4.2 Allgemeine ebene Bewegung

Lösungen

Aufgabe 1:

a) <u>Massenträgheitsmoment:</u>

Für das Massenträgheitsmoment einer homogenen Kugel gilt:

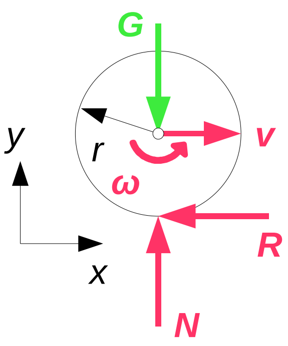
$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

Zahlenwert:

$$J = \frac{2}{5} \cdot 8\,kg \cdot 0{,}1125^2\,m^2 = \underline{0{,}0405\,kgm^2}$$

b) <u>Gleitstrecke:</u>

Schwerpunktsatz:



$$m\dot{v} = -R$$

Kräftegleichgewicht in *y*-Richtung:

$$N - G = 0 \quad \rightarrow \quad N = G = m g$$

Drallsatz bezüglich Schwerpunkt:

$$J\dot{\omega} = -r R$$

Gleitreibungsgesetz:

$$R = \mu N = \mu m g$$

Die Gleitreibungskraft bremst die Geschwindigkeit der Kugel ab und versetzt gleichzeitig die Kugel in Drehung. Die Kugel gleitet solange, bis die Geschwindigkeit des Punktes, in dem die Kugel die Bahn berührt, verschwindet, d.h. bis die Rollbedingung

$$v + \omega r = 0$$

erfüllt ist.

Aus dem Schwerpunktsatz folgt: $a = \dot{v} = -\frac{R}{m} = -\mu g$

Werden Zeit und Ort ab dem Aufsetzen gemessen, so gilt für die Geschwindigkeit der Kugel:

$$v(t) = v_0 + a\,t = v_0 - \mu\,g\,t$$

Für den zurückgelegten Weg gilt:

$$s(t) = v_0\,t - \frac{1}{2}\mu\,g\,t^2$$

Aus dem Drallsatz folgt:

$$\dot{\omega} = -\frac{r\,R}{J} = -\frac{r\,\mu\,m\,g}{\frac{2}{5}m\,r^2} = -\frac{5}{2}\frac{\mu\,g}{r}$$

Da die Winkelgeschwindigkeit am Anfang null ist, gilt für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \dot{\omega}\,t = -\frac{5}{2}\frac{\mu\,g}{r}t$$

Aus der Rollbedingung lässt sich die Zeit berechnen, die vergeht, bis die Kugel rollt:

$$v_0 - \mu\,g\,t_G - \frac{5}{2}\mu\,g\,t_G = 0 \;\rightarrow\; v_0 = \frac{7}{2}\mu\,g\,t_G \;\rightarrow\; t_G = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu\,g}$$

Der zurückgelegte Weg berechnet sich zu

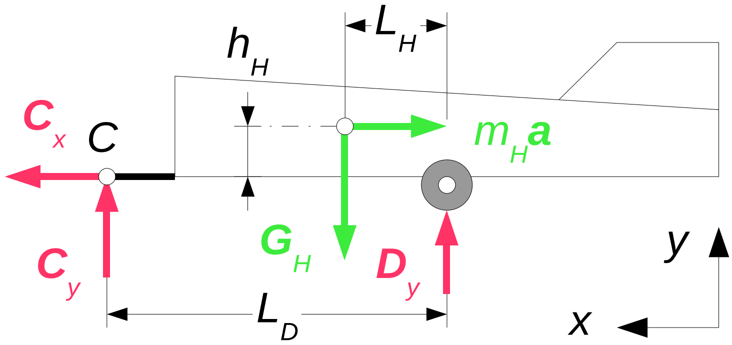
$$s_G = s(t_G) = \frac{2}{7}\frac{v_0^2}{\mu\,g} - \frac{1}{2}\mu\,g\left(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu\,g}\right)^2 = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu\,g} \quad .$$

Zahlenwert:

$$s_G = \frac{12}{49}\cdot\frac{2{,}4^2\,m^2/s^2}{0{,}12\cdot 9{,}81\,m/s^2} = \underline{1{,}198\,m}$$

Aufgabe 2:

Dynamisches Gleichgewicht am Anhänger:



$$\sum_D F_x = 0 \;:\; C_x - m_H a = 0 \quad \rightarrow \; C_x = m_H a$$

$$\sum_D F_y = 0 \;:\; C_y - m_H g + D_y = 0 \quad \rightarrow \; C_y = m_H g - D_y$$

