Übung 6 - Musterlösung

Aufgabe 15: Kupferleiter

Cu-Leiter: Länge $l = 1.5\,\text{m}$, Elektronenladung $q = -1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$, Leitungselektronendichte $n = 8.45 \cdot 10^{28}\,\text{m}^{-3}$, elektrische Leitfähigkeit $\sigma_{el} = 6 \cdot 10^7\,\text{A}\,(\text{Vm})^{-1}$, Drahtdurchmesser $d = 3\,\text{mm} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$

a)

Die Ladungsdichte $\rho_q = q \cdot n$ berechnet sich als Elektronenladung mal Leitungselektronendichte. Dies liefert:

$$\rho_q = e \cdot n = -1.35 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^3}.$$

Die Linienladungsdichte können wir bestimmen, indem wir die Ladungsdichte $\rho_q = \frac{Q}{V} \Leftrightarrow Q = \rho_q \cdot V$ mit der Linienladungsdichte $\lambda_q = \frac{Q}{l} \Leftrightarrow Q = \lambda_q \cdot l$ vergleichen und die Zylinderform des Drahtes ($V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l$) ausnutzen:

$$\begin{aligned} \rho_q \cdot V &= \lambda_q \cdot l \\ \lambda_q &= \rho_q \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also für die Linienladungsdichte:

$$\lambda_q = -9.57 \cdot 10^4\,\frac{\text{C}}{\text{m}}.$$

b)

Um die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in diesem Leiter bei $I = 16\,\text{A}$ zu berechnen, nutzen wir die Formel $I = nqAv$ und die Querschnittsfläche eines Zylinders (Kreisfläche $A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$). Umstellen liefert:

$$v_d = \frac{I}{nqA} = \frac{I}{\pi \rho d} = -1.67 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c)

Es gilt das Ohmsche Gesetz $U = \frac{l}{\sigma_{el} \cdot A} \cdot I$, wir können direkt einsetzen und erhalten:

$$U = 5.66 \cdot 10^{-2}\,\text{V}.$$

d)

Für den Widerstand gilt $R = \frac{l}{\sigma_{el} A} = \frac{l}{\sigma_{el}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4l}{\pi\sigma_{el}d^2}$, einsetzen liefert einen Widerstand des Leiters von

$$R = \frac{4l}{\pi\sigma_{el}d^2} = 3.54 \cdot 10^{-3}\,\Omega.$$

Für den Fall, dass der Drahtdurchmesser $d = 125\,\mu\text{m} = 1.25 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$ betragen würde, folgt für den Widerstand des Leiters

$$R = 2.04\,\Omega.$$

Aufgabe 16: Relativistische Teilchensicht

Leiter: Linienladungsdichte der Leitungselektronen λ_e, Driftgeschwindigkeit der Leitungselektronen $\vec{v}_d$, Linienladungsdichte der positiven Atomrümpfe λ_a

Einzelnes äußeres Elektron: Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}_d$

*Der Leiter sei in seinem Ruhesystem (d.h. die positiven Atomrümpfe haben keine Geschwindigkeit) neutral geladen (siehe auch **b)**), d.h. der Betrag Linienladungsdichte positiver Ladungen (positive Atomrümpfe) und negativer Ladungen (Leitungselektronen) ist im Ruhesystem des Leiters gleich $|\lambda_e| = |\lambda_a|$ $(-\lambda_e = \lambda_a\ )$, mit $Q_a = -Q_e$ folgt somit auch $l_e = l_a$, da $\lambda = \frac{Q}{l}$.*

a)

Es ist die Linienladungsdichte λ'_e der Leitungselektronen, die das äußere Elektron in seinem Ruhesystem sieht, zu berechnen. Es gilt für die Längenkontraktion

$$l_{ruhenderBeobachter} = l_{mitbewegt} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Wenn sich das äußere Elektron parallel und mit gleicher Geschwindigkeit zu den Leitungselektronen bewegt und als Bezugssystem das Ruhesystem des äußerene Elektrons gewählt wird, ist die relative Geschwindigkeit des äußeren Elektrons zu den Leitungselektronen gleich null ($v = |\vec{v}| = 0$). Zuvor im Ruhesystem des Leiters besaßen die Elektronen die Geschwindigkeit $|\vec{v}_D| > 0$ und hatten einen Leitungselektronenabstand von l_e. Da sich nun aus dem Ruhesystem des äußeren Elektrons gesehen die Geschwindigkeit auf $v = 0$ reduziert, tritt eine Längenkontraktion der Leitungselektronenabstände auf (die Geschwindigkeit ist geringer als im Ruhesystem der positiven Atomrümpfe, daher erhöhen sich die Leitungselektronenabstände), welche auch die Linienladungsdichte verändert. Es folgt für die Leitungselektronenabstände

$$l_e = l'_e \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Leftrightarrow l'_e = l_e \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma l_e$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ dem Lorentzfaktor. Die Elektronenladung ist konstant $Q'_e = Q_e$, daher gilt:

$$\lambda_e' \cdot l_e' = \lambda_e \cdot l_e,$$

hieraus folgt dann für die Linienladungsdichten

$$\begin{aligned}\lambda_e' &= \frac{\lambda_e l_e}{l_e'} \\ &= \frac{\lambda_e l_e}{\gamma l_e} \\ &= \frac{\lambda_e}{\gamma}.\end{aligned}$$

