

Einführung in die Sicherheitstheorie

**Berechnung von Zuverlässigkeitsindizes und
Versagenswahrscheinlichkeiten am Beispiel
eines Stahlgittermastes**



Matthias Mix

15. September 2014

1 Motivation

In vielen Bereichen des menschlichen Lebens werden Risiken zahlenmäßig erfasst, z.B. die Häufigkeit von Verkehrsunfällen oder die Häufigkeit von Nebenwirkungen bei Medikamenten. Die Sicherheitstheorie, die sich mit der Berechnung und Begrenzung von Risiken befasst, nimmt in der Bauingenieurausbildung nur eine untergeordnete Rolle ein, obwohl die zu führenden Sicherheitsnachweise von Bauwerken doch ebenfalls eine Risikobegrenzung zum Ziel haben. Je nach Sicherheitskonzept erfolgt die Risikobegrenzung mehr oder weniger unmittelbar. Für den Nachweis bestehender Bauwerke gewinnen Sicherheitskonzepte höherer Ordnung, sogenannte probabilistische Sicherheitskonzepte, aus Wirtschaftlichkeitsgründen an Bedeutung. Auf vereinfachende Annahmen von Sicherheitskonzepten niedriger Ordnung wird verzichtet, um unnötige Verstärkungsmaßnahmen, die allein durch Vereinfachungen ausgelöst würden, zu vermeiden. Im Gegenzug wächst der rechnerische Aufwand zur Ermittlung des sog. technischen Risikos, ausgedrückt als Versagenswahrscheinlichkeit P_f (probability of failure) bzw. als Zuverlässigkeitsindex β . Mit Kenntnis einer der beiden bauwerkabhängigen Kennzahlen kann entschieden werden, ob ein Bauwerk in seiner Umgebung mit Blick auf mögliche Schadensfolgen bestehen darf, oder ob es verstärkt oder aufgegeben werden muss. Die statische Berechnung von Bauwerken nach probabilistischem Sicherheitskonzept erfolgt mit Rechenprogrammen, deren Bedienung der anwendende Bauingenieur erlernen kann. Mit dieser Ausarbeitung soll Verständnis über die Methoden vermittelt werden, die in besagten Rechenprogrammen zum Einsatz kommen. Die wesentlichen Methoden und Begriffe werden anhand eines Zahlenbeispiels erläutert, das vom Leser handschriftlich oder z.B. mit Hilfe des Programms EXCEL nachvollzogen werden kann. Das Beispiel ist aus Gründen der Übersichtlichkeit einfach gehalten. Die Methoden lassen sich prinzipiell aber auf umfangreichere Systeme anwenden. Am Ende der Ausarbeitung werden die Ergebnisse diskutiert und es wird skizziert, wie sich mit Hilfe der Ergebnisse einer probabilistischen Berechnung Teilsicherheitsbeiwerte für ein semi-probabilistisches Sicherheitskonzept berechnen lassen.

2 Beispielsystem

Es wird ein Tragmast unter Windbelastung senkrecht zum Seil probabilistisch untersucht, d.h. es werden Zuverlässigkeitsindizes β bzw. Versagenswahrscheinlichkeiten P_f berechnet, die durch diese Einwirkung hervorgerufen werden. Zur Vereinfachung wird davon ausgegangen, dass ein Versagen nur im ersten Diagonalkreuz unterhalb der Traverse 2 stattfinden kann, d.h. für alle anderen Bauteile wird eine Überdimensionierung der Profilquerschnitte und Verbindungsmittel angenommen, die um Größenordnungen kleinere Versagenswahrscheinlichkeiten gegenüber dem betrachteten Diagonalkreuz erwarten lässt.

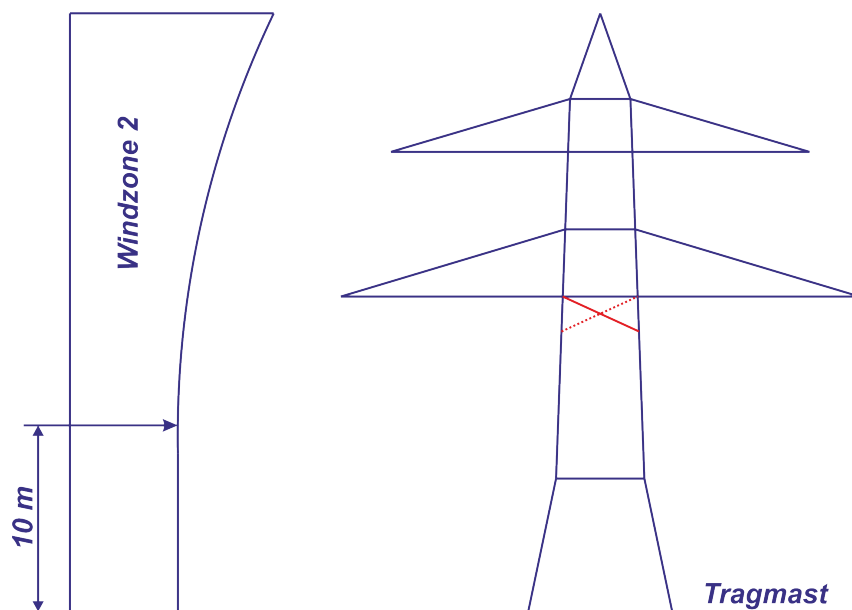


Abbildung 2.1: Beispielskizze: Tragmast unter Windbelastung

Der betrachtete Tragmast nach Abb. 2.1 befindet sich in Windzone 2. Erreicht der Staudruck in 10m über Gelände seinen charakteristischen Wert von

$$q_k = q_{0,98} = 1,7 \cdot q_{ref} = 1,7 \cdot 390 \text{ N/m}^2 = 663 \text{ N/m}^2,$$

soll die Stabkraft im Diagonalkreuz einen Wert von $N_{Sk} = 100000 \text{ N}$ (Druck oder Zug, je nach Diagonalneigung) aufweisen. Der Stab ist dimensioniert mit L90x9, S235, 1M27, 5.6, $d_0 = 29 \text{ mm}$, $e_1 = 60 \text{ mm}$, $e_2 = 45 \text{ mm}$.

Die Bruttofläche und die Effektivfläche betragen $A_{Br} = A_{eff} = 1550\text{mm}^2$. Die Knicklänge um die schwache, maßgebende Profilachse beträgt 223cm . Dies führt zu einem bezogenen Schlankheitsgrad von

$$\bar{\lambda} = 0,9 \cdot 223\text{cm} / 1,76\text{cm} / 93,9 = 1,214, \chi = 0,42.$$

Die Nettofläche beträgt $A_{Ne} = (90 - 29)\text{mm} \cdot 9\text{mm} = 549\text{mm}^2$.

Die Scherfläche der Schraube beträgt $A_{Scher} = \pi/4 \cdot (27\text{mm})^2 = 573\text{mm}^2$.

Aufgrund des Schraubenbildes gilt

$$\alpha_L = \min \{3,00; 1,20 \cdot 60/29 = 2,48; 1,85 \cdot (60/29 - 0,5) = 2,90; 2,3 \cdot (45/29 - 0,5) = 2,42\}$$

$$\alpha_L = 2,42.$$

Für einen späteren Vergleich zwischen semiprobabilistischer und probabilistischer Nachweisführung werden zunächst die Ausnutzungsgrade (G_D, G_Z, G_A, G_L) der vier möglichen Versagensmodi Druck, Zug, Abscheren und Lochleibung nach *DIN EN 50341-3-4* berechnet. Für die semiprobabilistische Nachweisführung wird der Bemessungswert der Stabkraft benötigt. Aufgrund linear-elastischer Stabkraftermittlung beträgt dieser unter um $\gamma_S = 1,35$ erhöhtem Staudruck $N_{Sd} = 1,35 \cdot N_{Sk} = 135000\text{N}$. Mit den Bemessungswerten der Widerstände ergeben sich folgende Ausnutzungsgrade:

$$G_D = \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} = \frac{135000\text{N}}{0,42 \cdot 235\text{N}/\text{mm}^2 \cdot 1550\text{mm}^2 / 1,1} = 0,971 < 1,0$$

$$G_Z = \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} = \frac{135000\text{N}}{0,9 \cdot 360\text{N}/\text{mm}^2 \cdot 549\text{mm}^2 / 1,25} = 0,949 < 1,0$$

$$G_A = \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} = \frac{135000\text{N}}{0,6 \cdot 500\text{N}/\text{mm}^2 \cdot 573\text{mm}^2 / 1,25} = 0,982 < 1,0$$

$$G_L = \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} = \frac{135000\text{N}}{2,42 \cdot 0,8 \cdot 360\text{N}/\text{mm}^2 \cdot 27\text{mm} \cdot 9\text{mm} / 1,25} = 0,996 < 1,0$$

Alle Nachweise weisen einen hohen Ausnutzungsgrad von fast 1,0 auf. Sollten die in *DIN EN 50341-3-4* vereinbarten Regeln für die Bestimmung von Bemessungswerten für Einwirkungen und Widerstände einen Zuverlässigkeitsindex von $\beta = 3,8$ gewährleisten (falls ein Ausnutzungsgrad von 1,0 vorliegt), müssten sich für alle vier Versagensmodi Zuverlässigkeitsindizes etwas oberhalb von 3,8 berechnen lassen. Ein geringer Anstieg der Belastung, der den Ausnutzungsgrad auf genau 1,0 anwachsen ließe, müsste eine Absenkung des Zuverlässigkeitsindex auf genau 3,8 zur Folge haben. Die sich tatsächlich einstellenden Zuverlässigkeitsindizes werden nachfolgend berechnet. Nach Vorliegen der probabilistischen Rechenergebnisse können diese mit den Ausnutzungsgraden verglichen und diskutiert werden.

3 Grenzzustandsfunktionen

Grenzzustandsfunktionen g beschreiben die Differenz zwischen Beanspruchbarkeit r (auch Kapazität) und der sie aufzehrenden Beanspruchung s . Für mechanische Probleme haben Grenzzustandsfunktionen Kraft- oder Spannungseinheiten. Grenzzustandsfunktionen lassen sich auch für andere Probleme formulieren. Beispielsweise entspricht die Höhe eines Hochwasserschuttdammes ebenfalls einer Kapazität (Beanspruchbarkeit) und der Wasserstand der Beanspruchung. Versagen tritt ein, wenn die Grenzzustandsfunktion einen negativen Wert annimmt, wenn also die Beanspruchung die Beanspruchbarkeit übersteigt. Für mechanische Probleme tritt ein Bruch der Komponente ein. Für das Bsp. des Hochwasserschuttdammes übersteigt der Wasserstand die Dammkrone.

Für die vier zu untersuchenden Versagensmodi sind folgende Grenzzustandsfunktionen aufzustellen:

$$g_D = r_D(f_y) - s(v)$$

$$g_Z = r_Z(f_u) - s(v)$$

$$g_A = r_A(f_{uA}) - s(v)$$

$$g_L = r_A(f_{uL}) - s(v)$$

Die Beanspruchbarkeit r setzt sich jeweils durch Produktbildung aus Querschnittsfläche und Festigkeit zusammen. Für die Beanspruchung s ist bekannt, dass diese $100000N$ beträgt, wenn der Staudruck seinen charakteristischen Wert von $q_k = q_{0,98} = 663N/m^2$ annimmt. Die Beanspruchung des Stabes s verhält sich proportional zum Staudruck q , so dass die Beanspruchung in Abhängigkeit des Staudrucks angegeben werden kann:

$$s(q(v)) = \frac{N(q_{0,98})}{q_{0,98}} \cdot q(v)$$

Der Staudruck hängt von der Luftdichte ρ_{Luft} und dem Quadrat der Böenwindgeschwindigkeit v ab:

$$s(v) = \frac{N(q_{0,98})}{\frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_{0,98}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot v^2$$

Mit $N(q_{0,98}) = 100000N$ und Kürzen von $\frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft}$ ergibt sich

$$s(v) = \frac{100000N}{v_{0,98}^2} \cdot v^2.$$

Die zum charakteristischen Staudruck $q_k = q_{0,98} = 1,7 \cdot q_{ref} = 1,7 \cdot 390N/m^2 = 663N/m^2$ gehörende Windgeschwindigkeit $v_{0,98}$ folgt nach Umstellen aus

$$q_{0,98} = 1,7 \cdot 390 \frac{N}{m^2} \cdot \left(\frac{10}{10}\right)^{0,37}$$

$$q_{0,98} = 663 \frac{N}{m^2} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_{0,98}^2$$

$$v_{0,98} = \sqrt{\frac{2 \cdot 663 \frac{N}{m^2}}{1,25 \frac{kg}{m^3}}}$$

$$v_{0,98} = 32,57 \frac{m}{s}$$

Zusammen mit dem von der Streckgrenze f_y abhängigen Druckwiderstand

$$r_D(f_y) = \chi \cdot A_{eff} \cdot f_y$$

vervollständigt sich die zum Versagensmodus Druck gehörende Grenzzustandsfunktion zu

$$g_D = 0,420 \cdot 1550mm^2 \cdot f_y - \frac{100000N}{32,57^2} \cdot v^2.$$

Die Grenzzustandsfunktion für den Versagensmodus Druck g_D hängt von den Variablen Streckgrenze f_y und Windgeschwindigkeit v ab. In Abhängigkeit der Werte, die diese Variablen annehmen (sog. Variablenrealisierung), ist der Funktionswert positiv ($g_D > 0$) oder negativ ($g_D < 0$). Im Falle eines positiven Funktionswertes übersteigt die Beanspruchbarkeit die Beanspruchung und der Stab überlebt. Alle Variablenrealisierungen, die $g_D > 0$ zur Folge haben, bilden den Überlebensraum der Variablen. Im Falle eines negativen Funktionswertes unterschreitet die Beanspruchbarkeit die Beanspruchung und der Stab versagt. Alle Variablenrealisierungen, die $g_D < 0$ zur Folge haben, bilden den Versagensraum der Variablen. Im Falle eines Funktionswertes von $g_D = 0$ entspricht die Beanspruchbarkeit gerade der Beanspruchung und der Stab befindet sich an der Grenze zwischen Überleben und Versagen. Alle Variablenrealisierungen, die genau $g_D = 0$ zur Folge haben, bilden den Grenzzustand. Einige Beispiele für Variablenrealisierungen und die sich hierfür ergebenden Funktionswerte der Grenzzustandsfunktion g_D sind in Tab. 3.1 angegeben.

Tabelle 3.1: Beispielhafte Variablenrealisierungen, Funktionswert der Grenzzustandsfunktion und Entscheidung, ob Überleben oder Versagen des Stabes unter Druckbeanspruchung vorliegt

Variablenrealisierung	f_y	v	g_D	Überleben oder Versagen
1	267,0 N/mm ²	37,93 m/s	+38200 N	Überleben
2	226,3 N/mm ²	41,46 m/s	-14700 N	Versagen
3	297,5 N/mm ²	43,75 m/s	+13200 N	Überleben
4	180,1 N/mm ²	36,08 m/s	-5500 N	Versagen
5	231,7 N/mm ²	40,00 m/s	0 N	Grenze
6	225,3 N/mm ²	40,00 m/s	-4200 N	Versagen
7	231,7 N/mm ²	39,73 m/s	+2000 N	Überleben
8	280,3 N/mm ²	44,00 m/s	0 N	Grenze

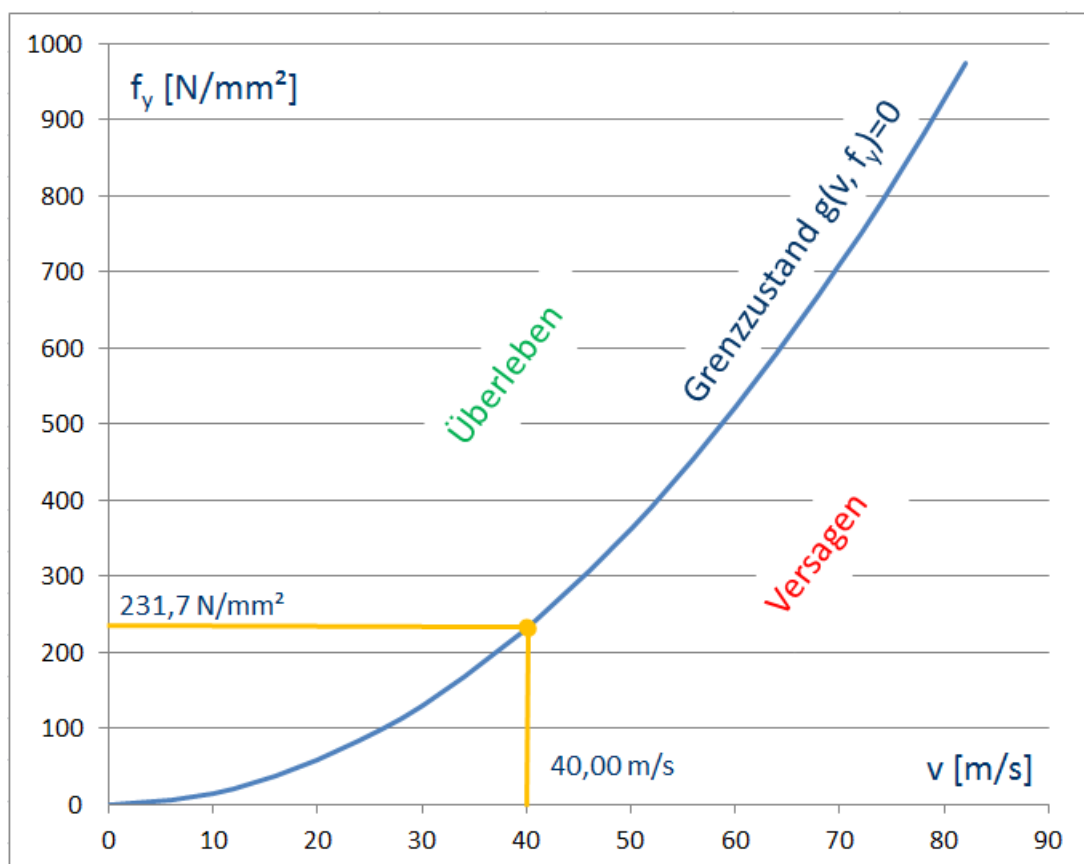


Abbildung 3.1: Grenzzustand für Druckversagen im Originalraum

Der Funktionswert der Grenzzustandsfunktion g_D gibt an, um wieviel die Beanspruchbarkeit größer ist als die Beanspruchung. Dieses Maß wird auch als Sicherheitsmarge bezeichnet, was im Falle eines Überlebens positiv ist. Die Sicherheitsmarge ist selbst eine Zufallsgröße. Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Sicherheitsmarge aufgezehrt ist und unter Null sinkt, ist die Versagenswahrscheinlichkeit. Alle Variablenrealisierungen, die genau zu $g_D = 0$ führen und deshalb den Grenzzustand bilden, lassen sich graphisch darstellen, sh. Abb. 3.1.

Das Zahlenbeispiel der Variablenrealisierung 5 ($f_y = 231,7 \text{ N/mm}^2$ und $v = 40,00 \text{ m/s}$), die auf dem Grenzzustand liegt, ist eingezeichnet. Würde die Zufallsgröße f_y einen Wert unter $231,7 \text{ N/mm}^2$ annehmen, die Windgeschwindigkeit jedoch wieder $v = 40,00 \text{ m/s}$ realisieren, würde Versagen vorliegen, vgl. Variablenrealisierung 6. Würde die Zufallsgröße f_y wieder einen Wert von $231,7 \text{ N/mm}^2$ annehmen, die Windgeschwindigkeit jedoch mit $v = 39,73 \text{ m/s}$ geringer realisieren, würde Überleben vorliegen, vgl. Variablenrealisierung 7. Die übrigen Funktionswerte g_D für beispielhafte Variablenrealisierungen in Tab. 3.1 können bei Interesse vom Leser nachgerechnet werden. Die Wertepaare (f_y, v) können in Abb. 3.1 eingezeichnet werden. Der Verlauf eines Grenzzustandes folgt Naturgesetzen, bei Anwendung auf mechanische Probleme den Regeln der technischen Mechanik. Er kann nicht festgelegt oder vereinbart werden und ist deshalb nicht manipulierbar. Im vorliegenden Bsp. nimmt der Graph den Verlauf einer quadratischen Funktion an, weil die Variable Windgeschwindigkeit v mit dem Exponenten 2 in die Beanspruchung des Stabes $s(v)$ eingeht. Die Variablen, die an den Achsen des Diagramms angetragen sind, sind in der Darstellung (noch) nicht mit Hilfe einer (noch unbekannt) Vorschrift transformiert worden. Der Grenzzustand ist deshalb im sog. Originalraum der Variablen eingezeichnet. Oberhalb des Graphen befindet sich der Überlebensraum, unterhalb der Versagensraum. Der Grenzzustand im Originalraum ist unabhängig von Verteilungsgesetzen der beteiligten Variablen, die an dieser Stelle noch nicht behandelt werden mussten.

In gleicher Weise wie für Druckversagen lassen sich die Grenzzustandsfunktionen für die übrigen Versagensmodi Zug, Abscheren und Lochleibung angeben:

$$g_Z = 549 \text{ mm}^2 \cdot f_u - \frac{100000 \text{ N}}{32,57^2} \cdot v^2.$$

$$g_A = 573 \text{ mm}^2 \cdot f_{uA} - \frac{100000 \text{ N}}{32,57^2} \cdot v^2.$$

$$g_L = 27 \text{ mm} \cdot 9 \text{ mm} \cdot f_{uL} - \frac{100000 \text{ N}}{32,57^2} \cdot v^2.$$

Die Beanspruchbarkeiten r ändern sich entsprechend des Versagensmodus. Die Beanspruchungen s sind für die übrigen drei Versagensmodi wie für Druckversagen, da sich alle vier Versagensmodi auf das gleiche Diagonalkreuz beziehen. Für beispielhafte Variablenrealisierungen lassen sich wiederum die Funktionswerte der Grenzzustandsfunktion g_Z , g_A und g_L berechnen und anhand des Vorzeichens kann entschieden werden, ob Überleben oder Versagen vorliegt. Bei Interesse können die nachfolgenden Tabellen vom Leser vervollständigt werden. Die

Grenzzustände für die übrigen drei Versagensmodi Zug, Abscheren und Lochleibung lassen sich ebenfalls wieder graphisch darstellen. Die jeweils fünfte Variablenrealisierung, die auf dem Grenzzustand liegt, ist eingezeichnet.

Tabelle 3.2: Beispielhafte Variablenrealisierungen, Funktionswert der Grenzzustandsfunktion und Entscheidung, ob Überleben oder Versagen des Stabes unter Zugbeanspruchung vorliegt

Variablenrealisierung	f_u	v	g_z	Überleben oder Versagen
1	$371,5 \text{ N/mm}^2$	$42,45 \text{ m/s}$	$+34100 \text{ N}$	Überleben
2	$316,7 \text{ N/mm}^2$	$47,58 \text{ m/s}$	-39500 N
3	$278,5 \text{ N/mm}^2$	$28,75 \text{ m/s}$ N
4	$308,2 \text{ N/mm}^2$	$42,37 \text{ m/s}$ N
5	$274,7 \text{ N/mm}^2$	$40,00 \text{ m/s}$	0 N	Grenze

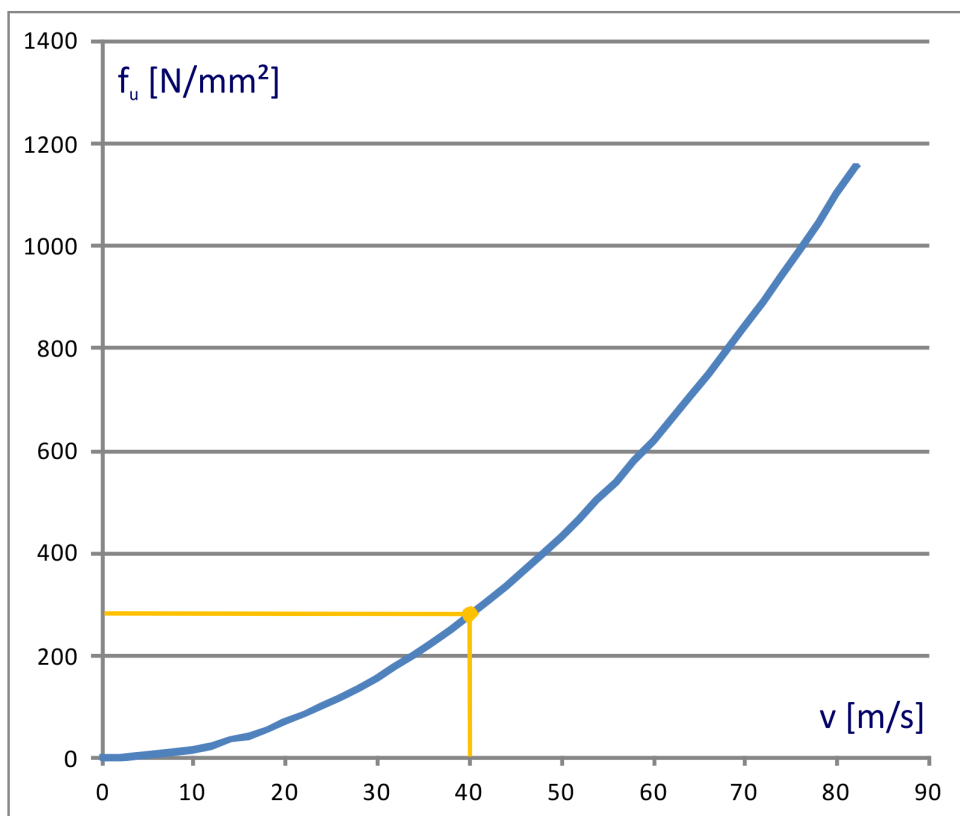


Abbildung 3.2: Grenzzustand für Zugversagen im Originalraum

Tabelle 3.3: Beispielhafte Variablenrealisierungen, Funktionswert der Grenzzustandsfunktion und Entscheidung, ob Überleben oder Versagen des Stabes unter Abscherbeanspruchung vorliegt

Variablenrealisierung	f_{uA}	v	g_A	Überleben oder Versagen
1	$276,3 \text{ N/mm}^2$	$43,81 \text{ m/s}$	-22600 N	Versagen
2	$321,9 \text{ N/mm}^2$	$39,65 \text{ m/s}$ N
3	$228,2 \text{ N/mm}^2$	$37,24 \text{ m/s}$ N
4	$301,5 \text{ N/mm}^2$	$37,24 \text{ m/s}$ N
5	$263,2 \text{ N/mm}^2$	$40,00 \text{ m/s}$	0 N	Grenze

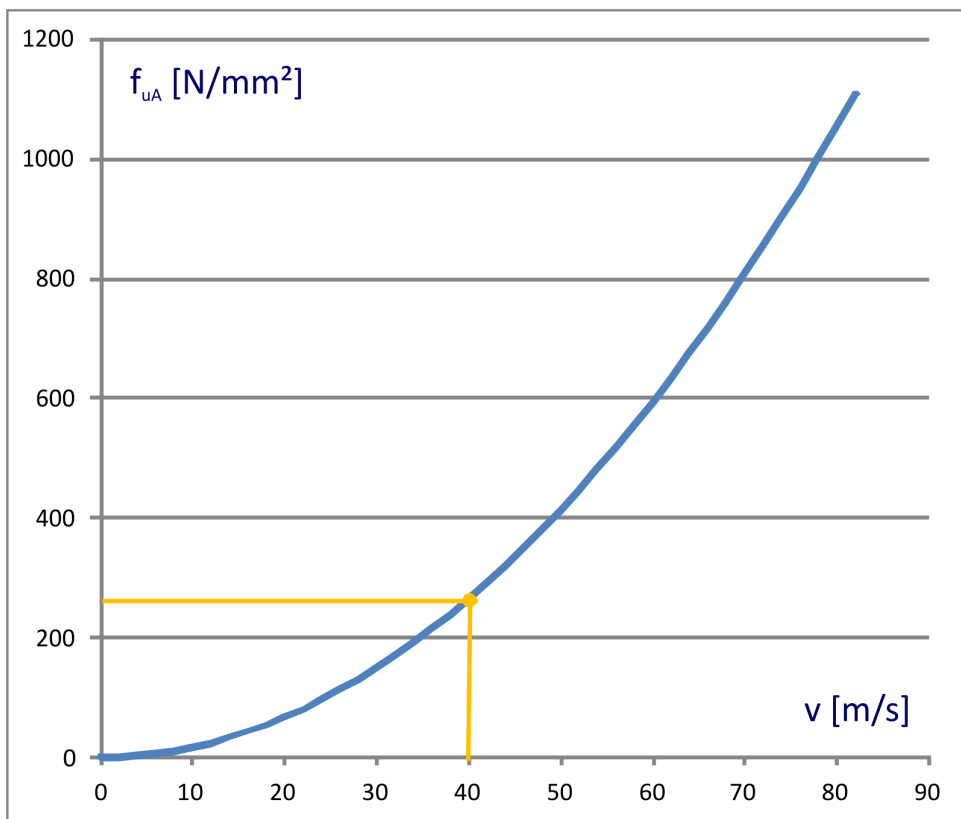


Abbildung 3.3: Grenzzustand für Abscheren im Originalraum

Tabelle 3.4: Beispielhafte Variablenrealisierungen, Funktionswert der Grenzzustandsfunktion und Entscheidung, ob Überleben oder Versagen des Stabes unter Lochleibungsbeanspruchung vorliegt

