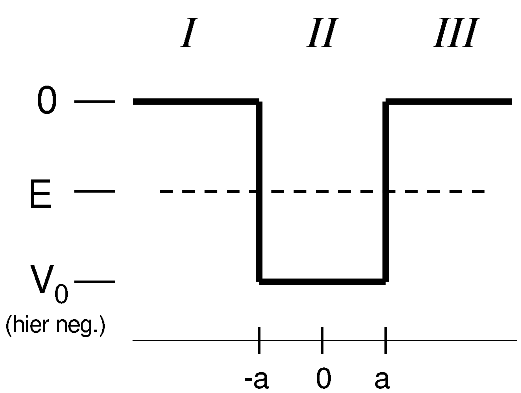
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2009
Übungsblatt 5, Ausgabe 27. 05. 2009
Abgabe am 03. Juni 2009
Besprechung in den Übungen am 03. und 05. 06. 2009

Aufgabe 23 (E): Eindimensionaler, endlich tiefer Potentialtopf (9 Punkte)

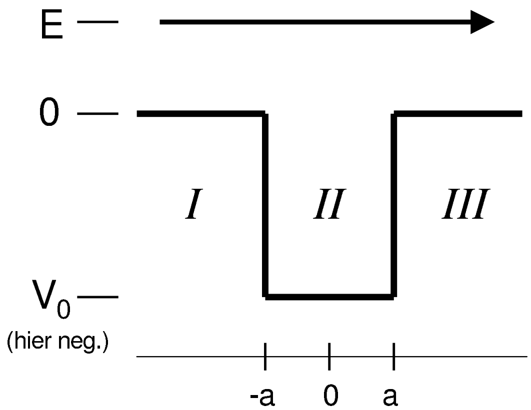


a) (4 P.) Betrachten Sie zunächst Energien im Potentialtopf. Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion in den Bereichen $x \leq -a$, $-a \leq x \leq a$ und $x \geq a$ mit oszillierendem bzw. exponentiell abklingendem Charakter. Bezeichnen Sie die Wellenzahl für $-a \leq x \leq a$ mit k und die Abklingkonstante außerhalb mit κ und leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen für die Wellenfunktion eine Gleichung her, die k und κ erfüllen müssen. Drücken Sie diese Gleichung auch mit E und V_0 aus.
Argumentieren Sie anhand einer Skizze zweier Funktionen und deren Schnittpunkten, dass nur diskrete Lösungen für E existieren. Wieviele Lösungen gibt es mindestens?
(Bitte dazuschreiben, ob E von 0 oder vom Boden des Potentialtopfs aus gezählt wird; beides ist erlaubt.)

Hilfe: Wenn $e^{i\varphi} = \left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)^2$ ist (φ,a,b reell), gibt es die beiden Wurzeln $e^{i\varphi/2} = \frac{a+ib}{a-ib}$ und $e^{i\varphi/2+i\pi} = \frac{a+ib}{a-ib}$ und weiterhin ist $\frac{\varphi}{4} = \arctan\frac{b}{a}$ bzw. $\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2} = \arctan\frac{b}{a}$.

b) (2 P.) Zeigen Sie für die zu den in a) gefundenen Energiewerten gehörigen Wellenfunktionen, dass diese (bis auf einen globalen Phasenfaktor) reell sind und zudem entweder symmetrisch, also $\psi(x) = \psi(-x)$, oder antisymmetrisch, d.h. $\psi(x) = -\psi(-x)$.

c) (3 P.) Betrachten Sie weiterhin den Potentialtopf der Breite $2a$ und Tiefe V_0, jedoch jetzt Energien, die darüber liegen.



Setzen Sie hier wie für die Schwelle aus Aufgabe 18 die Wellenfunktion in den drei Bereichen an (einen Großteil der Rechnung können Sie von dort übernehmen) und berechnen Sie hier für positive E die Transmission in Abhängigkeit von der Energie. Argumentieren Sie, dass die Transmission eine unendliche Anzahl von Maxima besitzt (Resonanzen) - Sie brauchen *nicht* auszurechnen, bei welchen Energiewerten diese genau liegen. Welchen Wert nimmt die Transmission an allen Resonanzen an?

(Hinweis: Sie können die Tatsache ausnutzen, dass $x + 1/x$ für reelle positive x immer größer oder gleich 2 ist.)

