2. Allgemeine ebene Bewegung

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Schwerpunktsatz:
  - Aus dem Schwerpunktsatz für Massenpunktsysteme folgt unmittelbar der Schwerpunktsatz für den starren Körper:

$$\boxed{m\,\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \boldsymbol{F}}$$

  - Der Schwerpunkt eines starren Körpers bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angriffen.
  - Für die Bewegung in der *xy*-Ebene gilt:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}_S &= F_x \\ m\,\ddot{y}_S &= F_y \end{aligned}$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Drallsatz:
  - Bei einer allgemeinen Bewegung des starren Körpers ist es vorteilhaft, als Bezugspunkt nicht einen ortsfesten Punkt, sondern den bewegten Schwerpunkt zu wählen.
  - Da der starre Körper als ein System von unendlich vielen starr verbundenen Massenelementen betrachtet werden kann, lautet der Drallsatz bezüglich des bewegten Schwerpunkts wie bei einem System von Massenpunkten:

$$\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{M}_S$$

  - Zur Berechnung des Dralls wird ein körperfestes Koordinatensystem gewählt, das seinen Ursprung im Schwerpunkt hat.

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Der Drall bezüglich des Schwerpunkts ist definiert durch

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{S}} = \int_K \left(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{P}} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} \right) dm$$

- Mit $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{P}} = x\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} + y\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} + z\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}$ und $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} = v_{Px}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} + v_{Py}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}$ berechnet sich der Integrand wie im Falle der Rotation um eine feste Achse zu

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{P}} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} = \left(x\,v_{Py} - y\,v_{Px} \right) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}} + z\,v_{Px}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} - z\,v_{Py}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}$$

- Für die Geschwindigkeiten gilt: $v_{Px} = v_{Sx} - \omega\,y\,, \quad v_{Py} = v_{Sy} + \omega\,x$
- Damit berechnet sich der Integrand zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{P}} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} = & \left(x\,v_{Sy} + \omega\,x^2 - y\,v_{Sx} + \omega\,y^2 \right) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}} \\ & + \left(z\,v_{Sx} - \omega\,z\,y \right) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} - \left(z\,v_{Sy} + \omega\,z\,x \right) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Wegen $\int_K x\,dm = \int_K y\,dm = \int_K z\,dm = 0$

  führt die Integration auf

$$\boldsymbol{L}_S = \omega\left(\int_K \left(x^2+y^2\right) dm\,\boldsymbol{e}_z - \int_K x\,z\,dm\,\boldsymbol{e}_x - \int_K y\,z\,dm\,\boldsymbol{e}_y\right)$$

$$= \omega\left(J_{Sz}\,\boldsymbol{e}_z + J_{Sxz}\,\boldsymbol{e}_x + J_{Syz}\,\boldsymbol{e}_y\right)$$

- Die zeitliche Änderung des Dralls berechnet sich wie im Falle der Rotation um eine feste Achse.

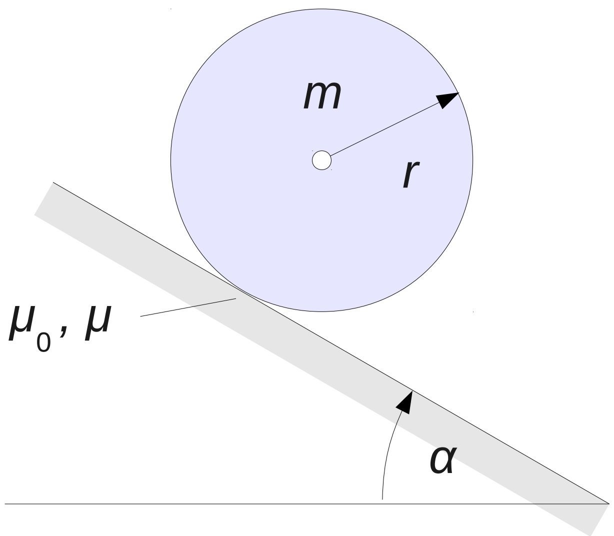
2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Ergebnis:
  - Gleichungen für die ebene Bewegung des starren Körpers:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_S &= F_x \\ m\ddot{y}_S &= F_y \\ J_{Sz}\ddot{\phi} &= M_{Sz} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M_{Sx} &= J_{Sxz}\ddot{\phi} - J_{Syz}\dot{\phi}^2 \\ M_{Sy} &= J_{Syz}\ddot{\phi} + J_{Sxz}\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