Variablenrealisierung	f_{uL}	v	g_L	Überleben oder Versagen
1	397,2 N/mm^2	32,00 m/s	0 N	Grenze
2	448,5 N/mm^2	34,00 m/s N
3	502,8 N/mm^2	36,00 m/s N
4	560,2 N/mm^2	38,00 m/s N
5	620,7 N/mm^2	40,00 m/s	0 N	Grenze

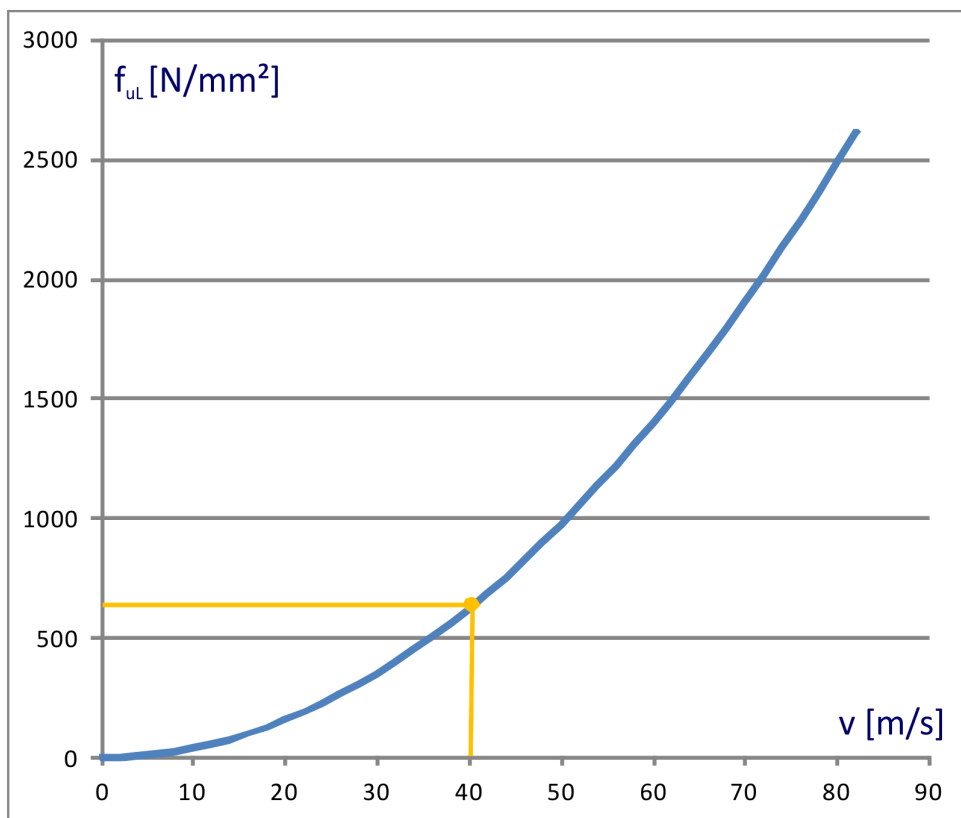


Abbildung 3.4: Grenzzustand für Lochleibungsversagen im Originalraum

4 Stochastisches Modell

Für die probabilistische Berechnung wurden im ersten Arbeitsschritt Grenzzustandsfunktionen $g(\underline{x}) = r - s$ der denkbaren Versagensmodi formuliert. Diese enthalten Variablen \underline{x} und in Abhängigkeit der angenommenen Werte (sog. Variablenrealisierungen) nimmt die Grenzzustandsfunktion positive Werte (Überleben) oder negative Werte (Versagen) an. Alle auftretenden Variablen $x_1, x_2, \text{ usw.}$ sind zum Vektor \underline{x} zusammengefasst. In unserem Bsp. entspricht x_1 der Windgeschwindigkeit v , x_2 der Streckgrenze f_y , x_3 der Zugfestigkeit f_u , x_4 der Abscherfestigkeit der Schraube f_{uA} und x_5 der Lochleibungsbeanspruchbarkeit zwischen Schraube und Blech f_{uL} . Um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von negativen Funktionswerten der Grenzzustandsfunktion (Versagenswahrscheinlichkeit der Komponente) berechnen zu können, müssen Gesetzmäßigkeiten zur Häufigkeit bestimmter Variablenrealisierungen bekannt sein. Die Häufigkeit für einen konkreten Wert ist dabei stets 0, nur die Häufigkeit für die Realisierung in einem bestimmten Intervall (sog. Klasse) $[x_{unten}, x_{oben}]$ nimmt Werte > 0 an. Die Wahrscheinlichkeit für eine Realisierung innerhalb der Klassengrenzen $[x_{unten} = -\infty, x_{oben} = +\infty]$ beträgt 1. Es werden Verteilungssummenfunktionen $F(x)$ vereinbart, welche die Häufigkeit im Intervall $[x_{unten} = -\infty, x_{oben} = x]$ prognostizieren. Die vereinbarte Verteilungssummenfunktion $F(x)$ soll der Natur der erfassten Variable x möglichst entsprechen. Gelingt dies, so gibt der Funktionswert $F(x)$ die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Variable unter x realisiert. Die vereinbarten Verteilungssummenfunktionen $F(x_1), F(x_2), \text{ usw.}$ bilden das stochastische Modell. Der Funktionswert $F(x)$ prognostiziert Unterschreitenswahrscheinlichkeiten für Argumente x , die bei zutreffender Vereinbarung der Häufigkeit entsprechen, mit der die Variable unter x liegt. Die erste Ableitung der Verteilungssummenfunktion $F(x)$ ist die Verteilungsdichtefunktion $f(x)$.

Eine Verteilungssummenfunktionen $F(x)$ ist gekennzeichnet durch

- ihre mathematische Struktur, also den Verteilungstyp und
- Verteilungskennwerte (meist Mittelwert zur Beschreibung der zentralen Tendenz und Standardabweichung zur Beschreibung der Variablenstreuung um die zentrale Tendenz, gegebenenfalls weitere Kennwerte zur Berücksichtigung von Kleinst- oder Größtwerten oder zur Modellierung von Asymmetrien der Verteilungsdichtefunktion $f(x)$ usw.).

Höchstwerte klimatischer Einwirkungen werden durch Verteilungen vom Typ Gumbel gut erfasst. Die jährliche größte Böenwindgeschwindigkeit v weist in Deutschland außerdem einen Variationskoeffizienten von etwa $V = 0,16$ auf. Die Verteilung umfasst also nicht alltägliche Windgeschwindigkeiten, sondern jeweils die größten, während eines Jahres gemessenen Windgeschwindigkeiten. Von allen, während eines Jahres gemessenen Windgeschwindigkeiten wird

nur die höchste beachtet, alle kleineren Messwerte werden ignoriert.

Der Variationskoeffizient V ist definiert als Verhältnis von Standardabweichung σ zu Mittelwert μ . Für den Variationskoeffizienten der Böenwindgeschwindigkeit v gilt demnach:

$$V_v = \frac{\sigma_v}{\mu_v}$$

Sind Variationskoeffizient und Mittelwert bekannt, kann durch Umstellen unmittelbar die Standardabweichung berechnet werden:

$$\sigma_v = V_v \cdot \mu_v$$

Die Gumbel-Verteilungssummenfunktion der Böenwindgeschwindigkeit v hat folgende Struktur:

$$F(v) = \exp \left\{ -\exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_v} \cdot (v - \hat{v}) \right] \right\}$$

Darin sind der Streuungsparameter:

$$\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_v} = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot V \cdot \mu_v} = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot 0,16 \cdot \mu_v} = \frac{8,01594}{\mu_v}$$

und der Modalwert:

$$\hat{v} = \mu_v - \frac{0,577216 \cdot \sqrt{6}}{\pi} \cdot V \cdot \mu_v = \mu_v - \frac{0,577216 \cdot \sqrt{6}}{\pi} \cdot 0,16 \cdot \mu_v = 0,927991 \cdot \mu_v$$

Der Modalwert kennzeichnet die häufigste Realisierung der Verteilung. Die Verteilungsdichtefunktion $f(x)$ hat an dieser Stelle ihr Maximum, die Verteilungssummenfunktion $F(x)$ ihre Wendestelle.

Nimmt das Argument der Funktion sein 0,98-Quantil an, also die Böenwindgeschwindigkeit $v_{0,98}$, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 unterschritten wird, so beträgt der Funktionswert der Verteilungssummenfunktion gerade 0,98:

$$0,98 = \exp \left\{ -\exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_v} \cdot (v_{0,98} - \hat{v}) \right] \right\}$$

Weiteres Umstellen führt zu:

$$-\ln[-\ln(0,98)] = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_v} \cdot (v_{0,98} - \hat{v})$$

und weiter zu:

$$+3,90194 = \frac{8,01594}{\mu_v} \cdot (v_{0,98} - 0,927991 \cdot \mu_v)$$

Das Verhältnis zwischen 0,98-Quantil $v_{0,98}$ und Mittelwert μ_v lässt sich angeben mit:

$$\frac{v_{0,98}}{\mu_v} = 1,41476$$

Bei bekanntem 0,98-Quantil lässt sich der Mittelwert berechnen. In Windzone 2 gilt beispielsweise $v_{0,98} = 32,57 \text{ m/s}$, daraus folgt ein Mittelwert von:

$$\mu_v = \frac{v_{0,98}}{1,41476} = \frac{32,57 \frac{m}{s}}{1,41476} = 23,02 \frac{m}{s}$$

Durch Multiplikation des Mittelwertes mit dem Variationskoeffizienten ergibt sich eine Standardabweichung von:

$$\sigma_v = V_v \cdot \mu_v = 0,16 \cdot 23,02 \frac{m}{s} = 3,683 \frac{m}{s}$$

Der Modalwert beträgt:

$$\hat{v} = 0,927991 \cdot 23,02 \frac{m}{s} = 21,36 \frac{m}{s}$$

Die Abb. 4.1 zeigt die Verteilungsdichtefunktion $f(v)$ der Böenwindgeschwindigkeit. Neben dem Modalwert \hat{v} (häufigster Wert) und dem Mittelwert $\bar{v} = \mu_v$ (Schwerpunkt) ist der Medianwert \tilde{v} (Flächenhalbierende) eingetragen. Der Medianwert ist die Variablenrealisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 unterschritten und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 überschritten wird. Alle drei Kennwerte beschreiben die zentrale Tendenz einer Verteilung. Sie sind allgemein jedoch nicht gleich groß, auch die Reihenfolge hängt vom Verteilungstyp ab. Würde eine Normal-Verteilung (auch Gauß-Verteilung) zutreffen, so würden Modalwert, Mittelwert und Medianwert zusammenfallen ($\hat{v} = \bar{v} = \tilde{v}$). Auch das 0,98-Quantil $v_{0,98}$ ist eingetragen: Es teilt die Fläche unter der Dichtefunktion im Verhältnis 0,98 links von $v_{0,98}$ zu 0,02 rechts von $v_{0,98}$.

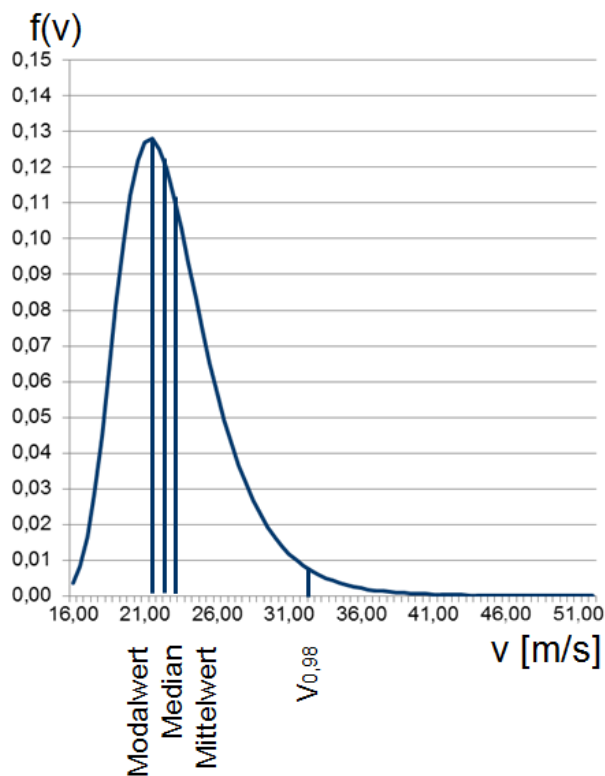


Abbildung 4.1: Verteilungsdichtefunktion $f(v)$ der Gumbel-verteilten Böenwindgeschwindigkeit, Windzone 2, 10m über Geländeoberkante

Die Abb. 4.2 zeigt die Verteilungssummenfunktion $F(v)$ der Böenwindgeschwindigkeit. Sie nähert sich für große Realisierungen asymptotisch 1 an, weil die Fläche unter einer Dichtefunktion (erste Ableitung der Summenfunktion) stets genau 1 beträgt.

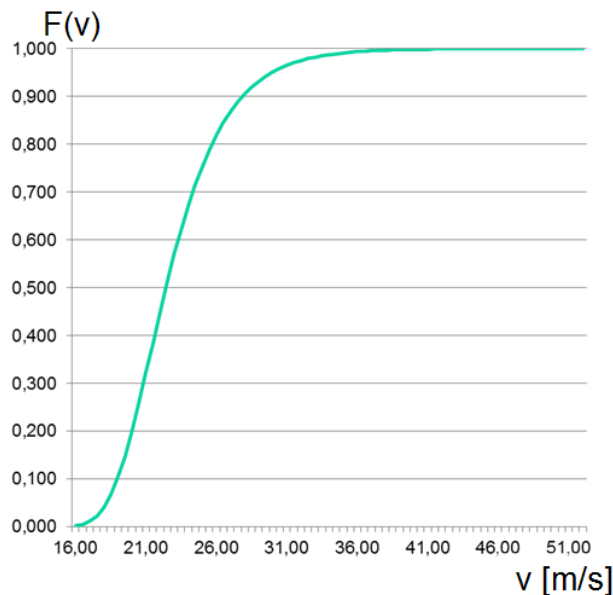


Abbildung 4.2: Verteilungssummenfunktion $F(v)$ der Gumbel-verteilten Böenwindgeschwindigkeit, Windzone 2, 10m über Geländeoberkante

Die Verteilungssummenfunktion F ist die für probabilistische Berechnungen wichtige Funktion, denn sie beschreibt analytisch, mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Realisierungen der erfassten stochastischen Variable unterschritten werden. Zum Beispiel lässt sich für das vorliegende Bsp. berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit P eine Windgeschwindigkeit von $v = 35 \text{ m/s}$ unterschritten (oder höchstens gerade erreicht) wird:

$$P(v \leq 35 \text{ m/s}) = F(v = 35 \text{ m/s})$$

$$F(v) = \exp \left\{ -\exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_v} \cdot (v - \hat{v}) \right] \right\}$$

$$F(v = 35,00) = \exp \left\{ -\exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot 3,683} \cdot (35,00 - 21,36) \right] \right\}$$

$$F(v = 35,00) = 0,991$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis (auch Komplementärereignis), ein Überschreiten von $v = 35 \text{ m/s}$ also, beträgt:

$$P(v > 35 \text{ m/s}) = 1 - F(v = 35 \text{ m/s})$$

$$P(v > 35\text{m/s}) = 1 - 0,991 = 0,009$$

Auf diese Weise lässt sich beispielsweise auch die Wahrscheinlichkeit für eine Realisierung der stochastischen Variable in einem Intervall berechnen:

$$P(20\text{m/s} \leq v \leq 35\text{m/s}) = F(v = 35\text{m/s}) - F(v = 20\text{m/s})$$

$$P(20\text{m/s} \leq v \leq 35\text{m/s}) = 0,991 - \dots$$

$$P(20\text{m/s} \leq v \leq 35\text{m/s}) = \dots$$

Ist nicht die Variablenrealisierung gegeben und die Unterschreitenswahrscheinlichkeit gesucht, sondern umgekehrt die Variablenrealisierung zu einer gegebenen Unterschreitenswahrscheinlichkeit gesucht, kann die Verteilungssummenfunktion $F(v)$ nach ihrem Argument umgestellt werden:

$$F(v) = \exp \left\{ -\exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_v} \cdot (v_{F(v)} - \hat{v}) \right] \right\}$$

$$-\ln[-\ln(F(v))] = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \sigma_v} \cdot (v_{F(v)} - \hat{v})$$

$$v_{F(v)} = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

Die Böenwindgeschwindigkeit, die sich durchschnittlich alle $T = 500$ Jahre wiederholt, wird pro Jahr beispielsweise mit einer Wahrscheinlichkeit von $P = 1 - 1/T = 1 - 1/500 = 0,998$ unterschritten (mit $1 - 0,998 = 0,002$ überschritten). Die Höhe dieser Böenwindgeschwindigkeit soll berechnet werden:

$$v_{0,998} = -\ln[-\ln(0,998)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683 \text{ m/s}}{\pi} + 21,36 \text{ m/s}$$

$$v_{0,998} = 39,20 \text{ m/s}$$

Zu dieser Böenwindgeschwindigkeit gehört ein Staudruck von

$$q_{0,998} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_{0,998}^2$$

$$q_{0,998} = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (39,20 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2$$

$$q_{0,998} = 960 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = 960 \text{ N/m}^2$$

Die Böenwindgeschwindigkeit, die sich durchschnittlich alle $T = 2000$ Jahre wiederholt, wird pro Jahr beispielsweise mit einer Wahrscheinlichkeit von $P = 1 - 1/T = 1 - 1/2000 = \dots$ unterschritten (mit $1 - \dots = \dots$ überschritten). Die Höhe dieser Böenwindgeschwindigkeit beträgt:

$$v_{\dots} = -\ln[-\ln(\dots)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683 \text{ m/s}}{\pi} + 21,36 \text{ m/s}$$

$$v_{\dots} = \dots \text{ m/s}$$

Zu dieser Böenwindgeschwindigkeit gehört ein Staudruck von

$$q_{\dots} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot (v_{\dots})^2$$

$$q_{\dots} = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (\dots)^2$$

$$q_{\dots} = \dots \text{ N/m}^2$$

Für Variable 2, die Streckgrenze f_y , ist der Mittelwert mit $\mu_{f_y} = 280 \text{ N/mm}^2$ und die Standardabweichung mit $\sigma_{f_y} = 23 \text{ N/mm}^2$ bekannt. Als Verteilungstyp findet die Lognormal-Verteilung Anwendung. Dies bedeutet, dass nicht die in Versuchen gemessenen Festigkeitswerte selbst einer Normal-Verteilung folgen, sondern die logarithmierten Festigkeitswerte. Von allen gemessenen Festigkeitswerten in $[\text{N/mm}^2]$ wird also der natürliche Logarithmus gebildet. Diese \ln -Funktionswerte folgen einer Normalverteilung.

Der Mittelwert μ_{\ln} der logarithmierten Festigkeitswerte (der Streckgrenze) beträgt:

$$\mu_{\ln} = \ln \left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}} \right) = \ln \left(\frac{280 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{23 \text{ N/mm}^2}{280 \text{ N/mm}^2}\right)^2}} \right) = 5,6314$$

Die Standardabweichung σ_{\ln} der logarithmierten Festigkeitswerte (der Streckgrenze) beträgt:

$$\sigma_{\ln} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \right]} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{23 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{280 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}\right)^2 \right]} = 0,08200$$

Die Berechnung eines Quantils erfolgt mit:

$$f_{y,q} = \exp(\mu_{\ln} + k_q \cdot \sigma_{\ln})$$

Darin ist $k_q = \Phi^{-1}(q)$ der Funktionswert der inversen Standardnormalverteilung zur Unterschreitenswahrscheinlichkeit q . Tab. 4.1 umfasst einige beispielhafte Funktionswerte. Bei Anwendung der Lognormal-Verteilung auf Festigkeitsprobleme interessieren meist Quantile mit Unterschreitenswahrscheinlichkeiten $q < 0,5$, also $k_q = \Phi^{-1}(q) < 0$. Aufgrund der symmetrischen Verteilungsdichte φ der Standardnormalverteilung gilt

$$\Phi^{-1}(q) = -\Phi^{-1}(1 - q),$$

z.B. $\Phi^{-1}(0,05) = -1,645$ und $\Phi^{-1}(1 - 0,05 = 0,95) = +1,645$.

Für das Bsp. beträgt das 0,05-Quantil, d.h. die Streckgrenzen-Realisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 unterschritten wird:

$$f_{y,0.05} = \exp(5,6314 - 1,645 \cdot 0,08200) = 243,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = f_{y,k}$$

Tabelle 4.1: Beispielhafte Funktionswerte der inversen Standardnormalverteilung zur Unterschreitenswahrscheinlichkeit q

Unterschreitenswahrscheinlichkeit q	Funktionswert der inversen Standardnormalverteilung $k_q = \Phi^{-1}(q)$
0,990000	+2,326
0,950000	+1,645
0,900000	+1,282
0,800000	+0,842
0,500000	+0,000
0,200000	-0,842
0,100000	-1,282
0,064256	-1,520 (= $-0,4 \cdot 3,8$)
0,050000	-1,645
0,020000	-2,054
0,010000	-2,326
0,001183	-3,040 (= $-0,8 \cdot 3,8$)

Das 0,02-Quantil, d.h. die Streckgrenzen-Realisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 unterschritten wird, beträgt:

$$f_{y,0.02} = \exp(5,6314 - \dots \cdot 0,08200) = \dots \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Aus dem Zahlenbeispiel wird der Vorzug der Lognormal-Verteilung für Festigkeitsvariablen erkennbar: Bei der Berechnung einer Variablenrealisierung für eine vorgegebene Unterschreitenswahrscheinlichkeit wird eine Exponentialfunktion angewendet. Diese liefert auch im Falle negativer Exponenten stets positive Funktionswerte, was für Festigkeitsvariablen, für die negative Realisierungen physikalisch unsinnig sind, zutrifft. In Tab. 4.1 haben die Funktionswerte $\Phi^{-1}(0,064256) = -0,4 \cdot 3,8 = -1,520$ und $\Phi^{-1}(0,001183) = -0,8 \cdot 3,8 = -3,040$ besondere Bedeutung für die Festlegung von Bemessungswiderständen R_d ¹.

¹An diesen Quantilen vermutet die DIN EN 1990 die Widerstandsrealisierung am Bemessungspunkt. Der erste Fall findet Anwendung, wenn die Einwirkung im Vergleich zum Widerstand eine starke Streuung aufweist. Der zweite Fall findet Anwendung, wenn die Einwirkung und der Widerstand ähnliche Streuungen aufweisen. In der Regel wird der zweite Fall angewendet. Für überwiegend windbeanspruchte Stahltragwerke trifft eher der erste Fall zu. Durch Multiplikation mit einheitlich vereinbarten Teilsicherheitsbeiwerten γ_R (häufig auch γ_M) ergibt sich der charakteristische Widerstand $R_k = R_d \cdot \gamma_R$.

Ist nicht die zu einer gegebenen Unterschreitenswahrscheinlichkeit gehörende Festigkeitsrealisierung gesucht, sondern die zu einer Festigkeitsrealisierung gehörende Unterschreitenswahrscheinlichkeit, so kann umgestellt werden.

$$f_{y,q} = \exp(\mu_{ln} + k_q \cdot \sigma_{ln})$$

$$\ln(f_{y,q}) = \mu_{ln} + k_q \cdot \sigma_{ln}$$

$$k_q = \frac{\ln(f_{y,q}) - \mu_{ln}}{\sigma_{ln}}$$

Für eine Streckgrenzen-Realisierung von $f_y = 251,2 \text{ N/mm}^2$ ergibt sich z.B.

$$k_q = \frac{\ln(251,2 \text{ N/mm}^2) - 5,6314}{0,08200}$$

$$k_q = -1,282$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die stochastische Variable Streckgrenze einen Wert unter $f_y = 251,2 \text{ N/mm}^2$ annimmt, beträgt $q = 0,1$, die Wahrscheinlichkeit für eine Variablenrealisierung über $f_y = 251,2 \text{ N/mm}^2$ beträgt $1 - 0,1 = 0,9$.

Für eine Streckgrenzen-Realisierung von $f_y = 310,0 \text{ N/mm}^2$ ergibt sich z.B.

$$k_q = \frac{\ln(\dots \text{ N/mm}^2) - 5,6314}{0,08200}$$

$$k_q = +\dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die stochastische Variable Streckgrenze einen Wert unter $f_y = 310,0 \text{ N/mm}^2$ annimmt, beträgt \dots , die Wahrscheinlichkeit für eine Variablenrealisierung über $f_y = 310,0 \text{ N/mm}^2$ beträgt \dots

Die Verteilungsdichtefunktion einer Normal-verteilten Zufallsgröße x lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

Die Verteilungsdichtefunktion einer Lognormal-verteilten Zufallsgröße x lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_{ln} \cdot x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu_{ln})^2}{2 \cdot \sigma_{ln}^2}\right)$$

Eine Verteilungssummenfunktion kann für beide Fälle nicht analytisch angegeben werden. Die Funktionswerte der Verteilungssummenfunktion müssen durch numerisches Integrieren berechnet werden.

Die Abb. 4.3 zeigt die Verteilungsdichtefunktion $f(f_y)$ der Streckgrenze.

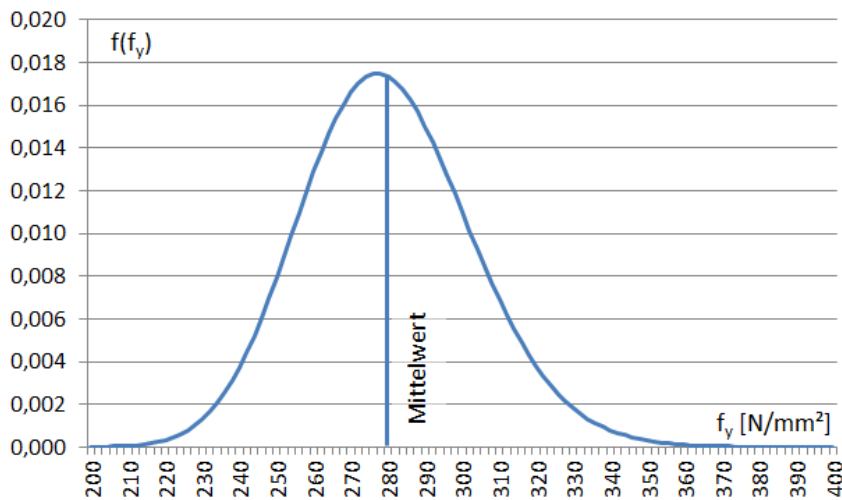


Abbildung 4.3: Verteilungsdichtefunktion $f(f_y)$ der Lognormal-verteilten Streckgrenze von S235

Die Abb. 4.4 zeigt die Verteilungssummenfunktion $F(f_y)$ der Streckgrenze.

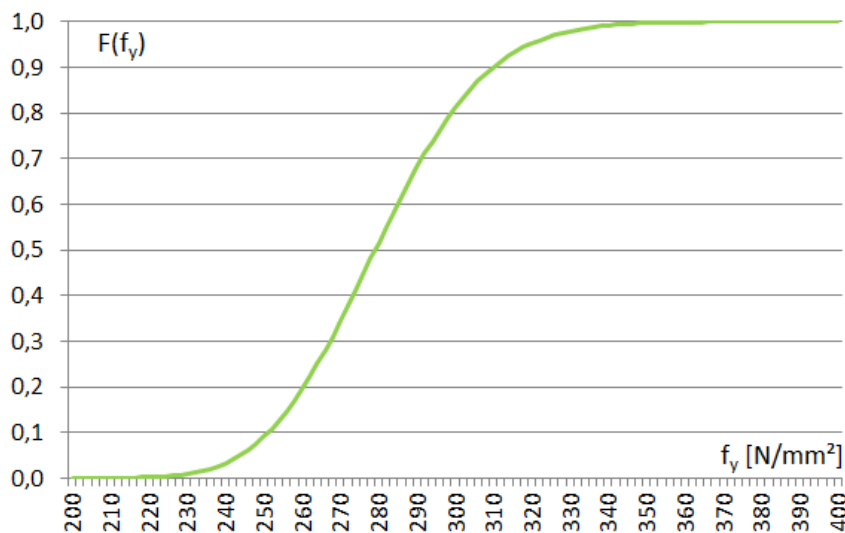


Abbildung 4.4: Verteilungssummenfunktion $F(f_y)$ der Lognormal-verteilten Streckgrenze von S235

Für Variable 3, die Zugfestigkeit f_u , ist der Mittelwert mit $\mu_{f_u} = 400 \text{ N/mm}^2$ und die Standardabweichung mit $\sigma_{f_u} = 23 \text{ N/mm}^2$ bekannt. Als Verteilungstyp findet wieder die Lognormal-Verteilung Anwendung. Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Streckgrenze.

