UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 4, Ausgabe 17.11.2010, abzugeben am 24.11.2010
Besprechung in den Übungen vom 26.11.2010

9. **Keplerproblem; (8 Punkte + 2 Zusatzpunkte)**
Die um 1610 veröffentlichten drei Gesetze der Planetenbewegung des *Johannes Kepler* (1571-1630) waren das Ergebnis seiner bahnbrechenden Analyse der 38jährigen Beobachtungen von *Tycho Brahe* (1546-1601) und legten den Grundstein zu *Newtons* (1643-1727) Entdeckungen. Während Kepler II (Erhaltung der Flächengeschwindigkeit) für alle Zentralkraftbewegungen Gültigkeit hat, sind Kepler I (Planeten auf Ellipsenbahnen) und Kepler III (Quadrat der Perioden ist den Kuben der Halbachsen proportional) auf Potentiale des reziproken Abstands beschränkt. In der folgenden Aufgabe sollen Sie das Keplerproblem mithilfe des Lagrange-Formalismus lösen.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten für einen Massepunkt im Zentralpotential
$$U(r) = -\frac{\gamma}{r}$$
auf und berechnen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen. (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ und die Energie E, sowie der Runge-Lenz-Vektor
$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \alpha \mathbf{r}/r$$
mit geeigneter Wahl von α Erhaltungsgrössen der Bewegung sind. (1 Punkt)

(c) Warum lässt sich das Keplerproblem auf ein effektiv zweidimensionales Problem reduzieren? Ermitteln Sie die Lagrangefunktion in ebenen Polarkoordinaten. (1 Punkt)

(d) Zeigen Sie erneut, dass Drehimpuls und Energie erhalten sind, und geben Sie die Grössen in Polarkoordinaten an. (1 Punkt)
Hinweis: Benutzen Sie dazu die Euler-Lagrange-Gleichungen für die beiden Polarkoordinaten.

(e) Lösen Sie nach der Trajektore $r(\phi)$, und diskutieren Sie die unterschiedlichen Lösungen hinsichtlich der Energie oder anderer geeigneter Parameter. Für welche Werte von E erhalten Sie geschlossene und für welche offene Keplerbahnen?
Hinweise: Benutzen Sie zunächst die Ausdrücke für E und den Drehimpuls l in Polarkoordinaten, um zu zeigen, dass
$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{mr^2}{l} \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{l^2}{m^2 r^2} + \frac{2\gamma}{mr}}.$$
Führen Sie nun die Substitution $u = 1/r$ durch, und benutzen Sie
$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left(\frac{-2au - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right).$$
(2 Punkte)

(f) Ein Massepunkt (Meteorit, Raumsonde) fliegt aus sehr grosser Entfernung auf ein Zentralpotential (Gravitationspotential eines Planeten) zu und passiert dieses auf einer offenen Bahn ($E > 0$). Bestimmen Sie den Winkel θ, um den sich die Flugrichtung des Massepunktes ändert. (1 Punkt)

(g) In welche Richtung zeigt der Runge-Lenz-Vektor? Wie groß ist sein Betrag? Berechnen Sie hierzu $\mathbf{A}$ im Perihel, dem Bahnpunkt mit minimalem Abstand vom Kraftzentrum. (1 Punkt)

(h) In Teilaufgabe (e) wurde bereits gezeigt, dass die geschlossenen Bahnen Ellipsen (bzw. Kreise) sind. Zeigen Sie mit Hilfe der Konstanz des Drehimpulses auch das 2. Keplersche Gesetz: "In gleichen Zeiten Δt werden gleiche Flächen ΔA der Ellipse überfahren".

Bestimmen Sie aus dem Ausdruck für $r(\phi)$ aus Teilaufgabe (e) die große Halbachse a und die Exzentrizität ε der Ellipse. Daraus erhalten Sie den Flächeninhalt $A = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Unter Benutzung des 2. Keplerschen Gesetzes können Sie nun auch das 3. Keplersche Gesetz zeigen: "Das Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse." Wie lautet der Proportionalitätsfaktor? (2 Zusatzpunkte)

10. **Fresnel'sche Formeln für senkrechte Polarisation; (9 Punkte)**
Gesucht ist der Reflexions- und Transmissionskoeffizient für die Beugung an der Grenzfläche zweier optischer Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2. Das elektrische Feld sei senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Der Einfallswinkel (in Medium 1) sei α, der Beugungswinkel (in Medium 2) sei β.

(a) Die einfallende Welle ist gegeben durch

$$\mathbf{E}_{\mathrm{I}}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{\mathrm{I}}^y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i[\omega t-(k_1^x x+k_1^z z)]}$$

Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle zunächst den allgemeinen Ansatz

$$\mathbf{E}_{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{R}}^x \\ E_{\mathrm{R}}^y \\ E_{\mathrm{R}}^z \end{pmatrix} e^{i[\omega t-(k_1^x x-k_1^z z)]} \;, \quad \mathbf{E}_{\mathrm{T}}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{T}}^x \\ E_{\mathrm{T}}^y \\ E_{\mathrm{T}}^z \end{pmatrix} e^{i[\omega t-(k_2^x x+k_2^z z)]}$$

und zeigen Sie, dass

$$E_{\mathrm{R}}^x = E_{\mathrm{R}}^z = E_{\mathrm{T}}^x = E_{\mathrm{T}}^z = 0$$

gilt. Verwenden Sie hierzu die Stetigkeitsbedingungen für $\vec{E}$ an einer ungeladenen Grenzfläche und beachten Sie, dass die Wellen außerdem die Maxwell-Gleichung $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ erfüllen müssen.

Hinweis: Sie erhalten ein homogenes Gleichungssystem für E_{R}^x, E_{R}^z, E_{T}^x und E_{T}^z. Wie lautet die Lösung dieses Gleichungssystems? (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen für $\vec{B}$ den Reflexionskoeffizienten $R = E_{\mathrm{R}}/E_{\mathrm{I}}$ und den Transmissionskoeffizienten $T = E_{\mathrm{T}}/E_{\mathrm{I}}$. (3 Punkte)

(c) Diskutieren Sie R und T in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α für $n_2 > n_1$. (1 Punkt)

(d) Diskutieren Sie R in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α für $n_2 < n_1$. Was passiert für Einfallswinkel $\alpha > \alpha_{\mathrm{G}}$, wobei α_{G} der Grenzwinkel der Totalreflexion ist? In diesem Fall lässt sich der Reflexionskoeffizient in der Form $R = e^{-2i\psi}$ schreiben (warum?). Bestimmen Sie die Phase ψ. Wie lässt sich die Beziehung $R = e^{-2i\psi}$ physikalisch interpretieren im Hinblick auf die Felder E_{I} und E_{R}? Macht die Bezeichnung „Totalreflexion“ Sinn? (3 Punkte)