  - Aus den drei Gleichungen auf der linken Seite kann die Bewegung ($x_S(t)$, $y_S(t)$, $\varphi(t)$) ermittelt werden.
  - Mit den beiden Gleichungen auf der rechten Seite lassen sich die nötigen Führungsmomente berechnen

- Beispiel: Kugel auf schiefer Ebene

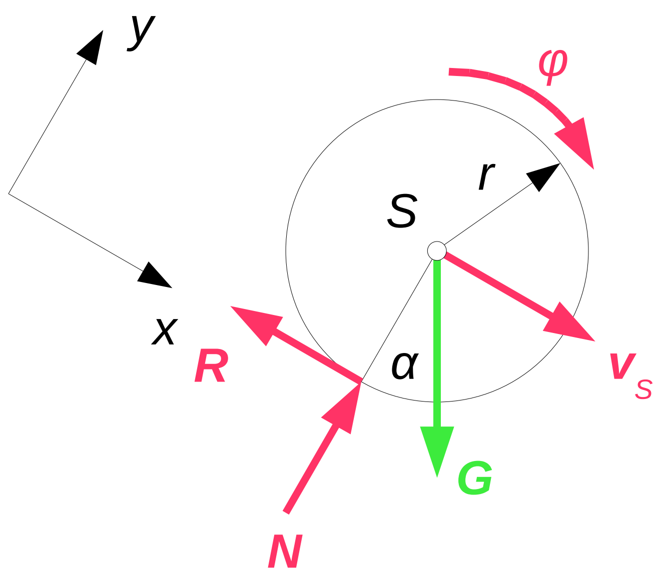


– Gegeben:
  - Homogene Kugel mit Masse m und Radius r
  - Winkel α
  - Haftungskoeffizient μ_0 und Gleitreibungskoeffizient μ

– Gesucht:
  - Beschleunigung des Schwerpunkts und Winkelbeschleunigung

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Kräfte an der freigeschnittenen Kugel:



- Schwerpunktsatz:

$$m \ddot{x}_S = -R + m g \sin(\alpha)$$

$$0 = N - m g \cos(\alpha)$$

- Drallsatz:

$$J_S \ddot{\phi} = r R$$

- Massenträgheitsmoment:

$$J_S = \frac{2}{5} m r^2$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Für das Weitere muss unterschieden werden, ob die Kugel rollt oder gleitet.
- Wenn die Kugel rollt, gilt die Rollbedingung:

$$v_S = \dot{x}_S = r\,\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}_S}{r}$$

- Damit folgt aus dem Drallsatz: $R = \frac{J_S}{r}\ddot{\phi} = \frac{J_S}{r^2}\ddot{x}_S$

- Einsetzen in den Impulssatz in *x*-Richtung führt auf

$$m\,\ddot{x}_S = m\,g\sin(\alpha) - \frac{J_S}{r^2}\ddot{x}_S$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Daraus folgt für die Beschleunigung des Schwerpunkts:

$$\ddot{x}_S = \frac{g\sin(\alpha)}{1+\dfrac{J_S}{m\,r^2}} = \frac{g\sin(\alpha)}{1+\dfrac{2}{5}} = \frac{5}{7}\,g\sin(\alpha)$$

- Damit die Kugel rollt, muss Haften vorliegen.
- Die Haftungskraft berechnet sich zu

$$H = R = \frac{J_S}{r^2}\,\ddot{x}_S = \frac{2}{5}\,m\cdot\frac{5}{7}\,g\sin(\alpha) = \frac{2}{7}\,m\,g\sin(\alpha)$$

- Haften ist möglich für

$$H = \frac{2}{7}\,m\,g\sin(\alpha) \le \mu_0 N = \mu_0\,m\,g\cos(\alpha) \;\rightarrow\; \frac{2}{7}\tan(\alpha) \le \mu_0$$