Der Mittelwert μ_{ln} der logarithmierten Festigkeitswerte (der Zugfestigkeit) beträgt:

$$\mu_{ln} = \ln \left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}} \right) = \ln \left(\frac{400 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{23 \text{ N/mm}^2}{400 \text{ N/mm}^2}\right)^2}} \right) = 5,9898$$

Die Standardabweichung σ_{ln} der logarithmierten Festigkeitswerte (der Zugfestigkeit) beträgt:

$$\sigma_{ln} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \right]} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{23 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}\right)^2 \right]} = 0,05745$$

Für das Bsp. beträgt das 0,05-Quantil, d.h. die Zugfestigkeits-Realisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 unterschritten wird:

$$f_{u,0.05} = \exp(5,9898 - 1,645 \cdot 0,05745) = 363,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = f_{uk}$$

Das 0,02-Quantil, d.h. die Zugfestigkeits-Realisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 unterschritten wird, beträgt:

$$f_{u,0.02} = \exp(5,9898 - \dots \cdot 0,05745) = \dots \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Abb. 4.5 zeigt die Verteilungsdichtefunktion $f(f_u)$ der Zugfestigkeit.

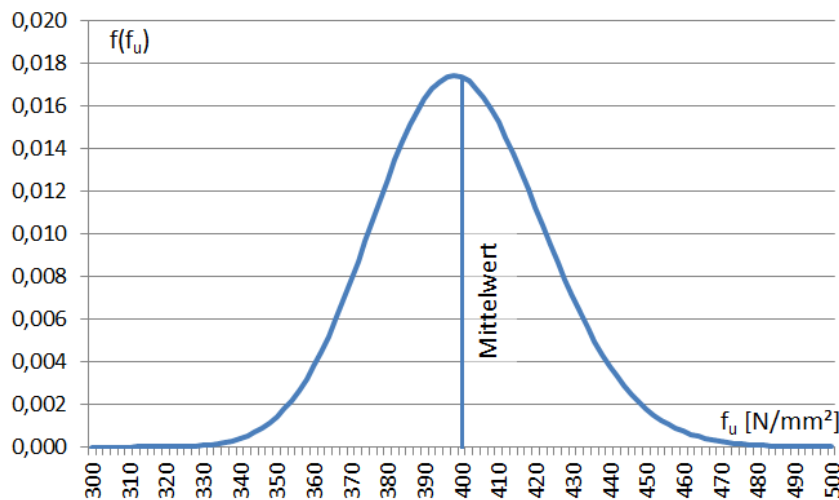


Abbildung 4.5: Verteilungsdichtefunktion $f(f_u)$ der Lognormal-verteilten Zugfestigkeit von S235

Die Abb. 4.6 zeigt die Verteilungssummenfunktion $F(f_u)$ der Zugfestigkeit.

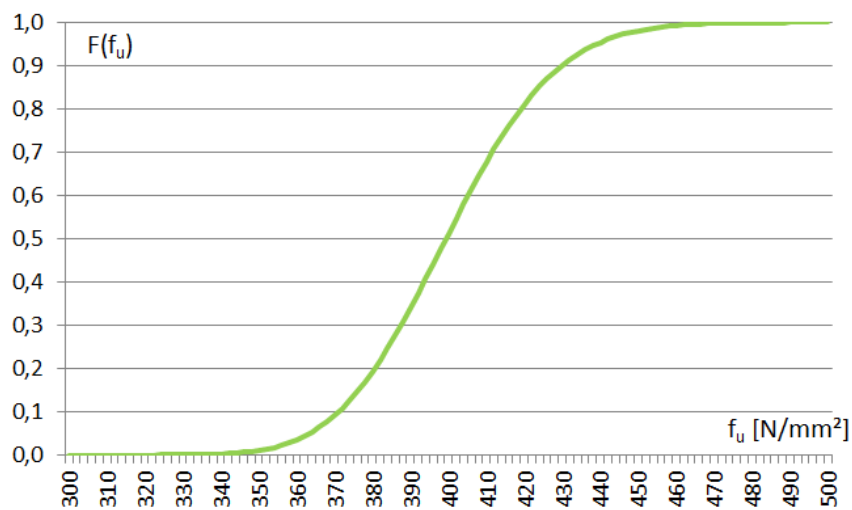


Abbildung 4.6: Verteilungssummenfunktion $F(f_u)$ der Lognormal-verteilten Zugfestigkeit von S235

Für Variable 4, die Abscherfestigkeit f_{uA} , ist der Mittelwert mit $\mu_{f_{uA}} = 353 \text{ N/mm}^2$ und die Standardabweichung mit $\sigma_{f_{uA}} = 32 \text{ N/mm}^2$ bekannt. Als Verteilungstyp findet wieder die Lognormal-Verteilung Anwendung. Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Streckgrenze.

Der Mittelwert μ_{ln} der logarithmierten Festigkeitswerte (der Abscherfestigkeit) beträgt:

$$\mu_{ln} = \ln \left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}} \right) = \ln \left(\frac{353 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{32 \text{ N/mm}^2}{353 \text{ N/mm}^2}\right)^2}} \right) = 5,8624$$

Die Standardabweichung σ_{ln} der logarithmierten Festigkeitswerte (der Abscherfestigkeit) beträgt:

$$\sigma_{ln} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \right]} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{32 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{353 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}\right)^2 \right]} = 0,09047$$

Für das Bsp. beträgt das 0,05-Quantil, d.h. die Abscherfestigkeits-Realisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 unterschritten wird:

$$f_{uA,0.05} = \exp(5,8624 - 1,645 \cdot 0,09047) = 303,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 0,6 \cdot 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \alpha_A \cdot f_{ubk}$$

Das 0,02-Quantil, d.h. die Abscherfestigkeits-Realisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 unterschritten wird, beträgt:

$$f_{uA,0.02} = \exp(5,8624 - \dots \cdot 0,09047) = \dots \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Abb. 4.7 zeigt die Verteilungsdichtefunktion $f(f_{uA})$ der Abscherfestigkeit.

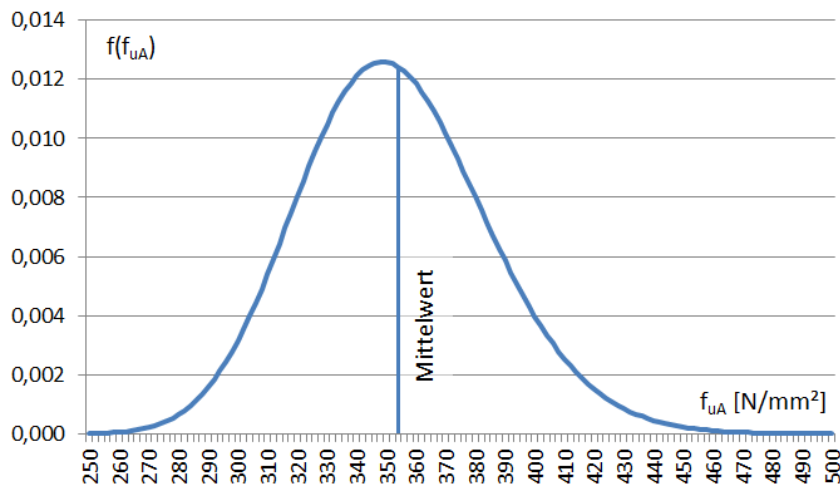


Abbildung 4.7: Verteilungsdichtefunktion $f(f_{uA})$ der Lognormal-verteilten Abscherfestigkeit von Schrauben der Festigkeitsklasse 5.6

Die Abb. 4.8 zeigt die Verteilungssummenfunktion $F(f_{uA})$ der Abscherfestigkeit.

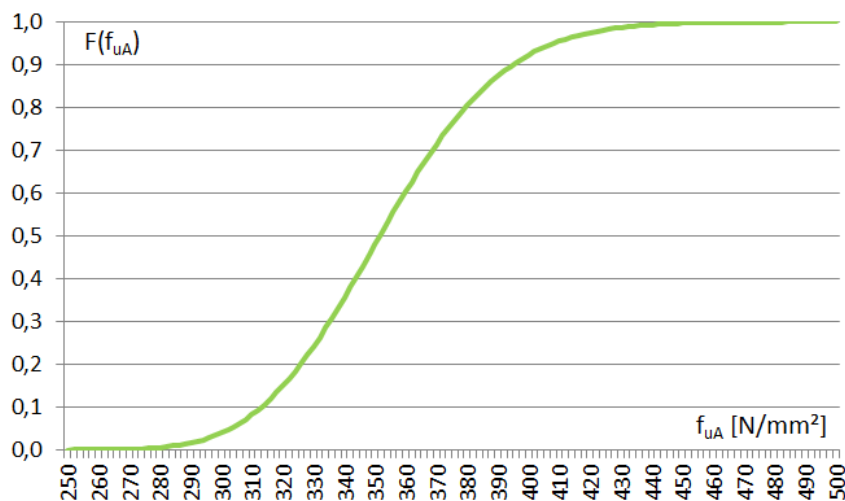


Abbildung 4.8: Verteilungssummenfunktion $F(f_{uA})$ der Lognormal-verteilten Abscherfestigkeit von Schrauben der Festigkeitsklasse 5.6

Für Variable 5, die Lochleibungsbeanspruchbarkeit f_{uL} , ist der Mittelwert mit $\mu_{f_{uL}} = 910 \text{ N/mm}^2$ und die Standardabweichung mit $\sigma_{f_{uL}} = 23 \text{ N/mm}^2$ bekannt. Als Verteilungstyp findet wieder die Lognormal-Verteilung Anwendung. Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Streckgrenze.

Der Mittelwert μ_{ln} der logarithmierten Festigkeitswerte (der Lochleibungsbeanspruchbarkeit) beträgt:

$$\mu_{ln} = \ln \left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}} \right) = \ln \left(\frac{910 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{23 \text{ N/mm}^2}{910 \text{ N/mm}^2}\right)^2}} \right) = 6,8131$$

Die Standardabweichung σ_{ln} der logarithmierten Festigkeitswerte (der Lochleibungsbeanspruchbarkeit) beträgt:

$$\sigma_{ln} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \right]} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{23 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{910 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}\right)^2 \right]} = 0,02527$$

Für das Bsp. beträgt das 0,05-Quantil, d.h. die Lochleibungsbeanspruchbarkeits-Realisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 unterschritten wird:

$$f_{uL,0.05} = \exp(6,8131 - 1,645 \cdot 0,02527) = 872,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 2,42 \cdot 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \alpha_L \cdot f_{uk}$$

Das 0,02-Quantil, d.h. die Lochleibungsbeanspruchbarkeits-Realisierung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 unterschritten wird, beträgt:

$$f_{uL,0.02} = \exp(6,8131 - \dots \cdot 0,02527) = \dots \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Abb. 4.9 zeigt die Verteilungsdichtefunktion $f(f_{uL})$ der Lochleibungsbeanspruchbarkeit.

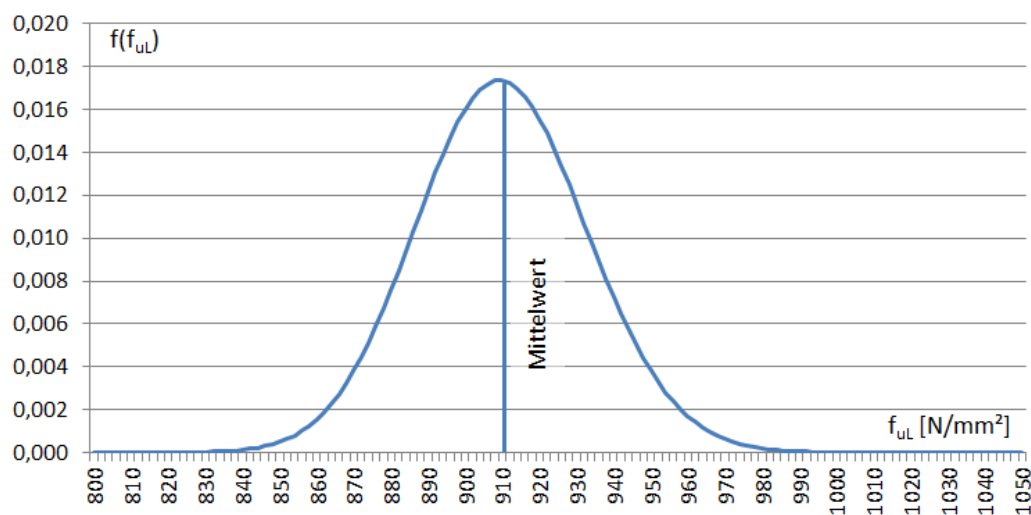


Abbildung 4.9: Verteilungsdichtefunktion $f(f_{uL})$ der Lognormal-verteilten Lochleibungsbeanspruchbarkeit von S235 im Falle $\alpha_L = 2,42$

Die Abb. 4.10 zeigt die Verteilungssummenfunktion $F(f_{uL})$ der Lochleibungsbeanspruchbarkeit.

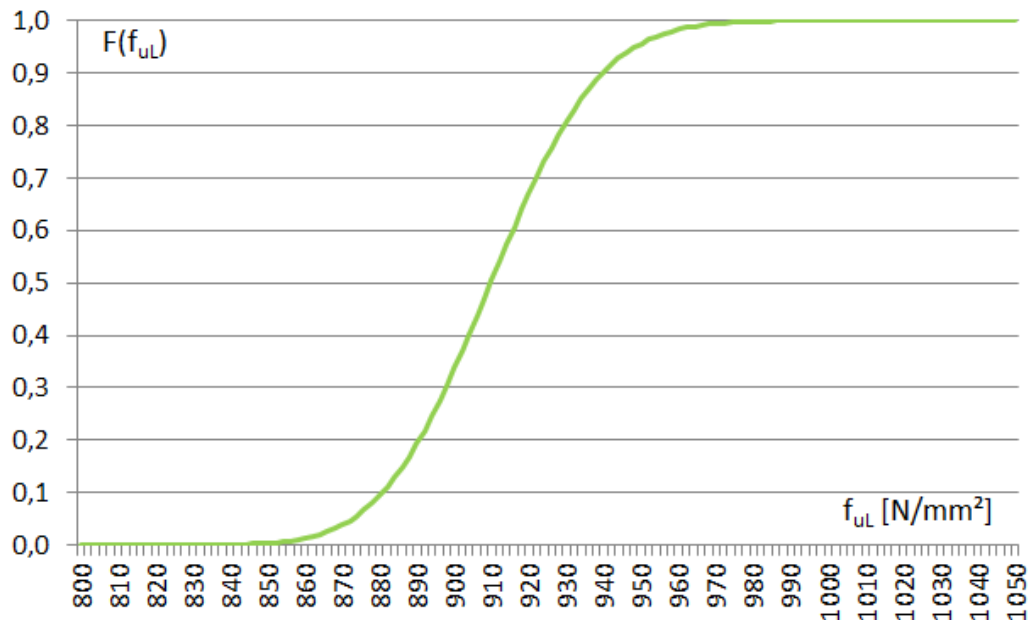


Abbildung 4.10: Verteilungssummenfunktion $F(f_{uL})$ der Lognormal-verteilten Lochleibungsbeanspruchbarkeit von S235 im Falle $\alpha_L = 2,42$

Tab. 4.2 zeigt zusammengefasst das stochastische Modell, für welches in den nachfolgenden Abschnitten der Zuverlässigkeitsindex und die Versagenswahrscheinlichkeit des Bsp.-Tragmastes berechnet wird.

Tabelle 4.2: Stochastisches Modell für das betrachtete Bsp.

Variable	physikalische Größe	Verteilungstyp	Mittelwert μ	Standardabweichung σ
$x_1 = v$	Böenwindgeschwindigkeit	Gumbel	23,02 m/s	3,683 m/s
$x_2 = f_y$	Streckgrenze	Lognormal	280 N/mm ²	23 N/mm ²
$x_3 = f_u$	Zugfestigkeit	Lognormal	400 N/mm ²	23 N/mm ²
$x_4 = f_{uA}$	Abscherfestigkeit	Lognormal	353 N/mm ²	32 N/mm ²
$x_5 = f_{uL}$	Lochleibungsbeanspruchbarkeit	Lognormal	910 N/mm ²	23 N/mm ²

Tab. 4.3 enthält für die Lognormal-verteilten Variablen Mittelwert und Standardabweichung der logarithmierten Variablenrealisierungen.

Tabelle 4.3: Mittelwert μ_{ln} und Standardabweichung σ_{ln} der logarithmierten Variablerealisierungen für LN-verteilte Variablen

Variable	physikalische Größe	Verteilungstyp	Mittelwert μ_{ln}	Standardabweichung σ_{ln}
$x_2 = f_y$	Streckgrenze	Lognormal	5,63143	0,08200
$x_3 = f_u$	Zugfestigkeit	Lognormal	5,98981	0,05745
$x_4 = f_{uA}$	Abscherfestigkeit	Lognormal	5,86238	0,09047
$x_5 = f_{uL}$	Lochleibungsbeanspruchbarkeit	Lognormal	6,81313	0,02527

5 Standardisierung eines Grenzzustandes

Der Zuverlässigkeitsindex β einer Komponente ist der kürzeste Abstand des Grenzzustandes $g = 0$ im Standardraum vom Koordinatenursprung $\underline{0}$. Um die vier Zuverlässigkeitsindizes der Versagensmodi Druck (β_D), Zug (β_Z), Abscheren (β_A) und Lochleibung (β_L) bestimmen zu können, ist es erforderlich, die Grenzzustände aus dem Originalraum in den Standardraum zu transformieren. Die Grenzzustände im Originalraum sind in Abb. 3.1 bis 3.4 dargestellt. Meist werden Variablen im Originalraum mit x_1, x_2, \dots bezeichnet, im Standardraum mit u_1, u_2, \dots . Die Transformation erfolgt, indem für jeden Punkt auf dem Grenzzustand $g = r - s = 0$, also Variablenrealisierungen für Einwirkungen und Festigkeiten, für die sich Beanspruchung s und Beanspruchbarkeit r gerade kompensieren, zunächst die Funktionswerte der Verteilungssummenfunktion $F(x)$ berechnet werden. Jeder Funktionswert $F(x)$ wird dann dem Funktionswert einer Standardnormalverteilung $\Phi(u)$ gleichgesetzt. Der zu x im Originalraum gehörende Variablenwert u im Standardraum ist genau der Wert, dessen Funktionswert $\Phi(u)$ gerade so groß ist wie $F(x)$. Allgemein folgt die Transformationsvorschrift also aus:

$$\Phi(u) = F(x)$$

Umstellen nach u ergibt unter Verwendung der Umkehrfunktion Φ^{-1} der Standardnormalverteilung:

$$u = \Phi^{-1} [F(x)]$$

Eine Rücktransformation bei bekanntem u in ein gesuchtes x erfolgt mit:

$$x = F^{-1} [\Phi(u)]$$

Hing der Verlauf des Grenzzustands im Originalraum $g(\underline{x}) = r - s = 0$ nur von den Regeln der technischen Mechanik ab, so hängt der Verlauf des Grenzzustands im Standardraum $g(\underline{u}) = r - s = 0$ zusätzlich noch von den Regeln der Statistik ab. Bei Anwendung eines zutreffenden stochastischen Modells folgt jedoch auch der Grenzzustand im Standardraum Naturgesetzen. Er ist somit ebenfalls nicht „vereinbar“ und somit nicht manipulierbar.

Zum besseren Verständnis soll der Punkt ($v = 40\text{m/s}; f_y = 231,7\text{N/mm}^2$) auf dem Grenzzustand $g_D = 0$ für den Versagensmodus Druck aus dem Original- in den Standardraum transformiert werden (vgl. Tab. 3.1, Variablenrealisierung 5 und Abb. 3.1, „gelber Punkt“):

$$g_D \left(v = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}, f_y = 231,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) = 0$$

Zunächst wird der Funktionswert der Verteilungssummenfunktion der Böenwindgeschwindigkeits-Realisierung berechnet. Die Böenwindgeschwindigkeit wird durch eine Gumbel-Verteilung mit einem Mittelwert von $\mu_v = 23,02m/s$ und einer Standardabweichung von $\sigma_v = 3,683m/s$ beschrieben. Hierzu ergibt sich der Modalwert mit $\hat{v} = 21,36m/s$. Das Einsetzen des Argumentes $v = 40m/s$ führt zum Funktionswert $F(v = 40m/s)$, der dem Funktionswert der Standardnormalverteilung gleichgesetzt wird:

$$F\left(v = 40\frac{m}{s}\right) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot 3,683\frac{m}{s}} \cdot \left(40\frac{m}{s} - 21,36\frac{m}{s}\right)\right]\right\}$$

$$F\left(v = 40\frac{m}{s}\right) = 0,99848 = \Phi(u_v)$$

Mit Hilfe der vertafelten Standardnormalverteilung oder mit Hilfe des Befehls `=STANDNORMINV(0,99848)`

in EXCEL kann das Argument der Standardnormalverteilung berechnet werden, das zu einem Funktionswert von 0,99848 führt:

$$u_v = \Phi^{-1}(0,99848) = +2,96$$

Eine Variablenrealisierung von $v = 40m/s$ im Originalraum entspricht im Standardraum also einer Variablenrealisierung von $u_v = +2,96$.

Die Transformation bei gegebenem u nach x ist ebenfalls möglich. Ist z.B. $u_v = 1,00$ bekannt und die zugehörige Windgeschwindigkeit im Originalraum gesucht, wird zunächst der Funktionswert der Standardnormalverteilung berechnet:

$$\Phi(u_v = 1,00) = +0,84134$$

Die Umkehrfunktion $F^{-1} = v$ der Gumbel-verteilten Windgeschwindigkeit ist:

$$v = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

Nach Gleichsetzen von $F(v) = \Phi(u_v = 1,00)$ ergibt sich

$$v(u_v = 1,00) = -\ln[-\ln(\Phi(u_v = 1,00))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

$$v(u_v = 1,00) = -\ln[-\ln(0,84134)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,36 = 26,40m/s$$

Zu einem Wert $u_v = 1,00$ im Standardraum gehört im Originalraum also eine Windgeschwindigkeit von $26,40 m/s$.

Die Transformationsvorschrift Normal-verteilter Variablen ergibt sich aus der Definition der Standardnormalverteilung. Das Argument u der Standardnormalverteilung berechnet sich aus der Differenz zwischen Variablenrealisierung und Mittelwert ($x - \mu$), dividiert durch die Standardabweichung σ :

$$\Phi(u) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Dies bedeutet für die Transformation von x nach u :

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

und für die Transformation von u nach x :

$$x = \mu + \sigma \cdot u$$

Die Transformationsvorschrift Lognormal-verteilter Variablen sieht ähnlich aus. Statt der Variablenrealisierung x wird nun ihr natürlicher Logarithmus $\ln(x)$ verwendet, statt des Mittelwertes μ der Mittelwert der logarithmierten Werte μ_{\ln} und statt der Standardabweichung σ die Standardabweichung der logarithmierten Werte σ_{\ln} :

$$\Phi(u) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu_{\ln}}{\sigma_{\ln}}\right)$$

Dies bedeutet für die Transformation von x nach u :

$$u = \frac{\ln(x) - \mu_{\ln}}{\sigma_{\ln}}$$

und für die Transformation von u nach x :

$$x = \exp(\mu_{\ln} + \sigma_{\ln} \cdot u)$$

Für den Bsp.-Pkt. mit den Koordinaten ($v = 40\text{m/s}; f_y = 231,7\text{N/mm}^2$) ergibt sich für die Lognormal-verteilte Streckgrenze:

$$u_{f_y} = \frac{\ln(f_y) - \mu_{\ln}}{\sigma_{\ln}} = \frac{\ln(231,7) - 5,6314}{0,08200} = -2,27$$

Eine Variablenrealisierung von $f_y = 231,7\text{N/mm}^2$ im Originalraum entspricht im Standardraum also einer Variablenrealisierung von $u_{f_y} = -2,27$.

Ein Punkt auf dem Grenzzustand $g_D(\underline{x}) = r - s = 0$, der im Originalraum die Koordinaten $(x_1; x_2) = \underline{x}^T = (v = 40\text{m/s}; f_y = 231,7\text{N/mm}^2)$ aufweist, hat im Standardraum auf dem Grenzzustand $g_D(\underline{u}) = r - s = 0$ die Koordinaten $(u_1; u_2) = \underline{u}^T = (u_v = +2,96; u_{f_y} = -2,27)$:

$$g_D\left(v = 40\frac{\text{m}}{\text{s}}, f_y = 231,7\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) = 0 = g_D(u_v = +2,96, u_{f_y} = -2,27)$$

Ein weiterer Punkt mit den Koordinaten ($v = 46m/s; f_y = 306,4N/mm^2$) liegt ebenfalls auf dem Grenzzustand $g_D = 0$ für den Versagensmodus Druck. Probe:

$$g_D(v = 46\frac{m}{s}; f_y = 306,4\frac{N}{mm^2}) = 0,420 \cdot 1550mm^2 \cdot 306,4\frac{N}{mm^2} - \frac{100000N}{(32,57\frac{m}{s})^2} \cdot (46\frac{m}{s})^2 = 0$$

Für diesen Punkt sollen ebenfalls die Koordinaten vom Originalraum \underline{x} in den Standardraum \underline{u} transformiert werden. Zunächst wird wieder der Funktionswert der Verteilungssummenfunktion der Böenwindgeschwindigkeits-Realisierung berechnet:

$$F\left(v = 46\frac{m}{s}\right) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot 3,683\frac{m}{s}} \cdot \left(46\frac{m}{s} - 21,36\frac{m}{s}\right)\right]\right\} = 0, \dots\dots\dots$$

Dieser wird wieder dem Funktionswert einer Standardnormalverteilung gleichgesetzt:

$$F\left(v = 46\frac{m}{s}\right) = 0, \dots\dots\dots = \Phi(u_v)$$

Mit Hilfe der vertafelten Standardnormalverteilung oder mit Hilfe des EXCEL-Befehls `=STANDNORMINV(0,.....)`

wird das gesuchte Argument u der Standardnormalverteilung berechnet, das zu einem Funktionswert von $0, \dots\dots\dots$ führt:

$$u_v = \Phi^{-1}(0, \dots\dots\dots) = +3,56$$

Eine Variablenrealisierung von $v = 46m/s$ im Originalraum entspricht im Standardraum also einer Variablenrealisierung von $u_v = +3,56$.

Für den Bsp.-Pkt. mit den Koordinaten ($v = 46m/s; f_y = 306,4N/mm^2$) ergibt sich für die Lognormal-verteilte Streckgrenze:

$$u_{f_y} = \frac{\ln(f_y) - \mu_{\ln}}{\sigma_{\ln}} = \frac{\ln(306,4) - 5,6314}{0,08200} = +1,14$$

Eine Variablenrealisierung von $f_y = 306,4N/mm^2$ im Originalraum entspricht im Standardraum also einer Variablenrealisierung von $u_{f_y} = +1,14$.

Ein Punkt auf dem Grenzzustand $g_D(\underline{x}) = r - s = 0$, der im Originalraum die Koordinaten $(x_1; x_2) = \underline{x}^T = (v = 46m/s; f_y = 306,4N/mm^2)$ aufweist, hat im Standardraum auf dem Grenzzustand $g_D(\underline{u}) = r - s = 0$ die Koordinaten $(u_1; u_2) = \underline{u}^T = (u_v = +3,56; u_{f_y} = +1,14)$.

Der komplette, d.h. für alle Punkte auf $g=0$, in den Standardraum transformierte Grenzzustand lässt sich wieder graphisch darstellen, vgl. Abb. 5.1 mit Abb. 3.1.

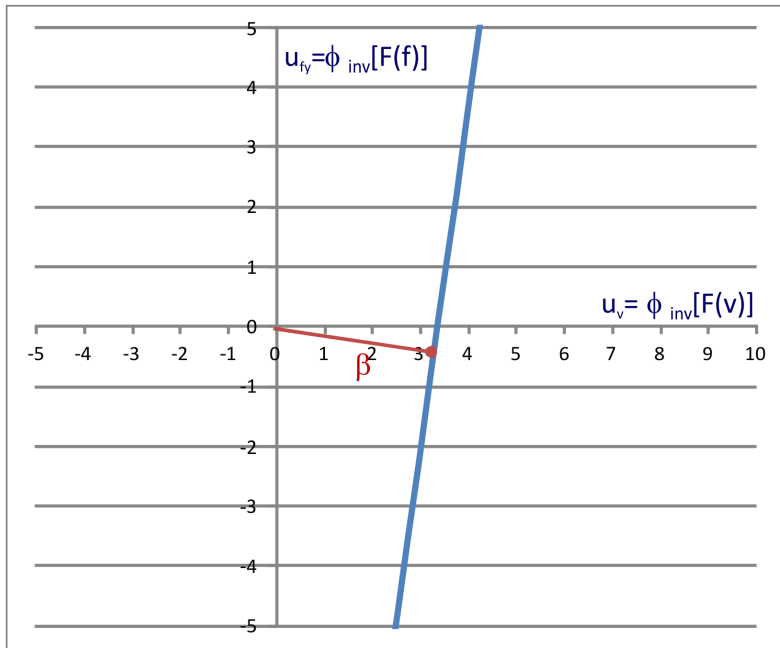


Abbildung 5.1: Grenzzustand für Druckversagen im Standardraum

Der in Abb. 3.1 eingezeichnete Bsp.-Pkt. ($v = 40\text{m/s}$; $f_y = 231,7\text{N/mm}^2$) lässt sich mit seinen neuen Koordinaten ($u_v = +2,96$; $u_{f_y} = -2,27$) in Abb. 5.1 einzeichnen, ebenso die Transformation von ($v = 46\text{m/s}$; $f_y = 306,4\text{N/mm}^2$) nach ($u_v = +3,56$; $u_{f_y} = +1,14$). In die Abb. 5.1 ist bereits die kürzeste Verbindungslinie zwischen Grenzzustand und Ursprung eingezeichnet. Ihre Länge entspricht dem Zuverlässigkeitsindex β für Druckversagen und könnte an dieser Stelle bereits graphisch (durch Messen) ermittelt werden. Der Zuverlässigkeitsindex steht senkrecht auf dem Grenzzustand. Der Schnittpunkt von Zuverlässigkeitsindex und Grenzzustand (Lotpunkt) heißt Bemessungspunkt.