Aufgabe 24 (E): Deltapotential (5 Punkte)

Betrachten Sie Lösungen der stationären Schrödingergleichung in einer Dimension

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

mit einem Deltapotential $V(x) = V_0\delta(x)$ mit negativem $V_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}k_0$. k_0 ist also eine positive Konstante. (V_0 hat hier eine andere Einheit als in Aufgabe 23 und 25b, da $\delta(x)$ noch die Einheit 1/Meter hat.)

a) (2 P.) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion zwar überall als stetig angenommen werden kann, ihre erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ jedoch einen Sprung hat: $\psi'(0+) - \psi'(0-) = -k_0\psi(0)$. Hinweis: Integrieren Sie die Schrödingergleichung über x von $-\varepsilon$ bis ε und betrachten Sie den Limes $\varepsilon \to 0$.

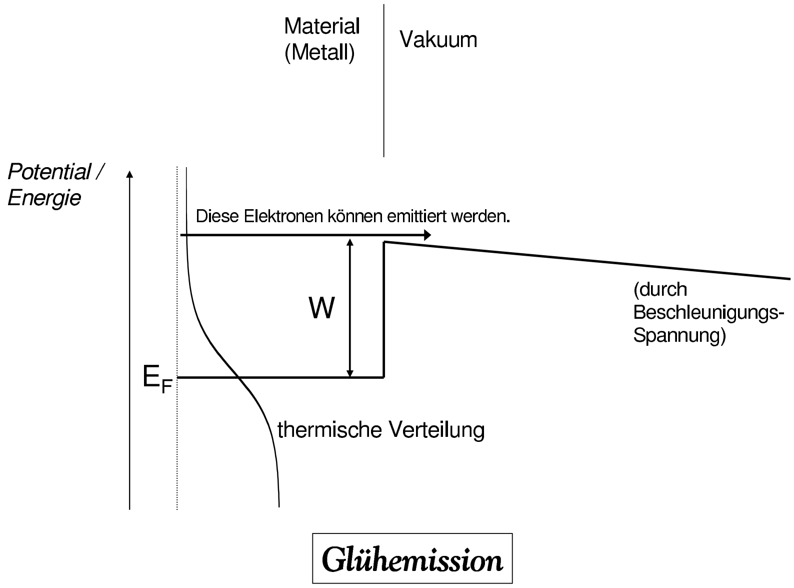
b) (3 P.) Zeigen Sie, dass es nur einen gebundenen Zustand (mit Energie $E < 0$) gibt und geben Sie dieses E und die zugehörige normierte Wellenfunktion an. Berechnen Sie für diesen Zustand die Orts- und Impulsunschärfen Δx und Δp sowie deren Produkt.

Aufgabe 25 (E): Glüh- und Feldemission, Tunneleffekt (6 Punkte)

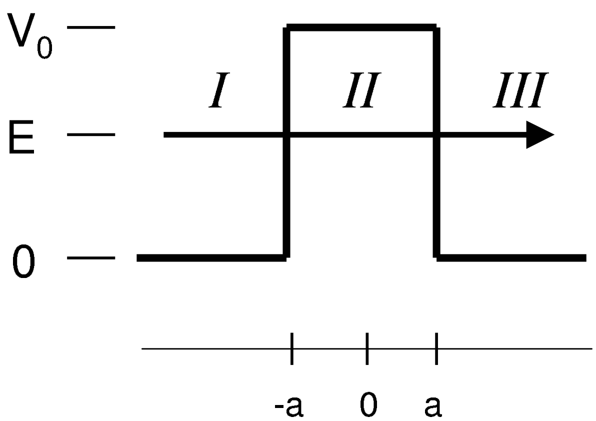
Glüh- und Feldemission werden bei Kathoden in Elektronenmikroskopen genutzt.
a) (1 P.) Bei der Glühemission überwinden die Elektronen aufgrund ihrer thermischen Bewegung die Austrittsarbeit eines Metalls oder anderen Materials. Einige Elektronen haben ausreichende Energie hierfür. Die Stromdichte j der austretenden Elektronen bei der Glühemission ist durch die Richardson-Gleichung

$$j = CT^2 e^{-W/k_BT}$$

gegeben. W ist die Austrittsarbeit, k die Boltzmann-Konstante und C die materialabhängige Richardson-Konstante. Um die austretenden Elektronen nutzbar zu machen, müssen sie natürlich durch eine Beschleunigungsspannung von der Kathode abgesaugt werden. Die Feldstärke ist jedoch nicht so hoch, dass der entstehende Potentialverlauf für Elektronen mit zu geringer Energie zur Überwindung der Austrittsarbeit eine durchdringbar dünne Tunnelbarriere bilden würde.



