die Gleichung

$$I: \ \ y_1'(t) = 4y_1(t) + 5y_2(t)$$

erhält man dann noch $y_2(t)$. Führen Sie dies durch.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - Andere Komponente bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Korrekt! Die Lösungsgesamtheit von $y_2''(t) = 2y_2'(t) + 3y_2(t)$ lautet

$$y_2(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Durch ein letztes Mal Einsetzen davon in die Gleichung

$$II: \ \ y_2'(t) = -y_1(t) - 2y_2(t)$$

erhält man dann noch $y_1(t)$. Führen Sie dies durch.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - Andere Komponente bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Entkopplungsmethode - DGL 2. Ordnung lösen

Einstellungen

Ihre Eingabe war nicht korrekt. Sie sollten sich das Verfahren für lineare DGLs höherer Ordnung noch einmal ansehen; dazu gibt es auch eine eigene **eÜbung**.

Die Lösungsgesamtheit von $y_2''(t) = 2y_2'(t) + 3y_2(t)$ lautet

$$y_2(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Durch ein letztes Mal Einsetzen davon in die Gleichung

$$II: \ \ y_2'(t) = -y_1(t) - 2y_2(t)$$

erhält man dann noch $y_1(t)$. Führen Sie dies durch.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - Andere Komponente bestimmen

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Andere Komponente bestimmen

Wir formen die Gleichung

$$I: \ \ y_1'(t) = 4y_1(t) + 5y_2(t)$$

nach $y_2(t)$ um, setzen $y_1(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$ ein und erhalten damit

$$\begin{aligned} y_2(t) \quad &= \frac{1}{5} y_1'(t) - \frac{4}{5} y_1(t) \\ &= \frac{1}{5}\left(\alpha \cdot 3e^{3t} + \beta \cdot (-1)e^{-t}\right) - \frac{4}{5}\left(\alpha \cdot e^{3t} + \beta \cdot e^{-t}\right) \\ &= \alpha \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) e^{3t} + \beta \cdot (-1)e^{-t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - Lösungsgesamtheit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Andere Komponente bestimmen

Entkopplungsmethode - Andere Komponente bestimmen

Einstellungen

Wir formen die Gleichung

$$II: \ \ y_2'(t) = -y_1(t) - 2y_2(t)$$

nach $y_1(t)$ um, setzen $y_2(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$ ein und erhalten damit

$$\begin{aligned} y_1(t) \quad &= -y_2'(t) - 2y_2(t) \\ &= -\left(\alpha \cdot 3e^{3t} + \beta \cdot (-1)e^{-t}\right) - 2\left(\alpha \cdot e^{3t} + \beta \cdot e^{-t}\right) \\ &= \alpha \cdot (-5)\, e^{3t} + \beta \cdot (-1)e^{-t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Inhaltsseite

Inhalt 1: Weiter

Sprung 1: Entkopplungsmethode - Lösungsgesamtheit

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Lösungsgesamtheit

Wir haben also komponentenweise die Lösungsgesamtheit bestimmt:

$$\begin{aligned} y_1(t) \quad &= \alpha \cdot e^{3t} + \beta \cdot e^{-t}, \\ y_2(t) \quad &= \alpha \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) e^{3t} + \beta \cdot (-1)e^{-t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wichtig dabei: Die Parameter α, β gelten gleichzeitig für y_1 und y_2, sie müssen für beide Komponenten gleich gewählt werden! Zum Beispiel ist eine spezielle Lösung mit $\alpha = 2, \ \beta = 5$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y_1(t) \quad &= 2e^{3t} + 5e^{-t}, \\ y_2(t) \quad &= -\frac{2}{5} e^{3t} - 5e^{-t}. \end{aligned}$$

Deutlicher wird dies sichtbar, wenn man die Lösungsgesamtheit in folgender Form schreibt:

$$\vec{y} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Ergebniszusammenfassung

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Inhalt 2: Ich möchte auch die Eigenvektormethode durchgehen.

