Kapitel 4

Lagrangesche Multiplikatorenregeln für Näherungslösungen

4.1 Verfahren zur Herleitung von Multiplikatorenregeln für Näherungslösungen

4.1.1 Direkte Verfahren

Im Abschnitt 2.3 wurde bereits angedeutet, wie man notwendige Optimalitätsbedingungen in Form Lagrangescher Multiplikatorenregeln mit Anwendung der Bildraumtechnik erhält: Man betrachte im Bildraum zum einen die „erreichbare“ Menge, das heißt alle Bilder zulässiger Elemente; im untenstehenden Modell wäre das $f(X)$. Zum anderen konstruiere man zu allen Bildpunkten $f(x_0)$ eine (üblicherweise konvexe) Menge, die die Funktionswerte enthält, die „besser“ als $f(x_0)$ sind; diese Menge wird unten mit $W(x_0)$ bezeichnet. Die Konstruktion erfolgt so, daß beide Mengen genau dann disjunkt sind, wenn x_0 eine Optimallösung der betrachteten Aufgabe ist.

Das Ziel ist es nun, beide Mengen durch ein lineares, stetiges Funktional zu trennen. Um einen Trennungssatz anwenden zu können, ist man meist gezwungen, die Menge $f(X)$ durch eine geeignete konvexe Menge zu ersetzen, die die wichtigsten Eigenschaften der Menge beibehält. Diese Konvexifizierung stellt für gewöhnlich den aufwendigsten Teil der Arbeit mit der Bildraumtechnik dar.

Hat man ein solches trennendes Funktional gefunden, liefert dies im wesentlichen bereits den gewünschten Langrangeschen Multiplikator. Eine recht gute Darstellung dieser Vorgehensweise findet man in [39].

In einigen Fällen führt diese Methode auch bei näherungsweise optimalen Lösungen zum Erfolg. Um dies vorzuführen, wollen wir die Herangehensweise, die Pourciau in [39] zur Herleitung einer konvexen Multiplikatorenregel benutzt, auf den Fall von Näherungslösungen derselben Aufgabe übertragen.

Betrachtet wird das folgende Optimierungsproblem

$$f_1(x) \longrightarrow Min!$$

$$\text{über} \quad x \in \{x \in R^n |\ f_{21}(x) \leq 0, \ldots, f_{2m_2}(x) \leq 0, x \in X\},$$

wobei X eine konvexe Teilmenge des R^nist und $f_1, f_{21}, \ldots, f_{2m_2}$ reellwertige konvexe Funktionen auf X sind. Dann gilt das folgende Resultat.

Theorem 4.1 (Konvexe Multiplikatorenregel) *Sei $x_0 \in X$ eine Minimallösung des obigen Problems. Dann existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2m_2}) \in R^{1+m_2} \backslash \{0^{1+m_2}\}$ mit $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_{2k} \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ und*

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f(x) \rangle &\geq \langle \lambda, f(x_0) \rangle \qquad \forall x \in X, \\ \lambda_{2k} f_{2k}(x_0) &= 0 \qquad (k = 1, \ldots, m_2). \end{aligned}$$

Zum Beweis wird in [39] für jedes $x_0 \in X$ eine konvexe Menge

$$W(x_0) := \left\{ y = (y_1, y_{21}, \ldots, y_{2m_2}) \in R^{1+m_2} \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y_1 & < & f_1(x_0) \\ y_{21} & \leq & 0 \\ \vdots & & \\ y_{2m_2} & \leq & 0 \end{array} \right\} \tag{4.1}$$

definiert. Es ist klar, daß x_0 genau dann eine Minimallösung ist, wenn

$$f(X) \cap W(x_0) = \emptyset. \tag{4.2}$$

Sei nun x_ε lediglich eine ε–Minimallösung ($\varepsilon \geq 0$), das heißt, x_ε ist zulässig und es gilt

$$f_1(x_\varepsilon) \leq f_1(x) + \varepsilon$$

für jedes x mit $x \in X$ und $f_{2k}(x) \leq 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$. Offensichtlich ist x_ε eine ε–Minimallösung genau dann, wenn

$$f(X) \cap [-(\varepsilon, 0^{m_2}) + W(x_\varepsilon)] = \emptyset. \tag{4.3}$$

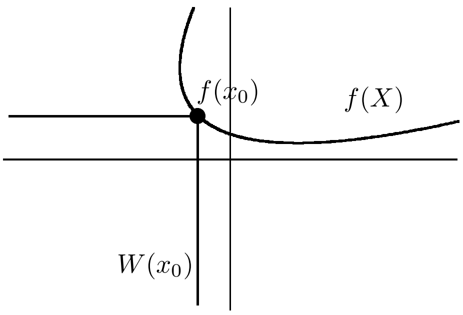

Abbildung 4.1: Trennbarkeit wegen $f(X) \cap W(x_0) = \emptyset$ im Optimalpunkt.

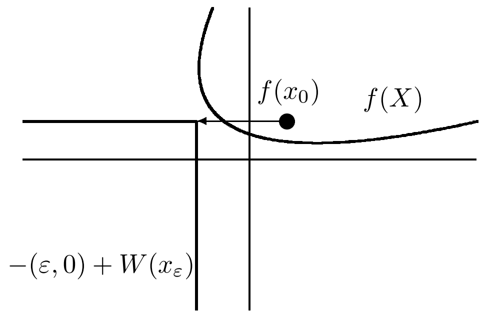

Abbildung 4.2: Trennbarkeit wegen $f(X) \cap [-(\varepsilon, 0)) + W(x_\varepsilon)] = \emptyset$ im ε–Optimalpunkt.

Unter Ausnutzung von (4.3) anstelle von (4.2) können wir den Beweis analog zu Pourciau weiterführen und erhalten schließlich eine Multiplikatorenregel für Näherungslösungen.

Zur Konvexifizierung der Menge $f(X)$ betrachten wir an ihrer Stelle die Menge $f(X) + R_+^{1+m_2}$. Offenbar ist diese Menge konvex und Gleichung (4.3) ist äquivalent mit

$$[f(X) + R_+^{1+m_2}] \cap [-(\varepsilon, 0^{m_2}) + W(x_\varepsilon)] = \emptyset. \tag{4.4}$$

Die Anwendung eines Trennungssatzes liefert die Existenz eines Multiplikators $\lambda = (\lambda_1, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2m_2}) \in R^{1+m_2} \setminus \{0^{1+m_2}\}$ mit

$$\langle \lambda, f(x) + k \rangle \geq \langle \lambda, -(\varepsilon, 0^{m_2}) + y \rangle \qquad \forall x \in X \quad \forall k \in R_+^{1+m_2} \quad \forall y \in W(x_\varepsilon),$$

woraus folgt

$$\langle \lambda, f(x) \rangle \geq -\varepsilon\lambda_1 + \langle \lambda, y \rangle \qquad \forall x \in X \quad \forall y \in cl\, W(x_\varepsilon). \tag{4.5}$$

Wegen $f(x_\varepsilon) \in cl\, W(x_\varepsilon)$ folgt aus (4.5)

$$\langle \lambda, f(x) \rangle \geq \langle \lambda, f(x_\varepsilon) \rangle - \varepsilon\lambda_1 \qquad \forall x \in X. \tag{4.6}$$