Beim Materialvergleich sieht man, dass bei der Glühemission eine wenn auch nur geringfügig kleinere Austrittsarbeit eine wesentlich niedrigere Betriebstemperatur erlaubt. Berechnen Sie die Dichten des Emissionsstroms für Wolfram ($W = 4{,}5\text{eV}$, $C = 6 \cdot 10^5 \text{Am}^{-2}\text{K}^{-2}$) bei $T = 2700\text{K}$ und für LaB_6 (Lanthanhexaborid, $W = 2{,}4\text{eV}$, $C = 4 \cdot 10^5 \text{Am}^{-2}\text{K}^{-2}$) bei $T = 1700\text{K}$.

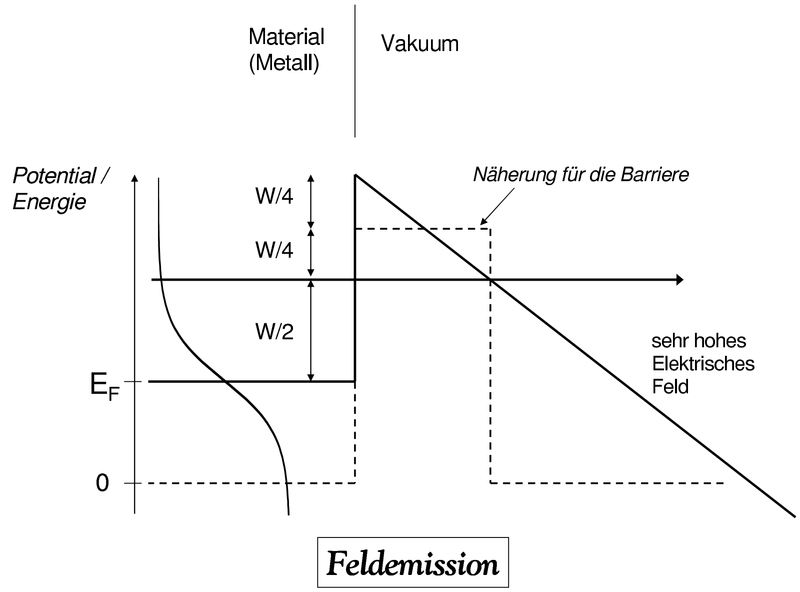


b) (2 P.) Geben Sie analog Aufgabe 18 und 23 auch das Ergebnis für die Transmission $T(E)$ durch eine Schwelle der Breite $2a$ und Höhe V_0 für $E < V_0$ an. Zeigen Sie weiter, dass man für eine große Barrierendicke

$$T(E) \approx \frac{16(V_0 - E)E}{V_0^2} e^{-4\kappa a}$$

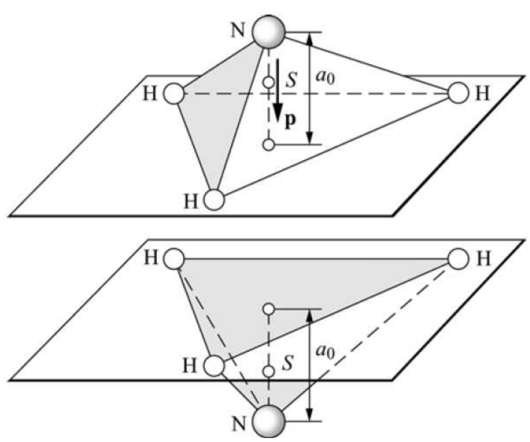
mit $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ nähern kann, wobei m die Masse des tunnelnden Teilchens bezeichnet. Hinweise: $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ und $\sinh^2 x \approx e^{2x}/4$ für große x.

c) (3 P.) Bei der Feldemission wird ein so großes Feld angelegt, dass auch Elektronen einer Energie weniger als die Austrittsarbeit über der Fermi-Energie durch Tunneln austreten können. Man kann sagen, dass effektiv die Austrittsarbeit herabgesetzt wird.



Mit Feld hat die Barriere zwar Sägezahnform, jedoch soll die Stromdichte hier folgendermaßen abgeschätzt werden: Betrachten Sie die Elektronen energetisch auf halber Höhe zwischen Fermi-Energie und Rand des Potentialwalls. Benutzen Sie die Richardson-Formel, um zu ermitteln, welche Stromdichte einem halb so tiefen Potentialtopf entspräche. Jetzt ist noch die Tunnelwahrscheinlichkeit durch die Potentialbarriere zu berücksichtigen. Nehmen Sie an, dass die Elektronen einen rechteckigen Wall mit Oberkante auf dreiviertel der Höhe der Austrittsarbeit durchdringen müssen, der genauso dick ist, wie die dreieckige Barriere auf Höhe der Hälfte der Austrittsarbeit. Benutzen Sie den Ausdruck für die Tunnelwahrscheinlichkeit aus b) (auch wenn es sich hier nicht unbedingt um eine sehr dicke Barriere handelt). Die Fermienergie sei 2eV. Das angelegte Feld betrage 0,5V/Å. Berechnen Sie die Stromdichte der emittierten Elektronen für LaB_6 bei 1100K. Ist es möglich mit Feldemission bei sogar noch geringerer Betriebstemperatur einen größeren Strom als durch Glühemission zu bekommen?