Sprung 2: Eigenvektormethode

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Entkopplungsmethode - Lösungsgesamtheit

Einstellungen

Wir haben also komponentenweise die Lösungsgesamtheit bestimmt:

$$\begin{aligned} y_1(t) \quad &= \alpha \cdot (-5)e^{3t} + \beta \cdot (-1)e^{-t}, \\ y_2(t) \quad &= \alpha \cdot e^{3t} + \beta \cdot e^{-t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wichtig dabei: Die Parameter α, β gelten gleichzeitig für y_1 und y_2, sie müssen für beide Komponenten gleich gewählt werden! Zum Beispiel ist eine spezielle Lösung mit $\alpha = 2, \ \beta = 5$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y_1(t) \quad &= -10e^{3t} - 5e^{-t}, \\ y_2(t) \quad &= 2e^{3t} + 5e^{-t}. \end{aligned}$$

Deutlicher wird dies sichtbar, wenn man die Lösungsgesamtheit in folgender Form schreibt:

$$\vec{y} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Inhaltsseite

Inhalt 1: Zur Ergebniszusammenfassung

Sprung 1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Inhalt 2: Ich möchte auch die Eigenvektormethode durchgehen.

Sprung 2: Eigenvektormethode

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Einstellungen

Zusammenfassung der Ergebnisse

Sie haben das lineare DGL-System

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

gelöst. Dafür gab es zwei mögliche Verfahren.

- Bei der **Eigenvektormethode** haben Sie mithilfe der Eigenvektoren die Matrix und damit das DGL-System diagonalisiert. Dadurch entstanden zwei einfache Einzel-DGLs, die sich leicht lösen ließen. Durch Rücksubstitution erhielt man dann die Lösungsgesamtheit

$$\vec{y} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Bei der **Entkopplungsmethode** haben Sie durch geschicktes Differenzieren und Einsetzen eine lineare DGL zweiter Ordnung erzeugt, mit der man die eine Komponente der Lösungsgesamtheit bestimmen konnte. Die andere Komponente erhielt man dann durch nochmaliges Einsetzen. Je nachdem, welche Gleichung zum Differenzieren ausgewählt wurde, kam man auf die Lösungsgesamtheit

$$\vec{y} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$\vec{y} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Beachten Sie: Je nach gewähltem Verfahren sieht der Term der Lösungsgesamtheit am Ende offenbar etwas unterschiedlich aus. Dennoch sind alle drei Lösungsgesamtheiten identisch, da die Parameter ganz $\mathbb{R}$ durchlaufen und da die "Vektorkoeffizienten" unterschiedlicher Lösungsgesamtheiten jeweils Vielfache voneinander sind.

Damit Ihr Aufgabenabschluss registriert wird, klicken Sie noch auf den untenstehenden Button!

Inhaltsseite

Inhalt 1:	Ende der Aufgabe!
Sprung 1:	Ende der Lektion

Fragen importieren | Verzweigungsende einfügen | Cluster einfügen | Clusterende einfügen | Inhaltsseite einfügen | Frageseite hier einfügen

ⓘ Dokumentation zu dieser Seite

Literaturverzeichnis

[1] *Adaptive Mechanics Network*. https://adaptivemechanics.edu.au/. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[2] *Fragetypen in Ilias-Tests*. https://www.ilias.de/docu/goto_docu_pg_70237_5235.html. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[3] *Fragetypen in Moodle-Tests*. https://docs.moodle.org/34/de/Test_erstellen#Fragetypen. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[4] *History of the Lesson module*. https://docs.moodle.org/dev/Lesson_activity_module_2#History_of_the_Lesson_module. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[5] *Integrating the Question Bank to the Lesson Module*. https://moodle.org/mod/forum/discuss.php?d=332233. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[6] *Moodle-3.3-Dokumentation zur „Lektion"-Aktivität*. https://docs.moodle.org/33/de/Lektion. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[7] *Moodle-Dokumentation zur Version 3.3*. https://docs.moodle.org/33/de/. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[8] *Regular Expression Short-Answer question type*. https://docs.moodle.org/34/en/Regular_Expression_Short-Answer_question_type. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[9] *Studiengangspezifische Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Bauingenieurwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen vom 15.12.2015 (Prüfungsordnungsversion 2012), Nr. 2015/185*. https://www.rwth-aachen.de/go/id/xhf/?search=Bauingenieurwesen. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[10] ABLEITINGER, Christoph: Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 33 (2012), Nr. 1, S. 87–111