Wäre $\lambda_1 < 0$ oder $\lambda_{2k} < 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$, so kann die rechte Seite der Ungleichung (4.5) bei geeigneter Wahl von $y \in cl\, W(x_\varepsilon)$ beliebig groß werden und jede linksseitige Konstante $\langle \lambda, f(x) \rangle$ (x fest in X) übersteigen. Mithin muß gelten

$$\lambda_1 \geq 0, \qquad \lambda_{2k} \geq 0 \quad (k = 1, \ldots, m_2). \tag{4.7}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} f_1(x_\varepsilon) \\ f_{21}(x_\varepsilon) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} f_{2k}(x_\varepsilon) \\ \vdots \\ f_{2m_2}(x_\varepsilon) \end{pmatrix} \in cl\, W(x_\varepsilon) \qquad (k = 1, \ldots, m_2)$$

ergibt (4.5) mit $x = x_\varepsilon$ schließlich

$$\frac{1}{2}\lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) \geq -\varepsilon\lambda_1 \qquad (k = 1, \ldots, m_2)$$

und wegen $\lambda_{2k} \geq 0$ und $f_{2k}(x_\varepsilon) \leq 0$

$$-2\varepsilon\lambda_1 \leq \lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) \leq 0 \qquad (k = 1, \ldots, m_2). \tag{4.8}$$

Mit (4.6), (4.7) und (4.8) haben wir in Analogie zur konvexen Multiplikatorenregel folgende Regel für Näherungslösungen bewiesen.

Satz 4.2 *Sei $x_\varepsilon \in X$ eine ε–Minimallösung ($\varepsilon \geq 0$) des gegebenen Problems. Dann existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2m_2}) \in R^{1+m_2} \setminus \{0^{1+m_2}\}$ mit $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_{2k} \geq 0$ ($k = 1, \ldots, m_2$) und*

$$\langle \lambda, f(x) \rangle \geq \langle \lambda, f(x_\varepsilon) \rangle - \varepsilon\lambda_1 \qquad \forall x \in X,$$

$$-2\varepsilon\lambda_1 \leq \lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) \leq 0 \qquad (k = 1, \ldots, m_2).$$

Bemerkung 4.1 *Die in der Komplementaritätsbedingung auftretende Schranke $-2\varepsilon\lambda_1$ ist durch weitgehend analoge Übertragung der Pourciauschen Beweiskette entstanden. Die Schranke läßt sich jedoch verschärfen: Es gilt nämlich*

$$\begin{pmatrix} f_1(x_\varepsilon) \\ f_{21}(x_\varepsilon) \\ \vdots \\ f_{2,k-1}(x_\varepsilon) \\ 0 \\ f_{2,k+1}(x_\varepsilon) \\ \vdots \\ f_{2m_2}(x_\varepsilon) \end{pmatrix} \in cl\, W(x_\varepsilon) \qquad (k = 1, \ldots, m_2),$$

woraus folgt

$$\lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) \geq -\varepsilon\lambda_1 \qquad (k = 1, \ldots, m_2) \tag{4.9}$$

Dieser Schluß könnte auch im Pourciauschen Originalbeweis für $\varepsilon = 0$ zur Anwedung kommen.

4.1.2 Verfahren unter Verwendung des Variationsprinzips von Ekeland

Eine andere Variante zur Herleitung von Optimalitätsbedingungen für Näherungslösungen basiert auf der Anwendung des Ekelandschen Variationsprinzips. Dieses wurde erstmalig im Jahre 1974 veröffentlicht [11]. Eine Formulierung lautet:

Theorem 4.3 *Sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum und sei $f : \mathcal{X} \longrightarrow R \cup \{+\infty\}$ eine eigentliche, unterhalbstetige, nach unten beschränkte Funktion.*
Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$, für jeden Punkt $x_0 \in \mathcal{X}$ mit

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x) + \varepsilon$$

und jedes $\lambda > 0$ ein Punkt $x_\varepsilon \in \mathcal{X}$, so daß

- *(i)* $f(x_\varepsilon) \leq f(x_0)$,
- *(ii)* $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \lambda$,
- *(iii)* $f(x) > f(x_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - x_\varepsilon\| \ \forall x \neq x_\varepsilon$.

Für restringierte Aufgaben verwendet man die folgende Form des Satzes.

Korollar 4.4 *Sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum und sei $f : \mathcal{X} \longrightarrow R$ eine unterhalbstetige Funktion, die auf einer nichtleeren, abgeschlossenen Teilmenge S von $\mathcal{X}$ nach unten beschränkt ist.*
Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ und für jeden Punkt $x_0 \in S$ mit

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in S} f(x) + \varepsilon$$

ein Punkt $x_\varepsilon \in S$, so daß

- *(i)* $f(x_\varepsilon) \leq f(x_0)$,
- *(ii)* $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,
- *(iii)* $f(x) \geq f(x_\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}\|x - x_\varepsilon\| \ \forall x \in S$.

Beweis. Man ersetze f durch die eigentliche, unterhalbstetige und nach unten beschränkte Funktion

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{wenn} \quad x \in S \\ +\infty, & \text{wenn} \quad x \in \mathcal{X} \setminus S. \end{cases}$$

und wende Theorem 4.3 mit $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ an. ■

Die Herleitung einer Multiplikatorenregel mit Hilfe des Variationsprinzips beruht im wesentlichen auf folgender Überlegung: Nach (iii) ist x_ε eine Minimallösung einer im Vergleich zum Ausgangsproblem etwas gestörten Aufgabe. Mithin erfüllt x_ε eine der (meist bekannten) notwendigen Optimalitätsbedingungen für das gestörte Problem. Man untersucht nun, ob sich aus diesen Bedingungen Rückschlüsse auf das ursprünglich betrachtete Problem ziehen lassen.

Diese Vorgehensweise soll beispielhaft an der konvexen Optimierungsaufgabe aus dem vorangegangenen Abschnitt erläutert werden. Zusätzlich zu den dort getroffenen Vereinbarungen sei vorausgesetzt, daß die Menge $S := \{x \in X \mid f_{21}(x) \leq 0, \ldots, f_{2m_2}(x) \leq 0\}$ abgeschlossen und die Funktion f_1 über S nach unten beschränkt ist.

Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Sei $x_0 \in S$ eine ε–Minimallösung des Problems, das heißt

$$f_1(x_0) \leq \inf_{x \in S} f_1(x) + \varepsilon.$$

Dann gibt es ein x_ε, so daß die Aussagen (i), (ii) und (iii) von Korollar 4.4 erfüllt sind. Nach (iii) ist x_ε eine Minimalstelle der Funktion $f_1(.) + \sqrt{\varepsilon}\|. - x_\varepsilon\|$ über S. Da diese Funktion konvex ist, können wir die konvexe Multiplikatorenregel anwenden und erhalten die Existenz eines Multiplikators $\lambda = (\lambda_1, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2m_2}) \in R^{1+m_2} \setminus \{0^{1+m_2}\}$ mit $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_{2k} \geq 0$, $\lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) = 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ und

$$\left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{2m_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_{21}(x) \\ \vdots \\ f_{2m_2}(x) \end{pmatrix} + \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} \|x - x_\varepsilon\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle \lambda, f(x_\varepsilon) \rangle \qquad \forall x \in X,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\langle \lambda, f(x) \rangle \geq \langle \lambda, f(x_\varepsilon) \rangle - \sqrt{\varepsilon}\lambda_1 \|x - x_\varepsilon\| \qquad \forall x \in X.$$

Somit ist gezeigt:

Satz 4.5 *Sei $x_0 \in S$ eine ε–Minimallösung $(\varepsilon > 0)$ des gegebenen Problems. Dann existiert ein Punkt $x_\varepsilon \in S$, so daß* *(i)* $f_1(x_\varepsilon) \leq f_1(x_0)$,

(ii) $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,

(iii) $\exists \lambda = (\lambda_1, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2m_2}) \in R^{1+m_2} \setminus \{0^{1+m_2}\}$ *mit* $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_{2k} \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ *und*

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f(x) \rangle &\geq \langle \lambda, f(x_\varepsilon) \rangle - \sqrt{\varepsilon}\lambda_1 \|x - x_\varepsilon\| \qquad \forall x \in X, \\ \lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) &= 0 \qquad (k = 1, \ldots, m_2). \end{aligned}$$

Optimalitätsbedingungen, die mit Hilfe des Ekelandschen Variationsprinzips erzeugt werden, finden ihre Anwendung meist in folgender Form.

Korollar 4.6 *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es eine* ε*–Minimallösung* $x_\varepsilon \in S$ *des gegebenen Problems, für die ein Multiplikator* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2m_2}) \in R^{1+m_2} \setminus \{0^{1+m_2}\}$ *existiert mit* $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_{2k} \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ *und*

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f(x) \rangle &\geq \langle \lambda, f(x_\varepsilon) \rangle - \sqrt{\varepsilon}\lambda_1 \|x - x_\varepsilon\| \qquad \forall x \in X, \\ \lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) &= 0 \qquad (k = 1, \ldots, m_2). \end{aligned}$$

Beweis. Sicher gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in S$ mit

$$f_1(x_0) \leq \inf_{x \in S} f_1(x) + \varepsilon.$$

Dann existiert es ein $x_\varepsilon \in S$, das (i), (ii) und (iii) von Satz 4.5 erfüllt. Aus (i) folgt die ε–Optimalität von x_ε:

$$f_1(x_\varepsilon) \leq f_1(x_0) \leq \inf_{x \in S} f_1(x) + \varepsilon.$$

Aus (iii) folgen die restlichen Behauptungen. ■

Bemerkung 4.2 *Die Qualität der Optimalitätsbedingung in Korollar 4.6 ist eine andere als die von Satz 4.2. Während letztere Aussage eine notwendige Bedingung ist, das heißt, jede* ε*–optimale Lösung muß die dort angegebenen Eigenschaften haben, besagt Korollar 4.6 nur:*
Unter all den Punkten, die die geforderten Eigenschaften besitzen, befindet sich wenigstens einer, der eine ε*–optimale Lösung der Aufgabe ist.*

4.2 Zur Struktur von Multiplikatorenregeln für Näherungslösungen

Obwohl die im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Multiplikatorenregeln relativ rasch aus dem Ekelandschen Prinzip folgen, erlauben sie uns doch bereits einen Einblick in die fundamentale Struktur von Lagrangeschen Multiplikatorenregeln für Näherungslösungen.

Notwendige Optimalitätsbedingungen in Form von Multiplikatorenregeln bestehen, wie allgemein bekannt, im wesentlichen aus zwei Aussagen:

- einer *Stationaritätsbedingung*, die etwa das Verschwinden der Ableitung der Lagrange–Funktion im Fall differenzierbarer Funktionen unterstellt, und
- einer *Komplementaritätsbedingung*, die fordert, daß die Multiplikatoren, die mit nichtaktiven Nebenbedingungen korrespondieren, Null sein müssen.

Diese Struktur tritt im multikriteriellen Fall, aber auch im Fall skalarer Optimierungsaugaben auf.

Erwartungsgemäß stellen notwendige Optimalitätsbedingungen für Näherungslösungen schwächere Anforderungen auf als die vergleichbaren Bedingungen für exakte Lösungen. Diese Abschwächung betrifft bei Multiplikatorenregeln im allgemeinen beide Fundamentalaussagen. So wird bei Satz 4.2 im Vergleich zur konvexen Multiplikatorenregel (Theorem 4.1) die Stationaritätsbedingung

$$\langle \lambda, f(x) \rangle \geq \langle \lambda, f(x_0) \rangle \qquad \forall x \in X$$

ersetzt durch

$$\langle \lambda, f(x) \rangle \geq \langle \lambda, f(x_\varepsilon) \rangle - \varepsilon \lambda_1 \qquad \forall x \in X.$$

Die Näherungslösung x_ε erweist sich also als eine lediglich annähernde Minimalstelle der Lagrange–Funktion. Weiterhin wird die Komplementaritätsbedingung

$$\lambda_{2k} f_{2k}(x_0) = 0 \qquad (k = 1, \dots, m_2)$$

abgeschwächt zu

$$-\varepsilon \lambda_1 \leq \lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) \leq 0 \qquad (k = 1, \dots, m_2),$$

was besagt, daß der komplementäre Schlupf $\lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon)$ durchaus negative Werte, die aber nicht weit von Null entfernt liegen, annehmen kann.

Multiplikatorenregeln für Näherungslösungen bestehen also aus

- einer leicht verletzten Stationaritätsbedingung und
- einer leicht verletzten Komplementaritätsbedingung.

Die „leichte Verletzung“ läßt sich durch den Toleranzparameter ε, der die Güte der Optimalität der Näherungslösung beschreibt, quantifizieren.

Die oben betrachteten Sätze haben für die Größe der Abweichung von den exakten Optimalitätsbedingungen starre Schranken vorgegeben. Es ist möglich, diese Schranken innerhalb gewisser Spielräume flexibel zu gestalten, so daß sich der Grad der Abweichung von der strengen Stationarität und der Grad der Abweichung bei der Komplementarität wechselseitig kompensieren. Ein interessantes Resultat über dieses Phänomen findet man in einer Arbeit von Strodiot, Nguyen und Heukemes [46]. Dieses besagt, daß eine ε–Näherungslösung eine Multiplikatorenregel erfüllt, bei der die Stationaritätsbedingung in der Größenordnung eines Parameters ε_1 und die Komplementaritätsbedingung in der Größenordnung von ε_2 verletzt sind, wobei $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$ gilt und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ eingehalten wird.

Um dieses Resultat konkret zu formulieren, betrachten wir

$$f_1(x) \longrightarrow Min!$$

$$\text{über} \quad x \in \{x \in R^n \mid f_{21}(x) \leq 0, \ldots, f_{2m_2}(x) \leq 0\},$$

wobei $f_1, f_{21}, \ldots, f_{2m_2}$ reellwertige konvexe Funktionen auf R^n sind. Nach [40] bezeichnen wir für eine konvexe Funktion $g : R^n \longrightarrow R$ die Menge

$$\partial_\varepsilon g(x_0) := \{x^* \in R^n \mid \langle x^*, x - x_0 \rangle \leq g(y) - g(x) + \varepsilon\}$$

als ε–Subdifferential von g im Punkt $x_0 \in R^n$.

