Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle Sylow-Untergruppen der Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_5)$.

Aufgabe 2: Zeigen sie: Zwei Zykel in S_n sind genau dann konjugiert in S_n, wenn sie die gleiche Länge haben.

Wir zeigen zunächst, dass zwei konjugierte Zykel gleiche Länge haben: Dazu seien $\sigma_1, \sigma_2, \tau \in S_n$ und es gelte $\sigma_2 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}$. Wir schreiben den Zykel σ_1 als $(a_1, \ldots, a_l)$ und zeigen, dass auch σ_2 ein Zykel ist. Dazu zeigen wir, dass σ_2 jedes $\tau(a_k)$ zyklisch auf $\tau(a_{k+1})$ und $\tau(a_l)$ auf $\tau(a_1)$ abbildet, dann ist σ_2 ein Zykel der Länge l.

Es ist $\tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}(\tau(a_k)) = \tau \circ \sigma_1(a_k) = \tau(a_{k+1 \mod l})$.

Damit haben wir $\sigma_2 = (\tau(a_1), \ldots, \tau(a_l))$ gezeigt. Insbesondere ist σ_2 ein Zykel der Länge l.

Nun zeigen wir die umgekehrte Richtung: Es seien $\rho = (r_1, \ldots, r_l)$ und $\kappa = (k_1, \ldots, k_l)$ zwei Zykel gleicher Länge in S_n. wir definieren die Permutation τ auf $M := \{r_1 \ldots, r_l\}$ als $\tau(r_i) = k_i$ und auf $\{1, \ldots, n\} \setminus M$ als $\tau(x) = x$. Wir zeigen nun, dass $\kappa = \tau \circ \rho \circ \tau^{-1}$ gilt. Es ist $\tau \circ \rho \circ \tau^{-1}(k_i) = \tau \circ \rho(r_i) = \tau(r_{i+1 \mod l}) = k_{i+1 \mod l}$.

Wir haben gezeigt: zu je zwei Zykeln ρ, κ gleicher Länge, lässt sich ein $\tau \in S_n$ finden, so dass ρ und κ zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)/\{\pm 1\}$ isomorph zur Gruppe A_4 ist.

Aufgabe 4: Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Automorphismengruppe der (additiven) Gruppe $\mathbb{F}_p$.

Die Gruppe der Automorphismen ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p, +) = \{\sigma |\, \sigma \text{ ist Bijektion von } (\mathbb{F}_p, +) \text{ und} \\ \text{für alle } x, y \in \mathbb{F}_p : \sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)\}.\end{aligned}$$

Es sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p)$, dann ist $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x \cdot \varphi(1)$. Deswegen ist φ durch $\varphi(1)$ eindeutig bestimmt. Desweiteren ist φ eine Bijektion von $\mathbb{F}_p$, deswegen gibt es auch ein $x' \in \mathbb{F}_p$ mit $1 = \varphi(x') = x' \cdot \varphi(1)$. Daran erkennen wir, dass $\varphi(1)$ invertierbar, also aus ${\mathbb{F}_p}^*$, ist. Wir haben $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p) \subseteq {\mathbb{F}_p}^*$ gezeigt.

Nun zeigen wir die umgekehrte Inklusion: ${\mathbb{F}_p}^* \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p)$. Sei $g \in {\mathbb{F}_p}^*$, dann ist $m_g : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ mit $x \mapsto g \cdot x$ eine Bijektion, da g invertierbar ist. Außerdem ist m_g ein Automorphismus, wegen $m_g(x + y) = g \cdot (x + y) = gx + gy = m_g(x) + m_g(y)$.