Auch die weiteren drei Grenzzustände für die Versagensmodi Zug, Abscheren und Lochleibung lassen sich vom Originalraum \underline{x} in den Standardraum \underline{u} überführen.

Für den Bsp.-Pkt. auf $g_Z(\underline{x}) = r - s = 0$ mit den Koordinaten ($v = 40\text{m/s}$; $f_u = 274,7\text{N/mm}^2$) (Tab. 3.2 und Abb. 3.2) ergibt sich für die Lognormal-verteilte Zugfestigkeit:

$$u_{f_u} = \frac{\ln(f_u) - \mu_{\ln}}{\sigma_{\ln}} = \frac{\ln(274,7) - 5,9898}{0,05745} = -6,51$$

Eine Variablenrealisierung von $f_u = 274,7\text{N/mm}^2$ im Originalraum entspricht im Standardraum also einer Variablenrealisierung von $u_{f_y} = -6,51$.

Die Transformation von $v = 40\text{m/s}$ nach $u_v = +2,96$ gilt für alle vier Versagensmodi.

Ein Punkt auf dem Grenzzustand $g_Z(\underline{x}) = r - s = 0$, der im Originalraum die Koordinaten

$$(x_1; x_2) = \underline{x}^T = (v = 40m/s; f_u = 274,7N/mm^2)$$

aufweist, hat im Standardraum auf dem Grenzzustand $g_Z(\underline{u}) = r - s = 0$ die Koordinaten

$$(u_1; u_2) = \underline{u}^T = (u_v = +2,96; u_{f_u} = -6,51):$$

$$g_Z \left(v = 40 \frac{m}{s}, f_u = 274,7 \frac{N}{mm^2} \right) = 0 = g_Z (u_v = +2,96, u_{f_u} = -6,51)$$

Ein weiterer Punkt mit den Koordinaten $(v = 44m/s; f_u = 332,4N/mm^2)$ liegt ebenfalls auf dem Grenzzustand $g_Z = 0$ für den Versagensmodus Zug. Probe:

$$g_Z(v = 44 \frac{m}{s}; f_u = 332,4 \frac{N}{mm^2}) = 549mm^2 \cdot 332,4 \frac{N}{mm^2} - \frac{100000N}{(32,57 \frac{m}{s})^2} \cdot (44 \frac{m}{s})^2 = 0$$

Für diesen Punkt sollen ebenfalls die Koordinaten vom Originalraum \underline{x} in den Standardraum \underline{u} transformiert werden. Zunächst wird wieder der Funktionswert der Verteilungssummenfunktion der Böenwindgeschwindigkeits-Realisierung berechnet:

$$F \left(v = 44 \frac{m}{s} \right) = \exp \left\{ -\exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot 3,683 \frac{m}{s}} \cdot \left(44 \frac{m}{s} - 21,36 \frac{m}{s} \right) \right] \right\} = 0, \dots\dots\dots$$

Dieser wird wieder dem Funktionswert einer Standardnormalverteilung gleichgesetzt:

$$F \left(v = 44 \frac{m}{s} \right) = 0, \dots\dots\dots = \Phi(u_v)$$

Mit Hilfe der vertafelten Standardnormalverteilung oder mit Hilfe des EXCEL-Befehls $=STANDNORMINV(0, \dots\dots\dots)$

wird das gesuchte Argument u der Standardnormalverteilung berechnet, das zu einem Funktionswert von $0, \dots\dots\dots$ führt:

$$u_v = \Phi^{-1}(0, \dots\dots\dots) = +3,37$$

Eine Variablenrealisierung von $v = 44m/s$ im Originalraum entspricht im Standardraum also einer Variablenrealisierung von $u_v = +3,37$.

Für den Bsp.-Pkt. mit den Koordinaten $(v = 44m/s; f_u = 332,4N/mm^2)$ ergibt sich für die Lognormal-verteilte Zugfestigkeit:

$$u_{f_u} = \frac{\ln(f_u) - \mu_{\ln}}{\sigma_{\ln}} = \frac{\ln(332,4) - 5,9898}{0,05745} = -3,19$$

Eine Variablenrealisierung von $f_u = 332,4N/mm^2$ im Originalraum entspricht im Standardraum also einer Variablenrealisierung von $u_{f_u} = -3,19$.

Ein Punkt auf dem Grenzzustand $g_Z(\underline{x}) = r - s = 0$, der im Originalraum die Koordinaten

$$(x_1; x_2) = \underline{x}^T = (v = 44m/s; f_u = 332,4N/mm^2)$$

aufweist, hat im Standardraum auf dem Grenzzustand $g_Z(\underline{u}) = r - s = 0$ die Koordinaten $(u_1; u_2) = \underline{u}^T = (u_v = +3,37; u_{f_u} = -3,19)$.

Der in Abb. 3.2 eingezeichnete Bsp.-Pkt. $(v = 40\text{m/s}; f_u = 274,7\text{N/mm}^2)$ liegt mit seinen neuen Koordinaten $(u_v = +2,96; u_{f_u} = -6,15)$ außerhalb des in Abb. 5.2 dargestellten Wertebereiches. Die Transformation von $(v = 44\text{m/s}; f_u = 332,4\text{N/mm}^2)$ nach $(u_v = +3,37; u_{f_u} = -3,19)$ lässt sich jedoch einzeichnen.

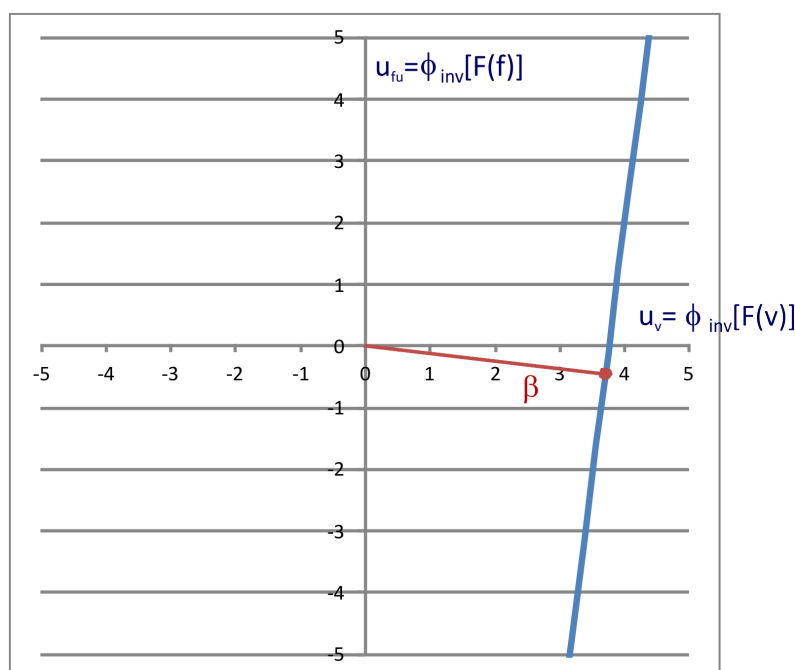


Abbildung 5.2: Grenzzustand für Zugversagen im Standardraum

Die Grenzzustände für die Versagensmodi Abscheren (Abb. 3.3) und Lochleibung (Abb. 3.4) werden ebenfalls vom Originalraum in den Standardraum transformiert. Für den jeweils eingezeichneten „gelben Bsp.-Punkt“ kann der Leser die Koordinaten im Standardraum noch ausrechnen. Die Lösungen und die komplette Darstellung beider Grenzzustände im Standardraum sind nachfolgend angegeben.

Der in Abb. 3.3 eingezeichnete Bsp.-Pkt. $(v = 40\text{m/s}; f_{uA} = 263,2\text{N/mm}^2)$ lässt sich mit seinen neuen Koordinaten $(u_v = +2,96; u_{f_{uA}} = -3,20)$ in Abb. 5.3 einzeichnen.

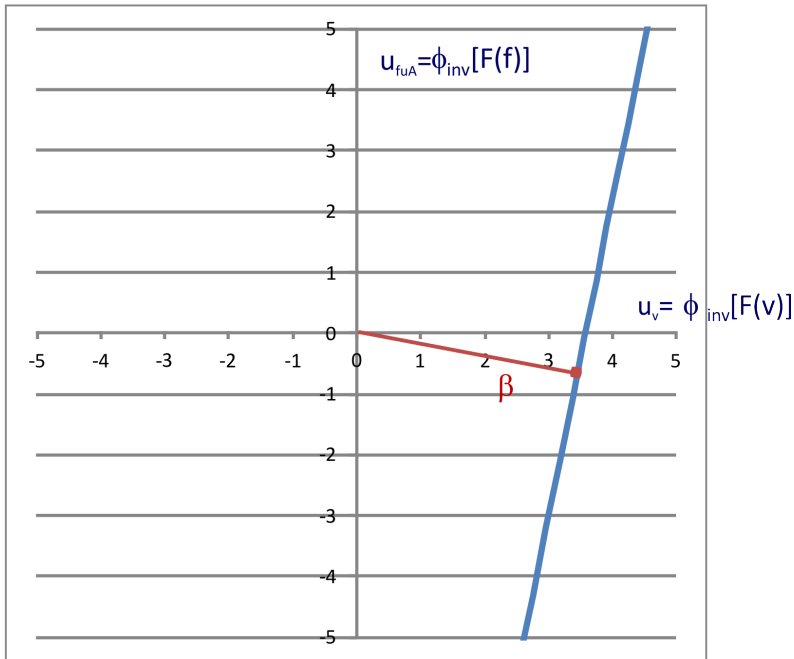


Abbildung 5.3: Grenzzustand für Abscheren im Standardraum

Der in Abb. 3.4 eingezeichnete Bsp.-Pkt. ($v = 40\text{m/s}$; $f_{uL} = 620,7\text{N/mm}^2$) liegt mit seinen neuen Koordinaten ($u_v = +2,96$; $u_{f_{uL}} = -15,13$) außerhalb des in Abb. 5.4 dargestellten Wertebereiches.

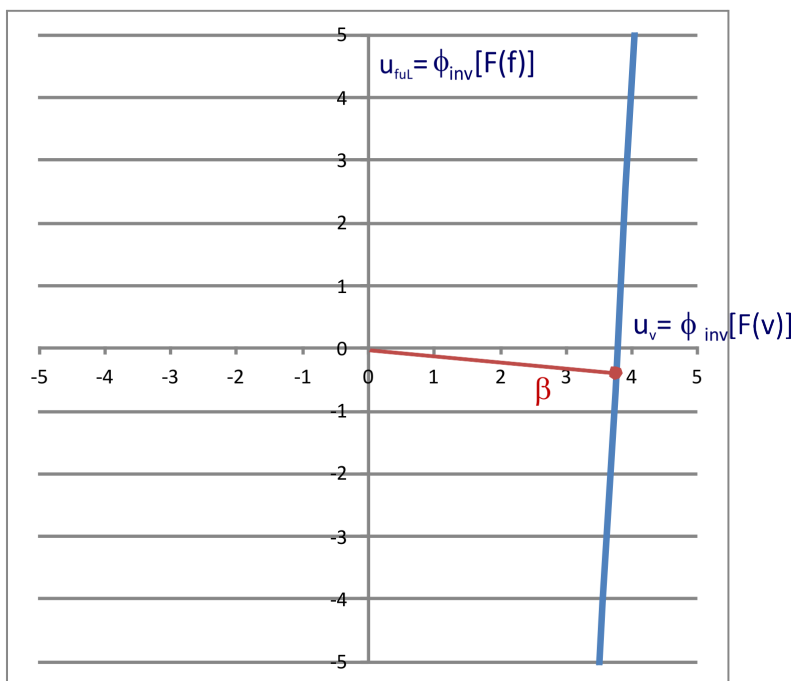


Abbildung 5.4: Grenzzustand für Lochleibungsversagen im Standardraum

6 Bemessungspunktkoordinaten und Zuverlässigkeitsindex einer Komponente

Die wesentliche Aufgabe, die Transformation der Grenzzustände vom Original- in den Standardraum, wurde in Kapitel 5 bereits erfüllt. Durch Abmessen des kleinsten Abstands des Grenzzustands $g(\underline{u}) = 0$ vom Koordinatenursprung in den Abbildungen 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4 lassen sich die Zuverlässigkeitsindizes für Druckversagen, Zugversagen, Abscherversagen und Lochleibungsversagen im Prinzip graphisch bestimmen. Die Bedeutung des Zuverlässigkeitsindex β und sein Zusammenhang zur Versagenswahrscheinlichkeit P_f verdeutlicht Abbildung 6.1.

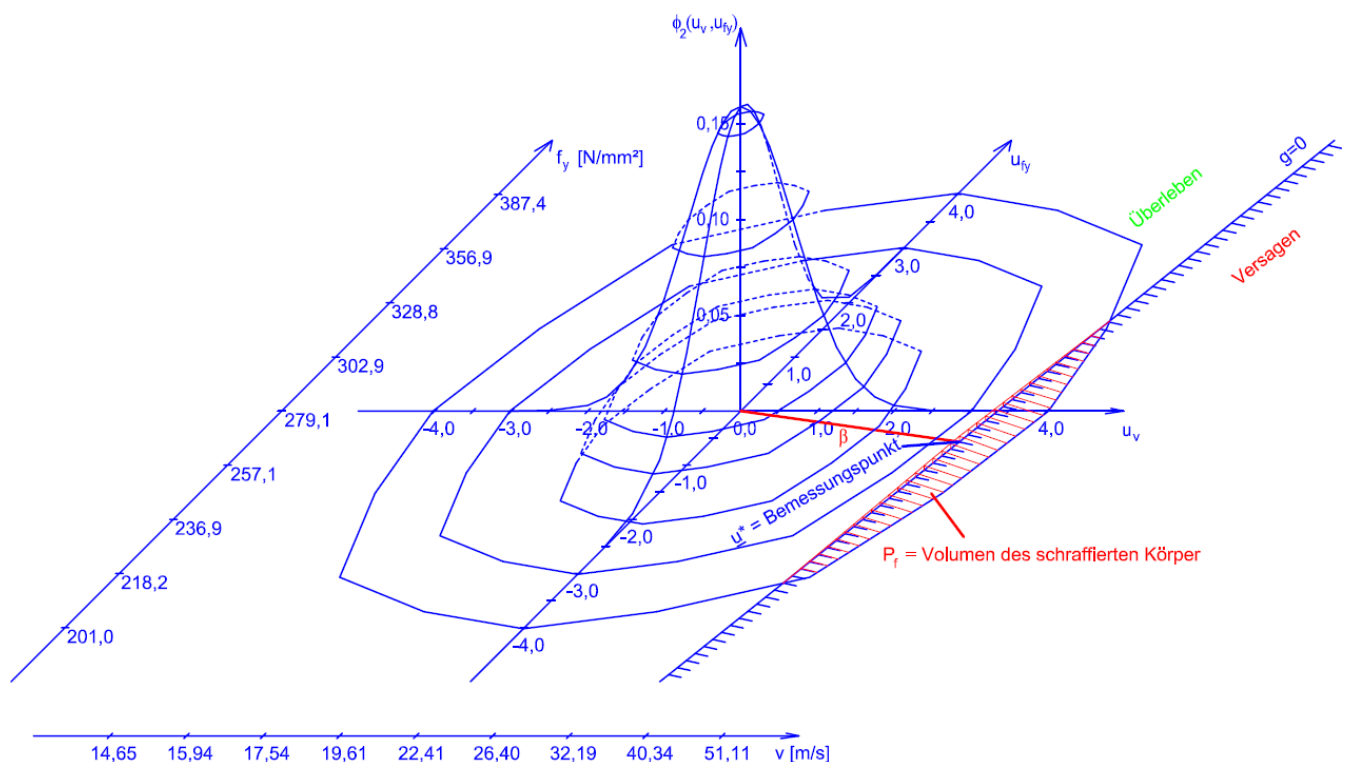


Abbildung 6.1: Grenzzustand für Druckversagen im Standardraum mit Darstellung der Verbundverteilungsdichte $\varphi_2(u_v, u_{fy})$, zusätzlich Darstellung der Achsen mit Beschriftung der Variablen im Originalraum

Diese gibt Abbildung 5.1, also den Grenzzustand für Druckversagen im Standardraum, in einer räumlichen Darstellung wieder. Zu den waagerechten Achsen u_v und u_{f_y} wurden parallel verschoben die Achsen der Variablen im Originalraum v und f_y angetragen. Auf der ergänzten senkrechten Achse ist die Verbundverteilungsdichtefunktion

$$\varphi_2(u_v, u_{f_y}) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \exp\left(-\frac{u_v^2 + u_{f_y}^2}{2}\right)$$

der beiden Variablen u_v und u_{f_y} , von denen die Grenzzustandsfunktion abhängt, angetragen. Der Verteilungstyp heißt standardisierte zweidimensionale Normalverteilung (Binormalverteilung), seine Dichtefunktion hat die Form einer räumlichen Glocke. Ihr Volumen gibt Aufschluss über die Wahrscheinlichkeit, mit der die Variablen v und f_y in einem bestimmten Intervall realisieren. Führt man zwei Ebenen bei v_1 und v_2 senkrecht zur v -Achse ein, so schneiden diese eine „Scheibe“ aus der Glocke heraus. Führt man zwei weitere Ebenen bei f_{y1} und f_{y2} senkrecht zur f_y -Achse ein, so schneiden diese eine weitere „Scheibe“ aus der Glocke heraus, die senkrecht zur ersten „Scheibe“ steht. Die Durchdringungsfigur beider „Scheiben“ ist etwa ein Quader mit gewölbter oberer Deckelfläche. Das Volumen dieses Quaders entspricht der Wahrscheinlichkeit, mit der gleichzeitig v im Intervall $[v_1, v_2]$ und f_y im Intervall $[f_{y1}, f_{y2}]$ realisieren. Das gesamte Volumen unter der Verbundverteilungsdichte-Glocke beträgt genau 1. Dies entspricht der einfachen Feststellung: Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Variable im Intervall $[-\infty, +\infty]$ und die zweite Variable ebenfalls im Intervall $[-\infty, +\infty]$ liegt, beträgt genau 1. Der Grenzzustand $g(\underline{u}) = 0$ schneidet die Glocke und unterteilt sie in zwei Bereiche (Räume). Der Versagensraum wird von den Variablenrealisierungen u_v und u_{f_y} gebildet, die zu einem negativen Funktionswert $g(\underline{u}) < 0$ führen. Das Volumen des Körpers, den der Grenzzustand aus der Verbundverteilungsdichte-Glocke herauschneidet und der die Variablen mit $g(\underline{u}) < 0$ enthält (rot schraffiert), entspricht der Versagenswahrscheinlichkeit (f=failure):

$$P_f = \int_{g(\underline{u}) < 0} f(\underline{u}) d\underline{u} = \int_{g(\underline{x}) < 0} f(\underline{x}) d\underline{x}$$

Das Volumen des Körpers, den der Grenzzustand aus der Verbundverteilungsdichte-Glocke herauschneidet und der die Variablen mit $g(\underline{u}) \geq 0$ enthält, entspricht der Überlebenswahrscheinlichkeit (s=survival):

$$P_s = \int_{g(\underline{u}) \geq 0} f(\underline{u}) d\underline{u} = \int_{g(\underline{x}) \geq 0} f(\underline{x}) d\underline{x}$$

Es gilt außerdem

$$P_f + P_s = 1,$$

denn die Ereignisse Versagen und Überleben sind komplementär, d.h. es gibt keinen anderen Zustand. Üblicherweise ist der Versagensraum im Vergleich zum Überlebensraum sehr klein,

d.h. $P_f \ll P_s$. Ersatzweise kann aus dem Abstand β des Grenzzustandes $g = 0$ vom Ursprung auf das Volumen des Körpers geschlussfolgert werden, das der Grenzzustand aus der Glocke herauschneidet. Dies geschieht mit der Beziehung:

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

Φ kann mit Hilfe von EXCEL ($z = -\beta$) berechnet werden: =STANDNORMVERT(z). Auch eine Rückrechnung von gegebener Versagenswahrscheinlichkeit in einen Zuverlässigkeitsindex ist möglich:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$$

Mit EXCEL ($Wahrsch = P_f$): =-STANDNORMINV($Wahrsch$).

Sollte der Grenzzustand einen geradlinigen Verlauf aufweisen, d.h. die Schnittfläche wäre eine Ebene, würde ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Zuverlässigkeitsindex β und Versagenswahrscheinlichkeit P_f bestehen. Weist der Grenzzustand jedoch einen gekrümmten Verlauf auf (Regelfall), so entspricht die über den Zuverlässigkeitsindex β bestimmte Versagenswahrscheinlichkeit P_f einer Näherung. Diese Näherungsmethode wird Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung (FORM=first order reliability method) bezeichnet, weil sie einen geradlinigen Verlauf des Grenzzustandes, senkrecht zum Zuverlässigkeitsindex, unterstellt. Eine Lösungsverbesserung unter Annahme eines gekrümmten Verlaufs des Grenzzustandes wird an späterer Stelle beschrieben. Zur Bestimmung des Zuverlässigkeitsindexes ist der Punkt auf dem Grenzzustand $g = 0$ zu ermitteln, der den kürzesten Abstand zum Ursprung aufweist. Dieser Punkt heißt Bemessungspunkt, im Standardraum abgekürzt mit \underline{u}_d oder \underline{u}^* , im Originalraum abgekürzt \underline{x}_d oder \underline{x}^* . Von den unendlich vielen möglichen Variablenrealisierungen, die ein Bauteil an die Grenze zu einem Versagen bringen, sind die Variablenrealisierungen am Bemessungspunkt die wahrscheinlichsten. Im Falle semiprobabilistischer Nachweisführung werden die Variablenrealisierungen am Bemessungspunkt nachgebildet, indem bestimmte vereinbarte Quantile der Variablen (z.B. 0,98-Quantil einer Einwirkung) mit Teilsicherheitsbeiwerten erhöht oder vermindert werden. Die Suche nach den Koordinaten des Bemessungspunktes entspricht demnach einer Problemstellung der analytischen Geometrie. Die Problemstellung ist verwandt mit der Suche des Punktes auf einer Ebene, der den kürzesten Abstand zu einem Punkt außerhalb dieser Ebene aufweist. Die Bestimmung der Bemessungspunktkoordinaten \underline{u}^* erfolgt für gekrümmte Flächen wie den Grenzzustand jedoch iterativ. Das Beispiel wird mit Hilfe des Rackwitz-Fiessler-Algorithmus

$$\underline{u}^{(k+1)} = \frac{\nabla g(\underline{u}^{(k)})}{\|\nabla g(\underline{u}^{(k)})\|^2} \cdot \left[(\underline{u}^{(k)})^T \cdot \nabla g(\underline{u}^{(k)}) - g(\underline{u}^{(k)}) \right]$$

bearbeitet. Ausgehend von einer Anfangslösung $\underline{u}^{(k)}$ werden solange Folge­lösungen $\underline{u}^{(k+1)}$ berechnet, bis keine Lösungsverbesserung mehr feststellbar ist, also $\underline{u}^{(k+1)} \approx \underline{u}^{(k)}$. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras kann dann der Abstand des gefundenen Bemessungspunktes $\underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^*$ zum Ursprung berechnet werden.

Zunächst werden die Bemessungspunkt­koordinaten für den Versagensmodus Druckversagen berechnet. Für diesen (zweidimensionalen) Fall lautet die Folge­lösung nach dem ersten Iterationsschritt $k = 1$:

$$\underline{u}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_v} \\ \frac{\partial g}{\partial u_{f_y}} \end{pmatrix}}{\left(\frac{\partial g}{\partial u_v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{f_y}}\right)^2} \cdot \left[(u_v; u_{f_y}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_v} \\ \frac{\partial g}{\partial u_{f_y}} \end{pmatrix} - g^{(0)}(u_v; u_{f_y}) \right]$$

Der Rackwitz-Fiessler-Algorithmus benötigt als Eingangsgrößen den Funktionswert der Grenzzustandsfunktion und die partiellen ersten Ableitungen nach den beiden beteiligten Variablen, jeweils am Beginn der Iteration. Die Iteration wird mit $\underline{u} = 0$ (Koordinatenursprung) begonnen. Um den Funktionswert $g(u_v; u_{f_y})$ der Grenzzustandsfunktion für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus berechnen zu können, müssen zuerst die Ursprungskordinaten $u_v = 0,00$ und $f_y = 0,00$ in den Originalraum transformiert werden, wie dies in Kapitel 5 dargestellt wurde:

$$\Phi(u_v = 0,00) = F(v) = +0,50000$$

$$v = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

$$v(u_v = 0,00) = -\ln[-\ln(0,50000)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 22,4149 \text{ m/s}$$

$$f_y(u_{f_y} = 0,00) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{f_y})$$

$$f_y(u_{f_y} = 0,00) = \exp(5,63143 + 0,08200 \cdot 0,00) = 279,060 \text{ N/mm}^2$$

Für diese Variablenrealisierungen am Beginn der Iteration ergibt sich folgender Funktionswert:

$$g(u_v = 0,00; u_{f_y} = 0,00) = g\left(v = 22,4149 \frac{\text{m}}{\text{s}}, f_y = 279,060 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)$$

$$g(u_v = 0,00; u_{f_y} = 0,00) = 0,420 \cdot 1550 \cdot 279,060 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 22,4149^2 = 134305N$$

Dieser Funktionswert ist positiv, er liegt also im Überlebensraum.

Die für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus notwendigen partiellen ersten Ableitungen nach Windgeschwindigkeit und Streckgrenze werden mit Hilfe von Differenzenquotienten berechnet. Hierfür wird im Nenner ein kleines $\Delta u = 0,01$ eingesetzt, im Zähler wird die Differenz der Funktionswerte g mit und ohne die Vergrößerung um $\Delta u = 0,01$ eingesetzt (Vorwärtsdifferenzieren). Im Zähler wird mit $g(0 + 0,01; 0) - g(0; 0)$ eine Differenz fast gleich großer Zahlen berechnet. Daher ist es notwendig, die Funktionswerte möglichst genau aus Argumenten mit vielen zuverlässigen Ziffern zu berechnen.

Erste Ableitung nach der Windgeschwindigkeit v :

$$\frac{\partial g}{\partial u_v} \approx \frac{g(u_v + 0,01; u_{f_y}) - g(u_v; u_{f_y})}{0,01} = \frac{g(0 + 0,01; 0) - g(0; 0)}{0,01}$$

$$\Phi(u_v = 0,01) = +0,50399$$

$$v(u_v = 0,01) = -\ln[-\ln(0,50399)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 22,4481m/s$$

$$g(u_v = 0,00 + 0,01; u_{f_y} = 0,00) = 0,420 \cdot 1550 \cdot 279,060 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 22,4481^2 = 134165N$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_v} \approx \frac{g\left(22,4481 \frac{m}{s}; 279,060 \frac{N}{mm^2}\right) - g\left(22,4149 \frac{m}{s}; 279,060 \frac{N}{mm^2}\right)}{0,01} = \frac{134165 - 134305}{0,01} = -14004$$

Erste Ableitung nach der Streckgrenze f_y :

$$\frac{\partial g}{\partial u_{f_y}} \approx \frac{g(u_v; u_{f_y} + 0,01) - g(u_v; u_{f_y})}{0,01} = \frac{g(0; 0 + 0,01) - g(0; 0)}{0,01}$$

$$f_y(u_{f_y} = 0,01) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{f_y})$$

$$f_y(u_{f_y} = 0,01) = \exp(5,63143 + 0,08200 \cdot 0,01) = 279,289N/mm^2$$

$$g(u_v = 0,00; u_{fy} = 0,00 + 0,01) = 0,420 \cdot 1550 \cdot 279,289 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 22,4149^2 = 134454N$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_{fy}} \approx \frac{g\left(22,4149 \frac{m}{s}; 279,289 \frac{N}{mm^2}\right) - g\left(22,4149 \frac{m}{s}; 279,060 \frac{N}{mm^2}\right)}{0,01} = \frac{134454 - 134305}{0,01} = +14904$$

Nachdem mit dem Funktionswert g sowie den ersten partiellen Ableitungen am Startpunkt der Iteration alle Eingangsgrößen für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus bekannt sind, kann die Folgelösung nach dem ersten Iterationsschritt berechnet werden:

$$\underline{u}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} -14004 \\ +14904 \end{pmatrix}}{(-14004)^2 + (+14904)^2} \cdot \left[(0;0) \cdot \begin{pmatrix} -14004 \\ +14904 \end{pmatrix} - 134305 \right]$$

$$\underline{u}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} -14004 \\ +14904 \end{pmatrix}}{418241232} \cdot [0 \cdot (-14004) + 0 \cdot (+14904) - 134305]$$

$$\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-14004}{418241232} \cdot (-134305) \\ \frac{+14904}{418241232} \cdot (-134305) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4,497 \\ -4,786 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_v \\ u_{fy} \end{pmatrix}$$

Die Folgelösung $u^{(1)}$ nach dem ersten Iterationsschritt entspricht im Originalraum:

$$\Phi(u_v = +4,497) = 0,99999655$$

$$v = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

$$v(u_v = 4,497) = -\ln[-\ln(0,99999655)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 57,4830m/s$$

$$f_y(u_{fy} = -4,786) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{fy})$$

$$f_y(u_{fy} = -4,786) = \exp(5,63143 + 0,08200 \cdot (-4,786)) = 188,475N/mm^2$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 57,48 \frac{m}{s} \\ 188,47 \frac{N}{mm^2} \end{pmatrix}$$

Zwischen Ausgangslösung und Folgelösung besteht eine nennenswerte Differenz:

$$\left| u_v^{(1)} - u_v^{(0)} \right| = |4,497 - 0,0| = 4,497 \gg 0$$

$$\left| u_{f_y}^{(1)} - u_{f_y}^{(0)} \right| = |-4,786 - 0,0| = 4,786 \gg 0$$

Somit muss die Iteration mit $\underline{u}^{(1)}$ fortgesetzt werden:

Für diese Variablenrealisierungen ergibt sich folgender Funktionswert:

$$g(u_v = +4,497; u_{f_y} = -4,786) = 0,420 \cdot 1550 \cdot 188,475 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 57,4830^2 = -188792N$$

Dieser Funktionswert ist negativ, er liegt also im Versagensraum.

