Blatt 12 Abgabe: **Dienstag, 25.06.13** vor der Vorlesung

Aufgabe 32 *Elektronen auf einem Ring*

Ein Elektron bewegt sich auf einem Ring aus N Plätzen $n = 0, \ldots, N-1$, welche in der Ebene auf den Ecken eines regulären N-Ecks liegen, sprich Platz n habe die Koordinaten $(x_n, y_n) = (\cos n\Phi, \sin n\Phi)$ mit $\Phi = 2\pi/N$. Zwischen zwei benachbarten Plätzen kann das Elektron mit einer Rate J tunneln. Der angemessene Hilbertraum für dieses Problem hat die Basis $|0\rangle, \ldots, |N-1\rangle$, wobei $|n\rangle$ der Zustand ist, in dem das Elektron an Platz n sitzt. Die Indizes sind in dieser Aufgabe zyklisch zu lesen, d.h. $|N\rangle = |0\rangle$. Der Hamiltonoperator dieses Problems ist dann

$$H = J \sum_{n=0}^{N-1} |n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \quad ,$$

der Operator R werde durch

$$R = \sum_{n=0}^{N-1} |n+1\rangle\langle n|$$

definiert.

a) Zeigen Sie, daß R unitär, aber nicht hermitesch ist, indem Sie R^{-1} und $R^\dagger$ berechnen. Was ist R^N ?

b) Zeigen Sie, daß H und R kommutieren.

c) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von R.

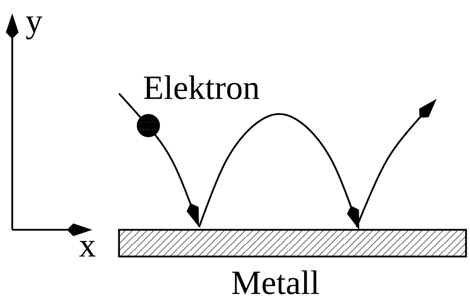
d) Bestimmen Sie, unter Benutzung der beiden vorhergehenden Aufgabenteile, die Eigenwerte von H.

e) Das Elektron werde zusätzlich einem homogenen elektrischen Feld der Stärke E ausgesetzt, welches in positive x-Richtung zeigt. Wie sieht der Hamiltonoperator dieses Problems aus? Kommutiert er weiterhin mit R ? Was sind die Eigenzustände dieses Problems bei verschwindendem Tunneln, d.h. $J = 0$?

(10 Punkte)

Aufgabe 33 *Elektron im Bildpotential einer Oberfläche*

Ein Elektron bewegt sich oberhalb einer leitenden metallischen Oberfläche. Die Bildladung übt eine anziehende Kraft auf das Elektron aus, sodass es sich klassisch wie in der nebenstehenden Abbildung angegeben bewegt. Quantenmechanisch wird die Bewegung des Elektrons natürlich durch eine Schrödinger Gleichung beschreiben.



a) Ignorieren Sie Trägheitseffekte und formulieren Sie die Schrödinger Gleichung für die Dynamik des Elektrons.

b) Führen Sie nun eine Separation der Variablen durch und bestimmen Sie die Ortsabhängigkeit der Eigenfunktionen in lateraler Richtung ($x-$ und $z-$Richtung in obiger Abbildung)

c) Welche zusätzlichen Randbedingungen müssen noch eingefordert werden?

d) Bestimmen Sie jetzt den Grundzustand des Elektrons und die damit verküpfte Energie.

e) Geben Sie schließlich das komplette Spektrum des Elektrons an.

Hinweis: Der Anteil der Schrödinger Gleichung, der die Bewegung normal zur Oberfläche ($y-$Richtung in obiger Abbildung) beschreibt, ist formal identisch mit der Schrödinger Gleichung für ein Wasserstoffatom.

(2+2+1+2+2=9 Punkte)

Aufgabe 34 *Störungstheorie*

Ein Elektron bewegt sich in einem Coulomb Feld $V_C(r)$, das um den Ursprung des Koordinatensystems zentriert ist. Unter Vernachlässigung des Spins und relativistischer Korrekturen ist der erste angeregte Zustand (mit Hauptquantenzahl $n = 2$) vierfach entartet: $l = 0$, $m_l = 0$; $l = 1$, $m_l = -1, 0, 1$. Untersuchen Sie störungstheoretisch was mit dem $n = 2$ Niveau passiert, wenn zusätzlich zu $V_C(r)$ ein nicht-zentralsymmetrisches Feld $V_{\text{perp}}(x, y, z) = f(r)xy$ wirkt, wobei $f(r)$ eine zentralsymmetrische Funktion ist, die für $r \to \infty$ hinreichend schnell verschwindet, ansonsten aber beliebig ist. Die Störung lässt sich in erster Ordnung behandeln.

a) In wieviele verschiedene Energieniveaus spaltet das $n = 2$ Niveau auf?

b) Wie hoch sind die neuen Niveaus noch entartet?

c) Falls die Energieverschiebung eines Niveaus $A > 0$ ist (definieren Sie A geschickt), was ist die Verschiebung der anderen Niveaus?

Hinweis: Für die Bearbeitung der Aufgabe benötigen Sie Kugelflächenfunktionen,

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \quad Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \ , \quad Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} \ .$$

Die Konstante A enthält neben einem Integral über Kugelflächenfunktionen auch ein Integral über das Betragsquadrat der radialen Wellenfunktion $R_{21}(r)$. Den Zahlenwert der Konstanten müssen Sie nicht angeben.

(9 Punkte)