Für diese Aufgabe wird in [46] gezeigt:

Theorem 4.7 *Für das obige Problem sei die Regularitätsbedingung*

$$\exists \bar{x} \in R^n : \qquad f_{2k}(\bar{x}) < 0 \quad (k = 1, \ldots, m_2)$$

erfüllt. Der Punkt $x_\varepsilon \in R^n$ ist eine ε–Minimallösung $(\varepsilon \geq 0)$ des Problems genau dann, wenn Konstanten $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_{2k} \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ mit

$$\varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{m_2} \varepsilon_{2k} \leq \varepsilon \tag{4.10}$$

und Multiplikatoren $\varepsilon_{2k} \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ *existieren, so daß*

$$0 \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m_2} \partial_{\varepsilon_2 k}(\lambda_{2k} f_{2k})(x_\varepsilon), \tag{4.11}$$

$$\varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{m_2} \varepsilon_{2k} - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) \leq 0. \tag{4.12}$$

Bemerkung 4.3 *Bei der Wahl von* $\varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = \cdots = \varepsilon_{2m_2} = 0$ *ergibt sich aus (4.11), (4.12) eine strenge Erfüllung der Stationaritätsbedingung und eine maximale Verletzung der Komplementaritätsbedingung:*

$$0 \in \partial f_1(x_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m_2} \partial(\lambda_{2k} f_{2k})(x_\varepsilon),$$

$$-\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) \leq 0.$$

Im anderen Extremfall ergibt sich bei Wahl von ε_1 *und* ε_{2k} $(k = 1, \ldots, m_2)$ *mit* $\varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{m_2} \varepsilon_{2k} = \varepsilon$ *die größtmögliche Störung bei der Stationarität und die strenge Komplementarität:*

$$0 \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m_2} \partial_{\varepsilon_2 k}(\lambda_{2k} f_{2k})(x_\varepsilon),$$

$$\lambda_{2k} f_{2k}(x_\varepsilon) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m_2).$$

In der jüngeren Literatur findet man in einer Arbeit von Yokoyama [55] eine Anwendung dieses Theorems auf multikriterielle Aufgaben.

Bei Multiplikatorenregeln für Näherungslösungen, die mit Hilfe des Ekelandschen Variationsprinzips hergeleitet wurden, zeigt sich die Veränderung im Vergleich zur Regel für exakte Lösungen nur in einer Abschwächung der Stationaritätsbedingung, während der komplementäre Schlupf weiterhin verschwindet. Dies ist typisch für derartige Aussagen, da hier nicht Näherungslösungen der ursprünglichen Aufgabe, sondern exakte Lösungen einer gestörten Aufgabe betrachtet werden.

4.3 Multiplikatorenregeln für Näherungslösungen unter Benutzung derivierter Mengen

Nach einer allgemeinen Betrachtung der Struktur näherungsweiser Optimalitätsbedingungen wollen wir uns nun auf solche Multiplikatorenregeln konzentrieren, bei denen derivierte Mengen Verwendung finden. Es ist mir gelungen, eine mit der Multiplikatorenregel von Breckner (Theorem 2.2) zusammenhängende Optimalitätsbedingung zu beweisen, die für Näherungslösungen der betrachteten Aufgabe gilt. Diese Herleitung erfolgte unter Verwendung des Variationprinzips von Ekeland.

Eine Anwendung des Ekelandschen Prinzips auf derivierte Mengen allgemeiner Natur erwies sich zunächst als undurchführbar. Es mußten zusätzliche Anforderungen an die Ableitungmengen gestellt werden, um überhaupt Ergebnisse zu erzielen. Einige dieser Zusatzbedingungen werden im folgenden diskutiert. Es zeigt sich weiterhin, daß diese Anforderungen die Allgemeinheit in nur geringem Maße einschränken; inbesondere werden wir nachweisen, daß bereits die in Theorem 2.3 benutzte derivierte Menge einer der Zusatzbedingungen genügt.

Da die Zielfunktion der zugrunde liegenden Aufgabe vektorwertig ist, benötigen wir eine Erweiterung des Ekelandschen Prinzips für solche Funktionen. Eine derartige Erweiterung stammt von Tammer [47] aus dem Jahre 1992.

Hierbei betrachten wir annähernd effiziente Punkte der Menge $f(S)$, wobei S eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes $\mathcal{X}$ und $f:\mathcal{X}\longrightarrow R^p$ eine vektorwertige Funktion sind.

Gegeben seien ein konvexer Kegel $K\in R^p$ mit nichtleerem Inneren sowie ein Element $k^0\in int\,K$. Sei weiterhin $\tilde{K}\supseteq K$ ein konvexer Oberkegel von K mit den Eigenschaften

$$cl\,\tilde{K}+(K\setminus\{0\}) \quad\subseteq\quad int\,\tilde{K}, \tag{4.13}$$

$$bd\,\tilde{K}+bd\,\tilde{K} \quad\subseteq\quad cl\,\tilde{K}. \tag{4.14}$$

Wir setzen voraus, daß die Funktion f auf $\mathcal{X}$ nach unten halbstetig bezüglich k^0 und $\tilde{K}$ ist, das heißt, die Menge

$$M_r := \{x\in\mathcal{X};\ f(x)\in rk^0-cl\,\tilde{K}\} \tag{4.15}$$

ist abgeschlossen für jedes $r\in R$. Schließlich sei f auf S nach unten beschränkt, das heißt, es existiert ein $y\in R^p$ mit

$$f(S)\subset y+K. \tag{4.16}$$

Bemerkung 4.4 *Jeder konvexe, abgeschlossene Kegel $\tilde{K}\in R^p$ mit*

$$K\subseteq int\,\tilde{K}$$

erfüllt die Bedingungen (4.13) und (4.14). Diese Bedingungen erfassen jedoch eine größere Menge zulässiger Oberkegel. Im skalaren Fall ($p=1$) kann beispielsweise $\tilde{K}=K=R_+$ gesetzt werden, so daß das gewöhnliche Ekelandsche Variationsprinzip ein Spezialfall der Erweiterung von Tammer ist.

Bemerkung 4.5 *Für $p = 1$ und $\tilde{K} = K = R_+$ sind die Forderungen (4.15) und (4.16) identisch mit der unteren Halbstetigkeit*

$$\text{Die Mengen } M_r := \{x \in \mathcal{X};\ f(x) \leq r\} \text{ sind abgeschlossen für jedes } r.$$

beziehungsweise der Beschränktheit

$$f(x) \geq y \qquad \forall x \in S$$

der reellwertigen Funktion f.

Wir benutzen die folgende Modifikation des vektorwertigen Variationsprinzips. Sie ergibt sich als Folgerung von Theorem 4.1 in [47].