Die für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus notwendigen partiellen ersten Ableitungen nach Windgeschwindigkeit und Streckgrenze an den Koordinaten nach dem ersten Iterationsschritt werden wieder mit Hilfe von Differenzenquotienten berechnet.

Erste Ableitung nach der Windgeschwindigkeit v :

$$\frac{\partial g}{\partial u_v} \approx \frac{g(u_v + 0,01; u_{f_y}) - g(u_v; u_{f_y})}{0,01} = \frac{g(+4,497 + 0,01; -4,786) - g(+4,497; -4,786)}{0,01}$$

$$\Phi(u_v = +4,507) = +0,99999671$$

$$v(u_v = +4,507) = -\ln[-\ln(0,99999671)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 57,6181m/s$$

$$g(u_v = +4,497 + 0,01; u_{f_y} = -4,786) = 0,420 \cdot 1550 \cdot 188,475 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 57,6181^2 = -190258N$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_v} \approx \frac{g(57,6181; 188,475) - g(57,4830; 188,475)}{0,01} = \frac{-190258 - (-188792)}{0,01} = -146639$$

Erste Ableitung nach der Streckgrenze f_y :

$$\frac{\partial g}{\partial u_{fy}} \approx \frac{g(u_v; u_{fy} + 0,01) - g(u_v; u_{fy})}{0,01} = \frac{g(+4,497; -4,786 + 0,01) - g(+4,497; -4,786)}{0,01}$$

$$f_y(u_{fy} = -4,776) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{fy})$$

$$f_y(u_{fy} = -4,776) = \exp(5,63143 + 0,08200 \cdot (-4,776)) = 188,629N/mm^2$$

$$g(u_v = +4,497; u_{fy} = -4,786 + 0,01) = 0,420 \cdot 1550 \cdot 188,629 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 57,4830^2 = -188691N$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_{fy}} \approx \frac{g(57,4830; 188,475) - g(57,4830; 188,629)}{0,01} = \frac{-188691 - (-188792)}{0,01} = +10066$$

Nachdem mit dem Funktionswert g sowie den ersten partiellen Ableitungen am Punkt der ersten Folgelösung der Iteration alle Eingangsgrößen für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus bekannt sind, kann die Folgelösung nach dem zweiten Iterationsschritt berechnet werden:

$$\underline{u}^{(2)} = \frac{\begin{pmatrix} -146639 \\ +10066 \end{pmatrix}}{(-146639)^2 + (+10066)^2} \cdot \left[(+4,497; -4,786) \cdot \begin{pmatrix} -146639 \\ +10066 \end{pmatrix} - (-188792) \right]$$

$$\underline{u}^{(2)} = \frac{\begin{pmatrix} -146639 \\ +10066 \end{pmatrix}}{2,16043 \cdot 10^{10}} \cdot [+4,497 \cdot (-146639) - 4,786 \cdot (+10066) - (-188792)]$$

$$\underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-146639}{2,16043 \cdot 10^{10}} \cdot (-518819) \\ \frac{+10066}{2,16043 \cdot 10^{10}} \cdot (-518819) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +3,521 \\ -0,242 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_v \\ u_{fy} \end{pmatrix}$$

Die Folgelösung $u^{(2)}$ nach dem zweiten Iterationsschritt entspricht im Originalraum:

$$\Phi(u_v = +3,521) = 0,999785$$

$$v = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

$$v(u_v = +3,521) = -\ln[-\ln(0,999785)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 45,6185 \text{ m/s}$$

$$f_y(u_{fy} = -0,242) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{fy})$$

$$f_y(u_{fy} = -0,242) = \exp(5,63143 + 0,08200 \cdot (-0,242)) = 273,583 \text{ N/mm}^2$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 45,62 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 273,58 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{pmatrix}$$

Nach dem zweiten Iterationsschritt besteht zwischen Ausgangslösung und Folgelösung noch eine nennenswerte Differenz:

$$\left| u_v^{(2)} - u_v^{(1)} \right| = |3,521 - 4,497| = 0,976 \gg 0$$

$$\left| u_{fy}^{(2)} - u_{fy}^{(1)} \right| = |-0,242 - (-4,786)| = 4,544 \gg 0$$

Somit muss die Iteration mit $\underline{u}^{(2)}$ fortgesetzt werden. Der komplette Ablauf der Iteration ist in Tab. 6.1 angegeben. Fehlende Einträge können vom Leser ergänzt werden.

Tabelle 6.1: Iterative Bestimmung des Bemessungspunktes für den Versagensmodus Druckversagen

k	u_v	u_{fy}	v	f_y	$g(u_v, u_{fy})$	$v(u_v + 0,01)$	$g(u_v + 0,01, u_{fy})$	$\partial g / \partial u_v$	$f_y(u_{fy} + 0,01)$	$g(u_v, u_{fy} + 0,01)$	$\partial g / \partial u_{fy}$
	[1]	[1]	[m/s]	[N/mm ²]	[N]	[m/s]	[N]	[N]	[N/mm ²]	[N]	[N]
0	+0,000	+0,000	22,4149	279,060	+134305	22,4481	+134165	-14004	279,289	+134454	+14904
1	+4,497	-4,786	57,4830	188,475	-188792	57,6181	-190258	-146639	188,629	-188691	+10066
2	+3,521	-0,242	45,6185	273,583	-18074	45,7269	-19007	-9....	273,808	-17927	+14...
3	+3,285	-0,514	43,1360	267,542	-1...	4.,....	-2...	-8....	2.,...	-1...	+14...
4	+3,262	-0,561	42,9031	266,517	-14,0	43,0046	-835,8	-82178	266,736	+128,3	+14234
5	+3,262	-0,565	42,8941	266,427	-0,2	(42,9955)	(-821,6)	(-82141)	(266,646)	(+142,126)	(+14229)

Nach dem fünften Iterationsschritt besteht zwischen Ausgangslösung und Folgelösung keine nennenswerte Differenz mehr:

$$|u_v^{(5)} - u_v^{(4)}| = |3,262 - 3,262| = 0,000 \approx 0$$

$$|u_{fy}^{(5)} - u_{fy}^{(4)}| = |-0,565 - (-0,561)| = 0,004 \approx 0$$

Außerdem ist wegen $g(u_v^{(5)} = +3,262; u_{fy}^{(5)} = -0,565) = -0,2N \approx 0$ der Grenzzustand, an dem sich Beanspruchung und Beanspruchbarkeit gerade kompensieren, erreicht. Die Iteration wird abgebrochen.

Aus den gefundenen Bemessungspunktkoordinaten ($u_v^{(5)} = u_v^* = +3,262; u_{f_y}^{(5)} = u_{f_y}^* = -0,565$) berechnet sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras sein Abstand zum Ursprung, also der Zuverlässigkeitsindex β :

$$\beta_D^{FORM} = \sqrt{(+3,262)^2 + (-0,565)^2}$$

$$\beta_D^{FORM} = 3,310$$

Der Index „FORM“ weist auf die zunächst angenommene Näherung eines geradlinigen Verlaufs des Grenzzustandes $g = 0$ hin, der mit einem ebenen Schnitt die Versagenswahrscheinlichkeit P_f aus der der Verbundverteilungsdichte-Glocke „herausschneidet“, vgl. Abb. 6.1. Das Volumen des aus der Glocke herausgetrennten Schnittkörpers beträgt:

$$P_{f,D}^{FORM} = \Phi(-3,310) = 4,66 \cdot 10^{-4}$$

Aus den Bemessungspunktkoordinaten \underline{u}^* und dem Zuverlässigkeitsindex β lassen sich die sog. Sensitivitäten $\underline{\alpha}$ der beteiligten Variablen berechnen:

$$\alpha_{v,D} = \frac{u_v^*}{\beta_D^{FORM}} = \frac{3,262}{3,310} = +0,985$$

$$\alpha_{f_y,D} = \frac{u_{f_y}^*}{\beta_D^{FORM}} = \frac{-0,565}{3,310} = -0,171$$

Diese entsprechen geometrisch dem normierten Richtungsvektor der Verbindungsgerade vom Ursprung zum Bemessungspunkt. Die Summe der Quadrate aller Sensitivitäten ist also $\sum(\alpha_i^2) = 1$. Sie geben Aufschluss über den Einfluss der beteiligten Variablen auf die Höhe des Zuverlässigkeitsindex. Im Bsp. hängt der Zuverlässigkeitsindex also überwiegend von der Variable Windgeschwindigkeit v und kaum von der Variable Streckgrenze f_y ab. Bei der Festlegung des stochastischen Modells ist deshalb größere Genauigkeit für die Variable Windgeschwindigkeit v erforderlich. Es ist jedoch auch folgende Schlussfolgerung möglich: Soll der Zuverlässigkeitsindex spürbar erhöht werden, so gelingt dies nur durch nennenswerte Vergrößerung der Beanspruchbarkeit, weil der Zuverlässigkeitsindex überwiegend von der klimatisch bestimmten Einwirkungsseite abhängt, auf die der Mensch keinen Einfluss hat.

Abb. 6.2 gibt die Abb. 5.1, also den Grenzzustand für Druckversagen im Standardraum, in einer detaillierteren Darstellung wieder. Zusätzlich sind der Start $k = 0$, die Zwischenschritte und die Abbruchlösung $k = 5$ der iterativen Suche des Bemessungspunktes gemäß Tab. 6.1 dargestellt. Der Sensitivitätsvektor $\underline{\alpha}$ ist eingezeichnet.

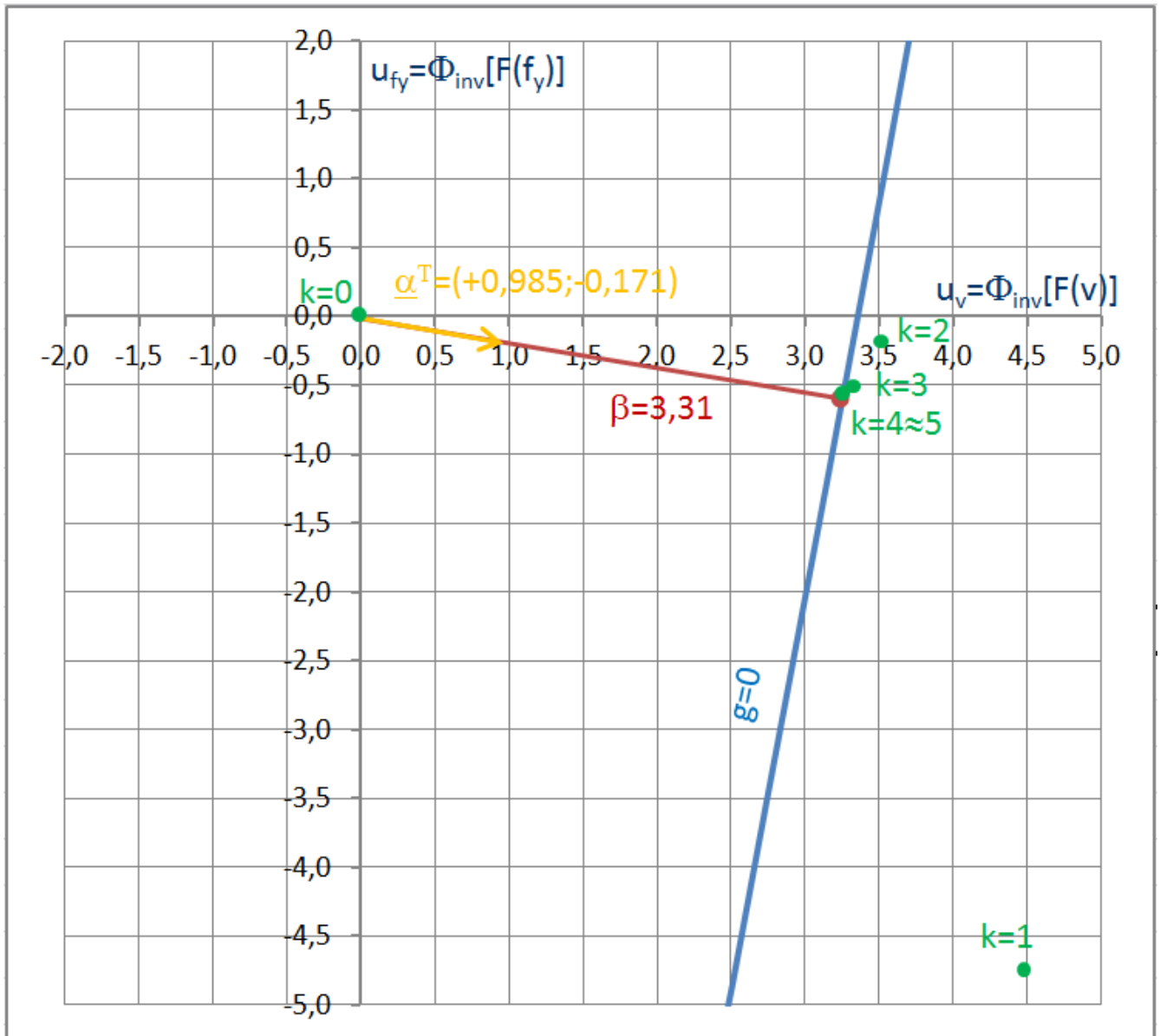


Abbildung 6.2: Grenzzustand für Druckversagen im Standardraum mit Ergänzung der iterativen Suche des Bemessungspunktes

Nach der Ermittlung der Bemessungspunktkoordinaten für den Versagensmodus Druckversagen werden nun die Bemessungspunktkoordinaten für den Versagensmodus Zugversagen berechnet. Für diesen Fall lautet die Folgelösung ($k + 1$) infolge der Anfangslösung aus dem vorherigen Iterationsschritt ($k = 1$):

$$\underline{u}^{(k+1)} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_v} \\ \frac{\partial g}{\partial u_{f_u}} \end{pmatrix}}{\left(\frac{\partial g}{\partial u_v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{f_u}}\right)^2} \cdot \left[(u_v; u_{f_u}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_v} \\ \frac{\partial g}{\partial u_{f_u}} \end{pmatrix} - g^{(k)}(u_v; u_{f_u}) \right]$$

Die Iteration wird wieder mit $\underline{u} = 0$ (Koordinatenursprung) begonnen. Um den Funktionswert $g(u_v; u_{f_u})$ der Grenzzustandsfunktion für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus berechnen zu können, müssen zuerst die Ursprungskordinaten $u_v = 0,00$ und $f_u = 0,00$ in den Originalraum transformiert werden:

$$\Phi(u_v = 0,00) = +0,50000$$

$$v = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

$$v(u_v = 0,00) = -\ln[-\ln(0,50000)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 22,4149 \text{ m/s}$$

$$f_u(u_{f_u} = 0,00) = \exp(\mu_{\ln} + \sigma_{\ln} \cdot u_{f_u})$$

$$f_u(u_{f_u} = 0,00) = \exp(5,98981 + 0,05745 \cdot 0,00) = 399,340 \text{ N/mm}^2$$

Für diese Variablenrealisierungen am Beginn der Iteration ergibt sich folgender Funktionswert:

$$g(u_v = 0,00; u_{f_u} = 0,00) = g\left(v = 22,4149 \frac{\text{m}}{\text{s}}, f_u = 399,340 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)$$

$$g(u_v = 0,00; u_{f_u} = 0,00) = 549 \cdot 399,340 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 22,4149^2 = 171875 \text{ N}$$

Dieser Funktionswert ist positiv, er liegt also im Überlebensraum.

Die für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus notwendigen partiellen ersten Ableitungen nach Windgeschwindigkeit und Zugfestigkeit werden mit Hilfe von Differenzenquotienten berechnet. Hierfür wird im Nenner wieder ein kleines $\Delta u = 0,01$ eingesetzt, im Zähler wird die Differenz der Funktionswerte g mit und ohne die Vergrößerung um $\Delta u = 0,01$ eingesetzt (Vorwärtsdifferenzieren).

Erste Ableitung nach der Windgeschwindigkeit v :

$$\frac{\partial g}{\partial u_v} \approx \frac{g(u_v + 0,01; u_{f_u}) - g(u_v; u_{f_u})}{0,01} = \frac{g(0 + 0,01; 0) - g(0; 0)}{0,01}$$

$$\Phi(u_v = 0,01) = +0,50399$$

$$v(u_v = 0,01) = -\ln[-\ln(0,50399)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 22,4481 \text{ m/s}$$

$$g(u_v = 0,00 + 0,01; u_{fu} = 0,00) = 549 \cdot 399,340 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 22,4481^2 = 171735 \text{ N}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_v} \approx \frac{g\left(22,4481 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 399,340 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) - g\left(22,4149 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 399,340 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)}{0,01} = \frac{171735 - 171875}{0,01} = -14004$$

Erste Ableitung nach der Zugfestigkeit f_u :

$$\frac{\partial g}{\partial u_{fu}} \approx \frac{g(u_v; u_{fu} + 0,01) - g(u_v; u_{fu})}{0,01} = \frac{g(0; 0 + 0,01) - g(0; 0)}{0,01}$$

$$f_u(u_{fu} = 0,01) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{fu})$$

$$f_u(u_{fu} = 0,01) = \exp(5,98981 + 0,05745 \cdot 0,01) = 399,570 \text{ N/mm}^2$$

$$g(u_v = 0,00; u_{fu} = 0,00 + 0,01) = 549 \cdot 399,570 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 22,4149^2 = 172001 \text{ N}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_{fu}} \approx \frac{g\left(22,4149 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 399,570 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) - g\left(22,4149 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 399,340 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)}{0,01} = \frac{172001 - 171875}{0,01} = +12599$$

Nachdem mit dem Funktionswert g sowie den ersten partiellen Ableitungen am Startpunkt der Iteration alle Eingangsgrößen für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus bekannt sind, kann die Folgelösung nach dem ersten Iterationsschritt berechnet werden:

$$\underline{u}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} -14004 \\ +12599 \end{pmatrix}}{(-14004)^2 + (+12599)^2} \cdot \left[(0; 0) \cdot \begin{pmatrix} -14004 \\ +12599 \end{pmatrix} - 171875 \right]$$

$$\underline{u}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} -14004 \\ +12599 \end{pmatrix}}{354846817} \cdot [0 \cdot (-14004) + 0 \cdot (+12599) - 171875]$$

$$\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-14004}{354846817} \cdot (-171875) \\ \frac{+12599}{354846817} \cdot (-171875) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6,783 \\ -6,102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_v \\ u_{fu} \end{pmatrix}$$

Die Folge­lösung $u^{(1)}$ nach dem ersten Iterationsschritt entspricht im Originalraum:

$$\Phi(u_v = +6,783) = 0,999999999999411$$

$$v = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

$$v(u_v = 6,783) = -\ln[-\ln(0,999999999999411)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 95,6149 \text{ m/s}$$

$$f_u(u_{fu} = -6,102) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{fu})$$

$$f_u(u_{fu} = -6,102) = \exp(5,98981 + 0,05745 \cdot (-6,102)) = 281,243 \text{ N/mm}^2$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 95,61 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 281,243 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{pmatrix}$$

Zwischen Ausgangslösung und Folge­lösung besteht eine nennenswerte Differenz:

$$\left| u_v^{(1)} - u_v^{(0)} \right| = |6,783 - 0,0| = 6,783 \gg 0$$

$$\left| u_{fu}^{(1)} - u_{fu}^{(0)} \right| = |-6,102 - 0,0| = 6,102 \gg 0$$

Somit muss die Iteration mit $\underline{u}^{(1)}$ als Anfangslösung für den nächsten Iterationsschritt fortgesetzt werden. Der komplette Ablauf der Iteration ist in Tab. 6.2 angegeben. Fehlende Einträge können vom Leser ergänzt werden. Aufgrund der erforderlichen Genauigkeit (Anzahl zuverlässiger Ziffern) ist es empfehlenswert, hierfür EXCEL zu verwenden.

Tabelle 6.2: Iterative Bestimmung des Bemessungspunktes für den Versagensmodus Zugversagen

k	u_v	u_{fu}	v	f_u	$g(u_v, u_{fu})$	$v(u_v + 0,01)$	$g(u_v + 0,01, u_{fu})$	$\partial g / \partial u_v$	$f_u(u_{fu} + 0,01)$	$g(u_v, u_{fu} + 0,01)$	$\partial g / \partial u_{fu}$
	[1]	[1]	[m/s]	[N/mm ²]	[N]	[m/s]	[N]	[N]	[N/mm ²]	[N]	[N]
0	+0,000	+0,000	22,4149	399,340	+171875	22,4481	+171735	-14004	399,570	+172001	+12599
1	+6,783	-6,102	95,6149	281,243	-707415	95,....	-711...	-359...	2.,...	-707...	+8...
2	+4,960	-0,123	64,....	39.,...	-16....	64,....	-17....	-178853	39.,...	-168...	+12510
3	+4,005	-0,280	...,....	...,...	-31157	...,....	-3....	-11....	...,...	-3....	+.....
4	+3,728	-0,393	...,....	...,...	-2085	...,....	-3...	-10....	...,...	-1...	+.....
5	+3,702	-0,442	...,....	...,...	-21,9	47,7327	-1041	-101891	389,550	+100,9	+12283
6	+3,701	-0,446	47,6112	389,233	-0,2						

Nach dem sechsten Iterationsschritt besteht zwischen Ausgangslösung und Folgelösung keine nennenswerte Differenz mehr:

$$\left| u_v^{(6)} - u_v^{(5)} \right| = |3,701 - 3,702| = 0,001 \approx 0$$

$$\left| u_{fu}^{(6)} - u_{fu}^{(5)} \right| = |-0,446 - (-0,442)| = 0,004 \approx 0$$

Außerdem ist wegen $g(u_v^{(6)} = +3,701; u_{fu}^{(6)} = -0,446) = -0,2N \approx 0$ der Grenzzustand, an dem sich Beanspruchung und Beanspruchbarkeit gerade kompensieren, erreicht. Die Iteration wird abgebrochen.

Aus den gefundenen Bemessungspunktkoordinaten ($u_v^{(6)} = u_v^* = +3,701; u_{fu}^{(6)} = u_{fu}^* = -0,446$) berechnet sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras sein Abstand zum Ursprung, also der Zuverlässigkeitsindex β :

$$\beta_Z^{FORM} = \sqrt{(+3,701)^2 + (-0,446)^2}$$

$$\beta_Z^{FORM} = 3,728$$

Zu diesem Zuverlässigkeitsindex β gehört eine Versagenswahrscheinlichkeit P_f von:

$$P_{f,Z}^{FORM} = \Phi(-3,728) = 9,64 \cdot 10^{-5}$$

Aus den Bemessungspunktkoordinaten \underline{u}^* und dem Zuverlässigkeitsindex β lassen sich die Sensitivitäten $\underline{\alpha}$ der beteiligten Variablen berechnen:

$$\alpha_{v,Z} = \frac{u_v^*}{\beta_Z^{FORM}} = \frac{3,701}{3,728} = +0,993$$

$$\alpha_{fu,Z} = \frac{u_{fu}^*}{\beta_Z^{FORM}} = \frac{-0,446}{3,728} = -0,120$$

Nach der Ermittlung der Bemessungspunktkoordinaten für die Versagensmodi Druckversagen und Zugversagen werden nun noch die Bemessungspunktkoordinaten für die Versagensmodi Abscherversagen und Lochleibungsversagen berechnet. Für Abscherversagen berechnen sich die Bemessungspunktkoordinaten iterativ mit:

$$\underline{u}^{(k+1)} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_v} \\ \frac{\partial g}{\partial u_{fuA}} \end{pmatrix}}{\left(\frac{\partial g}{\partial u_v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{fuA}}\right)^2} \cdot \left[(u_v; u_{fuA}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_v} \\ \frac{\partial g}{\partial u_{fuA}} \end{pmatrix} - g^{(k)}(u_v; u_{fuA}) \right]$$

Als Anfangslösung für die Iteration werden nun für die Windgeschwindigkeit das 0,98-Quantil ($u_v = +2,054$) und für die Abscherfestigkeit das 0,05-Quantil ($u_{fuA} = -1,645$) (charakteristische Werte) gewählt:

$$\Phi(u_v = +2,054) = +0,98$$

$$v = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

$$v(u_v = +2,054) = -\ln[-\ln(0,98)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 32,5691 \text{ m/s}$$

$$f_{uA}(u_{f_{uA}} = -1,645) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{f_{uA}})$$

$$f_{uA}(u_{f_{uA}} = -1,645) = \exp(5,86238 + 0,09047 \cdot (-1,645)) = 302,947 \text{ N/mm}^2$$

Für diese Variablenrealisierungen am Beginn der Iteration ergibt sich folgender Funktionswert:

$$g(u_v = +2,054; u_{f_{uA}} = -1,645) = g\left(v = 32,5691 \frac{\text{m}}{\text{s}}, f_{uA} = 302,947 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)$$

$$g(u_v = +2,054; u_{f_{uA}} = -1,645) = 573 \cdot 302,947 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 32,5691^2 = +73594 \text{ N}$$

Dieser Funktionswert ist positiv, er liegt also im Überlebensraum.

Die für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus notwendigen partiellen ersten Ableitungen nach Windgeschwindigkeit und Abscherfestigkeit werden mit Hilfe von Differenzenquotienten berechnet. Hierfür wird im Nenner wieder ein kleines $\Delta u = 0,01$ eingesetzt, im Zähler wird die Differenz der Funktionswerte g mit und ohne die Vergrößerung um $\Delta u = 0,01$ eingesetzt (Vorwärtsdifferenzieren).