2.1 Schwerpunktsatz und Drallsatz

- Für $\tan(\alpha) > \dfrac{7}{2}\mu_0$ rutscht die Kugel. Dann liegt Gleitreibung vor, d.h. $R = \mu N = \mu m g \cos(\alpha)$

- Der Impulssatz in *x*-Richtung lautet:

$$m\ddot{x}_S = m g\left(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right) \quad \rightarrow \quad \ddot{x}_S = g\left(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right)$$

- Der Drallsatz lautet:

$$\frac{2}{5} m r^2 \ddot{\phi} = r \mu m g \cos(\alpha) \qquad \rightarrow \quad \ddot{\phi} = \frac{5}{2}\mu\frac{g}{r}\cos(\alpha)$$

- Beim Rutschen sind Schwerpunktbeschleunigung und Winkelbeschleunigung nicht durch die Rollbedingung gekoppelt.

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Methode:
  - Die Bewegungsgleichungen lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} F_x &- m\,a_{Sx} &= 0 \\ F_y &- m\,a_{Sy} &= 0 \\ M_{Sz} &- J_{Sz}\,\dot{\omega} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Sx} - J_{Sxz}\,\dot{\omega} + J_{Syz}\,\omega^2 &= 0 \\ M_{Sy} - J_{Syz}\,\dot{\omega} - J_{Sxz}\,\omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

  - Definitionen:
    - Trägheitskräfte: $F_{Tx} = -m\,a_{Sx}\,,\quad F_{Ty} = -m\,a_{Sy}$
    - Trägheitsmomente: $M_{TSz} = -J_{Sz}\,\dot{\omega}\,,\quad M_{TSx} = -J_{Sxz}\,\dot{\omega}$
      $M_{TSy} = -J_{Syz}\,\dot{\omega}$
    - Fliehkraftmomente: $M_{FSx} = J_{Syz}\,\omega^2\,,\quad M_{FSy} = -J_{Sxz}\,\omega^2$

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

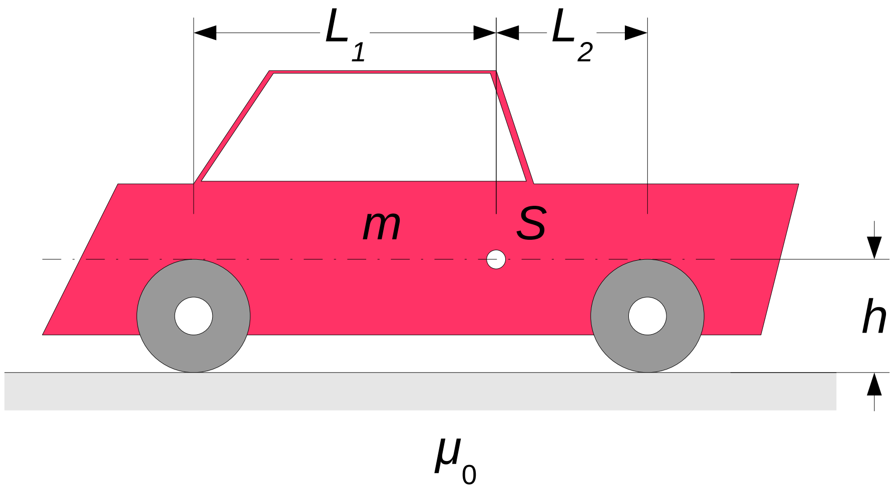
- Damit nehmen die Bewegungsgleichungen wieder die Form der statischen Gleichgewichtsbedingungen an, wobei zusätzlich zu den äußeren Kräften die Trägheitskräfte und -momente zu berücksichtigen sind.

$$\begin{aligned} F_x + F_{Tx} &= 0 \\ F_y + F_{Ty} &= 0 \\ M_{Sz} + M_{TSz} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M_{Sx} + M_{TSx} + M_{FSx} &= 0 \\ M_{Sy} + M_{TSy} + M_{FSy} &= 0 \end{aligned}$$

- Die Trägheitskräfte werden mit den Beschleunigungen des Schwerpunkts berechnet und greifen am Schwerpunkt an.