Theorem 4.8 *Sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum und $f : \mathcal{X} \longrightarrow R^p$ eine vektorwertige Funktion definiert auf $\mathcal{X}$. Sei S eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{X}$. Im Raum R^p seien ein konvexer Kegel K mit nichtleerem Inneren sowie ein Element $k^0 \in int\, K$ gegeben. Weiterhin sei $\tilde{K} \supseteq K$ ein konvexer Oberkegel von K mit den Eigenschaften (4.13), (4.14). Die Funktion f sei auf $\mathcal{X}$ nach unten halbstetig bezüglich k^0 und $\tilde{K}$ und auf S nach unten beschränkt.*
Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x_0 \in S$ mit

$$(f(x_0) - \varepsilon k^0 - \tilde{K} \setminus \{0\}) \cap f(S) = \emptyset$$

ein $x_\varepsilon \in S$ mit

(i) $(f(x_\varepsilon) - \varepsilon k^0 - K \setminus \{0\}) \cap f(S) = \emptyset$,

(ii) $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,

(iii) $(f_{\varepsilon k^0}(x_\varepsilon) - K \setminus \{0\}) \cap f_{\varepsilon k^0}(S) = \emptyset$,

wobei $f_{\varepsilon k^0}(x) := f(x) + \sqrt{\varepsilon}\|x - x_\epsilon\| k^0$.

Bemerkung 4.6 *Bemerkenswert ist, daß im vektorwertigen Fall eine zusätzliche Bedingung an den Punkt x_0 auftritt, die im skalaren Fall keine Entsprechung hat. Es genügt also nicht, daß $f(x_0)$ ein effizienter Punkt der Menge $f(S)$ bezüglich K ist, vielmehr wird die Effizienz von $f(x_0)$ bezüglich eines Oberkegels $\tilde{K}$ gefordert.*
Eine solche Eigenschaft wird in der Literatur als „eigentliche“ Effizienz von x_0 bezeichnet (vgl. [31], Definition 2.2.1).

Dieses Ekelandsche Varationsprinzip für vektorwertige Funktionen soll im folgenden zur Herleitung einer Multiplikatorenregel für Näherunglösungen, die sich auf die Verwendung derivierter Mengen stützt, dienen. Wir betrachten erneut das Optimierungsproblem, welches von Theorem 2.2 behandelt wird. Für die Anwendbarkeit von Theorem 4.8 müssen die Anforderungen an die Aufgabe allerdings etwas verschärft werden.
Betrachtet wird das Problem

$$f_1(x) \longrightarrow K_1 - Min!$$

$$\text{über} \quad x \in S := \{x \in \mathcal{X} |\; f_2(x) \in -K_2, f_3(x) \in -K_3, x \in X\}$$

unter den Voraussetzungen:

(V1) $\mathcal{X}$ ist ein reeller Banachraum.

(V2) $X \subseteq \mathcal{X}$ ist eine nichtleere Teilmenge von X. $K_1 \subseteq R^{m_1}$, $K_2 \subseteq R^{m_2}$ und $K_3 \subseteq R^{m_3}$ sind konvexe Kegel, K_1 und K_2 haben ein nichtleeres Inneres, K_2 und K_3 sind abgeschlossen.

(V3) Die zulässige Menge S ist abgeschlossen.

(V4) Ein Element $k^0 \in int\, K_1$ sei gegeben.

(V5) Gegeben sei weiterhin ein konvexer Oberkegel $\tilde{K} \supseteq K_1$ mit den Eigenschaften (4.13) und (4.14).

(V6) $f_1 : \mathcal{X} \longrightarrow R^{m_1}$, $f_2 : \mathcal{X} \longrightarrow R^{m_2}$, $f_3 : \mathcal{X} \longrightarrow R^{m_3}$.

(V7) f_1 ist auf $\mathcal{X}$ nach unten halbstetig bezüglich k^0 und $\tilde{K}$.

(V8) f_1 ist auf S nach unten beschränkt.

Die Aussage (iii) von Theorem 4.8 liefert einen effizienten Punkt der Menge $f_{\varepsilon k^0,1}(S)$ bezüglich K_1, wobei $f_{\varepsilon k^0} : X \longrightarrow R^m$ definiert ist durch

$$f_{\varepsilon k^0}(x) := f(x) + \sqrt{\epsilon}\|x - x_\epsilon\| \begin{pmatrix} k^0 \\ 0^{m_2} \\ 0^{m_3} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Um Theorem 2.2 anwenden zu können, müssen wir zunächst einen K–Ableitungskegel $D_{\varepsilon k^0}$ für $f_{\varepsilon k^0}$ an der Stelle x_ε konstruieren.

Dazu sei angenommen, es wäre eine K–Ableitungsmenge D für f an der Stelle x_ε gegeben. Wir nehmen weiterhin an, daß D die folgende Spezialbedingung erfüllt:

(S1) *Derivierte Menge mit linearer ω–Funktion.*

Jedem $d \in D$ kann ein $h \in \mathcal{X}$ zugeordnet werden, so daß gilt: Für jedes n–Tupel $\{d^1, \ldots, d^n\} \subset D$ werden die Anforderungen von Definition 2.4 durch die Funktion

$$\omega(t) := x_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} t_i h^i \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r)$$

erfüllt, wobei h^i der zu d^i gehörige Vektor ist $(i = 1, \ldots, n)$.

Gegeben sei ein n–Tupel $\{d^1, \ldots, d^n\} \subset D$. Für dieses existieren nach Definition 2.4 gewisse Größen $r > 0$, $\omega : B_+^n(r) \longrightarrow X$ und $\varrho : B_+^n(r) \longrightarrow R^m$ mit

$$f(\omega(t)) - f(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} t_i d^i - \|t\| \varrho(t) \in -K \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r). \tag{4.18}$$

Gesucht ist nun ein n–Tupel $\{d_\varepsilon^1, \ldots, d_\varepsilon^n\}$, so daß

$$f_{\varepsilon k^0}(\omega(t)) - f_{\varepsilon k^0}(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} t_i d_\varepsilon^i - \|t\| \varrho(t) \in -K \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r). \tag{4.19}$$

Unter Beachtung von (S1) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& f_{\varepsilon k^0}(\omega(t)) - f_{\varepsilon k^0}(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} t_i d_\varepsilon^i - \|t\| \varrho(t) \\
= \;& f(\omega(t)) - f(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} t_i d^i - \|t\| \varrho(t) + \sqrt{\varepsilon} \|\omega(t) - x_\varepsilon\| (k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) + \sum_{i=1}^{n} t_i (d^i - d_\varepsilon^i) \\
= \;& f(\omega(t)) - f(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} t_i d^i - \|t\| \varrho(t) + \sqrt{\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i h^i \right\| (k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) + \sum_{i=1}^{n} t_i (d^i - d_\varepsilon^i) \\
& \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r).
\end{aligned}$$

Wegen $\left\| \sum_{i=1}^n t_i h^i \right\| \leq \sum_{i=1}^n t_i \|h^i\|$ für $(t_1, \ldots, t_n) \in R_+^n$ folgt

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} t_i h^i \right\| (k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) \in \sum_{i=1}^{n} t_i \|h^i\| (k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) - K \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in R_+^n.$$

Hieraus und aus (4.18) folgt dann

$$\begin{aligned}
& f_{\varepsilon k^0}(\omega(t)) - f_{\varepsilon k^0}(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} t_i d_\varepsilon^i - \|t\| \varrho(t) \\
\in \;& \sum_{i=1}^{n} t_i (d^i + \sqrt{\varepsilon} \|h^i\| (k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) - d_\varepsilon^i) - K \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r).
\end{aligned}$$

Setzen wir also

$$d^i_\varepsilon := d^i + \sqrt{\varepsilon}\|h^i\|(k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

so ist (4.19) erfüllt.