Erste Ableitung nach der Windgeschwindigkeit v :

$$\frac{\partial g}{\partial u_v} \approx \frac{g(u_v + 0,01; u_{f_{uA}}) - g(u_v; u_{f_{uA}})}{0,01} = \frac{g(+2,054 + 0,01; -1,645) - g(+2,054; -1,645)}{0,01}$$

$$\Phi(u_v = +2,064) = +0,98049$$

$$v(u_v = +2,064) = -\ln[-\ln(0,98049)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 32,6395 \text{ m/s}$$

$$g(u_v = +2,054 + 0,01; u_{f_{uA}} = -1,645) = 573 \cdot 302,947 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 32,6395^2 = +73162 \text{ N}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_v} \approx \frac{g\left(32,6395 \frac{m}{s}; 302,947 \frac{N}{mm^2}\right) - g\left(32,5691 \frac{m}{s}; 302,947 \frac{N}{mm^2}\right)}{0,01} = \frac{+73162 - 73594}{0,01} = -43246$$

Erste Ableitung nach der Abscherfestigkeit f_{uA} :

$$\frac{\partial g}{\partial u_{f_{uA}}} \approx \frac{g(u_v; u_{f_{uA}} + 0,01) - g(u_v; u_{f_{uA}})}{0,01} = \frac{g(+2,054; -1,645 + 0,01) - g(+2,054; -1,645)}{0,01}$$

$$f_{uA}(u_{f_{uA}} = -1,635) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{f_{uA}})$$

$$f_{uA}(u_{f_{uA}} = -1,635) = \exp(5,86238 + 0,09047 \cdot (-1,635)) = 303,222N/mm^2$$

$$g(u_v = +2,054; u_{f_{uA}} = -1,635 + 0,01) = 573 \cdot 303,222 - \frac{100000}{32,57^2} \cdot 32,5691^2 = +73751N$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_{f_{uA}}} \approx \frac{g\left(32,5691 \frac{m}{s}; 303,222 \frac{N}{mm^2}\right) - g\left(32,5691 \frac{m}{s}; 302,947 \frac{N}{mm^2}\right)}{0,01} = \frac{+73751 - 73594}{0,01} = +15711$$

Nachdem mit dem Funktionswert g sowie den ersten partiellen Ableitungen am Startpunkt der Iteration alle Eingangsgrößen für den Rackwitz-Fiessler-Algorithmus bekannt sind, kann die Folgelösung nach dem ersten Iterationsschritt berechnet werden:

$$\underline{u}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} -43246 \\ +15711 \end{pmatrix}}{(-43246)^2 + (+15711)^2} \cdot \left[(+2,054; -1,645) \cdot \begin{pmatrix} -43246 \\ +15711 \end{pmatrix} - 73594 \right]$$

$$\underline{u}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} -43246 \\ +15711 \end{pmatrix}}{2117052037} \cdot [+2,054 \cdot (-43246) - 1,645 \cdot (+15711) - 73594]$$

$$\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-43246}{2117052037} \cdot (-188266) \\ \frac{+15711}{2117052037} \cdot (-188266) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +3,846 \\ -1,397 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_v \\ u_{f_{uA}} \end{pmatrix}$$

Die Folgelösung $u^{(1)}$ nach dem ersten Iterationsschritt entspricht im Originalraum:

$$\Phi(u_v = +3,846) = 0,9999399$$

$$v = -\ln[-\ln(F(v))] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_v}{\pi} + \hat{v}$$

$$v(u_v = +3,846) = -\ln[-\ln(0,9999399)] \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot 3,683}{\pi} + 21,3624 = 49,2740 \text{ m/s}$$

$$f_{uA}(u_{fuA} = -1,397) = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \cdot u_{fuA})$$

$$f_{uA}(u_{fuA} = -1,397) = \exp(5,86238 + 0,09047 \cdot (-1,397)) = 309,817 \text{ N/mm}^2$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 49,27 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 309,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{pmatrix}$$

Zwischen Ausgangslösung und Folgelösung besteht eine nennenswerte Differenz:

$$\left| u_v^{(1)} - u_v^{(0)} \right| = |3,846 - 2,054| = 1,792 \gg 0$$

$$\left| u_{fuA}^{(1)} - u_{fuA}^{(0)} \right| = |-1,397 - (-1,645)| = 0,248 > 0$$

Die Iteration muss fortgesetzt werden. Der komplette Ablauf ist in Tab. 6.3 angegeben. Fehlende Einträge können vom Leser ergänzt werden. Es zeigt sich, dass bei Verwendung von $u_S = u_v = +2,054$ und $u_R = u_{fuA} = -1,645$ als Startlösung die Differenzen der u-Koordinaten zwischen zwei Iterationsschritten k und $k+1$ kleiner sind, als bei Wahl der Anfangslösung im Koordinatenursprung $\underline{u} = 0$. Der Rackwitz-Fiessler-Algorithmus konvergiert besser, wenn eine Anfangslösung gewählt wird, die näher am erwarteten Bemessungspunkt liegt.

Tabelle 6.3: Iterative Bestimmung des Bemessungspunktes für den Versagensmodus Abscherversagen

k	u_v	u_{fuA}	v	f_{uA}	$g(u_v, u_{fuA})$	$v(u_v + 0, 01)$	$g(u_v + 0, 01, u_{fuA})$	$\partial g / \partial u_v$	$f_{uA}(u_{fuA} + 0, 01)$	$g(u_v, u_{fuA} + 0, 01)$	$\partial g / \partial u_{fuA}$
	[1]	[1]	[m/s]	[N/mm ²]	[N]	[m/s]	[N]	[N]	[N/mm ²]	[N]	[N]
0	+2,054	-1,645	32,5691	302,947	+73594	32,6395	+73162	-43246	303,222	+73751	+15711
1	+3,846	-1,397	49,2740	309,817	-51350	49,....	-52...	-109...	3...,...	-51...	+16...
2	+3,505	-0,516	45,....	33,....	-2...	45,....	-3...	-92...	3...,...	-2...	+17...
3	+3,454	-0,649	...,....	...,...	-53,76	...,....	-9..	-90...	...,...	+118,2	+17...
4	+3,452	-0,657	...,....	...,...	-0,45	...,....	-9..	-90....	...,...	+171,4	+17...
5	+3,452	-0,657	44,8733	331,273	-0,01						

Nach dem fünften Iterationsschritt besteht zwischen Ausgangslösung und Folgelösung keine nennenswerte Differenz mehr:

$$\left| u_v^{(5)} - u_v^{(4)} \right| = |3,452 - 3,452| = 0,000 \approx 0$$

$$\left| u_{fuA}^{(5)} - u_{fuA}^{(4)} \right| = |-0,657 - (-0,657)| = 0,000 \approx 0$$

Außerdem ist wegen $g(u_v^{(5)} = +3,452; u_{fuA}^{(5)} = -0,657) = -0,01N \approx 0$ der Grenzzustand, an dem sich Beanspruchung und Beanspruchbarkeit gerade kompensieren, erreicht. Die Iteration wird abgebrochen.

Aus den gefundenen Bemessungspunktkoordinaten ($u_v^{(5)} = u_v^* = +3,452; u_{fuA}^{(5)} = u_{fuA}^* = -0,657$) berechnet sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras sein Abstand zum Ursprung, also der Zuverlässigkeitsindex β :

$$\beta_A^{FORM} = \sqrt{(+3,452)^2 + (-0,657)^2}$$

$$\beta_A^{FORM} = 3,514$$

Zu diesem Zuverlässigkeitsindex β gehört eine Versagenswahrscheinlichkeit P_f von:

$$P_{f,A}^{FORM} = \Phi(-3,514) = 2,21 \cdot 10^{-4}$$

Aus den Bemessungspunktkoordinaten \underline{u}^* und dem Zuverlässigkeitsindex β lassen sich die Sensitivitäten $\underline{\alpha}$ der beteiligten Variablen berechnen:

$$\alpha_{v,A} = \frac{u_v^*}{\beta_A^{FORM}} = \frac{3,452}{3,514} = +0,982$$

$$\alpha_{fuA,A} = \frac{u_{fuA}^*}{\beta_A^{FORM}} = \frac{-0,657}{3,514} = -0,187$$

Für Lochleibungsversagen berechnen sich die Bemessungspunktkoordinaten iterativ mit:

$$\underline{u}^{(k+1)} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_v} \\ \frac{\partial g}{\partial u_{fuL}} \end{pmatrix}}{\left(\frac{\partial g}{\partial u_v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{fuL}}\right)^2} \cdot \left[(u_v; u_{fuL}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_v} \\ \frac{\partial g}{\partial u_{fuL}} \end{pmatrix} - g^{(k)}(u_v; u_{fuL}) \right]$$

Der komplette Ablauf der Iteration ist in Tab. 6.4 angegeben. Als Anfangslösung werden ($u_v = +2,054$) und ($u_{fuL} = -1,645$) gewählt. Fehlende Einträge können vom Leser ergänzt werden.

Tabelle 6.4: Iterative Bestimmung des Bemessungspunktes für den Versagensmodus Lochleibungsversagen

k	u_v [1]	u_{fuL} [1]	v [m/s]	f_{uL} [N/mm ²]	$g(u_v, u_{fuL})$ [N]	$v(u_v + 0,01)$ [m/s]	$g(u_v + 0,01, u_{fuL})$ [N]	$\partial g / \partial u_v$ [N]	$f_{uL}(u_{fuL} + 0,01)$ [N/mm ²]	$g(u_v, u_{fuL} + 0,01)$ [N]	$\partial g / \partial u_{fuL}$ [N]
0	+2,054	-1,645	32,5691	872,668	+112064	32,6395	+111631	-43246	872,888	+112117	+5360
1	+4,776	-0,592	61,3541	896,204	-137078	61,....	-138...	-165...	8...,...	-137...	+5...
2	+3,963	-0,132	50,....	906,...	-21...	50,....	-22...	-115...	9...,...	-21...	+5...
3	+3,772	-0,182	...,....	...,...	-993,6	...,....	-2...	-10....	...,...	-938,0	+5...
4	+3,762	-0,199	...,....	...,...	-5,17	...,....	-1...	-10....	...,...	+50,4	+5...
5	+3,762	-0,199	48,3034	905,135	-0,02						

Nach dem fünften Iterationsschritt besteht zwischen Ausgangslösung und Folgelösung keine nennenswerte Differenz mehr:

$$\left| u_v^{(5)} - u_v^{(4)} \right| = |3,762 - 3,762| = 0,000 \approx 0$$

$$\left| u_{fuL}^{(5)} - u_{fuL}^{(4)} \right| = |-0,199 - (-0,199)| = 0,000 \approx 0$$

Außerdem ist wegen $g(u_v^{(5)} = +3,762; u_{fuL}^{(5)} = -0,199) = -0,02N \approx 0$ der Grenzzustand, an dem sich Beanspruchung und Beanspruchbarkeit gerade kompensieren, erreicht. Die Iteration wird abgebrochen.

Aus den gefundenen Bemessungspunktkoordinaten ($u_v^{(5)} = u_v^* = +3,762; u_{fuL}^{(5)} = u_{fuL}^* = -0,199$) berechnet sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras sein Abstand zum Ursprung, also der Zuverlässigkeitsindex β :

$$\beta_L^{FORM} = \sqrt{(+3,762)^2 + (-0,199)^2}$$

$$\beta_L^{FORM} = 3,767$$

Zu diesem Zuverlässigkeitsindex β gehört eine Versagenswahrscheinlichkeit P_f von:

$$P_{f,L}^{FORM} = \Phi(-3,767) = 8,25 \cdot 10^{-5}$$

Aus den Bemessungspunktkoordinaten \underline{u}^* und dem Zuverlässigkeitsindex β lassen sich die Sensitivitäten $\underline{\alpha}$ der beteiligten Variablen berechnen:

$$\alpha_{v,L} = \frac{u_v^*}{\beta_L^{FORM}} = \frac{3,762}{3,767} = +0,9986$$

$$\alpha_{fuL,L} = \frac{u_{fuL}^*}{\beta_L^{FORM}} = \frac{-0,199}{3,762} = -0,0529$$

Die Zuverlässigkeitsindizes der Versagensmodi Druck $\beta_D^{FORM} = 3,310$, Zug $\beta_Z^{FORM} = 3,728$, Abscheren $\beta_A^{FORM} = 3,514$ und Lochleibung $\beta_L^{FORM} = 3,767$ sind nun bekannt. Unter der Annahme, dass im Abstand β^{FORM} ein geradliniger Grenzzustand $g = 0$ durch einen ebenen Schnitt einen Teilkörper aus der „Verbunddicke-Glocke“ herausgetrennt, lässt sich die Versagenswahrscheinlichkeit eines jeden Versagensmodus mit $P_f^{FORM} = \Phi(-\beta^{FORM})$ berechnen. Diese entspricht den Volumina der herausgetrennten Teilkörper: $P_{f,D}^{FORM} = 4,66 \cdot 10^{-4}$, $P_{f,Z}^{FORM} = 9,64 \cdot 10^{-5}$, $P_{f,A}^{FORM} = 2,21 \cdot 10^{-4}$ und $P_{f,L}^{FORM} = 8,25 \cdot 10^{-5}$.

Sollte der Grenzzustand $g = 0$ eine konvexe oder konkave Krümmung κ aufweisen, lässt sich die Versagenswahrscheinlichkeit nach FORM-Näherungslösung

$$P_f \approx P_f^{FORM} = \Phi(-\beta)$$

durch Multiplikation mit dem Korrekturfaktor

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \cdot \kappa_i \right)^{-\frac{1}{2}}$$

zur SORM-Näherungslösung (second order reliability method) verbessern:

$$P_f \approx P_f^{SORM} = \Phi(-\beta) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \cdot \kappa_i \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Der Korrekturfaktor enthält die Funktionswerte der Standardnormalverteilungs-Dichte ($\varphi(\beta)$) und -Summe ($\Phi(-\beta)$). Der Korrekturfaktor enthält außerdem die Krümmungen κ_i des Grenzzustandes $g = 0$ im Bemessungspunkt. Die Anzahl der Krümmungen ist um 1 kleiner als die Anzahl der Dimensionen n . Im Falle von nur zwei Variablen ist der Grenzzustand eine Linie, die nur eine Krümmung κ_1 aufweist. Im Falle von drei Variablen ist der Grenzzustand eine Fläche, die zwei Krümmungen κ_1 und κ_2 aufweist usw. Die SORM-Lösung stellt ebenfalls eine Näherung dar, weil der Grenzzustand als quadratische Funktion angenommen wird. Zur besseren Vorstellung sind die möglichen Krümmungen für den zweidimensionalen Fall qualitativ in den Abb. 6.3, 6.4 und 6.5 dargestellt. Bei mehr als zwei Dimensionen können die Krümmungen auch unterschiedliche Vorzeichen (Sattelpunkt) aufweisen.

Abb. 6.3 zeigt einen geradlinigen Grenzzustand. In diesem Fall beträgt die Krümmung $\kappa = 0$ und der Korrekturfaktor wird zu 1. FORM- und SORM- Lösung sind dann gleich groß:

$$\kappa_1 = 0 \quad P_f^{SORM} = \Phi(-\beta) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \cdot \kappa_i \right)^{-\frac{1}{2}} = \Phi(-\beta) \cdot 1$$

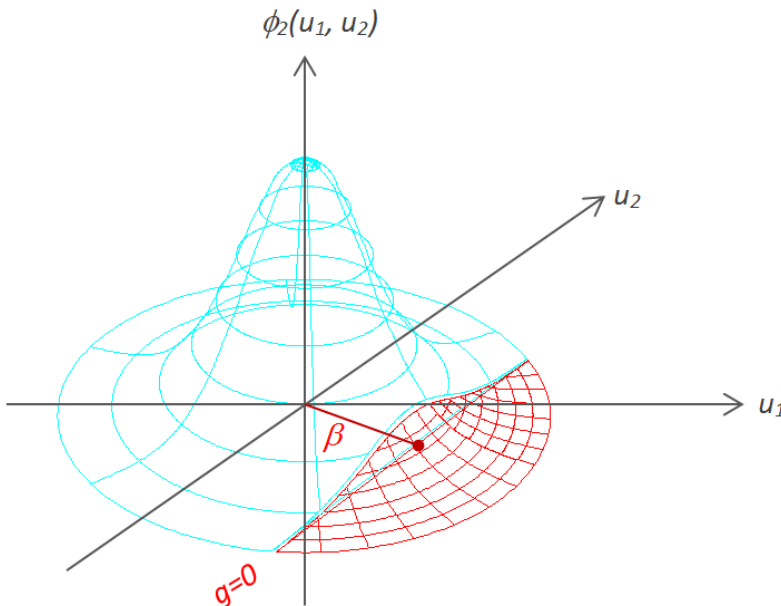


Abbildung 6.3: Geradliniger Grenzzustand im Standardraum

Abb. 6.4 zeigt einen konvexen Grenzzustand. In diesem Fall ist die Krümmung positiv und der Korrekturfaktor wird > 1 . Die Versagenswahrscheinlichkeit nach SORM-Näherung übersteigt die Versagenswahrscheinlichkeit nach FORM-Näherung, weil der gekrümmte Grenzzustand einen größeren Körper aus der Verbunddichte-Glocke herauschneidet, als es ein geradliniger Grenzzustand mit gleichem Abstand β zum Ursprung tun würde:

$$\kappa_1 > 0 \quad P_f \approx \Phi(-\beta) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \cdot \kappa_i \right)^{-\frac{1}{2}}$$

mit

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \cdot \kappa_i \right)^{-\frac{1}{2}} > 1$$

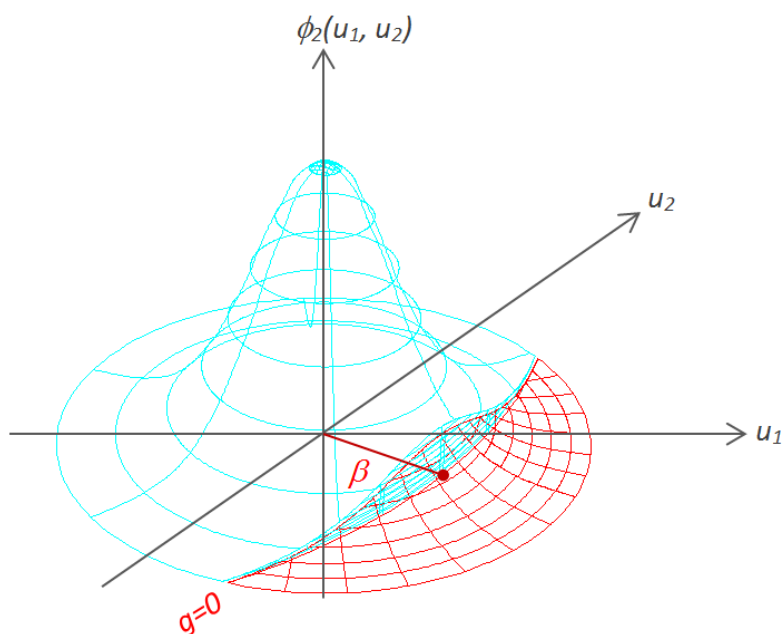


Abbildung 6.4: Konvexer Grenzzustand im Standardraum

Abb. 6.5 zeigt einen konkaven Grenzzustand. In diesem Fall ist die Krümmung negativ und der Korrekturfaktor wird < 1 . Die Versagenswahrscheinlichkeit nach SORM-Näherung unterschreitet die Versagenswahrscheinlichkeit nach FORM-Näherung, weil der gekrümmte Grenzzustand einen kleineren Körper aus der Verbunddichte-Glocke herauschneidet, als es ein geradliniger Grenzzustand mit gleichem Abstand β zum Ursprung tun würde:

$$\kappa_1 < 0 \quad P_f \approx \Phi(-\beta) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \cdot \kappa_i \right)^{-\frac{1}{2}}$$

mit

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \cdot \kappa_i \right)^{-\frac{1}{2}} < 1$$

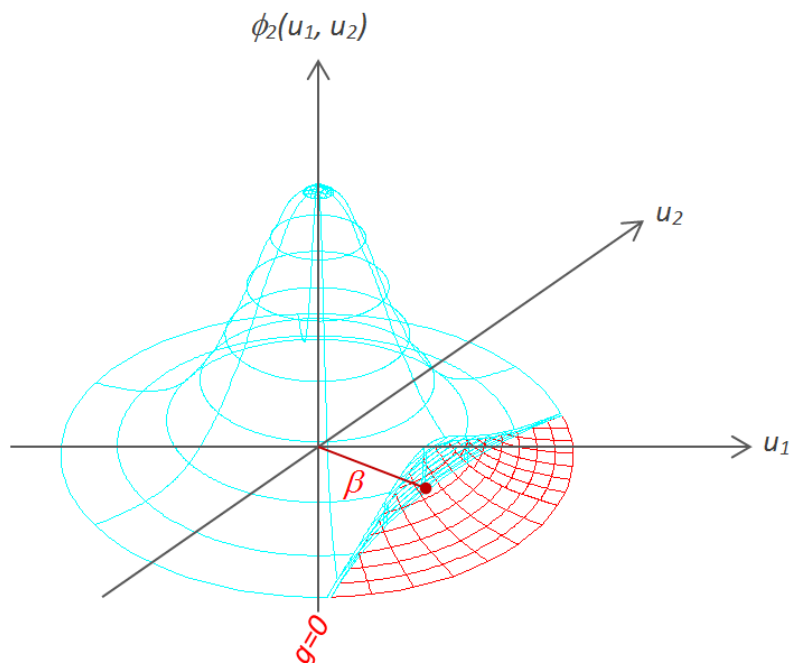


Abbildung 6.5: Konkaver Grenzzustand im Standardraum

Am Beispiel des Versagensmodus Druck wird die Versagenswahrscheinlichkeit nach SORM-Näherung $P_{f,D}^{SORM}$ berechnet. Es sind folgende Arbeitsschritte erforderlich:

1. Einführung eines neuen v-Koordinatensystems, dessen Ursprung mit dem u-Koordinatensystem deckungsgleich ist, dessen erste Achse jedoch so gedreht ist, dass sie durch den Bemessungspunkt verläuft. Also die Suche nach einer Drehmatrix \underline{D} , um vom v- ins u- Koordinatensystem zu transformieren ($\underline{u} = \underline{D} \cdot \underline{v}$) bzw. der transponierten Drehmatrix \underline{D}^T , um vom u- ins v- Koordinatensystem zu transformieren ($\underline{v} = \underline{D}^T \cdot \underline{u}$).
2. Aufstellen der Matrix \underline{B}_u der zweiten und gemischten Ableitungen des Grenzzustands im Bemessungspunkt, zunächst im Standardraum u .
3. Aufstellen der Matrix \underline{B}_v der zweiten und gemischten Ableitungen des Grenzzustands im Bemessungspunkt durch Drehen von \underline{B}_u mit Hilfe von \underline{D} .
4. Berechnung der Krümmung κ durch Lösen der charakteristischen Gleichung

$$\det \left(\frac{\hat{B}_v}{\frac{\partial g}{\partial v_1}} - \underline{\kappa} \cdot \underline{E} \right) = 0$$

5. Berechnung der Funktionswerte $\varphi(\beta)$ und $\Phi(-\beta)$.

6. Berechnung des Korrekturfaktors, mit dem P_f^{FORM} zu P_f^{SORM} verbessert wird.

Mit dem ersten Arbeitsschritt wird ein neues Koordinatensystem v_1, v_2 eingeführt, dessen Ursprung mit dem Standardraum-Koordinatensystem u_1, u_2 deckungsgleich ist. Dessen erste Achse v_1 verläuft jedoch durch den Bemessungspunkt, d.h. sie weist die gleiche Richtung wie der Zuverlässigkeitsindex β auf. Abb. 6.6 zeigt den Grenzzustand $g = 0$ für den Versagensmodus Druckversagen im bekannten u- und im neuen, verdrehten v-Koordinatensystem. Der eingezeichnete Verdrehungswinkel der v_1 -Achse gegenüber der u_1 -Achse ist

$$\angle = \arctan\left(\frac{\alpha_{f_y}}{\alpha_v}\right) = \arctan\left(\frac{-0,1707}{+0,9853}\right) = -9,829^\circ$$

Das negative Vorzeichen zeigt an, dass das v-Achsenkreuz gegenüber dem u-Achsenkreuz um die senkrecht aus der Abbildung herauszeigende Achse mathematisch negativ verdreht wurde. Die Richtung des Zuverlässigkeitsindexes ist durch die Sensitivitäten $\underline{\alpha}$ beschrieben. Der Sensitivitätsvektor ist bereits normiert, da $\sum \alpha_i^2 = 1$. Die erste Spalte der Drehmatrix \underline{D} lautet deshalb:

$$\underline{d}_1 = \underline{c}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_v \\ \alpha_{f_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0,9853 \\ -0,1707 \end{pmatrix}$$

Der zweite Vektor der Drehmatrix ist zunächst unnormiert:

$$\underline{c}_2 = \underline{e}_2 - \underline{c}_1 \cdot [\underline{e}_2^T \cdot \underline{c}_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +0,9853 \\ -0,1707 \end{pmatrix} \cdot \left[(0; 1) \cdot \begin{pmatrix} +0,9853 \\ -0,1707 \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +0,9853 \\ -0,1707 \end{pmatrix} \cdot [0 \cdot 0,9853 + 1 \cdot (-0,1707)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,1682 \\ +0,0291 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1682 \\ 0,9709 \end{pmatrix}$$

Nach der Normierung ist der zweite Vektor der Drehmatrix:

$$\underline{d}_2 = \frac{\underline{c}_2}{|\underline{c}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} +0,1682 \\ +0,9709 \end{pmatrix}}{\sqrt{0,1682^2 + 0,9709^2}} = \begin{pmatrix} +0,1707 \\ +0,9853 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Drehmatrix für die Transformation vom v-Koordinatensystem ins u-Koordinatensystem

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \cos(\angle) & -\sin(\angle) \\ \sin(\angle) & \cos(\angle) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,9853 & +0,1707 \\ -0,1707 & +0,9853 \end{bmatrix}$$

Die Drehmatrix für die Transformation vom u-Koordinatensystem ins v-Koordinatensystem folgt durch Transponieren

$$\underline{D}^T = \begin{bmatrix} \cos(\angle) & \sin(\angle) \\ -\sin(\angle) & \cos(\angle) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,9853 & -0,1707 \\ +0,1707 & +0,9853 \end{bmatrix}$$

Zur Probe wird geprüft, ob der Bemessungspunkt ($u_1 = u_v = +3,262$; $u_2 = u_{fy} = -0,565$) im v-Koordinatensystem auf der v_1 -Achse liegt, also $v_2 = 0$ gilt. $\underline{D}^T \cdot \underline{u} = \underline{v}$ ergibt:

		+3,262
		-0,565
+0,9853	-0,1707	+3,31
+0,1707	+0,9853	0

Die Drehmatrix ist korrekt, denn $v_1 = +\beta = +3,31$ und $v_2 = 0$.

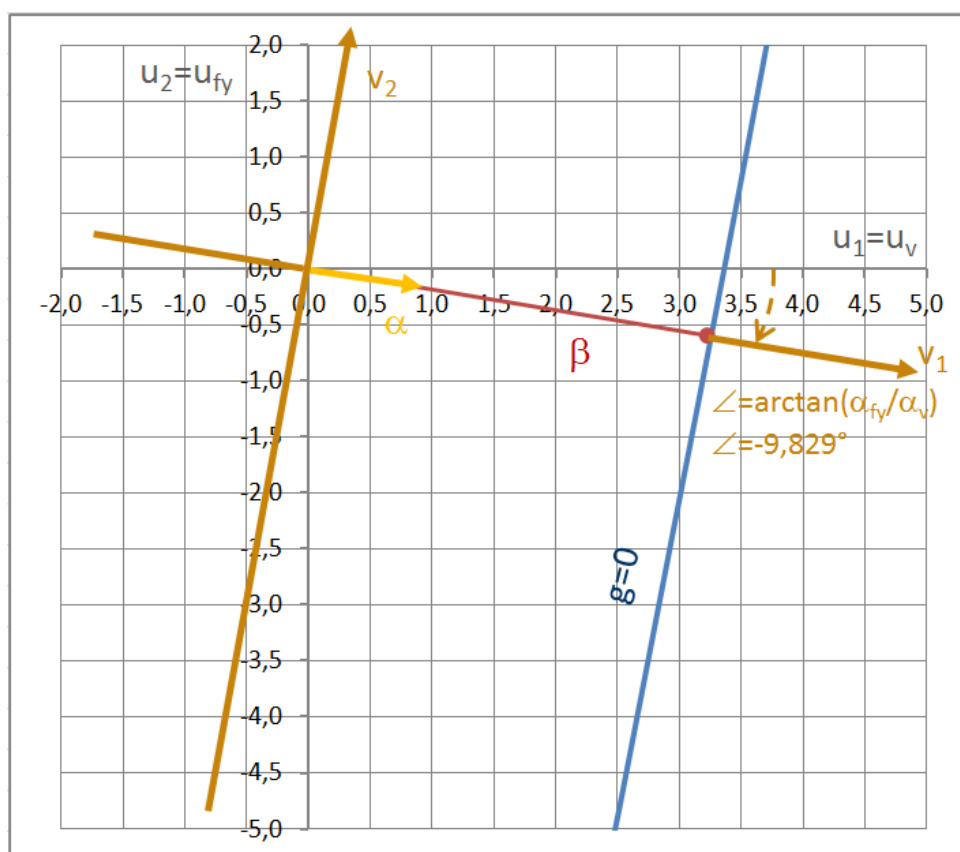


Abbildung 6.6: Grenzzustand $g = 0$ für Druckversagen im u- und v-Koordinatensystem

Für den zweiten Arbeitsschritt werden die zweiten und gemischten Ableitungen des Grenzzustands $g = 0$ im Bemessungspunkt benötigt. Diese werden durch Bildung von Differenzenquotienten näherungsweise berechnet.