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

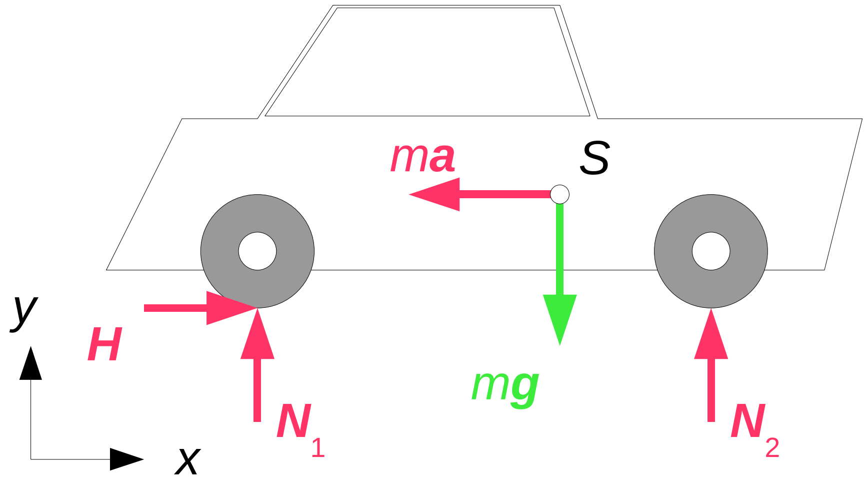
- Beispiel: Beschleunigen des Fahrzeug



- Das Fahrzeug wird als starrer Körper der Masse m mit masselosen Rädern angesehen.
- Gegeben sind die Masse m, die Abmessungen L_1, L_2 und h sowie der Haftungskoeffizient μ_0 zwischen Fahrbahn und Reifen.
- Gesucht ist die maximal mögliche Beschleunigung bei Hinterradantrieb.

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Dynamisches Gleichgewicht::



$$\sum_D F_x = 0 \;:\; H - m\,a = 0$$

$$\sum_D F_y = 0 \;:\; N_1 + N_2 - m\,g = 0$$

$$\sum_D M_{(S)} = 0 \;:\; -L_1 N_1 + L_2 N_2 + h\,H = 0$$

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Aus der zweiten Gleichung folgt: $N_2 = m\,g - N_1$
- Einsetzen in die dritte Gleichung führt auf

$$-L_1 N_1 + L_2 \left(m\,g - N_1 \right) + h\,H = 0 \;\rightarrow\; h\,H + L_2\, m\,g = \left(L_1 + L_2 \right) N_1$$

$$\rightarrow\; N_1 = \frac{h\,H + L_2\, m\,g}{L_1 + L_2}, \quad N_2 = \frac{L_1\, m\,g - h\,H}{L_1 + L_2}$$

- Haftbedingung: $H_{max} = \mu_0 N_1 = \mu_0 \dfrac{h}{L_1 + L_2} H_{max} + \mu_0\, m\,g \dfrac{L_2}{L_1 + L_2}$

$$\rightarrow\; \left(1 - \frac{\mu_0 h}{L_1 + L_2} \right) H_{max} = \mu_0\, m\,g \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

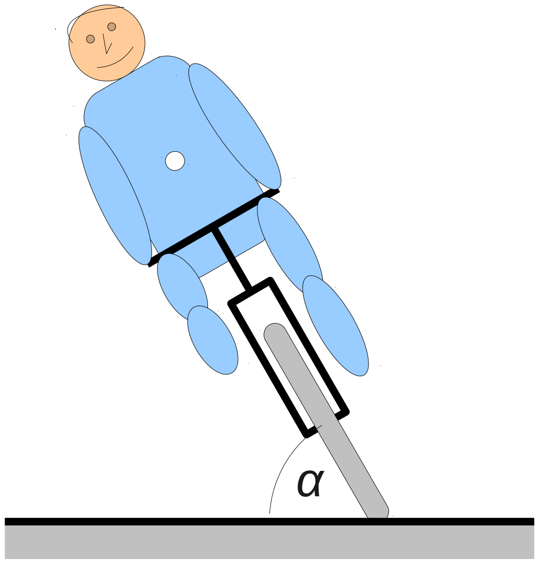
- Maximale Beschleunigung:

$$a_{Hmax}=\frac{H_{max}}{m}=\frac{\mu_0 L_2}{L_1+L_2-\mu_0 h}g$$

- Dieses Ergebnis ist richtig, solange das Vorderrad nicht abhebt.
- Das Vorderrad hebt ab für $N_2 < 0$.