Mithin ist die Menge $D_{\varepsilon k^0} \subseteq R^m$, die definiert ist durch

$$d + \sqrt{\varepsilon}\|h\|(k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) \in D_{\varepsilon k^0} \Longleftrightarrow d \in D,$$

eine K–Ableitungmenge für $f_{\varepsilon k^0}$ an der Stelle x_ε und nach Lemma 2.1 der Kegel *convcone* $(D_{\varepsilon k^0})$ ein K–Ableitungskegel für $f_{\varepsilon k^0}$ an der Stelle x_ε, sofern nur $D \in R^m$ eine K–Ableitungsmenge für f an der Stelle x_ε mit der Eigenschaft (S1) ist.

Auch in einigen anderen Spezialfällen können solche Transformationen angegeben werden, daß $\{d^1_\varepsilon, \ldots, d^n_\varepsilon\}$ die Bedingung (4.19) erfüllt.

(S2) *Derivierte Menge mit Lipschitz–stetiger ω–Funktion.*

Jedem $d \in D$ kann eine Konstante $L \geq 0$ zugeordnet werden, so daß gilt: Für jedes n–Tupel $\{d^1, \ldots, d^n\} \subset D$ gibt es eine Funktion ω nach Definition 2.4, die zusätzlich

$$\|\omega(t) - x_\varepsilon\| \leq \sum_{i=1}^n L^i t_i \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B^n_+(r)$$

erfüllt, wobei L^i die zu d^i gehörige Konstante ist. Dann wird durch

$$d^i_\varepsilon := d^i + \sqrt{\varepsilon} L^i (k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die Bedingung (4.19) erfüllt.

(S3) *Derivierte Menge mit differenzierbarer ω–Funktion.*

Jedem $d \in D$ kann ein $\omega' \in \mathcal{X}$ zugeordnet werden, so daß gilt: Für jedes n–Tupel $\{d^1, \ldots, d^n\} \subset D$ gibt es eine Funktion ω nach Definition 2.4, die zusätzlich

$$\omega(t) = x_\varepsilon + \sum_{i=1}^n t_i \omega'^i + \|t\| s(t) \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B^n_+(r)$$

mit $\lim_{t \downarrow 0} s(t) = 0$ erfüllt, wobei ω'^i der zu d^i gehörige Vektor ist. Dann wird durch

$$d^i_\varepsilon := d^i + \sqrt{\varepsilon}\|\omega'^i\|(k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

zwar nicht die Bedingung (4.19) erfüllt, aber es gilt an deren Stelle eine Aussage der Form

$$f_{\varepsilon k^0}(\omega(t)) - f_{\varepsilon k^0}(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^n t_i d^i_\varepsilon - \|t\| \varrho_\varepsilon(t) \in -K \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B^n_+(r),$$

wenn wir setzen

$$\varrho_\varepsilon(t) := \varrho(t) + \sqrt{\varepsilon}\|s(t)\|(k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}).$$

Es ist einzusehen, daß wegen $\lim_{t\downarrow 0} s(t) = 0$ mit ϱ auch ϱ_ε die Bedingung (C) von Definition 2.4 erfüllt.

Ein Resultat, das man unter Verwendung von (S1) erhält, ist das folgende.

Satz 4.9 *Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x_0 \in S$ mit*

$$(f_1(x_0) - \varepsilon k^0 - \tilde{K} \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_1(S) = \emptyset$$

existiert ein $x_\varepsilon \in S$ mit

(i) $(f_1(x_\varepsilon) - \varepsilon k^0 - K_1 \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_1(S) = \emptyset$,

(ii) $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,

(iii) Für jede K–Ableitungsmenge $D \subseteq R^m$ für f an der Stelle x_ε, die (S1) erfüllt, existiert ein Multiplikator $\lambda \in K_1^* \times K_2^* \times K_3^* \setminus \{0^m\}$ mit

$$\begin{aligned} \langle \lambda, d \rangle &\geq -\sqrt{\varepsilon}\|h\|\langle \lambda_1, k^0 \rangle \qquad \forall d \in D, \\ \langle \lambda_2, f_2(x_\varepsilon) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Theorem 4.8 existiert ein $x_\varepsilon \in \mathcal{X}$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) sowie

$$(f_{\varepsilon k^0,1}(x_\varepsilon) - K_1 \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_{\varepsilon k^0,1}(S) = \emptyset.$$

Daher gilt erst recht

$$(f_{\varepsilon k^0,1}(x_\varepsilon) - int\, K_1) \cap f_{\varepsilon k^0,1}(S) = \emptyset.$$

Nach den vorangegangenen Überlegungen ist die Menge $convcone(D_{\varepsilon k^0}) \subseteq R^m$ ein K–Ableitungskegel für $f_{\varepsilon k^0}$ an der Stelle x_ε, weil $D \in R^m$ eine K–Ableitungsmenge für f an der Stelle x_ε ist. Also folgt aus Theorem 2.2 die Existenz eines Multiplikators $\lambda \in K_1^* \times K_2^* \times K_3^* \setminus \{0^m\}$ mit

$$\langle \lambda_2, f_2(x_\varepsilon) \rangle = 0$$

und

$$\langle \lambda, d_\varepsilon \rangle \geq 0 \qquad \forall d_\varepsilon \in convcone\,(D_{\varepsilon k^0}),$$

$$\begin{aligned}
\langle\lambda, d_\varepsilon\rangle &\geq 0 \qquad \forall d_\varepsilon \in D_{\varepsilon k^0}, \\
\left\langle\lambda, (d + \sqrt{\varepsilon}\|h\|(k^0, 0^{m_2}, 0^{m_3}))\right\rangle &\geq 0 \qquad \forall d \in D, \\
\langle\lambda, d\rangle &\geq -\sqrt{\varepsilon}\|h\|\langle\lambda_1, k^0\rangle \qquad \forall d \in D.
\end{aligned}$$

■

Ähnliche Sätze lassen sich auch für die Spezialfälle (S2) und (S3) angeben.

Es zeigt sich, daß in vielen praktischen Fällen derivierte Mengen auftreten, die eine solche spezielle Struktur haben. Dies trifft bereits unter den Voraussetzungen von Theorem 2.3 zu. Um dies zu zeigen, setzen wir $K_1 := R_+^{m_1}$, $K_2 := R_+^{m_2}$ und $K_3 := \{0^{m_3}\}$. In diesem Fall sei $\tilde{K}$ ein entsprechender Oberkegel von $R_+^{m_1}$.

Dann ergibt sich das folgende Resultat als Folgerung von Satz 4.9.

Satz 4.10 *Gegeben seien $\varepsilon > 0$ und ein Punkt $x_0 \in S$ mit*

$$(f_1(x_0) - \varepsilon k^0 - \tilde{K} \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_1(S) = \emptyset.$$

Für jedes $\tilde{x} \in X$ mit $\|\tilde{x} - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ gebe es eine Menge $X_0(\tilde{x}) \subseteq \mathcal{X}$ sowie eine Funktion $F_{\tilde{x}} : X_0(\tilde{x}) \longrightarrow R^m$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

($\tilde{a}$) $X_0(\tilde{x})$ ist nichtleer und konvex.

($\tilde{b}$) $F_{\tilde{x},1}$ und $F_{\tilde{x},2}$ sind konvex, $F_{\tilde{x},3}$ ist affin.