Zweite partielle Ableitung nach der Windgeschwindigkeit v :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u_v^2} &= \frac{g \begin{pmatrix} u_v + 0,01 \\ u_{f_y} \end{pmatrix} - 2 \cdot g \begin{pmatrix} u_v \\ u_{f_y} \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} u_v - 0,01 \\ u_{f_y} \end{pmatrix}}{0,01^2} \\ &= \frac{-821,411 - 2 \cdot (-0,0039) + 817,300}{0,01^2} \\ &= -41040,7\end{aligned}$$

Zweite partielle Ableitung nach der Streckgrenze f_y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u_{f_y}^2} &= \frac{g \begin{pmatrix} u_v \\ u_{f_y} + 0,01 \end{pmatrix} - 2 \cdot g \begin{pmatrix} u_v \\ u_{f_y} \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} u_v \\ u_{f_y} - 0,01 \end{pmatrix}}{0,01^2} \\ &= \frac{142,286 - 2 \cdot (-0,0039) + (-142,177)}{0,01^2} \\ &= +1166,4\end{aligned}$$

Partielle, gemischte Ableitung nach der Windgeschwindigkeit v und nach der Streckgrenze f_y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u_v \cdot \partial u_{f_y}} &\approx \frac{g \begin{pmatrix} u_v + 0,01 \\ u_{f_y} + 0,01 \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} u_v - 0,01 \\ u_{f_y} + 0,01 \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} u_v + 0,01 \\ u_{f_y} - 0,01 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} u_v - 0,01 \\ u_{f_y} - 0,01 \end{pmatrix}}{4 \cdot 0,01 \cdot 0,01} \\ &= \frac{-679,121 - 959,590 - (-963,585) + 675,126}{4 \cdot 0,01 \cdot 0,01} \\ &= 0\end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen und die gemischte Ableitung werden zur Matrix zusammengefasst:

$$\underline{B}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial u_v^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial u_v \cdot \partial u_{f_y}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u_v \cdot \partial u_{f_y}} & \frac{\partial^2 g}{\partial u_{f_y}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41040,7 & 0 \\ 0 & +1166,4 \end{bmatrix}$$

Im dritten Arbeitsschritt wird die Matrix \underline{B}_u ins v -Koordinatensystem transformiert. Hierzu wird zunächst die Transponierte der Drehmatrix \underline{D}^T mit \underline{B}_u multipliziert. Das Produkt wird anschließend mit der Drehmatrix \underline{D} multipliziert. Die Multiplikation $\underline{D}^T \cdot \underline{B}_u \cdot \underline{D} = \underline{B}_v$ zeigt das folgende Falk-Schema (z.B. $-41040,66 \cdot (+0,9853257) + 0 \cdot (-0,1707) = -40438,4$):

		-41040,7	0		+0,9853	+0,1707
		0	+1166,4		-0,1707	+0,9853
+0,9853	-0,1707	-40438,4	-199,1		-39811,0	-7098,4
+0,1707	+0,9853	-7005,0	+1149,3		-7098,4	-63,3

$$\underline{B}_v = \underline{D}^T \cdot \underline{B}_u \cdot \underline{D} = \begin{bmatrix} -39811,0 & -7098,4 \\ -7098,4 & -63,3 \end{bmatrix}$$

Für den vierten Arbeitsschritt, die Lösung der charakteristischen Gleichung, wird die Matrix \hat{B}_v benötigt. Diese entsteht, indem von \underline{B}_v die erste Zeile und die erste Spalte gestrichen wird. Da für den zweidimensionalen Fall des Bsp. (zwei Variablen) die Matrix \underline{B}_v nur die Größe 2×2 hat, entartet \hat{B}_v zu einer Zahl:

$$\hat{B}_v = -63,3$$

Neben der Matrix \hat{B}_v geht die erste partielle Ableitung nach der Variable v_1 in die charakteristische Gleichung ein. Der Vektor der ersten partiellen Ableitungen am Bemessungspunkt im u-Koordinatensystem ist bekannt und kann der letzten Zeile der Tab. 6.1 entnommen werden: $\frac{\partial g}{\partial u_1} = \frac{\partial g}{\partial u_v} = -82141$ und $\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial g}{\partial u_{f_y}} = +14229$. Die Drehmatrix \underline{D}^T wird nun mit dem Vektor der ersten partiellen Ableitungen im u-Koordinatensystem $\nabla g(u)$ multipliziert:

	-82141
	+14229
+0,9853 -0,1707	-83365
+0,1707 +0,9853	0

Nach der Transformation (Drehung) liegt der Vektor der ersten partiellen Ableitungen im v-Koordinatensystem $\nabla g(v)$ vor:

$$\nabla g(v) = \underline{D}^T \cdot \nabla g(u) = \begin{pmatrix} -83365 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die charakteristische Gleichung wird nur das erste Element des Vektors $\nabla g(v)$, also $\frac{\partial g}{\partial v_1}$, benötigt. Die Einheitsmatrix E entartet aufgrund der Größe 1×1 ebenfalls zu einer Zahl: 1.

$$\det \left(\frac{\hat{B}_v}{\frac{\partial g}{\partial v_1}} - \kappa \cdot E \right) = \det \left(\frac{-63,3}{-83365} - \kappa \cdot 1 \right)$$

Durch Umstellen der charakteristischen Gleichung berechnet sich die Krümmung des Grenz-zustands im Bemessungspunkt zu:

$$\kappa = \frac{-63,3}{-83365} = +0,000759$$

Die Krümmung ist positiv, d.h. es liegt der konvexe Fall nach Abb. 6.4 vor. Die Versagenswahrscheinlichkeit nach SORM-Näherung wird etwas größer als die Versagenswahrscheinlichkeit

nach FORM-Näherung sein. Im fünften Arbeitsschritt sind die Funktionswerte $\Phi(-\beta)$ und $\varphi(+\beta)$ zu berechnen:

$$\Phi(-3,31) = 4,66 \cdot 10^{-4}$$

und

$$\varphi(+3,31) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{3,31^2}{2}\right) = 1,67 \cdot 10^{-3}$$

Im sechsten Arbeitsschritt werden beide Funktionswerte und die Krümmung

$$\kappa = +0,000759$$

in den Korrekturfaktor zur Verbesserung der FORM-Lösung zur SORM-Lösung eingesetzt. Der Korrekturfaktor ist allgemein ein Produkt aus Einzelfaktoren. Die Zahl der Einzelfaktoren ist so hoch wie die Zahl der Krümmungen. Im Fall von zwei Variablen ergibt sich nur eine Krümmung, so dass auch der Korrekturfaktor aus nur einem Einzelfaktor besteht:

$$P_{f,D}^{SORM} = \Phi\left(-\beta_D^{FORM}\right) \cdot \left(1 - \frac{\varphi\left(\beta_D^{FORM}\right)}{\Phi\left(-\beta_D^{FORM}\right)} \cdot \kappa\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_{f,D}^{SORM} = 4,66 \cdot 10^{-4} \cdot \left(1 - \frac{1,67 \cdot 10^{-3}}{4,66 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,000759\right)^{-\frac{1}{2}} = 4,66 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0014 \approx 4,67 \cdot 10^{-4}$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit nach SORM-Näherung ist aufgrund des beinahe geradlinigen Verlaufs des Grenzzustands nur unwesentlich (0,14%) größer als die FORM-Näherung. Mit Hilfe der Umkehrfunktion der Standardnormalverteilung kann aus der Versagenswahrscheinlichkeit nach SORM-Näherung auch wieder ein Zuverlässigkeitsindex β_D^{SORM} berechnet werden:

$$\beta_D^{SORM} = -\Phi^{-1}\left(4,67 \cdot 10^{-4}\right) = 3,31 \approx \beta_D^{FORM}$$

Wegen etwa gleich großer Versagenswahrscheinlichkeiten ($P_{f,D}^{SORM} \approx P_{f,D}^{FORM}$) sind auch die Zuverlässigkeitsindizes etwa gleich groß ($\beta_D^{SORM} \approx \beta_D^{FORM}$). Auf die Berechnung der SORM-Lösungen für die übrigen Versagensmodi Zug, Abscheren, Lochleibung wird verzichtet. Auch bei diesen Versagensmodi verläuft der Grenzzustand etwa geradlinig, so dass kein wesentlicher Unterschied zwischen den FORM-Lösungen und den SORM-Lösungen zu erwarten ist.

Die wesentlichen Ergebnisse des Kapitels 7, die Zuverlässigkeitsindizes β und die Versagenswahrscheinlichkeiten P_f der vier Versagensmodi sowie die Sensitivitäten α sind nachfolgend in Matrixschreibweise angegeben:

$$\underline{\beta}^T = (\beta_D; \beta_Z; \beta_A; \beta_L)$$

$$\underline{\beta}^T = (3,31; 3,73; 3,51; 3,77)$$

$$\underline{P}_f^T = (P_{f,D}; P_{f,Z}; P_{f,A}; P_{f,L})$$

$$\underline{P}_f^T = (4,66 \cdot 10^{-4}; 9,64 \cdot 10^{-5}; 2,21 \cdot 10^{-4}; 8,25 \cdot 10^{-5})$$

Auf eine Unterscheidung zwischen FORM- und SORM- Näherung und eine entsprechende Kennzeichnung wird wegen der im Bsp. etwa gleichen Werte verzichtet.

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{D,v} & \alpha_{Z,v} & \alpha_{A,v} & \alpha_{L,v} \\ \alpha_{D,fy} & \alpha_{Z,fy} & \alpha_{A,fy} & \alpha_{L,fy} \\ \alpha_{D,fu} & \alpha_{Z,fu} & \alpha_{A,fu} & \alpha_{L,fu} \\ \alpha_{D,fuA} & \alpha_{Z,fuA} & \alpha_{A,fuA} & \alpha_{L,fuA} \\ \alpha_{D,fuL} & \alpha_{Z,fuL} & \alpha_{A,fuL} & \alpha_{L,fuL} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} +0,9853 & +0,9928 & +0,9824 & +0,9986 \\ -0,1707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1197 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1870 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0529 \end{bmatrix}$$

Der Versagensmodus Druckversagen ist abhängig von der Streckgrenze, deshalb ist $\alpha_{D,fy} \neq 0$. Er ist jedoch unabhängig von z.B. der Abscherfestigkeit, deshalb ist $\alpha_{D,fuA} = 0$ usw. Alle Versagensmodi hängen von der Windgeschwindigkeit ab, deshalb sind alle $\alpha_{\dots,v} \neq 0$.

7 Zuverlässigkeitsindex eines Systems mehrerer Komponenten

Alle bislang durchgeführten Berechnungen fanden je Komponente statt. Ein Gittermast besteht jedoch aus einer Vielzahl an Stäben, die aufgrund verschiedener Modi (Druck, Zug, Abscheren, Lochleibung) versagen können. Jeder Eintritt eines Stabversagens, hervorgerufen durch einen der vier Versagensmodi, entspricht im sog. logischen Modell einem Komponentenversagen. Die Zahl der Tragwerkskomponenten übersteigt im Allgemeinen also die Zahl der Stäbe. Soll auf die Möglichkeit von Schnittkraftumlagerungen im Falle eines oder mehrerer Stabversagen bis zum Erreichen einer kinematischen Kette verzichtet werden, so tritt Systemversagen bereits bei Eintritt des ersten Komponentenversagens ein. Ein solches, pessimistisches logisches Modell heißt Ketten- oder Seriensystem, weil ein Systemversagen bereits durch Bruch eines „Kettengliedes“ ausgelöst wird. Diese Annahme ist zweckmäßig, weil kein in Teilen schadhaftes und reparaturbedürftiges Tragwerk in Kauf genommen wird. Sie wird auch für nachfolgende Berechnungen angewendet. Unser Bsp. lässt sich als Kettensystem, bestehend aus vier Kettengliedern veranschaulichen, sh. Abb. 7.1.

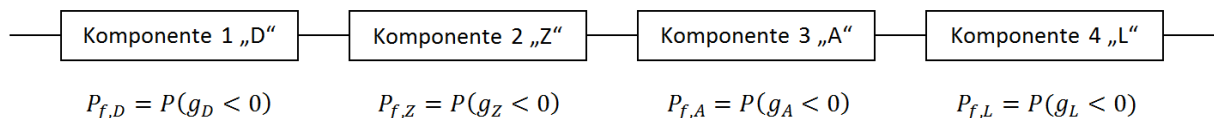


Abbildung 7.1: Kettensystem für Bsp. mit vier Komponenten

Hier ist zur Vereinfachung angenommen, dass die Verbindungsmittel in Zug- und Druckstab sich gleich verhalten, sie also unter gleicher Belastung versagen werden. Andernfalls müssten sechs statt vier Komponenten beachtet werden. Zum besseren Verständnis sind analog zu den Tab. 3.1, 3.2, 3.3 und 3.4 in der nachfolgenden Tab. 7.1 wieder beispielhafte Variablenrealisierungen angegeben. Ein Systemversagen liegt vor, wenn bei wenigstens einem der vier Modi die Beanspruchung die Beanspruchbarkeit übersteigt, die Grenzzustandsfunktion also einen negativen Wert annimmt. Überleben liegt nur vor, wenn alle vier Grenzzustandsfunktionen gleichzeitig einen positiven Wert aufweisen. Der Leser kann die fehlenden Werte vervollständigen.

Tabelle 7.1: Beispielhafte Variablenrealisierungen, Funktionswerte der Grenzzustandsfunktionen und Entscheidung, ob Überleben oder Versagen des Systems unter Druck-, Zug, Abscher- und Lochleibungsbeanspruchung vorliegt

Variablen- realisierung	f_y [N/mm ²]	f_u [N/mm ²]	f_{uA} [N/mm ²]	f_{uL} [N/mm ²]	v [N/mm ²]	$s(v)$ [N]	g_D [N]	g_Z [N]	g_A [N]	g_L [N]	Systemüberleben oder -versagen
1	267,0	371,5	276,3	560,2	37,93	135622	+38200	+68300	+22700	+507	Überleben
2	226,3	316,7	301,5	502,8	36,08	122715	+24600	+51200	+50000	-535	Versagen
3	297,5	382,7	285,0	607,7	39,58	147678	+46000	+15627	Grenze
4	236,9	365,3	305,6	705,9	38,73	141403	+59100	+30100	Überleben
5	263,7	302,3	223,5	694,4	43,35	177151	-5480
6	249,3	381,8	299,5	720,1	41,97	166051
7	287,0	351,1	325,7	683,3	45,13	191997
8	241,3	362,5	305,8	870,2	47,10	209125

Sollte die Systemversagenswahrscheinlichkeit eines Tragwerkes durch nur zwei Komponenten bestimmt werden, deren Grenzzustandsfunktionen außerdem von den gleichen beiden Variablen abhängig sind, kann die Systemversagenswahrscheinlichkeit anhand der Verbundverteilungsdichte-Glocke gemäß Abb. 7.2 veranschaulicht werden. Beide Grenzzustände, $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$, trennen vom gesamten Volumen der Glocke je einen Teilkörper ab. Das Volumen, das der Vereinigungskörper aus beiden Teilkörpern von der Glocke abtrennt, entspricht der Systemversagenswahrscheinlichkeit. Dies ist also die Wahrscheinlichkeit für Variablenrealisierungen, die entweder nur g_1 oder nur g_2 oder gleichzeitig g_1 und g_2 negativ werden lässt. Offensichtlich ist die Systemversagenswahrscheinlichkeit klein, wenn der Winkel zwischen β_1 und β_2 besonders klein ist. In diesem Fall ist der Durchdringungskörper beider Teilkörper sehr groß, d.h. es gibt viele Variablenrealisierungen (Wertepaare u_1, u_2), die g_1 und g_2 gleichzeitig negativ werden lassen. In diesem Fall liegt eine gute Korrelation zwischen den Sicherheitsmargen beider Komponenten vor.

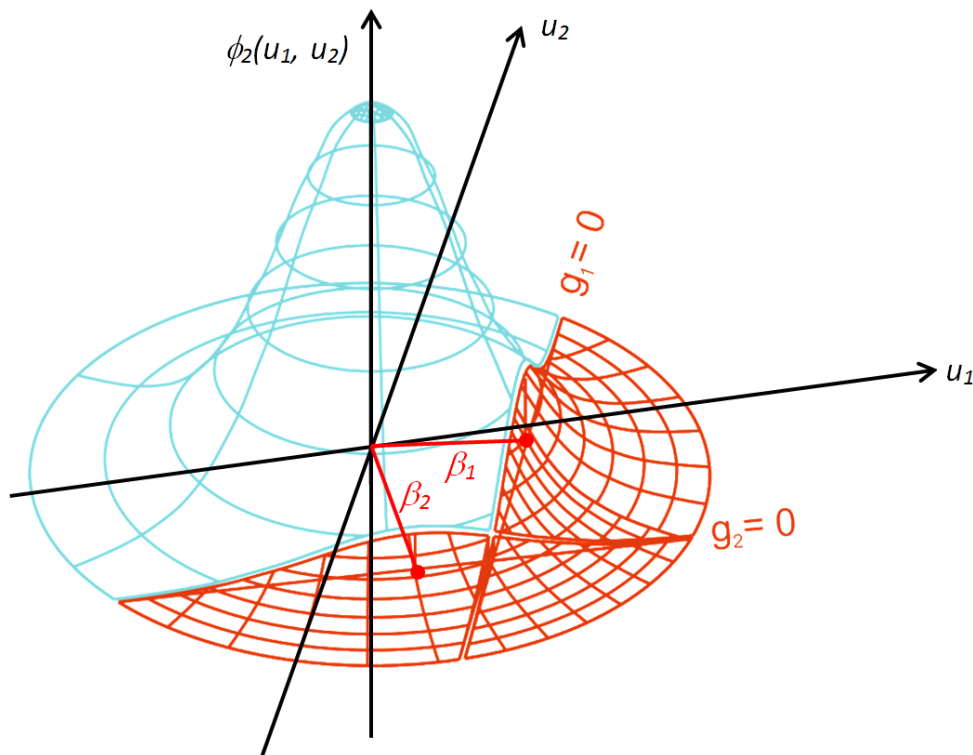


Abbildung 7.2: Veranschaulichung eines durch zwei Grenzzustände begrenzten Versagensraumes

Aus diesen Überlegungen lassen sich zunächst elementare Schranken ableiten: Die Systemversagenswahrscheinlichkeit ist sicher mindestens so hoch wie die größte Komponentenversagenswahrscheinlichkeit und sie ist sicher nicht größer als die Summe aller Komponentenversagenswahrscheinlichkeiten. Die untere Schranke missachtet die Komponentenversagenswahrscheinlichkeiten der übrigen Komponenten und liegt deshalb auf der unsicheren Seite. Die obere Schranke ignoriert „Durchdringungskörper“, zählt Versagensräume also mehrfach. Sie liegt

deshalb auf der sicheren Seite. Dies wird insbesondere bei großen Komponentenzahlen deutlich, denn ein einfaches Addieren aller Komponentenversagenswahrscheinlichkeiten kann zu Summen > 1 führen. Dies ist jedoch nicht möglich, da Wahrscheinlichkeiten stets reelle Zahlen im Intervall $[0; 1]$ sind.

$$\max \left\{ \begin{array}{l} P(g_1 < 0) \\ P(g_2 < 0) \\ \dots \\ P(g_n < 0) \end{array} \right\} \leq P_{f,Syst} \leq P(g_1 < 0) + P(g_2 < 0) + \dots + P(g_n < 0)$$

Für unser Vier-Komponenten-Bsp. ergibt sich:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} P(g_D < 0) \\ P(g_Z < 0) \\ P(g_A < 0) \\ P(g_L < 0) \end{array} \right\} \leq P_{f,Syst} \leq P(g_D < 0) + P(g_Z < 0) + P(g_A < 0) + P(g_L < 0)$$

$$\max \left\{ \begin{array}{l} 4,66 \cdot 10^{-4} \\ 9,64 \cdot 10^{-5} \\ 2,21 \cdot 10^{-4} \\ 8,25 \cdot 10^{-5} \end{array} \right\} \leq P_{f,Syst} \leq 4,66 \cdot 10^{-4} + 9,64 \cdot 10^{-5} + 2,21 \cdot 10^{-4} + 8,25 \cdot 10^{-5}$$

$$\underbrace{4,66 \cdot 10^{-4}}_{\text{Untere Schranke}} \leq P_{f,Syst} \leq \underbrace{8,66 \cdot 10^{-4}}_{\text{Obere Schranke}}$$

Bereits bei diesem kleinen Bsp. mit unrealistisch geringer Komponentenzahl liegen untere und oberer Schranke der Systemversagenswahrscheinlichkeit zu weit auseinander, um die Lösung als brauchbar anzusehen. Eine genauere Methode zur Berechnung der Systemversagenswahrscheinlichkeit bilden die sogenannten Ditlevsen-Schranken. An dieser Stelle wird nur die obere Schranke behandelt:

$$P_{f,Syst} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \sum_{j=1}^k P[g_j(\underline{x}) < 0] - \sum_{j=2}^k \max_{(b < j)} P[\{g_j(\underline{x}) < 0\} \cap \{g_b(\underline{x}) < 0\}] \end{array} \right\}$$

Diese besagt, dass zunächst die Komponentenversagenswahrscheinlichkeiten $P[g_j(\underline{x}) < 0]$ aller Komponenten j von 1 bis k addiert werden, also die obere elementare Schranke berechnet wird.

Von dieser Summe werden die Wahrscheinlichkeiten für ein paarweise gleichzeitiges Komponentenversagen subtrahiert. Bei einfacher Summation der Komponentenversagenswahrscheinlichkeiten wurden Durchdringungskörper (der Verbundverteilungsdichte-Glocke) über den Versagensräumen zweier Grenzzustände mehrfach mitgezählt, diese werden wieder abgezogen. Die obere Ditlevsen-Schranke nimmt keine über 1 liegenden Werte an.

Die Wahrscheinlichkeit für ein paarweise gleichzeitiges Komponentenversagen der Komponenten j und b , d.h. die Wahrscheinlichkeit für den Durchschnitt zweier Versagensereignisse, wird mit Hilfe der standardisierten Binormalverteilung berechnet:

$$P[\{g_j(\underline{x}) < 0\} \cap \{g_b(\underline{x}) < 0\}] = \Phi_2(-\beta_j, -\beta_b; \rho_{j,b})$$

Die obere Ditlevsen-Schranke nimmt dann die Form

$$P_{f,Syst} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \sum_{j=1}^k P[g_j(\underline{x}) < 0] - \sum_{j=2}^k \max_{(b < j)} \Phi_2(-\beta_j, -\beta_b; \rho_{j,b}) \end{array} \right.$$

an.

Für den Fall von vier Komponenten berechnet sich die obere Ditlevsen-Schranke als Kleinstwert aus 1 und:

$$\begin{aligned} P_{f,Syst} \leq & P[g_1(\underline{x}) < 0] + P[g_2(\underline{x}) < 0] + P[g_3(\underline{x}) < 0] + P[g_4(\underline{x}) < 0] \\ & - \max[\Phi_2(-\beta_2, -\beta_1; \rho_{2,1})] \\ & - \max[\Phi_3(-\beta_3, -\beta_1; \rho_{3,1}); \Phi_3(-\beta_3, -\beta_2; \rho_{3,2})] \\ & - \max[\Phi_4(-\beta_4, -\beta_1; \rho_{4,1}); \Phi_4(-\beta_4, -\beta_2; \rho_{4,2}); \Phi_4(-\beta_4, -\beta_3; \rho_{4,3})] \end{aligned}$$

Bei unserem Bsp. ist Komponente 1 = Druck, 2 = Zug, 3 = Abscheren und 4 = Lochleibung, somit

$$\begin{aligned} P_{f,Syst} \leq & P[g_D(\underline{x}) < 0] + P[g_Z(\underline{x}) < 0] + P[g_A(\underline{x}) < 0] + P[g_L(\underline{x}) < 0] \\ & - \max[\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D})] \\ & - \max[\Phi_2(-\beta_A, -\beta_D; \rho_{A,D}); \Phi_2(-\beta_A, -\beta_Z; \rho_{A,Z})] \\ & - \max[\Phi_2(-\beta_L, -\beta_D; \rho_{L,D}); \Phi_2(-\beta_L, -\beta_Z; \rho_{L,Z}); \Phi_2(-\beta_L, -\beta_A; \rho_{L,A})] \end{aligned}$$

Die enthaltenen Wahrscheinlichkeiten für Komponentenversagen infolge Druck, Zug, Abscheren und Lochleibung ($P[g_D(\underline{x}) < 0] = 4,66 \cdot 10^{-4}$ usw.) sind bekannt, ebenso die entsprechenden Zuverlässigkeitsindizes ($\beta_D = 3,31$ usw.). Es müssen noch die Funktionswerte der standardisierten Binormalverteilung Φ_2 berechnet werden. Hierfür werden die Korrelationskoeffizienten ρ zwischen den Sicherheitsmargen der vier Komponenten benötigt. Die Korrelationskoeffizienten in Matrixschreibweise (Korrelationsmatrix) berechnen sich durch Multiplikation der transponierten Sensitivitätsmatrix mit der Sensitivitätsmatrix:

$$\underline{\rho} = \underline{\alpha}^T \cdot \underline{\alpha}$$

$$\underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{D,D} & \rho_{D,Z} & \rho_{D,A} & \rho_{D,L} \\ \rho_{Z,D} & \rho_{Z,Z} & \rho_{Z,A} & \rho_{Z,L} \\ \rho_{A,D} & \rho_{A,Z} & \rho_{A,A} & \rho_{A,L} \\ \rho_{L,D} & \rho_{L,Z} & \rho_{L,A} & \rho_{L,L} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho} = \begin{bmatrix} +0,985 & -0,171 & 0 & 0 & 0 \\ +0,993 & 0 & -0,120 & 0 & 0 \\ +0,982 & 0 & 0 & -0,187 & 0 \\ +0,999 & 0 & 0 & 0 & -0,053 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +0,985 & +0,993 & +0,982 & +0,999 \\ -0,171 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,187 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,053 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho} = \begin{bmatrix} +1,0000 & +0,9782 & +0,9680 & +0,9839 \\ +0,9782 & +1,0000 & +0,9753 & +0,9914 \\ +0,9680 & +0,9753 & +1,0000 & +0,9810 \\ +0,9839 & +0,9914 & +0,9810 & +1,0000 \end{bmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit für ein gleichzeitiges Versagen infolge von z.B. Druck und Zug berechnet sich nun aus

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) = \Phi_2(-3,73, -3,31; +0,9782)$$

Die Funktionswerte $\Phi_2(-\beta_j, -\beta_b; \rho_{j,b})$ lassen sich entweder näherungsweise durch numerisches Integrieren mit

$$\Phi_2(-\beta_j, -\beta_b; \rho_{j,b}) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1-\rho_{j,b}^2}} \cdot \int_{-\infty}^{-\beta_b} \int_{-\infty}^{-\beta_j} \exp\left(-\frac{r_1^2 - 2 \cdot \rho_{j,b} \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2}{2 \cdot (1-\rho_{j,b}^2)}\right) dr_1 dr_2$$

$$\Phi_2(-\beta_j, -\beta_b; \rho_{j,b}) \approx \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1-\rho_{j,b}^2}} \cdot \sum_{-15}^{-\beta_b} \sum_{-15}^{-\beta_j} \exp\left(-\frac{r_1^2 - 2 \cdot \rho_{j,b} \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2}{2 \cdot (1-\rho_{j,b}^2)}\right) \Delta r_1 \Delta r_2$$

berechnen. Alternativ kann zur Vermeidung einer zweidimensionalen numerischen Integration der Funktionswert der standardisierten Binormalverteilung $\Phi_2(-\beta_j, -\beta_b; \rho_{j,b})$ mit

$$\Phi_2(-\beta_j, -\beta_b; \rho_{j,b}) \leq \begin{cases} \Phi(-\beta_j) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_b - \beta_j \cdot \rho_{j,b}}{\sqrt{1-\rho_{j,b}^2}}\right) + \Phi(-\beta_b) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_j - \beta_b \cdot \rho_{j,b}}{\sqrt{1-\rho_{j,b}^2}}\right) & \text{falls } \rho_{j,b} > 0 \\ \min \left\{ \begin{array}{l} \Phi(-\beta_j) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_b - \beta_j \cdot \rho_{j,b}}{\sqrt{1-\rho_{j,b}^2}}\right) \\ \Phi(-\beta_b) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_j - \beta_b \cdot \rho_{j,b}}{\sqrt{1-\rho_{j,b}^2}}\right) \end{array} \right\} & \text{falls } \rho_{j,b} \leq 0 \end{cases}$$

und

$$\Phi_2(-\beta_j, -\beta_b; \rho_{j,b}) \geq \begin{cases} \max \begin{cases} \Phi(-\beta_j) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_b - \beta_j \cdot \rho_{j,b}}{\sqrt{1 - \rho_{j,b}^2}}\right) \\ \Phi(-\beta_b) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_j - \beta_b \cdot \rho_{j,b}}{\sqrt{1 - \rho_{j,b}^2}}\right) \end{cases} & \text{falls } \rho_{j,b} \geq 0 \\ 0 & \text{falls } \rho_{j,b} < 0 \end{cases}$$

abgeschränkt werden. Für $\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) = \Phi_2(-3, 73, -3, 31; +0, 9782)$ ergibt sich wegen $\rho_{Z,D} > 0$ z.B. eine obere Schranke von

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \leq \Phi(-\beta_Z) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_D - \beta_Z \cdot \rho_{Z,D}}{\sqrt{1 - \rho_{Z,D}^2}}\right) + \Phi(-\beta_D) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_Z - \beta_D \cdot \rho_{Z,D}}{\sqrt{1 - \rho_{Z,D}^2}}\right)$$

$$\Phi_2(\dots) \leq \Phi(-3, 73) \cdot \Phi\left(-\frac{3, 31 - 3, 73 \cdot 0, 9782}{\sqrt{1 - 0, 9782^2}}\right) + \Phi(-3, 31) \cdot \Phi\left(-\frac{3, 73 - 3, 31 \cdot 0, 9782}{\sqrt{1 - 0, 9782^2}}\right)$$

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \leq \Phi(-3, 73) \cdot \Phi(+1, 63) + \Phi(-3, 31) \cdot \Phi(-2, 37)$$

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \leq 9, 64 \cdot 10^{-5} \cdot 0, 9478 + 4, 66 \cdot 10^{-4} \cdot 9, 08 \cdot 10^{-3}$$

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \leq 9, 56 \cdot 10^{-5}$$

und eine untere Schranke von

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \geq \max \left[\Phi(-\beta_Z) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_D - \beta_Z \cdot \rho_{Z,D}}{\sqrt{1 - \rho_{Z,D}^2}}\right); \Phi(-\beta_D) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_Z - \beta_D \cdot \rho_{Z,D}}{\sqrt{1 - \rho_{Z,D}^2}}\right) \right]$$

$$\Phi_2(\dots) \geq \max \left[\Phi(-3, 73) \cdot \Phi\left(-\frac{3, 31 - 3, 73 \cdot 0, 9782}{\sqrt{1 - 0, 9782^2}}\right); \Phi(-3, 31) \cdot \Phi\left(-\frac{3, 73 - 3, 31 \cdot 0, 9782}{\sqrt{1 - 0, 9782^2}}\right) \right]$$

$$\Phi_2(\dots) \geq \max [\Phi(-3, 73) \cdot \Phi(+1, 63); \Phi(-3, 31) \cdot \Phi(-2, 37)]$$

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \geq \max [9, 64 \cdot 10^{-5} \cdot 0, 9478; 4, 66 \cdot 10^{-4} \cdot 9, 08 \cdot 10^{-3}]$$

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \geq \max [9,14 \cdot 10^{-5}; 4,23 \cdot 10^{-6}]$$

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \geq 9,14 \cdot 10^{-5}$$

Durch numerisches Integrieren ergeben sich:

$$\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D}) \approx 9,62 \cdot 10^{-5}$$

$$\Phi_2(-\beta_A, -\beta_D; \rho_{A,D}) \approx 1,89 \cdot 10^{-4}$$

$$\Phi_2(-\beta_A, -\beta_Z; \rho_{A,Z}) \approx 8,69 \cdot 10^{-5}$$

$$\Phi_2(-\beta_L, -\beta_D; \rho_{L,D}) \approx 8,30 \cdot 10^{-5}$$

$$\Phi_2(-\beta_L, -\beta_Z; \rho_{L,Z}) \approx 7,10 \cdot 10^{-5}$$

$$\Phi_2(-\beta_L, -\beta_A; \rho_{L,A}) \approx 7,88 \cdot 10^{-5}$$

Einsetzen der Zwischenergebnisse in die Gleichung der oberen Ditlevsen-Schranke ergibt

$$\begin{aligned} P_{f,Syst} \leq & P[g_D(\underline{x}) < 0] + P[g_Z(\underline{x}) < 0] + P[g_A(\underline{x}) < 0] + P[g_L(\underline{x}) < 0] \\ & - \max [\Phi_2(-\beta_Z, -\beta_D; \rho_{Z,D})] \\ & - \max [\Phi_2(-\beta_A, -\beta_D; \rho_{A,D}); \Phi_2(-\beta_A, -\beta_Z; \rho_{A,Z})] \\ & - \max [\Phi_2(-\beta_L, -\beta_D; \rho_{L,D}); \Phi_2(-\beta_L, -\beta_Z; \rho_{L,Z}); \Phi_2(-\beta_L, -\beta_A; \rho_{L,A})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{f,Syst} \leq & 4,66 \cdot 10^{-4} + 9,64 \cdot 10^{-5} + 2,21 \cdot 10^{-4} + 8,25 \cdot 10^{-5} \\ & - \max [9,62 \cdot 10^{-5}] \\ & - \max [1,89 \cdot 10^{-4}; 8,69 \cdot 10^{-5}] \\ & - \max [8,30 \cdot 10^{-5}; 7,10 \cdot 10^{-5}; 7,88 \cdot 10^{-5}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{f,Syst} \leq & 8,66 \cdot 10^{-4} \\ & - 9,62 \cdot 10^{-5} \\ & - 1,89 \cdot 10^{-4} \\ & - 8,30 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$$P_{f,Syst} \leq 4,98 \cdot 10^{-4}$$

Die Systemversagenswahrscheinlichkeit des Vier-Komponenten-Bsp. nach Abb. 2.1 unter Windbelastung senkrecht zum Seil beträgt (höchstens) $P_{f,Syst} = 4,98 \cdot 10^{-4}$. Der zugehörige Zuverlässigkeitsindex des Systems beträgt (mindestens) $\beta_{Syst} = -\Phi^{-1}(4,98 \cdot 10^{-4}) = 3,29$.

