

## Wirkungsquerschnitt für Lorenz-Mie-Streuung

Berechnungen des totalen Wirkungsquerschnitts für Lorenz-Mie-Streuung an Wassertropfen (Brechungsindex  $n = 1.33$ ). Formeln dazu der Literatur entnommen und in einem Maple-Arbeitsblatt zusammengefasst.

Eine ebene elektromagnetische Welle werde an einer dielektrischen Kugel (Radius  $R$ , Brechungsindex  $n$ ) gestreut. Der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess wurde erstmals 1890 von *L. Lorenz* berechnet, später gelangte *G. Mie*<sup>1</sup> unabhängig von Lorenz zum gleichen Ergebnis. Die Rechnungen machen Gebrauch von der Partialwellenmethode, sie sollen hier nicht nachvollzogen werden. Das Ergebnis lässt sich wie folgt zusammenfassen: Der (totale) Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch

$$(1) \quad \sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (|a_l|^2 + |b_l|^2),$$

das heißt, durch eine Reihenentwicklung nach den Beiträgen, mit denen die Partialwellen in ihm vertreten sind. Dementsprechend sind  $a_l$  und  $b_l$  die Partialwellenkoeffizienten der gestreuten Welle. Mit

$$(2) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ist die Wellenzahl der einlaufenden Welle bezeichnet ( $\lambda =$  Wellenlänge). Die Partialwellenkoeffizienten ergeben sich aus der Bedingung, dass die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke an der Oberfläche der Kugel stetig vom Kugellinneren zum Außenraum übergehen. Sie lauten<sup>2</sup>

$$(3) \quad a_l = \frac{\psi_l(x) \psi_l'(nx) - n \psi_l(nx) \psi_l'(x)}{\xi_l(x) \psi_l'(nx) - n \psi_l(nx) \xi_l'(x)}$$
$$b_l = \frac{\psi_l(x) n \psi_l'(nx) - \psi_l(nx) \psi_l'(x)}{\xi_l(x) n \psi_l'(nx) - \psi_l(nx) \xi_l'(x)}$$

Dabei ist  $x$  eine Abkürzung für den Größenparameter  $kR$ , also

$$(4) \quad x = kR.$$

Mit  $\psi$  und  $\xi$  sind die Riccati-Bessel-Funktionen

$$(5) \quad \psi_l(s) = s \cdot j_l(s)$$
$$\xi_l(s) = s \cdot h_l^{(1)}(s)$$

bezeichnet, die sich aus den sphärischen Bessel- bzw. Hankel-Funktionen<sup>3</sup>

$$(6) \quad j_l(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l \pm 1/2}(s)$$
$$h_l^{(1)}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l \pm 1/2}^{(1)}(s)$$

ergeben. Die Striche in (3) bedeuten die Ableitungen nach dem jeweiligen Argument.

Die oben aufgeführten Gleichungen habe ich in einem *Maple*-Arbeitsblatt<sup>4</sup> (Anhang) zusammengefasst und mit diesem den totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  berechnet. Abbildung 1 zeigt das Ergebnis für eine Kugel mit dem Brechungsindex  $n = 1,33$  (Wassertropfen). Aufgetragen ist  $\sigma$  (normiert auf den geometrischen Querschnitt  $\pi R^2$ ) als Funktion des Größenparameters  $kR$ . Der grobe Verlauf erinnert an eine abklingende Schwingung, obwohl es sich im vorliegenden Fall *nicht* um ein Bewegungsphänomen handelt. Eine Periode mit einer Länge von etwa  $\Delta(kR) = 10$  ist

erkennbar, deren Amplitude mit wachsendem  $kR$  abnimmt. Dieser „Schwingung“ ist ein „ripple“ von höherer Frequenz überlagert. In den Lecture Notes<sup>5</sup> wird der Verlauf des Wirkungsquerschnitts ausführlich diskutiert.