($\tilde{c}$) Für jede Zahl $n \in N$ und jedes n–Tupel $\{x^1, \ldots, x^n\} \subset X_0(\tilde{x})$ gibt es ein $r > 0$, so daß

$$\tilde{x} + \sum_{i=1}^{n} t_i x^i \in X \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r)$$

gilt und die Funktion

$$(t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r) \longmapsto f_3\left(\tilde{x} + \sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \in R^{m_3}$$

stetig ist.

($\tilde{d}$) Für alle $x \in X_0(\tilde{x})$ gilt

$$\limsup_{a \downarrow 0} \frac{f_1(\tilde{x} + ax) - f_1(\tilde{x})}{a} \quad \leq \quad F_{\tilde{x},1}(x),$$

$$\begin{array}{rcl}\limsup\limits_{a\downarrow 0}\dfrac{f_2(\tilde{x}+ax)-f_2(\tilde{x})}{a} & \leq & F_{\tilde{x},2}(x),\\ \lim\limits_{a\downarrow 0}\dfrac{f_3(\tilde{x}+ax)-f_3(\tilde{x})}{a} & = & F_{\tilde{x},3}(x),\end{array}$$

und für jedes konvexe Polytop $P \subseteq X_0(\tilde{x})$ ist die Konvergenz gleichmäßig für alle $x \in P$.

Dann existiert ein $x_\varepsilon \in S$ mit

(i) $(f_1(x_\varepsilon) - \varepsilon k^0 - R_+^{m_1} \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_1(S) = \emptyset$,

(ii) $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,

(iii) Es existiert ein Multiplikator $\lambda \in R^m \setminus \{0^m\}$ mit $\lambda_1 \geq 0^{m_1}$, $\lambda_2 \geq 0^{m_2}$,

$$\begin{array}{rcll}\langle \lambda, F_{x_\varepsilon}(x)\rangle & \geq & -\sqrt{\varepsilon}\|x\|\langle \lambda_1, k^0\rangle & \forall x \in X_0(x_\varepsilon),\\ \langle \lambda_2, f_2(x_\varepsilon)\rangle & = & 0. & \end{array}$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß für jedes $\tilde{x} \in X$ mit $\|\tilde{x} - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ die Menge $F_{\tilde{x}}(X_0)$ eine K–Ableitungsmenge für f an der Stelle $\tilde{x}$ ist, die (S1) erfüllt.
Wie im im Originalbeweis von Theorem 2.3 (vgl. [5], Theorem 4.1) gezeigt wird, ist unter den dort angegebenen Voraussetzungen (a) – (d) die Menge $F(X_0)$ eine K–Ableitungsmenge für f an der Stelle x_0, wobei für jede Zahl $n \in N$ und jedes n–Tupel $\{F(x^1), \ldots, F(x^n)\} \subset F(X_0)$ die Anforderungen in Definition 2.4 von der Größe r gemäß (c), von der Größe ω definiert durch

$$\omega(t) := x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i x^n \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r)$$

sowie von der Größe ϱ definiert durch

$$\varrho(t) := \begin{cases} \frac{1}{\|t\|}\left(f(\omega(t)) - f(x_0) - \sum_{i=1}^n F(x^n)\right), & \text{wenn} \quad (t_1,\ldots,t_n) \in B_+^n(r)\setminus\{0\} \\ 0, & \text{wenn} \quad (t_1,\ldots,t_n) = 0 \end{cases}$$

erfüllt werden.
Analog ergibt sich, daß wegen (ã) – ($\tilde{\text{d}}$) für jedes $\tilde{x} \in X$ mit $\|\tilde{x}-x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ die Menge $F_{\tilde{x}}(X_0(\tilde{x}))$ eine K–Ableitungsmenge für f an der Stelle $\tilde{x}$ ist, deren ω–Funktion für jedes n–Tupel $\{F(x^1), \ldots, F(x^n)\} \subset F_{\tilde{x}}(X_0(\tilde{x}))$ die Gestalt

$$\omega(t) = \tilde{x} + \sum_{i=1}^{n} t_i x^n \qquad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in B_+^n(r)$$

besitzt. Mithin erfüllt $F_{\tilde{x}}(X_0(\tilde{x}))$ die Spezialbedingung (S1), indem wir jedem $d \in F_{\tilde{x}}(X_0(\tilde{x}))$ einen Punkt $h \in X_0(\tilde{x})$ zuordnen, für den $F_{\tilde{x}}(x) = d$ gilt.

Nach Satz 4.9 existiert ein Punkt $x_\varepsilon \in S$, welcher (i) und (ii) erfüllt. Nach der vorangegangenen Überlegung ist wegen (ii) die Menge $D = F_{x_\varepsilon}(X_0(x_\varepsilon))$ eine K–Ableitungsmenge für f an der Stelle x_ε, die (S1) erfüllt. Somit existiert nach Satz 4.9 weiterhin ein Multiplikator $\lambda \in R_+^{m_1} \times R_+^{m_2} \times R^{m_3} \setminus \{0^m\}$ mit

$$\begin{aligned} \langle \lambda_2, f_2(x_\varepsilon) \rangle &= 0, \\ \langle \lambda, F(x) \rangle &\geq -\sqrt{\varepsilon}\|x\|\langle \lambda_1, k^0 \rangle \qquad \forall x \in X_0(x_\varepsilon) \end{aligned}$$

■

Die Struktur der Voraussetzungen für Satz 4.10 lehnen sich an die Voraussetzungen von Theorem 2.3 an. Wie bereits erwähnt, erlaubt Theorem 2.3 weitere Spezialisierungen für den konvexen (vgl. Satz 2.4) und den differenzierbaren Fall (vgl. Satz 2.5). Ebenso folgen aus Satz 4.10 die Sätze 4.11 (im konvexen Fall) und 4.12 (im differenzierbaren Fall).

Satz 4.11 *Gegeben seien $\varepsilon > 0$ und ein Punkt $x_0 \in S$ mit*

$$(f_1(x_0) - \varepsilon k^0 - \tilde{K} \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_1(S) = \emptyset.$$

Sei die Menge X konvex, seien die Funktionen f_1 und f_2 konvex und sei f_3 affin.
Dann existiert ein $x_\varepsilon \in S$ mit

(i) $(f_1(x_\varepsilon) - \varepsilon k^0 - R_+^{m_1} \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_1(S) = \emptyset$,

(ii) $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,

(iii) Es existiert ein Multiplikator $\lambda \in R^m \setminus \{0^m\}$ mit $\lambda_1 \geq 0^{m_1}$, $\lambda_2 \geq 0^{m_2}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f(x) \rangle - \langle \lambda_1, f_1(x_\varepsilon) \rangle &\geq -\sqrt{\varepsilon}\|x - x_\varepsilon\|\langle \lambda_1, k^0 \rangle \qquad \forall x \in X, \\ \langle \lambda_2, f_2(x_\varepsilon) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Wie im im Beweis von Satz 2.4 (vgl. [5], Corollary 4.2) gezeigt wird, erfüllen unter den dort angegebenen Voraussetzungen die Menge $X_0 := X - x_0$ und die Funktion $F(x) := f(x + x_0) - f(x_0)$ die Voraussetzungen (a) – (d) von Theorem 2.3.
Aus analogen Gründen erfüllen unter den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes die Menge $X_0(\tilde{x}) := X - \tilde{x}$ und die Funktion $F_{\tilde{x}}(x) := f(x + \tilde{x}) - f(\tilde{x})$ die Voraussetzungen ($\tilde{\text{a}}$) – ($\tilde{\text{d}}$) von Satz 4.10 und zwar für jedes beliebige $\tilde{x} \in X$.