[11] ABLEITINGER, Christoph ; HERRMANN, Angela: *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra – Ein Arbeits- und Übungsbuch*. 2. Auflage. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2013

[12] ABLEITINGER, Christoph (Hrsg.) ; KRAMER, Jürg (Hrsg.) ; PREDIGER, Susanne (Hrsg.): *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2013

[13] ALEVEN, Vincent (Hrsg.) ; KAY, Judy (Hrsg.) ; MOSTOW, Jack (Hrsg.): *Intelligent Tutoring Systems: 10th International Conference (ITS 2010), Pittsburgh, USA – Proceedings, Part I*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2010

[14] ALTIERI, Mike ; PREDIGER, Susanne: Unpacking procedural knowledge in mathematics exams for first-year engineering students. In: GÖLLER, Robin (Hrsg.) ; BIEHLER, Rolf (Hrsg.) ; HOCHMUTH, Reinhard (Hrsg.) ; RÜCK, Hans-Georg (Hrsg.): *khdm Conference 2015: Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings*, 2017 (khdm-Report 5), S. 142–146

[15] ARBEITSGRUPPE COOPERATION SCHULE-HOCHSCHULE BADEN-WÜRTTEMBERG: Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern / Studienkommission für Hochschuldidaktik an Hochschulen für Angewandte Wissenschaften in Baden-Württemberg. 2014. – Forschungsbericht

[16] ARENS, Tilo ; HETTLICH, Frank ; KARPFINGER, Christian ; KOCKELKORN, Ulrich ; LICHTENEGGER, Klaus ; STACHEL, Hellmuth: *Mathematik*. 3. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Spektrum, 2015

[17] ATKINSON, Robert K. ; DERRY, Sharon J. ; RENKL, Alexander ; WORTHAM, Donald: Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research. In: *Review of Educational Research* 70 (2000), Nr. 2, S. 181–214

[18] AUTORENGRUPPE BILDUNGSBERICHTERSTATTUNG: *Bildung in Deutschland 2016 – Ein indikatorengestützter Bericht mit einer Analyse zu Bildung und Migration*. Bielefeld : W. Bertelsmann Verlag, 2016

[19] BAUM, Helga: *Skript zur Vorlesung Analysis 1 und 2 Bachelorstudiengang Mathematik mit Lehramtsoption für die Studienanfänger des WS 2014/15*. Humboldt-Universität zu Berlin, 2015. `https://www.math.hu-berlin.de/~baum/Skript/Analysis-LA-14-15-Summe.pdf`. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[20] BÜCHTER, Andreas ; HENN, Hans-Wolfgang: *Elementare Stochastik – Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*. 2., überarb. u. erw. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2007

[21] BESCHERER, Christine ; SPANNAGEL, Christian: Aktivierendes Mathematik-Lernen zum Studienbeginn. In: VÁSÁRHELYI, Eva (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008 – 42. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 13.3. bis 18.3.2008 in Budapest*. Hildesheim, Berlin : Franzbecker, 2008, S. 329–332

[22] BLÖMEKE, Sigrid: Der Übergang von der Schule in die Hochschule: Empirische Erkenntnisse zu Problemen und Lösungen für das Fach Mathematik. In: HOPPENBROCK, Axel (Hrsg.) ; SCHREIBER, Stephan (Hrsg.) ; GÖLLER, Robin (Hrsg.) ; BIEHLER, Rolf (Hrsg.) ; BÜCHLER, Bernd (Hrsg.) ; HOCHMUTH, Reinhard (Hrsg.) ; RÜCK, Hans-Georg (Hrsg.): *Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr: Extended Abstracts zur 2. khdm-Arbeitstagung 20.02. - 23.02.2013*. Kassel, 2013 (khdm-Report 13-01), S. 25–26

[23] BORNELEIT, Peter ; HENN, Hans-Wolfgang ; DANCKWERTS, Rainer ; WEIGAND, Hans-Georg: Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 22 (2001), März, Nr. 1, S. 73–90