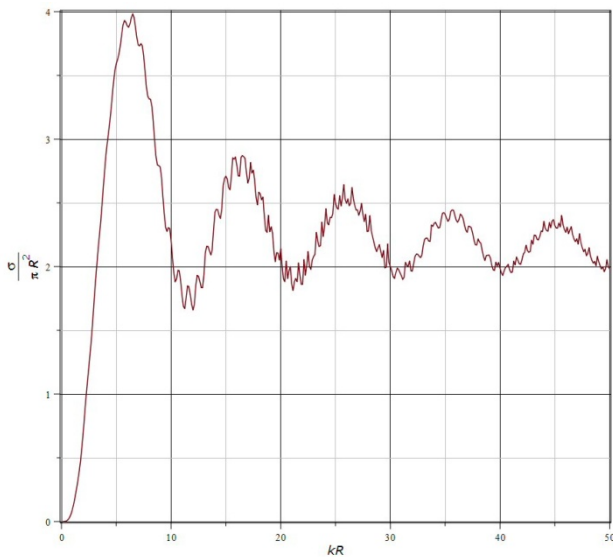


Abbildung 1 Totaler Wirkungsquerschnitt für Lorenz-Mie-Streuung an einem Wassertropfen (Brechungsindex  $n = 1.33$ ). Der Wirkungsquerschnitt ist auf den geometrischen Querschnitt  $\pi R^2$  bezogen und als Funktion des Größenparameters  $kR$  aufgetragen.  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda =$  Wellenlänge),  $R =$  Radius des Tropfens.

Die grobe Periode  $\Delta(kR) \cong 10$  lässt sich unter sehr vereinfachenden Annahmen erklären: Dazu betrachtet man nur die Streuung in Vorwärtsrichtung und nimmt an, dass der größte Beitrag dazu von Wellenzügen geliefert wird, die durch die Mitte der Kugel gehen. Diese Wellenzüge haben nach dem Durchlaufen der Kugel eine Phasendifferenz gegenüber den an der Kugel vorbeilaufenden Wellenzügen von  $2R/\lambda_n - 2R/\lambda_{n-1} = 2kR(n - 1)$ . Die Überlagerung der beiden Wellenzüge führt zu gegenseitiger Verstärkung, wenn die Phasendifferenz ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist. Der Abstand aufeinanderfolgender Maxima ist damit  $\Delta(kR) = \pi/(n - 1)$ . Für  $n = 1,33$  ergibt dies  $\Delta(kR) = 9,5$  – in grober Übereinstimmung mit dem Wert 10, der sich aus Abbildung 1 ablesen lässt.

In den Abbildungen 2 bis 10 ist der Wirkungsquerschnitt bei vorgegebenem (konstanten) Kugelradius  $R$  als Funktion der Lichtwellenlänge  $\lambda$  aufgetragen, wiederum für  $n = 1,33$  (Wasser). Es wurden einige charakteristische Radien ausgewählt. Sie sind in Tabelle 1, zusammen mit Bemerkungen zum Verlauf des Wirkungsquerschnitts, aufgeführt.

Tabelle 1

Abb.	$R/\mu\text{m}$	Bemerkungen
2	0,05	$R < \lambda_{\text{sichtbar}}$ , aber noch etwa 100mal größer als die Stickstoff- und Sauerstoffmoleküle der Luft. Übergang zur Rayleigh-Streuung $\sim \lambda^{-4}$
3	0,1	typische Tröpfchengröße bei dunstigem Wetter. Der blaue Anteil des sichtbaren Lichts wird bevorzugt gestreut, im direkten Licht erscheint die untergehende Sonne rot.
4	0,2	
5	0,3	
6	0,5	$R \cong \lambda_{\text{sichtbar}}$ , starke Streuung fast im gesamten Bereich des sichtbaren Lichts, sehr diesiges Wetter
7	1,0	starke Streuung im blauen und im roten Bereich des sichtbaren Lichts, vielleicht die Ursache für den „grünen Blitz“ beim Sonnenuntergang
8	2,0	typische Größe der Wassertropfen bei Nebel und in Wolken. Keine starke Abhängigkeit der Streuung von der Wellenlänge. Wolken erscheinen im klassischen Weiß.
9	5,0	
10	10,0	

