Übungen zur Symmetrie und Gruppentheorie in der Chemie (WiSe 2016/17)

Übungsblatt 1

Thema: Abstrakte Gruppentheorie

1) Prüfen Sie, ob die angegebenen Mengen bezüglich der angegebenen Verknüpfungsrelation eine Gruppe bilden (Assoziativität sei vorausgesetzt):

   (a) Elemente: 0,1,...N; Verknüpfung=Addition (modulo N)

   (b) Elemente: “wahr”, “falsch”; Verknüpfung=nichtexklusives Oder

   (c) Elemente: “wahr”, “falsch”; Verknüpfung=exklusives Oder

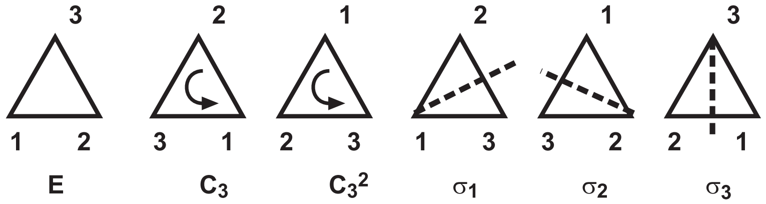
   (d) Elemente: E,C_2; Verknüpfung=Hintereinanderausführung

   (e) Elemente: 2^a , $a \in \mathbb{Z}$; Verknüpfung=Multiplikation

   (f) Elemente: Alle reellen Zahlen; Verknüpfung=Multiplikation

   (g) Elemente: Alle von Null verschiedenen reellen Zahlen; Verknüpfung=Multiplikation

2) Bestimmen Sie für die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks, $C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$,



(Die Abbildung zeigt die Position der Ecken *nach* Ausführung der Symmetrieoperation. Die Symmetrieelemente bleiben ortsfest.)

   (a) die Multiplikationstafel (Gruppentafel),

   (b) die Untergruppen,

   (c) die Klassen konjugierter Elemente.

3) Bilden Sie die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks (siehe 2) auf die folgenden drei Mengen von Matritzen ab

$$M_1 = \{(1)\}$$

$$M_2 = \{(1), (-1)\}$$

$$\begin{aligned} M_3 \quad = \quad & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \right\} \\ & \alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ & \beta = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Welche Zuordnung treffen Sie? Welche Eigenschaft haben die Matrizen gemeinsam, die Sie auf konjugierte Elemente abgebildet haben?

4) Beweisen Sie folgendes Theorem: In einer Abelschen Gruppe bildet jedes Element eine Klasse für sich.

5) Stellen Sie eine Multiplikationstafel für eine Gruppe der Ordnung 5 auf. Welche Eigenschaften besitzt die Gruppe? Nennen Sie ein konkretes Beispiel für eine dieser Gruppen.