[24] BORTZ, Jürgen ; SCHUSTER, Christof: *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 7., vollst. überarb. u. erw. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2010

[25] BRADLEY, William T. ; COOK, William J.: Two Proofs of the Existence and Uniqueness of the Partial Fraction Decomposition. In: *International Mathematical Forum* 7 (2012), Nr. 31, S. 1517–1535

[26] BRAUCH, Wolfgang ; DREYER, Hans-Joachim ; HAACKE, Wolfhart: *Mathematik für Ingenieure*. 11., durchges. Auflage. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2006

[27] CLARK, Ruth C. ; MAYER, Richard E.: *E-Learning and the Science of Instruction – Proven Guidelines for Consumers and Designers of Multimedia Learning*. 3rd edition. John Wiley & Sons, Pfeiffer, 2011

[28] CRAMER, Erhard ; KAMPS, Udo: *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. 2., überarb. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2008

[29] DEMPSEY, John V. (Hrsg.) ; SALES, Gregory C. (Hrsg.): *Interactive Instruction and Feedback*. Englewood Cliffs, New Jersey : Educational Technology Publications, 1993

[30] DIETZE, Torsten: Zum Übergang auf weiterführende Schulen. Analysen aus der Schulstatistik. In: *SchulVerwaltung Niedersachsen* 21 (2011), Nr. 1, S. 18–21

[31] ERVEN, Joachim ; SCHWÄGERL, Dietrich: *Mathematik für Ingenieure*. 4., korr. Auflage. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2011

[32] FISHER, Ronald A.: The Distribution of the Partial Correlation Coefficient. In: *Metron* 3 (1924), S. 329–332

[33] GEHLEN, Carina ; NIEDDERER, H. (Hrsg.) ; FISCHLER, H. (Hrsg.) ; SUMFLETH, E. (Hrsg.): *Kompetenzstruktur naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung im Fach Chemie*. Berlin : Logos Verlag, 2016 (Studien zum Physik- und Chemielernen 206)

[34] GOTZEN, Bernd ; HEITZER, Johanna ; WALCHER, Sebastian: *Fachdidaktik Mathematik Grundlagen*. RWTH Aachen University, 2008

[35] GRASEDYCK, Lars ; HERTY, Michael: *Mathematik I für Bauingenieure*. RWTH Aachen University, 2016. – Vorlesungsskript, 8. September 2016

[36] GRASEDYCK, Lars ; HERTY, Michael: *Mathematik II für Bauingenieure*. RWTH Aachen University, 2016. – Vorlesungsskript, 20. Juli 2016

[37] GROBSTICH, Peter ; STREY, Gerhard: *Mathematik für Bauingenieure – Grundlagen, Verfahren und Anwendungen mit Mathcad*. Wiesbaden : Springer Fachmedien, 2004

[38] GRÜNWALD, Norbert ; KOSSOW, Andreas ; SAUERBIER, Gabriele ; KLYMCHUK, Sergiy: Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus Internationaler und Deutscher Sicht. In: *Global Journal of Engineering Education* 8 (2004), Nr. 3, S. 283–293

[39] HASDORF, Walter: Erscheinungsbild und Entwicklung der Beweglichkeit des Denkens bei älteren Vorschulkindern. In: LOMPSCHER, Joachim (Hrsg.): *Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit.* Berlin (Ost) : Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1976, S. 13–75

[40] HAUG, Reinhold: *Problemlösen lernen mit digitalen Medien – Förderung grundlegender Problemlösetechniken durch den Einsatz dynamischer Werkzeuge*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2012. – Dissertation 2011 an der Pädagogischen Hochschule Freiburg

[41] HAUGER, David ; KÖCK, Mirjam: State of the Art of Adaptivity in E-Learning Platforms. In: BRUNKHORST, Ingo (Hrsg.) ; KRAUSE, Daniel (Hrsg.) ; SITOU, Wassiou (Hrsg.): *ABIS 2007 – 15th Workshop on Adaptivity and User Modeling in Interactive Systems*, 2007