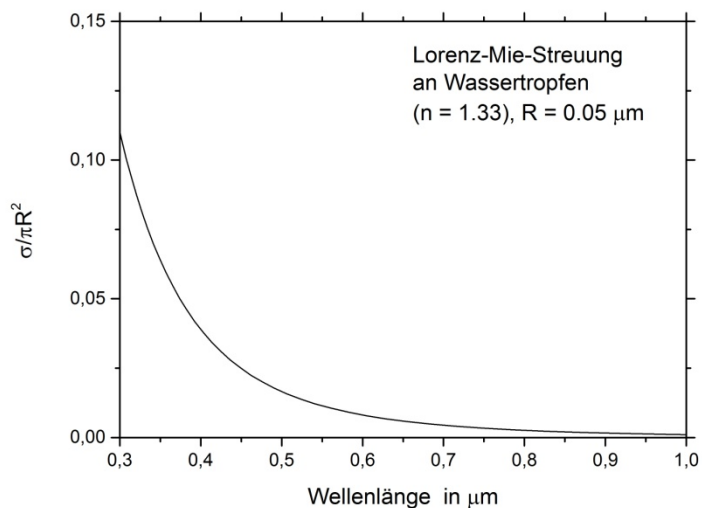


Abbildung 2  $R < \lambda_{\text{sichtbar}}$ , aber noch etwa 100mal größer als die Stickstoff- und Sauerstoffmoleküle der Luft. Übergang zur Rayleigh-Streuung  $\sim \lambda^{-4}$

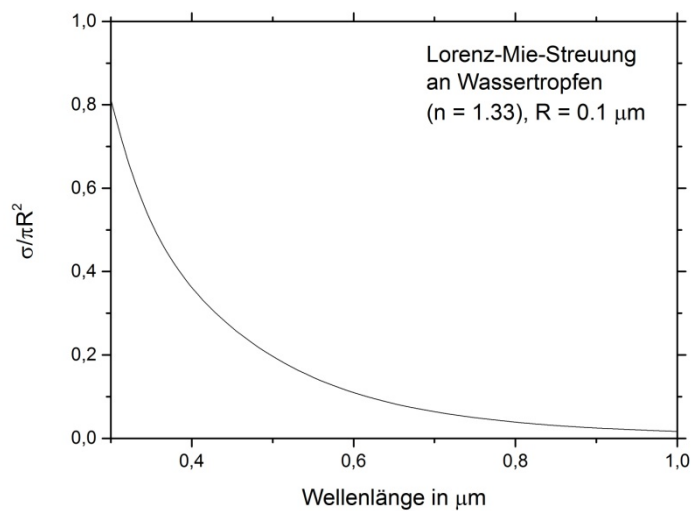


Abbildung 3 (siehe Unterschrift zu Abbildung 5)

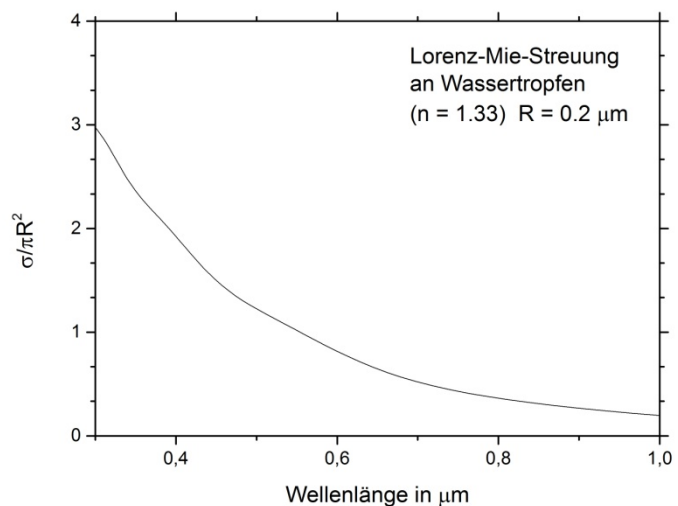


Abbildung 4 (siehe Unterschrift zu Abbildung 5)

