Übungen zur Quantenmechanik I

Prof. J. S. Briggs

Blatt 2 SoSe 2005

Aufgabe 1: Adjungierte und hermitesche Operatoren

Der zu einem Operator A adjungierte Operator $A^\dagger$ ist für beliebige Funktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ definiert als:

$$\int dx\ \psi_1^*(x) A^\dagger \psi_2(x) = \int dx\ (A\psi_1(x))^* \psi_2(x).$$

a) Bestimmen Sie den Operator $(\frac{d}{dx})^\dagger$

b) Zeigen Sie, daß die Operatoren $A + A^\dagger$, $i(A - A^\dagger)$ und $AA^\dagger$ hermitesch sind.

Aufgabe 2: Kommutatorbeziehungen und Operatorfunktionen

Der Kommutator zweier Operatoren A und B ist definiert durch $[A, B] := AB - BA$.

a) Gegeben seien drei Operatoren A, B, C. Stellen Sie die Kommutatoren $[AB, C]$ und $[A, BC]$ durch die Kommutatoren $[A, B]$, $[A, C]$ und $[B, C]$ dar.

b) Berechnen Sie mit diesen Ergebnissen die Kommutatoren $[x, p^2]$,$[x^2, p]$, $[x^2, p^2]$, $[xp, p^2]$, $[px, p^2]$.

c) Zeigen Sie durch Induktion, daß gilt:
$[x, f(p)] = i\hbar \frac{d}{dp} f(p)$,
$[p, g(x)] = -i\hbar \frac{d}{dx} g(x)$.

   Hinweis: Entwickeln Sie die Funktionen in eine Taylorreihe.

Aufgabe 3: Wellenfunktionen im Impulsraum

In der Quantenmechanik ist der Zustand eines (spinlosen) Teilchens der Masse m, das sich in einem Potential $V(\underline{r})$ in drei Raumdimensionen befindet, durch die *Ortswellenfunktion* $\psi(\underline{r})$ charakterisiert. Diese genügt der Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(\underline{r}) + V(\underline{r})\psi(\underline{r}) = E\psi(\underline{r})\,. \qquad (1)$$

Die Fourier-Transformierte

$$\phi(\underline{\mathrm{k}}) = (2\pi)^{-3/2} \int d\underline{\mathrm{r}} \ \exp(-i\underline{\mathrm{k}} \cdot \underline{\mathrm{r}})\psi(\underline{\mathrm{r}}) \tag{2}$$

charakterisiert die Impulsverteilung des Quantenzustands (*Impulswellenfunktion*).

a) Invertieren Sie die Fourier-Transformation (2) und drücken Sie die Ortswellenfunktion als Integral über die Impulswellenfunktion aus. Nutzen Sie dabei die Darstellung

$$\delta(\underline{\mathrm{k}} - \underline{\mathrm{k}}') = (2\pi)^{-3} \int d\underline{\mathrm{r}} \ \mathrm{e}^{i(\underline{\mathrm{k}} - \underline{\mathrm{k}}')\underline{\mathrm{r}}}$$

der Delta-Funktion in drei Dimensionen aus.

b) $W(\underline{\mathrm{k}})$ sei die Fourier-Transformierte des Potentials $V(\underline{\mathrm{r}})$. Stellen Sie analog zu a) einen Zusammenhang zwischen $V(\underline{\mathrm{r}})$ und $W(\underline{\mathrm{k}})$ her.

c) Leiten Sie aus der Schrödingergleichung (1) für die Ortswellenfunktion und den Ergebnissen aus a) und b) eine Integralgleichung für die Impulswellenfunktion $\phi(\underline{\mathrm{k}})$ ab.

d) Spezialisieren Sie auf den Fall, dass $V(\underline{\mathrm{r}}) = -\exp(-\gamma r)/r$ mit $r = |\underline{\mathrm{r}}|$ und $\gamma > 0$ das Yukawa-Potential ist. Was folgt für die Fourier-Transformierte des attraktiven Coulomb-Potentials?

   Hinweis: Benutzen Sie Kugelkoordinaten zur Berechnung der Fourier-Transformierten des Yukawa-Potentials.