[42] HEITZER, Johanna: Mathematikdidaktische Prinzipien – von der Schule in die Hochschule? In: SCHOTT, Dieter (Hrsg.) ; PRIMBS, Miriam (Hrsg.) ; VORLOEPER, Jürgen

(Hrsg.): *Proceedings zum 10. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen*. Hochschule Ruhr West, 2013, S. 57–75

[43] HEITZER, Johanna: Das Aachener Schul-Hochschul-Projekt iMPACt. In: ROTH, Jürgen (Hrsg.) ; BAUER, Thomas (Hrsg.) ; KOCH, Herbert (Hrsg.) ; PREDIGER, Susanne (Hrsg.): *Übergänge konstruktiv gestalten – Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik*. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2015, Kapitel 1, S. 3–18

[44] HETZE, Pascal ; STIFTERVERBAND FÜR DIE DEUTSCHE WISSENSCHAFT (Hrsg.) ; HEINZ NIXDORF STIFTUNG (Hrsg.): *Nachhaltige Hochschulstrategien für mehr MINT-Absolventen*. 2. aktual. Auflage. Essen : Edition Stifterverband, 2011

[45] HEUBLEIN, Ulrich ; HUTZSCH, Christopher ; SCHREIBER, Jochen ; SOMMER, Dieter ; BESUCH, Georg: Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen: Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08 / Hochschul-Informations-System: Forum Hochschule. 2010 (2/2010). – Forschungsbericht

[46] HILLEBRAND, Annika: *Selektion im Gymnasium – Eine Ursachenanalyse auf Grundlage amtlicher schulstatistischer Daten und einer Lehrerbefragung*. Münster, New York : Waxmann, 2014 (Empirische Erziehungswissenschaft 49). – Dissertation 2013 an der Technischen Universität Dortmund

[47] JONGEN, Hubertus T. ; SCHMIDT, Paul G. ; BOCK, H. H. (Hrsg.) ; JONGEN, H. T. (Hrsg.) ; PLESKEN, W. (Hrsg.): *Analysis: Skript zur Vorlesung*. 2. Auflage. Aachen : Wissenschaftsverlag Mainz in Aachen, 1998 (Aachener Beiträge zur Mathematik 19)

[48] KALLUS, K. W.: *Erstellung von Fragebogen*. 2., aktual. u. überarb. Auflage. Wien : Facultas, 2016

[49] KENDALL, Maurice G.: Partial Rank Correlation. In: *Biometrika* 32 (1942), Nr. 3/4, S. 277–283

[50] KENDALL, Maurice G. ; STUART, Alan: *The Advanced Theory of Statistics*. Bd. Volume 2: Inference and Relationship. 4th edition. London : Griffin, 1979

[51] KERSTAN, Thomas: „Wir haben klügere Schüler“: Ein Gespräch mit dem Berliner Bildungshistoriker Heinz-Elmar Tenorth über das Erfolgsgeheimnis des Gymnasiums. . In: *DIE ZEIT* (2012), Nr. 8/2012. `http://www.zeit.de/2012/08/C-Interview-Tenorth/komplettansicht`. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[52] KERSTEN, Ina: Kalkülfertigkeiten an der Universität: Mängel erkennen und Konzepte für die Förderung entwickeln. In: ROTH, Jürgen (Hrsg.) ; BAUER, Thomas (Hrsg.) ; KOCH, Herbert (Hrsg.) ; PREDIGER, Susanne (Hrsg.): *Übergänge konstruktiv gestalten – Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik*. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2015, Kapitel 3, S. 33–49

[53] KLOUTH, Richard: Rückblick auf 50 Jahre Mathematikunterricht. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (2011), Nr. 9/2011, S. 228–233

[54] KOCH, Jürgen ; STÄMPFLE, Martin: *Mathematik für das Ingenieurstudium*. 3., akt. u. erw. Auflage. München : Carl Hanser Verlag, 2015