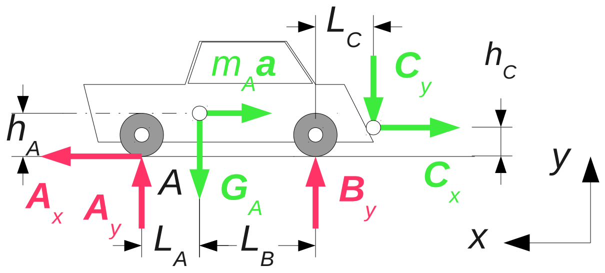
$$\sum_D M_{(C)} = 0 \;:\; -(L_D - L_H) m_H g + L_D D_y - h_H m_H a = 0$$

$$\rightarrow \; D_y = \frac{m_H}{L_D}\left[h_H a + (L_D - L_H) g\right]$$

Zahlenwerte:

	a) $a=0\,m/s^2$	b) $a=0{,}5\,m/s^2$	c) $a=-1\,m/s^2$	
C_x	0	0,250	-0,500	*kN*
C_y	1,226	1,164	1,351	*kN*
D_y	3,679	3,741	3,554	*kN*

Dynamisches Gleichgewicht am PKW:



$$\sum_D F_x = 0 \;:\; A_x - m_A a - C_x = 0 \quad \rightarrow \; A_x = C_x + m_A a$$

$$\sum_D F_y = 0 \;:\; A_y + B_y - C_y - m_A g = 0 \quad \rightarrow \; A_y = m_A g - B_y + C_y$$

$$\sum_D M_{(A)} = 0 \;:\; -L_A m_A g - h_A m_A a + (L_A + L_B) B_y - (L_A + L_B + L_C) C_y - h_C C_x = 0$$

$$\rightarrow \; B_y = \frac{(L_A g + h_A a) m_A + h_C C_x + (L_A + L_B + L_C) C_y}{L_A + L_B}$$

Zahlenwerte:

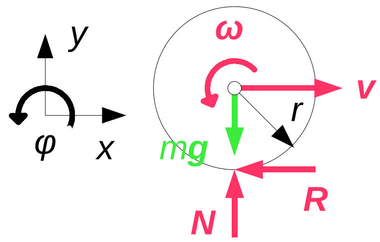
	a) $a=0\,m/s^2$	b) $a=0{,}5\,m/s^2$	c) $a=-1\,m/s^2$	
A_x	0	1,250	-2,500	*kN*
A_y	12,60	12,31	13,19	*kN*
B_y	8,243	8,476	7,778	*kN*

Aufgabe 3:

a) <u>Gleitzeit:</u>

Schwerpunktsatz in *x*-Richtung:

$$\sum F_x = m\,a_x \;:\; -R = m\,\dot{v}$$



Kräftegleichgewicht in *y*-Richtung:

$$\sum F_y = 0 \;:\; N - m\,g = 0 \;\rightarrow\; N = m\,g$$

Drallsatz bezüglich Schwerpunkt:

$$\sum M_{(S)} = J_S\,\ddot{\phi} \;:\; -r\,R = J_S\,\dot{\omega}$$

Gleitreibungsgesetz: $R = \mu\,N = \mu\,m\,g$

Massenträgheitsmoment der homogenen Scheibe: $J_S = \frac{1}{2} m\,r^2$

Einsetzen in den Schwerpunktsatz und den Drallsatz ergibt:

$$m\,\dot{v} = -\mu\,m\,g \;\rightarrow\; \dot{v} = -\mu\,g$$

$$\frac{1}{2} m\,r^2\,\dot{\omega} = -r\,\mu\,m\,g \;\rightarrow\; \dot{\omega} = -2\frac{\mu\,g}{r}$$

Die Münze führt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und Drehbewegung aus. Mit den gegebenen Anfangsbedingungen folgt für Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 - \mu\,g\,t$$

$$\omega(t) = \omega_0 - 2\frac{\mu\,g}{r} t$$

Die Münze gleitet so lange, bis die Rollbedingung

$$v(t_G) + \omega(t_G)\,r = 0$$

erfüllt ist. Einsetzen ergibt

$$v_0 - \mu\,g\,t_G + \omega_0 r - 2\,\mu\,g\,t_G = 0 \;\;.$$

Daraus folgt: $t_G = \frac{v_0 + \omega_0 r}{3\,\mu\,g}$

b) <u>Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_G:</u>

Einsetzen der Beziehung für t_G in das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz ergibt

$$v_G = v(t_G) = v_0 - \mu g \frac{v_0 + \omega_0 r}{3 \mu g} = v_0 - \frac{1}{3} v_0 - \frac{1}{3} \omega_0 r = \frac{1}{3}\left(2 v_0 - \omega_0 r\right) \quad .$$

Entsprechend folgt für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_G = \omega(t_G) = \omega_0 - 2 \frac{\mu g}{r} \frac{v_0 + \omega_0 r}{3 \mu g} = \omega_0 - \frac{2}{3} \frac{v_0}{r} - \frac{2}{3} \omega_0 = \frac{1}{3}\left(\omega_0 - 2 \frac{v_0}{r}\right)$$

Fall 1: $\omega_G > 0$

Der Fall tritt ein für $\omega_0 > 2 \dfrac{v_0}{r}$.