Dann folgt aus Satz 4.10 die Existenz eines $x_\varepsilon \in S$ mit den Eigenschaften (i) und (ii), für das darüberhinaus gilt:
Es existiert ein $\lambda \in R^m \setminus \{0^m\}$ mit $\lambda_1 \geq 0^{m_1}$, $\lambda_2 \geq 0^{m_2}$,

$$\langle \lambda_2, f_2(x_\epsilon)\rangle = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, f(x+x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\rangle &\geq -\sqrt{\varepsilon}\|x\|\langle \lambda_1, k^0\rangle \qquad \forall x \in X - x_\varepsilon,\\
\langle \lambda, f(x+x_\varepsilon)\rangle - \langle \lambda_1, f_1(x_\varepsilon)\rangle &\geq -\sqrt{\varepsilon}\|x\|\langle \lambda_1, k^0\rangle \qquad \forall x \in X - x_\epsilon,\\
\langle \lambda, f(x)\rangle - \langle \lambda_1, f_1(x_\varepsilon)\rangle &\geq -\sqrt{\varepsilon}\|x - x_\varepsilon\|\langle \lambda_1, k^0\rangle \qquad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

■

Satz 4.12 *Gegeben seien $\varepsilon > 0$ und ein Punkt $x_0 \in S$ mit*

$$(f_1(x_0) - \varepsilon k^0 - \tilde{K} \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_1(S) = \emptyset.$$

Die Funktion f sei auf der Menge $\{\tilde{x} \in \mathcal{X};\ \|\tilde{x} - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}\}$ Fréchet–differenzierbar.
Dann existiert ein $x_\varepsilon \in S$ mit

(i) $(f_1(x_\varepsilon) - \varepsilon k^0 - R_+^{m_1} \setminus \{0^{m_1}\}) \cap f_1(S) = \emptyset$,

(ii) $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,

(iii) Es existiert ein Multiplikator $\lambda \in R^m \setminus \{0^m\}$ mit $\lambda_1 \geq 0^{m_1}$, $\lambda_2 \geq 0^{m_2}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{1i}, f'_{1i}(x_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}, f'_{2k}(x_\varepsilon) + \sum_{l=1}^{m_3} \lambda_{3l}, f'_{3l}(x_\varepsilon) \right\|_* \leq \sqrt{\varepsilon}\langle \lambda_1, k^0\rangle,$$

$$\langle \lambda_2, f_2(x_\varepsilon)\rangle = 0.$$

Beweis. Wie im im Beweis von Satz 2.5 (vgl. [5], Corollary 5.2) gezeigt wird, erfüllen unter den dort angegebenen Voraussetzungen die Menge $X_0 := \mathcal{X}$ und die Funktion $F(x) := f'(x_0)(x)$ die Voraussetzungen (a) – (d) von Theorem 2.3.
Aus analogen Gründen erfüllen unter den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes die Menge $X_0(\tilde{x}) := \mathcal{X}$ und die Funktion $F_{\tilde{x}}(x) := f'(\tilde{x})(x)$ die Voraussetzungen (ã) – ($\tilde{\text{d}}$) von Satz 4.10 für jedes beliebige $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ mit $\|\tilde{x} - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Dann folgt aus Satz 4.10 die Existenz eines $x_\varepsilon \in S$ mit den Eigenschaften (i) und (ii), für das darüberhinaus gilt:
Es existiert ein $\lambda \in R^m \setminus \{0^m\}$ mit $\lambda_1 \geq 0^{m_1}$, $\lambda_2 \geq 0^{m_2}$,

$$\langle \lambda_2, f_2(x_\epsilon) \rangle = 0$$

und

$$\langle \lambda, f'(x_\varepsilon)(x) \rangle \geq -\sqrt{\varepsilon}\|x\|\langle \lambda_1, k^0 \rangle \qquad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Aus Symmetriegründen gilt daher auch

$$|\langle \lambda, f'(x_\varepsilon)(x) \rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}\|x\|\langle \lambda_1, k^0 \rangle \qquad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{1i}, f'_{1i}(x_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}, f'_{2k}(x_\varepsilon) + \sum_{l=1}^{m_3} \lambda_{3l}, f'_{3l}(x_\varepsilon) \right\|_* \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{1i}, f'_{1i}(x_\varepsilon)(x) + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}, f'_{2k}(x_\varepsilon)(x) + \sum_{l=1}^{m_3} \lambda_{3l}, f'_{3l}(x_\varepsilon)(x) \right| \\
&= \sup_{\|x\|=1} |\langle \lambda, f'(x_\varepsilon)(x) \rangle| \\
&\leq \sqrt{\varepsilon} \sup_{\|x\|=1} \|x\|\langle \lambda_1, k^0 \rangle \\
&= \sqrt{\varepsilon}\langle \lambda_1, k^0 \rangle.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 4.7 *Satz 4.12 ist die Erweiterung eines bekannten Resultats von Ekeland (vgl. [11], Theorem 3.1) für Probleme mit vektorwertigen Zielfunktionen. Die dort verwendete Regularitätsbedingung*

> Die Fréchet–Ableitungen $f'_{2k}(x)$ $(k \in I(x))$ und $f'_{3l}(x)$ $(l \in \{1, \ldots, m_3\})$ sind für jedes x mit $\|x - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ linear unabhängig.
> (Hierbei sei $I(x) := \{k \in \{1, \ldots, m_2\} | \; f_{2k}(x) = 0\}$.)

sichert auch im Fall von Satz 4.12 in (iii) die Existenz eines Multiplikators λ mit $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

Beweis. Wäre in (iii) $\lambda_1 = 0^{m_1}$, so würde folgen

$$\sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}, f'_{2k}(x_\varepsilon) + \sum_{l=1}^{m_3} \lambda_{3l}, f'_{3l}(x_\varepsilon) = 0.$$

Aus $\langle \lambda_2, f_2(x_\varepsilon) \rangle = 0$ ergibt sich $\lambda_{2k} = 0$ $(k \in \{1, \ldots, m_2\} \setminus I(x_\varepsilon))$. Also wäre

$$\sum_{k \in I(x_\varepsilon)} \lambda_{2k}, f'_{2k}(x_\varepsilon) + \sum_{l=1}^{m_3} \lambda_{3l}, f'_{3l}(x_\varepsilon) = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionale $f'_{2k}(x_\varepsilon)$ $(k \in I(x_\varepsilon))$ und $f'_{3l}(x_\varepsilon)$ $(l \in \{1, \ldots, m_3\})$ müßte dann gelten

$$\begin{aligned} \lambda_{2k} &= 0 \qquad (k \in I(x_\varepsilon)), \\ \lambda_{3l} &= 0 \qquad (l \in \{1, \ldots, m_3\}). \end{aligned}$$

Dies widerspricht aber $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0^m$. ■