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Beispiel: Radfahrer in Kurve
  - Ein Radfahrer fährt durch eine Kurve.
  - Gegeben:
    - Geschwindigkeit v
    - Kurvenradius r
  - Gesucht:
    - Neigungswinkel α
    - Haftungskoeffizient μ_0
  - Der Drall der Räder wird vernachlässigt.



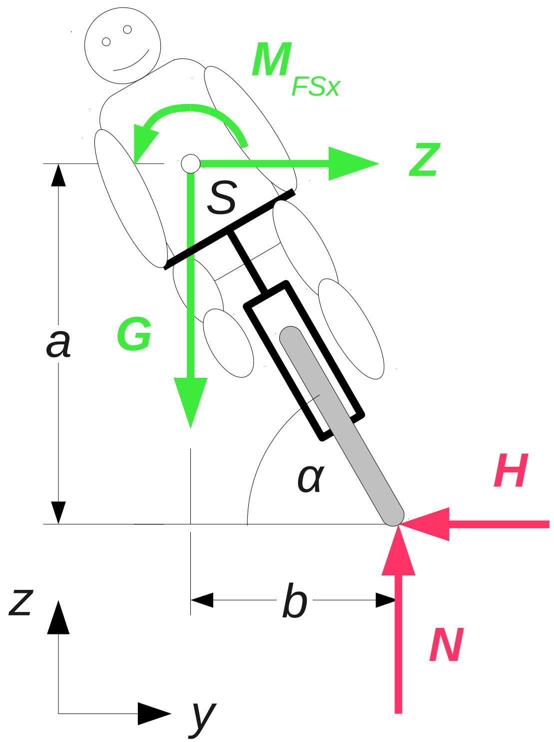
- Dynamisches Gleichgewicht:
  - Am Schwerpunkt greifen die Gewichtskraft *G* und die Zentrifugalkraft *Z* an:

$$G = m\,g\,,\quad Z = m\,a_n = m\frac{v^2}{r}$$

  - Zusätzlich wirkt das Fliehkraftmoment

$$M_{FSx} = \omega^2 J_{Syz} = \left(\frac{v}{r}\right)^2 J_{Syz}$$

um die aus der Zeichenebene zeigende *x*-Achse.



2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Dynamisches Gleichgewicht:

$$\sum_D F_y = 0 \; : \; Z - H = 0 \;\rightarrow\; H = Z = m\frac{v^2}{r}$$

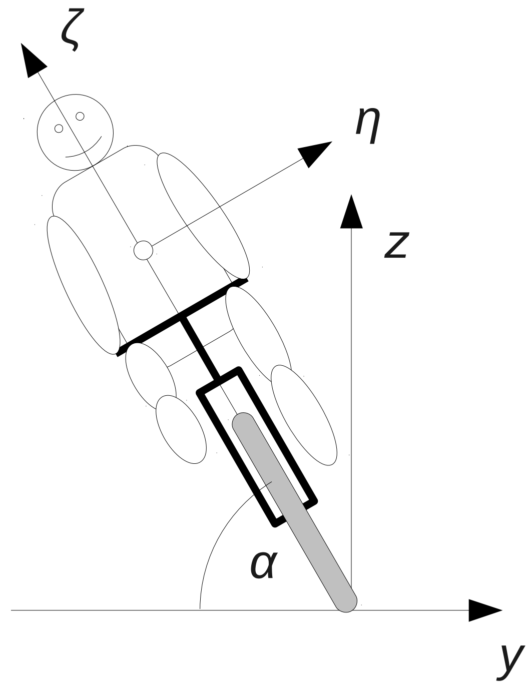
$$\sum_D F_z = 0 \; : \; -G + N = 0 \;\rightarrow\; N = G = m\,g$$

$$\sum_D M_{(S)} = 0 \; : \; b\,N - a\,H + M_{FSx} = 0 \;\rightarrow\; b\,m\,g + \left(\frac{v}{r}\right)^2 J_{Syz} = a\,m\frac{v^2}{r}$$