Aufgabe 26 (T): Ammoniak-Modell **(schriftlich - 6 Punkte)**



Als einfaches Modell für die Inversionsbewegung des Stickstoffatoms im Ammoniak-Molekül betrachten wir den unendlich hohen ein-dimensionalen Potentialtopf mit einem zusätzlichen Deltapotential welches eine Barriere zwischen den beiden Seiten des Potentialtopfes darstellt, d.h.

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} u\delta(x) + \begin{cases} 0 & , \quad |x| \le a \\ \infty & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } u > 0.$$

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Energien der antisymmetrischen Zustände (negative Parität).

b) (1 Punkt) Geben Sie die Bestimmungsgleichung für die Energien der symmetrischen Zustände (positive Parität) an.

c) (2 Punkte) Diskutieren Sie die Lösungen graphisch, sowie die Grenzfälle $ua \gg 1$ und $ua \ll 1$.

d) (1 Punkt) Mit dem Übergang zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand wurde die erste Atomuhr realisiert und als Frequenzstandard in der Mikrowellentechnik verwendet[1]. Berechnen Sie die Frequenz und Wellenlänge dieses Übergangs für $u = 5.52/\text{Å}, a = 2\text{Å}$ und $m = 14u$.

[1] http://tf.nist.gov/timefreq/general/pdf/1404.pdf, "Primary Atomic Frequency Standards at NIST"

Aufgabe 27 (T): Zeitentwicklung von Zuständen im Potentialtopf

(schriftlich - 7 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ regen wir die beiden untersten Zustände im unendlichen Potentialtopf kohärent an, d.h. für die Wellenfunktion gilt

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right).$$

a) (1 Punkt) Stellen Sie durch Lösen der zeitabhängigen Schrödingergleichung und mit Hilfe der bekannten Lösungen des unendlichen Potentialtopfs die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ auf.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ und skizzieren Sie diese für typische Zeiten des Systems.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x \rangle (t)$ und stellen Sie ihn graphisch dar.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle H \rangle$ und $\left\langle H^2 \right\rangle$ und damit $\Delta E = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$.

Aufgabe 28 (T): Eigenschaften der Wronski-Determinante **(schriftlich - 7 Punkte)**

Zeigen Sie für die eindimensionale Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

dass die zugehörende *Wronski-Determinante*

$$W(\psi_1, \psi_2) = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} = \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2$$

zweier Lösungen die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) (1 Punkt) Die Wronski-Determinante ist eine Konstante, wenn ψ_1 und ψ_2 Lösungen zu demselben E sind.

b) (1 Punkt) Die Wronski-Determinante ist Null für linear abhängige Lösungen ψ_1 und ψ_2.[1]

c) (3 Punkte) Betrachten Sie ein Potential mit $V(x \to \pm\infty) = V_\pm < \infty$. Beweisen Sie die Reziprozität der Transmission:

[1] Die Umkehrung gilt i.A. nicht, d.h. aus $W(\psi_1, \psi_2) = 0$ folgt nicht die lineare Abhängigkeit von ψ_1 und ψ_2.

Der über die Ströme definierte Transmissionskoeffizient T_r für eine Welle, die das Potential von rechts nach links durchläuft, ist gleich dem Transmissionskoeffizient T_l für eine von links nach rechts laufende Welle.

Hinweis: Der Transmissionskoeffizient ist gegeben durch $T = j_{trans.}/j_{ein.}$. Um die Ströme zu bestimmen, machen Sie sinnvolle Ansätze für jeweils eine von links bzw. rechts einfallende Welle. Eine der oben gezeigten Eigenschaften der Wronski-Determinante ist in diesem Teil hilfreich.

d) (2 Punkte) Indem Sie die Rechnung von c) mit der *Transfermatrix* $\mathcal{M}$ schreiben, zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ allgemein die Form

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}$$

mit $u, v \in \mathrm{C}$ hat, wobei gilt

$$|u|^2 - |v|^2 = \sqrt{\frac{E - V_+}{E - V_-}}.$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie mit den aus der Vorlesung abgeleiteten Ergebnissen die folgende Beziehung

$$\mathcal{M}^\dagger g \mathcal{M} = \sqrt{\frac{E - V_+}{E - V_-}} g$$

mit $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.