[55] KOMPETENZZENTRUM TECHNIK - DIVERSITY - CHANCENGLEICHHEIT: *Studienanfängerinnen und Studienanfänger Fächergruppe Ingenieurwissenschaften 1976-2015*. `http://www.komm-mach-mint.de/content/download/20903/196518/version/15/file/2015-Verlauf-seit-1976-1FS-FG-Ingenieurwissenschaften.pdf`. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[56] KOMPETENZZENTRUM TECHNIK - DIVERSITY - CHANCENGLEICHHEIT: *Studienanfängerinnen und Studienanfänger Fächergruppe Mathematik, Naturwissenschaften 1976-2015*. `http://www.komm-mach-mint.de/content/download/20890/196454/version/12/file/2015-Verlauf-seit-1976-1FS-FG-Mathematik-Naturwissenschaften.pdf`. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[57] KRÄHENBÜHL, Samuel: *Kreativität als Lernstrategie – Die Bedeutung für Lese- und Rechenkompetenzen in der Grundschule*. Wiesbaden : Springer VS, 2016. – Dissertation an der Otto-Friedrich-Universität Bamberg

[58] KULHAVY, Raymond W. ; WAGER, Walter: Feedback in Programmed Instruction: Historical Context and Implications for Practice. In: DEMPSEY, John V. (Hrsg.) ; SALES, Gregory C. (Hrsg.): *Interactive Instruction and Feedback*. Englewood Cliffs, New Jersey : Educational Technology Publications, 1993, Kapitel 1, S. 3–20

[59] LOCKEE, Barbara ; MOORE, David M. ; BURTON, John: Foundations of Programmed Instruction. In: JONASSEN, David H. (Hrsg.): *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*. 2nd edition. Mahwah, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, 2004, Kapitel 20, S. 545–569

[60] MATTHÄUS, Heidrun ; MATTHÄUS, Wolf-Gert: *Mathematik für Ingenieur-Bachelor – Schritt für Schritt mit ausführlichen Lösungen*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2011

[61] MATTHEWS, Robert: Storks Deliver Babies (p=0.008). In: *Teaching Statistics* 22 (2000), Nr. 2, S. 36–38

[62] MCDONALD, Jason K. ; YANCHAR, Stephen C. ; OSGUTHORPE, Russell T.: Learning from Programmed Instruction: Examining Implications for Modern Instructional Technology. In: *Educational Technology Research and Development* 53 (2005), Nr. 2, S. 84–98

[63] MEI, Robert Ivo: *Elektronische Hausaufgaben in den Mathematik-Vorlesungen für Bauingenieure: Motivation, Entwicklung, Ersteinsatz und Evaluation*, RWTH Aachen University, Diplomarbeit, 2014

[64] MEI, Robert Ivo: Ausprägungen von Ingenieurmathematik: Rechenkniffe und Monsterterme. In: SCHOTT, Dieter (Hrsg.): *Proceedings 12. Workshop Mathematik für Ingenieure, Hamburg*, 2015 (Wismarer Frege-Reihe 02/15), S. 51–56

[65] MENOLD, Natalja ; BOGNER, Kathrin: *Gestaltung von Ratingskalen in Fragebögen (Version 1.0)*. Mannheim: GESIS - Leibniz-Institut für Sozialwissenschaften, 2014. http://dx.doi.org/10.15465/sdm-sg_015

[66] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN (Hrsg.): *Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht: Materialien und Anregungen zur Unterrichtsentwicklung – Berichte aus den SINUS.NRW Projekten*. Ritterbach Verlag, 2013 (9050/1)

[67] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN (Hrsg.): *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik*. Ritterbach Verlag, 2014 (4720)

[68] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN (Hrsg.): *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik*. Ritterbach Verlag, 1999 (4720)

[69] MOSLER, Karl ; DYCKERHOFF, Rainer ; SCHEICHER, Christoph: *Mathematische Methoden für Ökonomen*. 3., verb. u. erw. Auflage. Springer Gabler, 2018

[70] OECD: *Pisa 2012 Results: What Makes Schools Successful? Resources, Policies and Practices (Volume IV)*. OECD Publishing, 2013 http://dx.doi.org/10.1787/9789264201156-en. – Revised Version, February 2014