- Haftbedingung: $H = m\frac{v^2}{r} \leq H_0 = \mu_0 N = \mu_0 m\,g \;\rightarrow\; \mu_0 \geq \frac{v^2}{g\,r}$

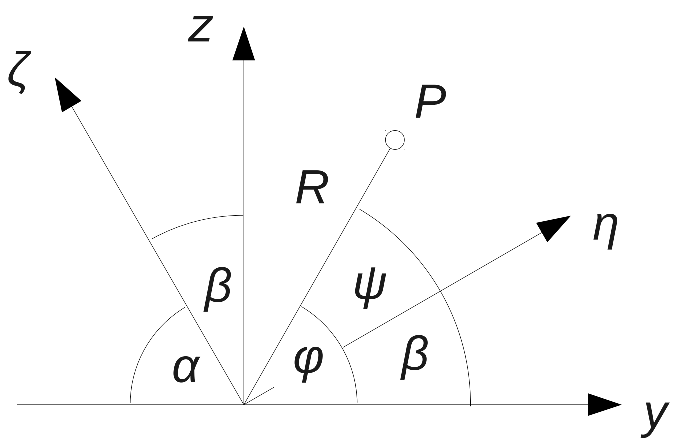
2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Zentrifugalmoment:
  - Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Radfahrer symmetrisch bezüglich der $\xi\zeta$-Ebene ist.
  - Dann gilt im gedrehten Koordinatensystem: $J_{S\eta\zeta}=0$
  - Die Massenträgheitsmomente $J_{S\eta}$ und $J_{S\zeta}$ für Drehungen um die η- bzw. ζ-Achse werden als bekannt vorausgesetzt.



2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Umrechnung der Koordinaten:



$$\beta = 90° - \alpha, \quad \phi = \psi + \beta$$

$$\eta = R\cos(\psi), \quad \zeta = R\sin(\psi)$$

$$y = R\cos(\phi), \quad z = R\sin(\phi)$$

$$y = R\cos(\psi+\beta) = R\left(\cos(\psi)\cos(\beta) - \sin(\psi)\sin(\beta)\right)$$
$$= \eta\cos(\beta) - \zeta\sin(\beta) = \eta\sin(\alpha) - \zeta\cos(\alpha)$$

$$z = R\sin(\psi+\beta) = R\left(\sin(\psi)\cos(\beta) + \cos(\psi)\sin(\beta)\right)$$
$$= \zeta\cos(\beta) + \eta\sin(\beta) = \zeta\sin(\alpha) + \eta\cos(\alpha)$$

$$yz = \left(\eta\sin(\alpha) - \zeta\cos(\alpha)\right)\left(\zeta\sin(\alpha) + \eta\cos(\alpha)\right)$$
$$= \left(\eta^2 - \zeta^2\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \eta\zeta\left(\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)\right)$$

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Mit $J_{S\eta\zeta}=0$ folgt für das Zentrifugalmoment:

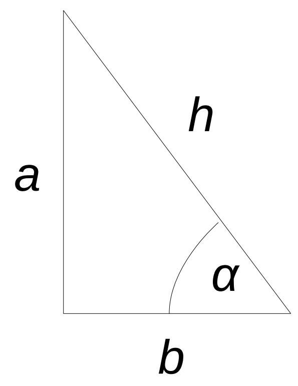
$$J_{Syz}=-\int_K y\,z\,dm=-\int_K \left(\eta^2-\zeta^2\right)dm\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$=-\int_K \left[(\xi^2+\eta^2)-(\xi^2+\zeta^2)\right]dm\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$=-\left(J_{S\zeta}-J_{S\eta}\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

- Geometrie:

$$a=h\sin(\alpha)$$
$$b=h\cos(\alpha)$$



2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Neigungswinkel:
  - Aus der Momentengleichung folgt:

$$m\,g\,h\cos(\alpha)+\left(\frac{v}{r}\right)^2\left(J_{S\eta}-J_{S\zeta}\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha)=m\frac{v^2}{r}h\sin(\alpha)$$

$$\rightarrow\quad \frac{g\,r}{v^2}+\frac{J_{S\eta}-J_{S\zeta}}{r\,h\,m}\sin(\alpha)=\tan(\alpha)$$