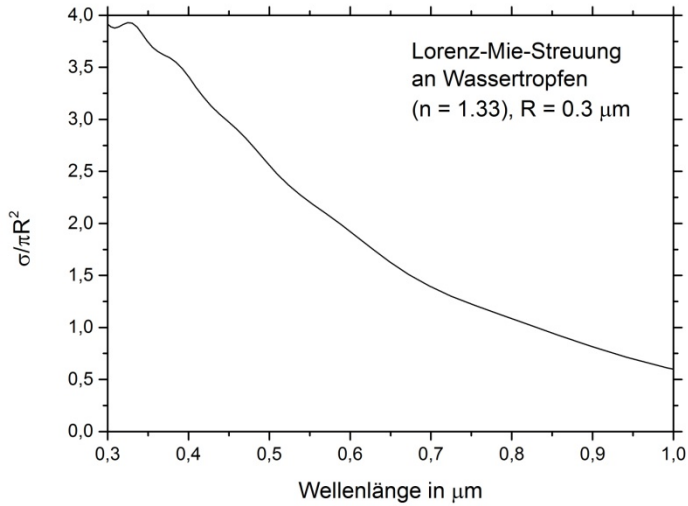


Abbildung 5 (auch zu Abbildungen 3 und 4)  $R = 0.1..0.3 \mu\text{m}$  sind typische Tröpfchengrößen in der Luft bei dunstigem Wetter. Blaues Licht wird bevorzugt gestreut, im direkten Licht erscheint die untergehende Sonne rot.

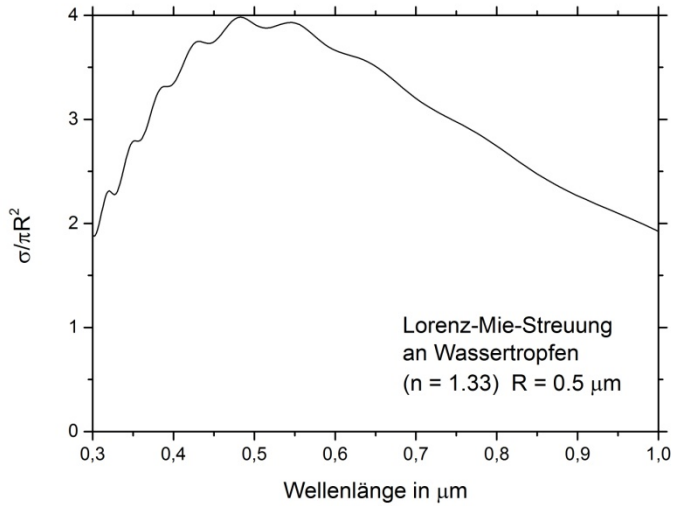


Abbildung 6 Streuung im gesamten Bereich des sichtbaren Lichts, diesiges Wetter

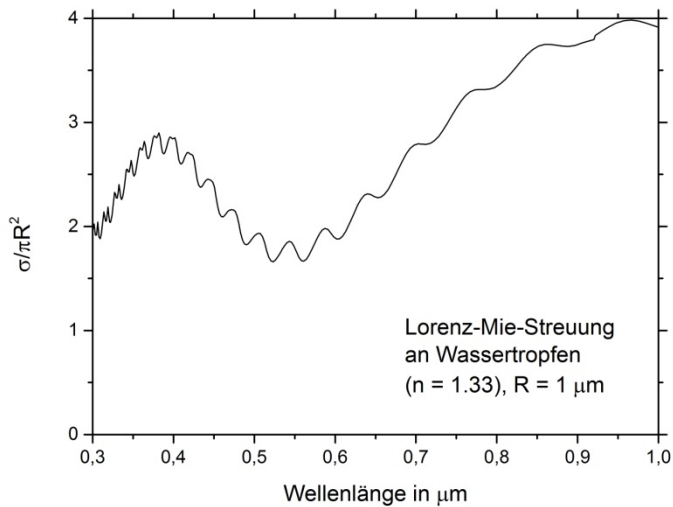


Abbildung 7 starke Streuung im blauen und im roten Bereich des sichtbaren Lichts, vielleicht die Ursache für den „grünen Blitz“ beim Sonnenuntergang