[71] OPPERMANN, Reinhard ; RASHEV, Rossen ; KINSHUK: Adaptability and Adaptivity in Learning Systems. In: BEHROOZ, A. (Hrsg.): *Knowledge Transfer*. London : Pace Publishing, 1997, S. 173–179

[72] PAPULA, Lothar: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. 14., überarb. u. erw. Auflage. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2014

[73] PARAMYTHIS, Alexandros ; LOIDL-REISINGER, Susanne: Adaptive Learning Environments and e-Learning Standards. In: *Electronic Journal on e-Learning* 2 (2004), Nr. 1, S. 181–194

[74] PILSHOFER, Birgit: *Wie erstelle ich einen Fragebogen? – Ein Leitfaden für die Praxis*. 2. Auflage. Graz: Wissenschaftsladen Graz, Januar 2001

[75] PÓLYA, George: *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme*. 2. Auflage. Bern, München : A. Francke Verlag, 1967

[76] PRESS, William H. ; TEUKOLSKY, Saul A. ; VETTERLING, William T. ; FLANNERY, Brian P.: *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. 2nd edition. Cambridge : Cambridge University Press, 1992

[77] RIESSINGER, Thomas: *Mathematik für Ingenieure – Eine anschauliche Einführung für das praxisorientierte Studium*. 8. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2011

[78] RJASANOWA, Kerstin: *Mathematische Modelle im Bauingenieurwesen: Mit Fallstudien und numerischen Lösungen*. 2. aktual. u. erw. Auflage. München : Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2015

[79] ROOCH, Aeneas ; KISS, Christine ; HÄRTERICH, Jörg: Brauchen Ingenieure Mathematik? – Wie Praxisbezug die Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert. In: BAUSCH, Isabell (Hrsg.) ; BIEHLER, Rolf (Hrsg.) ; BRUDER, Regina (Hrsg.) ; FISCHER, Pascal R. (Hrsg.) ; HOCHMUTH, Reinhard (Hrsg.) ; KOEPF, Wolfram (Hrsg.) ; SCHREIBER, Stephan (Hrsg.) ; WASSONG, Thomas (Hrsg.): *Mathematische Vor- und Brückenkurse – Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Springer Spektrum, 2014, Kapitel 27, S. 398–409

[80] RUXTON, Graeme D.: The unequal variance t-test is an underused alternative to Student's t-test and the Mann–Whitney U test. In: *Behavioral Ecology* 17 (2006), Juli, Nr. 4, S. 688–690

[81] SCHÄFER, Wolfgang ; GEORGI, Kurt: *Mathematik-Vorkurs – Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger*. Stuttgart, Leipzig : B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1993

[82] SCHIEMANN, Stephanie: Mathe = Mathe? – Mathematik in den 16 Bundesländern. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (2013), Nr. 4/2013, S. 226–232

[83] SCHRÖDER, Hartwig: *Lernen – Lehren – Unterricht: Lernpsychologische und didaktische Grundlagen*. 2., durchges. Auflage. München, Wien : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2002

[84] SCHUMANN, Heinz: Ungleichungen? – Ein Beispiel für den mathematischen Substanzverlust in den Curricula. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012 – Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 05.03.2012 bis 09.03.2012 in Weingarten*. Münster : WTM, 2012, S. 797–800

[85] SCHWARZ-JUNG, Silvia: Von der „Höheren Schule" zur neuen „Hauptschule": das Gymnasium als neue Nummer 1. In: *Statistisches Monatsheft Baden-Württemberg* (2012), Nr. 4, S. 31–36

[86] SEKRETARIAT DER STÄNDIGEN KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss vom 4.12.2003)*. München : Wolters Kluwer Deutschland, 2004

[87] SEKRETARIAT DER STÄNDIGEN KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. Köln : Wolters Kluwer Deutschland, 2015

[88] SELDEN, Annie ; SELDEN, John: A theoretical perspective for proof construction. In: KRAINER, Konrad (Hrsg.) ; VONDROVÁ, Nad̆a (Hrsg.): *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*. Prag : Charles University Prague, Faculty of Education; ERME, 2015, S. 198–204