Für die Geschwindigkeit folgt: $v_G < \dfrac{1}{3}\left(2 v_0 - 2 v_0\right) = 0$

Die Münze rollt zurück.

Fall 2: $\omega_G = 0$

Der Fall tritt ein für $\omega_0 = 2 \dfrac{v_0}{4}$.

Für die Geschwindigkeit folgt: $v_G = \dfrac{1}{3}\left(2 v_0 - 2 v_0\right) = 0$

Die Münze bleibt stehen.

Fall 3: $\omega_G < 0$

Der Fall tritt ein für $\omega_0 < 2 \dfrac{v_0}{r}$.

Für die Geschwindigkeit folgt: $v_G > \dfrac{1}{3}\left(2 v_0 - 2 v_0\right) = 0$

Die Münze rollt weiter.

c) <u>Zahlenwerte:</u>

Für die gegebenen Zahlenwerte gilt:

$$2 \frac{v_0}{r} = \frac{2 \cdot 1\, m/s}{0{,}0125\, m} = 160\, s^{-1} < 200\, s^{-1} = \omega_0$$

Die Münze rollt zurück.

Die Gleitzeit berechnet sich zu $t_G = \dfrac{1\, m/s + 200\, s^{-1} \cdot 0{,}0125\, m}{3 \cdot 0{,}4 \cdot 9{,}81\, m/s^2} = \underline{0{,}2973\, s}$.

Aufgabe 4:

a) Beschleunigung:

Kinematik:

Das Jo-Jo rollt auf dem Seil ab. Daher gilt für die Winkelgeschwindigkeit ω die Rollbedingung

$$\omega=\frac{v}{r} \quad \text{mit} \quad r=\frac{d}{2} \quad .$$

Kinetik:

Die einzige äußere Kraft, die auf das System wirkt, ist die Gewichtskraft. Daher kann zunächst die Geschwindigkeit aus dem Energieerhaltungssatz ermittelt werden und daraus dann die Beschleunigung.

Das Nullniveau für die Lageenergie wird in Punkt *P* gelegt. Dann gilt für die Energien:

	Ruhelage	Ausgelenkte Lage
Lageenergie	$E_0^G=0$	$E^G(s)=-m g s$
Kinetische Energie	$E_0^K=0$	$E^K(s)=\frac{1}{2} m v^2+\frac{1}{2} J_S \omega^2$

Mit der Rollbedingung und $J_S=m i_S^2$ folgt:

$$E^K(s)=\frac{1}{2} m v^2+\frac{1}{2} m i_S^2\left(\frac{v}{r}\right)^2=\frac{1}{2} m v^2\left[1+\left(\frac{i_S}{r}\right)^2\right]$$

Der Energieerhaltungssatz lautet: $E^K(s)+E^G(s)=E_0^K+E_0^G$

Einsetzen ergibt:

$$\frac{1}{2} m v^2(s)\left[1+\left(\frac{i_S}{r}\right)^2\right]-m g s=0$$

Daraus folgt:

$$v^2(s)=\frac{2 g s}{1+\left(i_s/r\right)^2}$$

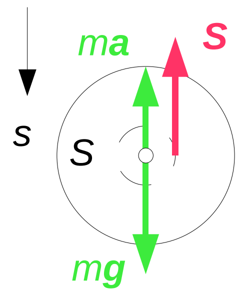
Die Beschleunigung berechnet sich zu

$$a=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}=\frac{g}{1+\left(i_S/r\right)^2}.$$

Zahlenwert: $a=\frac{g}{1+\left(15/5\right)^2}=\frac{g}{1+9}=\frac{g}{10}=\underline{0{,}981\,m/s^2}$

b) <u>Seilkraft:</u>

Dynamisches Gleichgewicht:



$$\sum\nolimits_D F_s=0\quad:\quad m\,g-m\,a-S=0$$

$$S=m\left(g-a\right)=\frac{9}{10}m\,g$$

Zahlenwert:

$$S=0{,}9\cdot 0{,}01\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2=\underline{0{,}08829\,N}$$