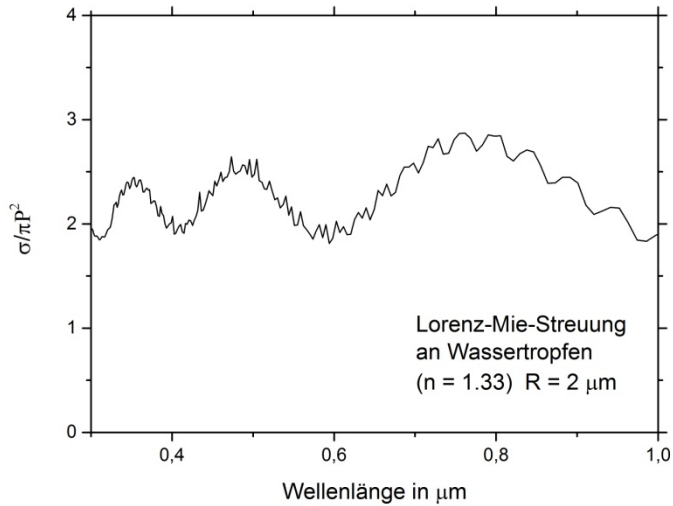


Abbildung 8 (siehe Unterschrift zu Abbildung 10)

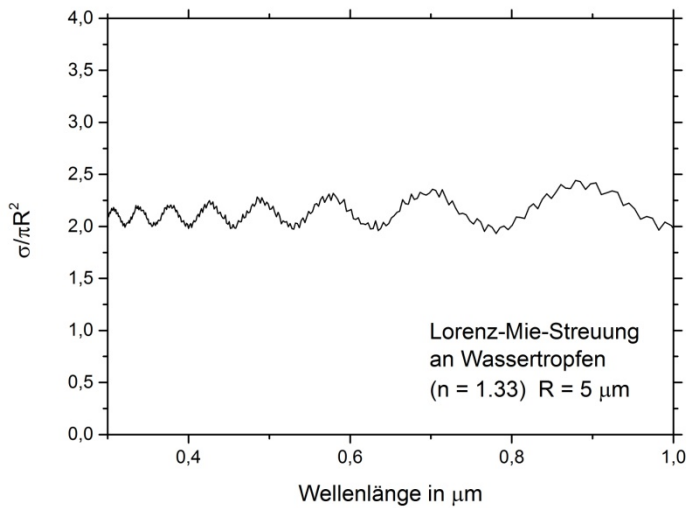


Abbildung 9 (siehe Unterschrift zu Abbildung 10)

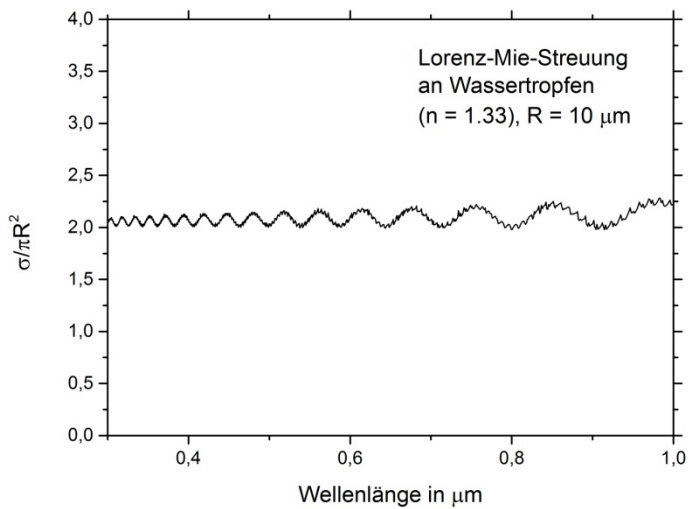


Abbildung 10  $R = 2..10 \mu\text{m}$  sind typische Tröpfchengrößen bei Nebel und in Wolken. Keine starke Abhängigkeit der Streuung von der Wellenlänge. Wolken erscheinen im klassischen Weiß.