[89] SEVERING, Eckart ; TEICHLER, Ulrich: Akademisierung der Berufswelt? Verberuflichung der Hochschulen? In: SEVERING, Eckart (Hrsg.) ; TEICHLER, Ulrich (Hrsg.): *Akademisierung der Berufswelt? – Berichte zur beruflichen Bildung AG BFN 13*. Bielefeld : Bertelsmann, 2013, S. 7–18

[90] SPIEWAK, Martin: Eine Schule lernt dazu: Türkisch als Leistungskurs, Förderkurse zum Deutschlernen und Ganztagsbetrieb – sieht so das Gymnasium der Zukunft aus? In: *DIE ZEIT* (2012), Nr. 8/2012. `http://www.zeit.de/2012/08/C-Gymnasium/komplettansicht`. – letzter Zugriff am 30.09.2019

[91] STAR, Jon R. ; STYLIANIDES, Gabriel J.: Procedural and Conceptual Knowledge: Exploring the Gap Between Knowledge Type and Knowledge Quality. In: *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education* 13 (2013), Nr. 2, S. 169–181

[92] SWELLER, John ; MERRIENBOER, Jeroen J. G. ; PAAS, Fred G. W. C.: Cognitive Architecture and Instructional Design. In: *Educational Psychology Review* 10 (1998), Nr. 3, S. 251–296

[93] VETTERS, Klaus ; MANTEUFFEL, Karl (Hrsg.): *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik – für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 4. Auflage. Wiesbaden : B. G. Teubner Verlag, 2004

[94] VOIGT, Matthias: *Bildungsarmut – Determinanten, Herkunftseffekte und Mechanismen des Hauptschulübertritts*. Wiesbaden : Springer VS, 2018. – Dissertation 2017 an der Universität Koblenz-Landau

[95] WESTERMANN, Thomas: *Mathematik für Ingenieure – Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch*. 7., akt. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2015

[96] WITTMANN, Erich C.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6., neu bearb. Auflage. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2009

[97] WITZKE, Ingo: Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht? In: LUDWIG, Matthias (Hrsg.) ; KLEINE, Michael (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012 – Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 05.03.2012 bis 09.03.2012 in Weingarten*. Münster : WTM-Verlag, 2012, S. 949–952

Abbildungsnachweis

Die Verwendung der Screenshots aus der Lernplattform L^2P geschieht mit freundlicher Genehmigung des Centers für Lehr- und Lernservices (CLS) der RWTH Aachen University, Abteilung Lernplattform-Management. Das betrifft den gesamten Anhang D sowie folgende Abbildungen:
Abb. 2.1 (S. 18); Abb. 2.2 (S. 25); Abb. 3.7 (S. 59); Abb. 3.8 (S. 61); Abb. 3.9 (S. 61); Abb. 3.10 (S. 62); Abb. 3.11 (S. 65); Abb. 3.12 (S. 66); Abb. 3.13 (S. 68); Abb. 3.14 (S. 68); Abb. 3.15 (S. 69); Abb. 4.3 (S. 109); Abb. 4.5 (S. 123); Abb. 4.6 (S. 124); Abb. 4.7 (S. 125); Abb. 4.8 (S. 127); Abb. 4.9 (S. 128); Abb. 4.11 (S. 132); Abb. 4.12 (S. 132); Abb. 4.13 (S. 133); Abb. 4.18 (S. 142); Abb. 4.20 (S. 147); Abb. 4.21 (S. 148); Abb. 4.23 (S. 150); Abb. 5.1 (S. 162)

Einige der Illustrationen in den Baumstrukturaufgaben sind mithilfe der Software GeoGebra (https://www.geogebra.org) erstellt worden. Das betrifft die Illustrationen in Anhang D auf den Seiten 310 bis 334 sowie folgende Abbildungen:
Abb. 3.11 (S. 65); Abb. 4.5 (S. 123); Abb. 4.6 (S. 124); Abb. 4.7 (S. 125); Abb. 4.8 (S. 127); Abb. 4.9 (S. 128); Abb. 4.20 (S. 147); Abb. 4.21 (S. 148); Abb. 4.23 (S. 150)

Namens- und Stichwortverzeichnis