  - Die Lösung dieser Gleichung führt auf ein Polynom 4. Ordnung für den Tangens.
  - Für $\frac{J_{S\eta}-J_{S\zeta}}{r\,h\,m}\sin(\alpha)\ll\frac{g\,r}{v^2}$

    ergibt sich die bekannte Näherung: $\frac{g\,r}{v^2}\approx\tan(\alpha)$

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

– Zahlenwerte:
  - $v = 10m/s$
  - $r = 20m$
  - $h = 1,2m$
  - $m = 75kg$
  - $J_{S\eta} = 20kgm^2$
  - $J_{S\zeta} = 2kgm^2$

- Damit berechnen sich die einzelnen Terme zu

$$\frac{g\,r}{v^2} = \frac{9{,}81\,m/s^2 \cdot 20\,m}{10^2\,m^2/s^2} = 1{,}962$$

$$\frac{J_{S\eta} - J_{S\zeta}}{r\,h\,m} = \frac{(20-2)\,kgm^2}{20\,m \cdot 1{,}2\,m \cdot 75\,kg} = 0{,}01$$

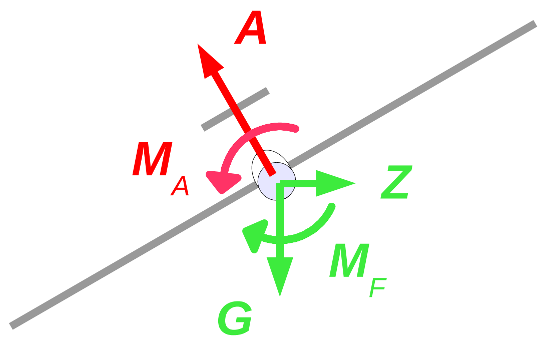
- Haftungskoeffizient:

$$\mu_0 \geq \frac{v^2}{g\,r} = \frac{1}{1{,}962} = 0{,}5097$$

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Neigungswinkel aus Näherung: $\tan(\tilde{\alpha}) = 1{,}962 \quad \rightarrow \quad \tilde{\alpha} = 62{,}99°$
- Exakter Neigungswinkel (durch Iteration ermittelt): $\alpha = 63{,}10°$

- Ähnliche Verhältnisse liegen bei einem Flugzeug im Kreisflug vor.



2.3 Arbeit und Energie

- Kinetische Energie:
  - Wie bei der Rotation um eine feste Achse gilt:

$$E^K = \frac{1}{2} \int_K v^2 \, dm$$

  - Das Quadrat der Geschwindigkeit berechnet sich jetzt zu

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = \left(v_{Sx} - \omega\, y\right)^2 + \left(v_{Sy} + \omega\, x\right)^2 \\ &= v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2 + \omega^2 \left(x^2 + y^2\right) - 2\, v_{Sx}\, \omega\, y + 2\, v_{Sy}\, \omega\, x \end{aligned}$$

  - Integration über den Körper ergibt:

$$E^K = \frac{1}{2} \left(v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2\right) m + \frac{1}{2} \omega^2 \int_K \left(x^2 + y^2\right) dm$$

2.3 Arbeit und Energie

- Die kinetische Energie eines starren Körpers ist die Summe der kinetischen Energie der Translation des Schwerpunktes und der kinetischen Energie der Rotation um den Schwerpunkt.

$$\boxed{E^K = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2}$$

2.3 Arbeit und Energie

- Arbeitssatz:
  - Aus dem Arbeitssatz für Massenpunktsysteme mit starren Bindungen folgt unmittelbar der Arbeitssatz für den starren Körper:

$$\boxed{E_B^K - E_A^K = W_{AB}}$$

  - Die Differenz zwischen der kinetischen Energie zum Zeitpunkt *B* und der kinetischen Energie zum Zeitpunkt *A* ist gleich der in diesem Zeitraum von den äußeren Kräften verrichteten Arbeit.