Da $\gamma \leq 1$ ist also $\lambda_e' < \lambda_e$. *Die Linienladungsdichte der Leitungselektronen wirkt also verringert.*

b)

Es ist die Linienladungsdichte λ_a' der positiven Atomrümpfe, die das äußere Elektron in seinem Ruhesystem sieht, zu berechnen.

Das äußere Elektron befindet sich in Ruhe, daher bewegen sich die positiven Atomrümpfe in Bezug auf das ruhende äußere Elektron mit der Geschwindigkeit $-v$. Diese Bewegung verursacht eine Längenkontraktion der positiven Atomrumpfabstände (da die Geschwindigkeit jetzt größer ist als in ihrem eigenen Ruhesystem, müssen die positiven Atomrumpfabstände kleiner werden), wodurch die Linienladungsdichte der positiven Atomrümpfe verändert wird. Es folgt für die positiven Atomrumpfabstände

$$l_a = \frac{l_a'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow l_a' = \frac{l_a}{\gamma}.$$

Die Ladung der positiven Atomrümpfe ist konstant $Q_a' = Q_a$, daher gilt:

$$\lambda_a' \cdot l_a' = \lambda_a \cdot l_a,$$

hieraus folgt dann für die Linienladungsdichten

$$\begin{aligned}\lambda_a' &= \frac{\lambda_a l_a}{l_a'} \\ &= \gamma \lambda_a.\end{aligned}$$

Da $\gamma \leq 1$ ist also $\lambda_a' > \lambda_a$. *Die Linienladungsdichte der positiven Atomrümpfe wirkt also verstärkt.*

c)

Formel für das elektrische Feld eines unendlich langen dünnen Leiters

$$|E_{Leiter}| = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E}_{Leiter} = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

wobei $\lambda' = \lambda'_e + \lambda'_a = \frac{\lambda_e}{\gamma} + \gamma\lambda_a$ und mit $-\lambda_e = \lambda_a$ und $|\lambda_e| = |\lambda_a| = \lambda$, folgt $\lambda' = \lambda\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$. Somit resultiert nach einsetzen von λ'

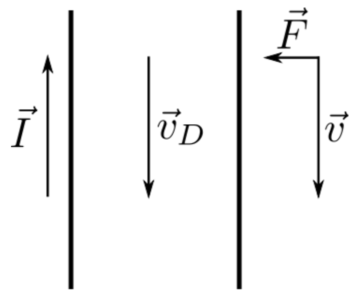
$$\vec{E} = \frac{\lambda\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

bzw. für die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

d)

Das äußere Elektron bewegt sich parallel zu den Leitungselektronen, die technische Stromrichtung geht vom Pluspol zum Minuspol und die Kraft zwischen äußerem Elektron und Leitungselektronen wirkt anziehend, da der positive Atomrumpfabstand durch Längenkontraktion verringert, der Leitungselektronenabstand durch Längenkontraktion aber vergrößert ist und somit der Leiter positiv geladen wirkt.



e)

Die Kraft wirkt nun abstoßend, *da der Elektronenabstand durch Längenkontraktion kleiner wird als der positive Atomrumpfabstand und somit der Leiter negativ geladen wirkt.*

Aufgabe 17: Spulenwicklung

Zylinderspule: Drahtdurchmesser $d = 1\,\mathrm{mm} = 10^{-3}\,\mathrm{m}$, magnetische Feldstärke $B_0 = 0.03\,\mathrm{T} = 3{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{T}$, maximaler Strom $I_{max} = 4\,\mathrm{A}$

Es gilt in der Näherung $d \ll l$ für die magnetische Feldstärke $B_0 \approx \mu_0 I \frac{N}{l}$ mit N der Anzahl der Windungen. Wir können hieraus die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit $n = \frac{N}{l}$ bestimmen

$$n = \frac{N}{l} = \frac{B_0}{\mu_0 I} = 5968.31\,\frac{1}{\mathrm{m}}.$$

Wir müssen also eine Windungsdichte von $\approx 5968 \, \frac{1}{\mathrm{m}}$ erreichen. Die Drahtdicke beträgt $d = 10^{-3} \, \mathrm{m}$, d.h. wir können 1000 Windungen pro Meter wickeln. Um auf eine Windungsdichte von 5968 zu kommen, benötigen wir also $\frac{5968}{1000} \approx 6$ Schichten.