8 Zusammenfassung

Trotz normgemäßer Bemessung erreicht das Vier-Komponenten-System gemäß Abb. 2.1 einen Zuverlässigkeitsindex von nur $\beta_{\text{Syst}} = 3,29$. Der Probabilistic Model Code erlaubt einen derartig kleinen Zuverlässigkeitsindex nur für Bauwerke, bei denen im Versagensfall nur mit geringen bis moderaten Schadensfolgen zu rechnen ist und deren Kosten für die Bereitstellung von Sicherheit die menschliche Gesellschaft relativ stark belasten. Zur Erzielung eines Zuverlässigkeitsindex von $\beta_{\text{Syst}} = 3,8$ wären größere Querschnitte der Stahlprofile und Verbindungsmittel notwendig. Hierbei ist allerdings auch zu beachten, dass für die Berechnung der Komponentenzuverlässigkeitsindizes und des Systemzuverlässigkeitsindex folgende pessimistischen Annahmen getroffen wurden:

- Es wurde angenommen, dass die statisch für die Wand senkrecht zur Leitung ungünstigste Windrichtung mit Sicherheit (also einer Auftretenshäufigkeit von 1,0) eintritt. Tatsächlich müssen die Windrichtung mit der maximalen Windgeschwindigkeit und die statisch für ein Tragwerk ungünstigste Windrichtung nicht unbedingt zusammenfallen.
- Es wurden Stäbe untersucht, die durch reine Windbelastung beansprucht werden. Dies ist bei Stäben der Wand senkrecht eines Tragmastes zwar tatsächlich der Fall, andere Stäbe werden jedoch durch eine Mischung aus mehreren Einwirkungen beansprucht. Die einzelnen Einwirkungen dieser Mischung (Wind, Eis, Horizontalzug, Eigengewicht) erreichen nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit gleichzeitig ihre Höchstwerte.
- Für die Prognose der Unterschreitenswahrscheinlichkeiten der Windgeschwindigkeit wurde ein Verteilungstyp (Gumbel) ohne Obergrenze verwendet. Tatsächlich weist die Windgeschwindigkeit jedoch eine natürliche Obergrenze auf, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,0 unterschritten oder maximal erreicht wird.
- Für die Prognose der Unterschreitenswahrscheinlichkeiten der Festigkeiten wurde ein Verteilungstyp (Lognormal) ohne positive Untergrenze verwendet. Aufgrund von Gütekontrollen und dem Aussortieren von Ausschuss dürfte eine Untergrenze jedoch existieren, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,0 überschritten oder maximal erreicht wird.
- Mit der Annahme eines Kettensystems als logischem Modell wurde unterstellt, dass bei Versagen der ersten Komponente unmittelbar Systemversagen eintritt. Aufgrund der (begrenzten) Möglichkeit von Lastumlagerungen führt nicht jedes Komponentenversagen zu einem Zusammenbruch, jedoch stets zu Reparaturbedarf.

Auch einige optimistische Annahmen wurden bei der Berechnung getroffen:

- Das System wurde auf nur vier mögliche Versagensmodi reduziert. Tatsächlich besteht ein Gittermast aus einer größeren Komponentenzahl, also Kettengliedern, die brechen könnten. Somit liegt der Zuverlässigkeitsindex des Systems tatsächlich deutlicher unter dem Kleinstwert aller Komponentenzuverlässigkeitsindizes, als dies bei dem betrachteten Vier-Komponentensystem der Fall ist.
- Es wurde unterstellt, dass ein Versagen der Stäbe ausschließlich durch die Einwirkung Wind ausgelöst werden kann. Tatsächlich ist ein Versagen der Stäbe auch unter anderen Einwirkungskombinationen denkbar. Die Versagenswahrscheinlichkeiten weiterer denkbarer Einwirkungskombinationen (z.B. Seilzugverminderung) sind zur Versagenswahrscheinlichkeit unter Windbelastung hinzuzuzählen, wenn sie nicht vernachlässigbar klein (also um Größenordnungen niedriger) sind.

Abschließend wird skizziert, wie sich Teilsicherheitsbeiwerte für ein semiprobabilistisches Sicherheitskonzept aus den Ergebnissen einer probabilistischen Berechnung (im Wesentlichen die Bemessungspunktkoordinaten) berechnen lassen. Hierfür soll für unser Vier-Komponentensystem (Druck, Zug, Abscheren, Lochleibung für ein Diagonalkreuz in der Wand senkrecht eines Tragmastes unter Wind senkrecht zur Leitung) ein Zuverlässigkeitsindex von $\beta_{\text{Syst}} = 3,8$ erreicht werden. Zunächst sind die Querschnitte der Stahlprofile und Verbindungsmittel mehr oder weniger stark soweit zu vergrößern, bis alle vier Komponentenzuverlässigkeitsindizes etwas oberhalb 3,8 liegen, so dass der Zuverlässigkeitsindex des Systems gerade 3,8 beträgt. Anschließend werden die neuen Bemessungspunktkoordinaten der vier Komponenten (Windgeschwindigkeiten und Festigkeiten) festgestellt und Verhältnisse zu vereinbarten charakteristischen Werten gebildet. Folgendes (Abb. 8.1) Vier-Komponenten-Kettensystem weist $\beta_{\text{Syst}} = 3,8$ und $P_{f,\text{Syst}} = 7,2 \cdot 10^{-5}$ auf:

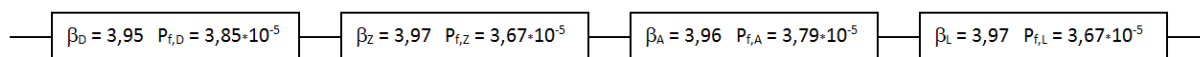


Abbildung 8.1: Vier-Komponenten-Kettensystem mit $\beta_{\text{Syst}} = 3,8$

Tab. 8.1 zeigt die für die Nachweisführung mit dem Ziel $\beta_{\text{Syst}} = 3,8$ erforderlichen Querschnitte und die erreichten Bemessungspunktkoordinaten.

Tabelle 8.1: Erforderliche Querschnitte, um $\beta_{\text{Syst}} = 3,8$ zu erzielen; erreichte Bemessungspunktkoordinaten

Komponente (Versagensmodus)	Querschnitt (Druck $\chi \cdot A_{eff}$) [mm ²]	Windgeschwindigkeit v [m/s] (u_v)	Streckgrenze f_y [N/mm ²] (u_{f_y})	Zugfestigkeit f_u [N/mm ²] (u_{f_u})	Abscherfestigkeit f_{uA} [N/mm ²] ($u_{f_{uA}}$)	Lochleibungsbeanspruchbarkeit f_{uL} [N/mm ²] ($u_{f_{uL}}$)
Druck	0,50 · 1775	49,87 (+3,90)	264,1 (-0,671)	— —	— —	— —
Zug	615	50,35 (+3,94)	— —	388,6 (-0,475)	— —	— —
Abscheren	710	49,77 (+3,89)	— —	— —	328,8 (-0,739)	— —
Lochleibung	267	50,63 (+3,96)	— —	— —	— —	904,9 (-0,210)

Auch andere Aufteilungen der vier Komponentenzuverlässigkeitsindizes wären denkbar. Jedoch darf keiner der vier Komponentenzuverlässigkeitsindizes unter 3,8 liegen. Vier etwa gleich hohe Komponentenzuverlässigkeitsindizes entsprechen der wirtschaftlichsten Bemessung. Die Berechnung von Teilsicherheitsbeiwerten aus den Koordinaten des Bemessungspunktes veranschaulicht Abb. 8.2. Es ist wichtig, dass der erreichte Zuverlässigkeitsindex der Komponente, deren Bemessungspunktkoordinaten für die Berechnung der Teilsicherheitsbeiwerte verwendet werden, genau mit dem angestrebten Zuverlässigkeitsindex zusammenfällt.

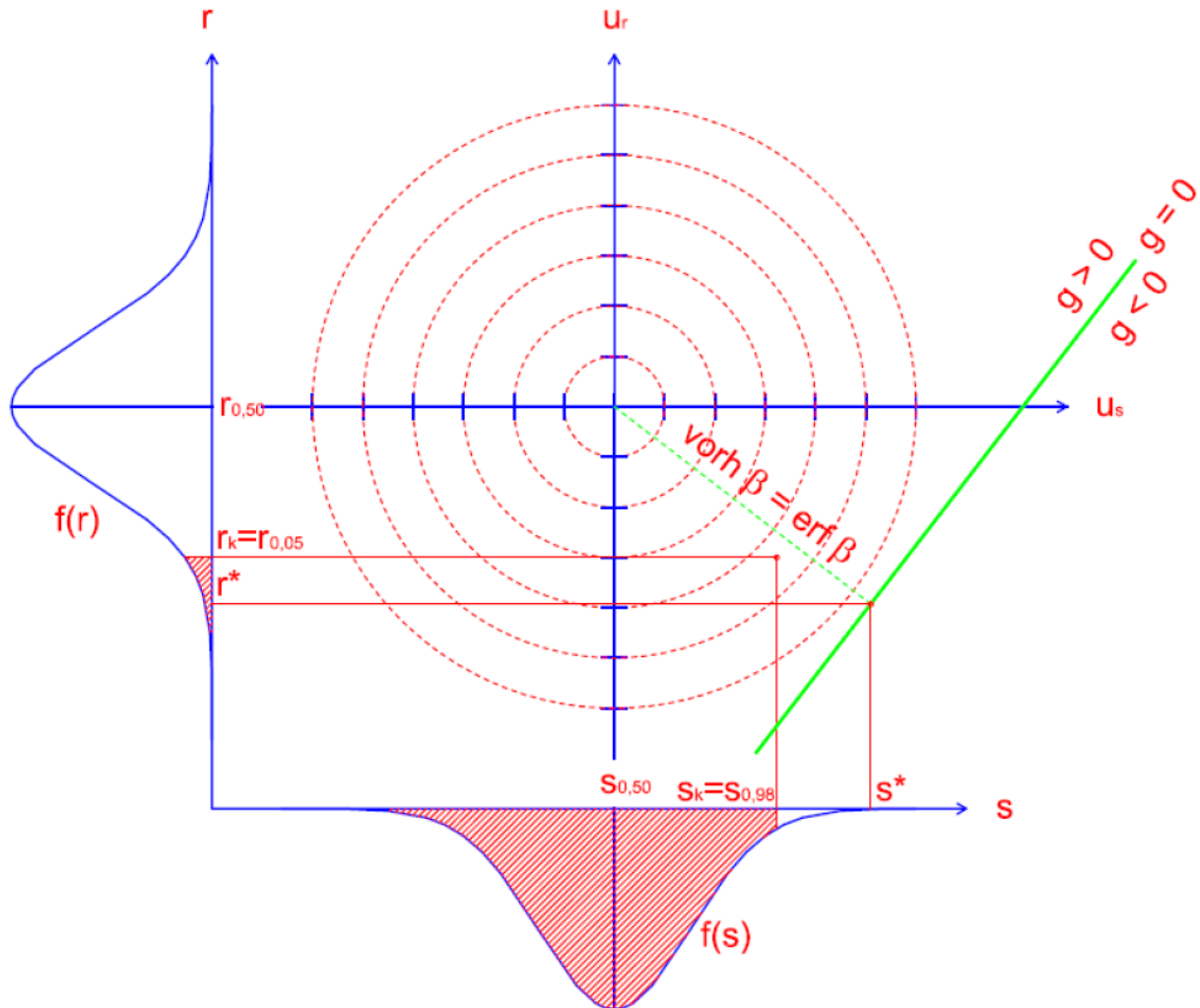


Abbildung 8.2: Berechnung von Teilsicherheitsbeiwerten aus den Koordinaten des Bemessungspunktes und vereinbarten charakteristischen Variablenrealisierungen

Der Bemessungspunkt weist in der Regel auf der Einwirkungsseite eine Realisierung oberhalb des vereinbarten, charakteristischen Quantils s_k (meist 0,98) auf. Um die Bemessungspunkt-Koordinate s^* semiprobabilistisch zu erreichen, muss die charakteristische 0,98-Realisierung mit einem über 1,0 liegenden Faktor vergrößert (multipliziert) werden. Dies ist der Teilsicherheitsbeiwert der Einwirkungsseite γ_s . Er berechnet sich aus dem Quotienten von s^* und s_k . Da

der Bemessungspunkt semiprobabilistisch tatsächlich nicht bestimmt wird, müssen Teilsicherheitsbeiwerte für den Geltungsbereich einer semiprobabilistischen Norm auf der sicheren Seite liegend vereinbart werden. Eine Kontrolle, ob die γ_S -fachen charakteristischen Einwirkungen $s_{0,98}$ tatsächlich den Bemessungspunkt erreichen, ist bei reiner semiprobabilistischer Berechnung nicht möglich. Wird der Teilsicherheitsbeiwert nicht auf die stochastische Variable selbst angewendet, für die der Bemessungspunkt bestimmt wurde, sondern auf eine mit der Variable in Zusammenhang stehende Größe, so sind in Zähler und Nenner der Gleichung für die Berechnung des Teilsicherheitsbeiwertes statt der Variablen (s^* und $s_{0,98}$) entsprechende Funktionen einzutragen. Dies ist zum Bsp. beim Wind der Fall: Die stochastische Variable ist die Windgeschwindigkeit v , der Teilsicherheitsbeiwert soll jedoch für den Staudruck q berechnet werden, der vom Quadrat der Windgeschwindigkeit und der Luftdichte abhängt.

Für den Staudruck q (Einwirkungsseite „S“) ergibt sich aus den Bemessungspunktkoordinaten des Druckstabes:

$$\gamma_S = \gamma_q = \frac{q(v^*)}{q(v_k)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot v^{*2}}{\frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_k^2} = \frac{v^{*2}}{v_k^2} = \frac{v^{*2}}{v_{0,98}^2} = \frac{\left(49,87 \frac{m}{s}\right)^2}{\left(32,57 \frac{m}{s}\right)^2} = 2,34$$

Der Bemessungspunkt weist in der Regel auf der Widerstandsseite eine Realisierung unterhalb des vereinbarten, charakteristischen Quantils r_k (meist 0,05) auf. Um die Bemessungspunktordinate r^* semiprobabilistisch zu erreichen, muss die charakteristische 0,05-Realisierung mit einem über 1,0 liegenden Faktor verkleinert (dividiert) werden. Dies ist der Teilsicherheitsbeiwert der Widerstandsseite γ_R .

Für die Streckgrenze f_y (Widerstandsseite „R“) ergibt sich aus den Bemessungspunktkoordinaten des Druckstabes:

$$\gamma_R = \gamma_{f_y} = \frac{f_{y,k}}{f_y^*} = \frac{f_{y,0.05}}{f_y^*} = \frac{243,8 \frac{N}{mm^2}}{264,1 \frac{N}{mm^2}} = 0,92$$

Dieser Wert liegt unter 1,0, weil der Bemessungspunkt oberhalb des 0,05-Quantils, jedoch unterhalb des Mittelwertes, liegt ($u_{f_y} = -0,671$, $\Phi(-0,671) = 0,251$, also 0,251-Quantil).

Teilweise wird auf der Widerstandsseite ein Satz an Teilsicherheitsbeiwerten festgelegt, um die Anzahl an Teilsicherheitsbeiwerten überschaubar zu halten. In diesem Fall wird zuerst die Widerstandsrealisierung am Bemessungspunkt festgestellt (z.B. durch pauschale Annahme bei $u_R^* = \alpha_R \cdot \beta = -0,8 \cdot 3,8 = -3,04$) und der charakteristische Widerstand durch Multiplikation mit dem einheitlich vereinbarten Teilsicherheitsbeiwert zurückgerechnet. In diesem Fall entspricht der charakteristische Widerstand nicht mehr unbedingt einem 0,05-Quantil.

Für die vier Komponenten (mit $\beta_{Komp} \approx 3,95$, damit $\beta_{Syst} = 3,8$) ergeben sich folgende Teilsicherheitsbeiwerte (Tab. 8.2)

Tabelle 8.2: Erforderliche Teilsicherheitsbeiwerte, um durch semiprobabilistische Nachweisführung $\beta_{Syst} = 3,8$ zu erzielen

Komponente (Versagensmodus)	Staudruck	Streckgrenze	Zugfestigkeit	Abscherfestigkeit	Lochleibungs- beanspruchbarkeit
	γ_q	γ_y	γ_u	$\gamma_{f_{uA}}$	$\gamma_{f_{uL}}$
Druck	2,34	0,92	–	–	–
Zug	2,39	–	0,93	–	–
Abscheren	2,33	–	–	0,92	–
Lochleibung	2,42	–	–	–	0,96

Die Teilsicherheitsbeiwerte der Einwirkungsseite liegen deutlich über dem „gewohnten“ Niveau, die Teilsicherheitsbeiwerte auf der Widerstandsseite deutlich darunter. Es ist zu berücksichtigen, dass für die Berechnung der Teilsicherheitsbeiwerte von der äußerst ungünstigen Annahme reiner Windbelastung ohne Berücksichtigung einer Obergrenze ausgegangen wurde, die zudem mit Sicherheit (Auftretenshäufigkeit der Windrichtung von 1, 0) aus der für das Tragwerk ungünstigsten Richtung erwartet wird. Dennoch ist bei dominanten klimatischen Einwirkungen in der Regel davon auszugehen, dass die durch probabilistische Nachweisführung mit dem Ziel $\beta_{Syst} = 3,8$ berechneten Bemessungspunktkoordinaten etwa 1,5-fach so hoch sind, wie bei semiprobabilistischer Nachweisführung vermutet. Das gilt gleichermaßen für Einwirkung und Widerstand. Diese Diskrepanz ist auf die Vereinbarung fester Sensitivitäten für semiprobabilistische Nachweisführung in DIN EN 1990 zurückzuführen, die den Bemessungspunkt i.d.R. bei $u_S^* = \alpha_S \cdot \beta = 0,7 \cdot 3,8 = +2,66$ und $u_R^* = \alpha_R \cdot \beta = -0,8 \cdot 3,8 = -3,04$ vermuten. Diese Vereinbarung trifft für überwiegend wind- und eisbeanspruchte (hohe Streuung) Stahltragwerke (geringe Streuung) nicht zu. Die zweite Option fest vereinbarter Sensitivitäten in DIN EN 1990 ($u_S^* = \alpha_S \cdot \beta = 1,0 \cdot 3,8 = +3,8$ und $u_R^* = \alpha_R \cdot \beta = -0,4 \cdot 3,8 = -1,52$) wäre angemessener. Auf jeden Fall ist festzustellen, dass zur Einhaltung einer angemessenen Zuverlässigkeit eine globale Sicherheit von etwa $\gamma = \gamma_S \cdot \gamma_R = 2,1$ erforderlich ist. Diese kann im Falle linear-elastischer Berechnung nach Theorie erster Ordnung weitgehend beliebig zwischen Einwirkung und Widerstand aufgesplittet werden. DIN 1045:1988-07 forderte z.B. eine globale Sicherheit von $\gamma = 2,1$ für den Fall von (unangekündigtem) Betonbruch und setzte diese komplett auf der Widerstandsseite (zul σ) an.

Bei der Festlegung von Teilsicherheitsbeiwerten in einer technischen Norm sollten folgende Aspekte beachtet werden:

- Sie müssen für alle Anwendungsbereiche auf der sicheren Seite liegen.

-
- Sie sollten an die unterschiedlich stark streuenden Variablen angepasst sein, um nicht unwirtschaftlich zu bemessen (starke Streuungen erfordern hohe Teilsicherheitsfaktoren und umgekehrt).
 - Sie sollten die Systemgröße berücksichtigen, da bei hoher Komponentenzahl die Einzelkomponente etwas zuverlässiger sein muss, als das für das Gesamtsystem angestrebte Maß.
 - Die Anzahl an Teilsicherheitsbeiwerten sollte nicht zu groß werden, damit die Norm übersichtlich bleibt.
 - Evtl. kann bei ausreichender Vorwarnzeit (Ankündigung eines Versagens durch große Verformungen) ein kleinerer Zuverlässigkeitsindex angesetzt werden, als bei unangekündigtem Versagen.
 - Im Falle linearelastischer Berechnung nach Theorie erster Ordnung können Teilsicherheitsbeiwerte auch anders (als entsprechend des Verhältnisses von Bemessungspunktordinate und charakteristischem Wert) zwischen Einwirkung und Widerstand gesplittet werden: Bei kleiner gewähltem γ_S muss γ_R entsprechend größer sein. Bei nichtlinearer Berechnung mit Vorverformung ist dies unzulässig, weil die Auswirkungen im Tragwerk (Spannung in einer Querschnittsfaser) sich nicht proportional zur Einwirkung verhalten.
 - Für die Nachweisführung sind letztlich die Bemessungswerte von Einwirkungen und Widerständen entscheidend (also Produkte oder Quotienten von charakteristischen Werten und Teilsicherheitsbeiwerten). Die Norm muss eine Kopplung zwischen charakteristischen Werten und Teilsicherheitsbeiwerten aufweisen, damit Teilsicherheitsbeiwerte auf die charakteristischen Werte angewendet werden, für die sie ausgelegt sind (ein γ_S -Wert, der für $s_{0,98}$ berechnet wurde, darf z.B. nicht auf das kleinere $s_{0,90}$ angewendet werden).

Literaturverzeichnis

- [1] Bartsch, Hans-Jochen: *Taschenbuch mathematischer Formeln*, München/Wien, Carl Hanser Verlag, 2001.
- [2] Haldimann, Matthias: *Zuverlässigkeitsbasierte Normenkalibrierung zur Ermittlung von Sicherheitsbeiwerten der neuen Schweizer Stahlbaunorm SIA 263*, Diplomarbeit ETH Zürich, 2002.
- [3] Klingmüller, Oswald; Bourgund, Ulrich: *Sicherheit und Risiko im Konstruktiven Ingenieurbau*, Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg&Sohn, 1992.
- [4] Mix, Matthias: *Probabilistische Nachweisführung von Stahlgittermasten im Freileitungsbau*, Diss. Universität Duisburg-Essen, 2010.
- [5] Möller, Bernd: *Stochastik: Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken*, Studienmaterial der TU Dresden, 1998.
- [6] Norm DIN 1055-100: *Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln*, Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, Beuth Verlag, 2001.
- [7] Norm DIN EN 1990: *Eurocode: Grundlagen der Tragwerksplanung; Deutsche Fassung: EN 1990:2010*, Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, Beuth Verlag, 2010.
- [8] Norm DIN EN 1993-1-1: *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung: EN 1993-1-1:2005*, Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, Beuth Verlag, 2005.
- [9] Norm DIN EN 50341-1: *Freileitungen über AC 45 kV; Teil 1: Allgemeine Anforderungen - Gemeinsame Festlegungen; Deutsche Fassung: EN 50341-1:2001*, Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, Beuth Verlag, 2002.
- [10] Norm DIN EN 50341-3-4: *Freileitungen über AC 45 kV; Teil 3: Nationale Normative Festlegungen für Deutschland; Deutsche Fassung: EN 50341-3-4:2001 und Änderungen 2006-10, 2008-01, 2009-04*, Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, Beuth Verlag, 2009.
- [11] Norm IEC 60826 Ed 3.0: *Design criteria of overhead transmission lines*, International Electrotechnical Commission, Berlin, VDE - Verlag, 2003.

-
- [12] Norm Probabilistic Model Code: *Probabilistic Model Code Part 1 - Basis of Design, 12th draft*, Joint Committee on Structural Safety JCSS-OSTL/DIA/VROU-10-11-2000.
- [13] Petersen, Christian: *Stahlbau*, Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg&Sohn, 1993.
- [14] Plate, Erich J.: *Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure*, Berlin, Ernst&Sohn, 1993.
- [15] Rackwitz, Rüdiger: *Zuverlässigkeit und Lasten im konstruktiven Ingenieurbau, Teil I: Zuverlässigkeitstheoretische Grundlagen*, Skripten zur Vorlesung „Zuverlässigkeit und Lasten im konstruktiven Ingenieurbau“ an der TU München, 1993-2006.
- [16] Schneider, J.: *Sicherheit und Zuverlässigkeit im Bauwesen*, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 1994.
- [17] Schuëller, Gerhart I.: *Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken*, Berlin/München, Ernst&Sohn, 1981.
- [18] Spaethe, Gerhard: *Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen, 2. Auflage*, Wien/New York, Springer - Verlag, 1992.
- [19] Straub, Daniel: *Zuverlässigkeit und Lastannahmen*, Skripten zur Vorlesung „Einführung in das Risikomanagement“ an der TU München, 2009-2010.
- [20] Thierauf, Georg: *Statistische Kennwerte für Widerstandsgrößen für die probabilistische Berechnung von Stahlgittermasten mit dem Programmsystem P144*, Essen, 03.12.2010.
- [21] Zilch, K.; Diederichs, C.J.; Katzenbach, R. (Hrsg.): *Handbuch für Bauingenieure*, Berlin/Heidelberg/New York, Springer - Verlag, 2002.