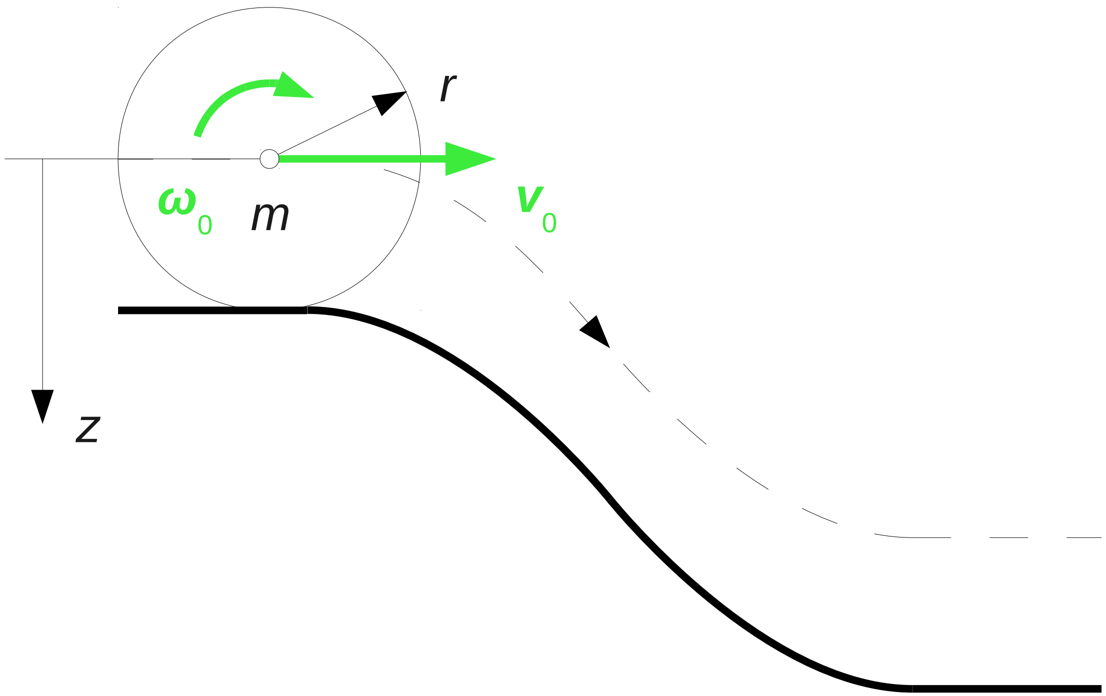
2.3 Arbeit und Energie

- Energieerhaltungssatz:
  - Wenn alle äußeren Kräfte konservative Kräfte sind, kann ihre Arbeit aus der potenziellen Energie berechnet werden.
  - Dann gilt:

$$\boxed{E_B^K + E_B^P = E_A^K + E_A^P}$$

  - Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist konstant.

- Beispiel: Rollende Kugel



– Aufgabenstellung:
  - Eine homogene Kugel mit Masse *m* und Radius *r* rollt einen Abhang hinunter.
  - Ihr Schwerpunkt hat die Anfangsgeschwindigkeit v_0.
  - Gesucht ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der vom Schwerpunkt zurückgelegten Höhendifferenz *z*.

2.3 Arbeit und Energie

- Massenträgheitsmoment der Kugel: $J_S = \frac{2}{5} m r^2$
- Rollbedingung: $\omega r = v \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$
- Außer der Führungskraft wirkt nur die Gewichtskraft auf die Kugel. Die Gewichtskraft ist eine konservative Kraft. Daher kann der Energieerhaltungssatz angewendet werden.
- Kinetische Energie:

$$E_0^K = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{2}{5} \omega_0^2 r^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{2}{5} v_0^2 \right) = \frac{7}{10} m v_0^2$$

$$E^K(z) = \frac{7}{10} m v^2(z)$$

2.3 Arbeit und Energie

- Als Nullniveau für die Lageenergie wird der Ausgangspunkt gewählt.
- Dann gilt für die Lageenergie: $E_0^G = 0\,,\;\; E^G(z) = -m g\, z$
- Damit lautet der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{7}{10} m\, v^2(z) - m g\, z = \frac{7}{10} m\, v_0^2$$

- Daraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$v^2(z) = v_0^2 + \frac{10}{7} g\, z \;\;\rightarrow\;\; v(z) = \sqrt{v_0^2 + \frac{10}{7} g\, z}$$