## Anmerkungen

<sup>1</sup> Mie, Gustav: *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen*. [Annalen der Physik](#) Folge 4, Bd. 25, 1908, S. 377–445, [doi:10.1002/andp.19083300302](#).....  
siehe z. B. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013, S. 787, dort Kap. 21.5.2: *Mie Scattering from a Dielectric Sphere*.

Dass schon 1890 (18 Jahre vor Mie) der dänische Physiker Ludvig Lorenz zu denselben Ergebnissen wie Mie gelangte, war lange Zeit vergessen, ist aber heute gesichert.

<sup>2</sup> z. B. García-Cámara, Braulio: Ph.D. Thesis, Santander, 2010, Kap. 2 – Theoretical Overview [www.tesisenred.net/bitstream/handle/.../1de8.BGCcap2.pdf](#), siehe auch Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013, S. 787

<sup>3</sup> siehe mathematische Formelsammlungen, z. B. *L. Råde und B. Westergren, Springers Mathematische Formeln* [RadW 96], oder *I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew et al., Taschenbuch der Mathematik* [BroS 93]

<sup>4</sup> Die Anweisungen in dem *Maple*-Arbeitsblatt folgen im Wesentlichen dem Skript *Mie Scattering MSU P-A Welcome Page*, [https://web.pa.msu.edu/courses/2014fall/PHY842/.../lec2102.pdf](#)

<sup>5</sup> Lecture Notes, [evan.ucsd.edu/class/sioc251/Lecture\\_Notes.../mie\\_detailed.pdf](#)

## Anhang

Maple Arbeitsblatt. Ausgabe ist der Graph in Abbildung 1.

```
restart: with(LinearAlgebra): with(plots):

#Mie-Streuung, totaler Streuquerschnitt
#Sphärische Besselfunktionen (j, h1), siehe z.B. Rade-Westergren3

j := (n, x) -> sqrt(Pi/(2*x)) * BesselJ(n + 1/2, x):
h1 := (n, x) -> sqrt(Pi/(2*x)) * HankelH1(n + 1/2, x):

#Riccati-Bessel Funktionen (psi, xi) und Ableitungen (psiD, xiD)

psi := (l, s) -> s * j(l, s):
xi := (l, s) -> s * h1(l, s):
psiD := (l, s) -> (l + 1)*j(l, s) - s*j(l + 1, s):
xiD := (l, s) -> (l + 1)*h1(l, s) - s*h1(l + 1, s):

#Totaler Wirkungsquerschnitt (sigmaTot). Lx ist Liste der Stellen kR, LsigmaTot ist Liste der
#zugehörigen Werte von sigmaTot

NR := 1.33: lmax := 100: Lx := []: LsigmaTot := []: LsigmaRayleigh := []:
N := 400: x := 0:
for n from 1 to N do
  x := x + 1/8:
  for l from 1 to lmax do
    a[l, x] := evalf((psi(l, x)*psiD(l, NR*x) -
      NR*psi(l, NR*x)*psiD(l, x))/(xi(l, x)*psiD(l, NR*x) - NR*psi(l, NR*x)*xiD(l, x))):
    b[l, x] := evalf((psi(l, x)*NR*psiD(l, NR*x) -
      psi(l, NR*x)*psiD(l, x))/(xi(l, x)*NR*psiD(l, NR*x) - psi(l, NR*x)*xiD(l, x))):
  end do:
  Lx := [op(Lx), evalf(x)]:
  sigmaTot := (2/x^2)*sum((2*m + 1)*((abs(a[m, x]))^2 + ((abs(b[m, x]))^2)), m = 1..lmax):
  LsigmaTot := [op(LsigmaTot), sigmaTot]:
end do:

plot( Lx, LsigmaTot, 1..nops(Lx), axes = boxed, labeldirections = ["horizontal", "vertical"],
  labelfont = ["Verdana", 14], labels = [kR, sigma/(Pi*R^2)]):
```