Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

1 15.10.2002

1.1 Aufgabe

Gegeben seien diese 4 Operationen über Mengen: $\cup$, $\cap$, $\setminus$ und Δ (symmetrische Differenz)
$[A\Delta B = (A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)]$

1 Wenn ich nur Δ und $\bigcap$ kenne, kann ich $A\cup B$ und $A\setminus B$ als Kombination von Δ und $\cap$ schreiben?

Stellen Sie die jeweils anderen mit Hilfe der beiden folgenden dar:

2 Δ und $\cup$

$\star$ 3 Δ und $\setminus$

$\star$ 4 $\cup$ und $\setminus$

1.2 $\star$ Aufgabe

Sei X beliebige Menge, für $A\subset X$ bezeichne ${}^cA = X\setminus A$.
Man zeige für beliebige Teilmengen $A, A_i, B, B_i \subset X$

$$A\setminus B = A\bigcap {}^cB \qquad {}^c\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcap_i {}^cA_i$$

$$ {}^c\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcup_i {}^cA_i \qquad \left(\bigcup_i A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_{i,j}(A_i\bigcap B_j)$$

1.3 Aufgabe

Gegeben sei eine Abbildung $f : X\to Y$ und $A_i\subset X$.
Man beweise:

$$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i), \qquad f\left(\bigcap_i A_i\right)\subset\bigcap_i f(A_i)$$

1.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei eine Folge $a_{n,k}$

Ist es wahr, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k} = \lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}$?

Und $\sup\limits_n\sup\limits_k a_{n.k} = \sup\limits_k\sup\limits_n a_{n,k}$?

1.5 Aufgabe

Gegeben seien die Folgen a_n und b_n mit

$\limsup a_n = A \qquad \liminf a_n = a$

$\limsup b_n = B \qquad \liminf b_n = b$

Man beweise die folgenden Ungleichungen

$\limsup (a_n + b_n) \leq A + B \qquad \liminf (a_n + b_n) \geq a + b$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 22.10.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

2 22.10.2002

2.1 Aufgabe

Gegeben sei $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \parallel x \parallel < 1\}$. Seien

$\mathcal{A}_1 = \{A \subset X : A$ hat eine zentrale Symmetrie bzgl. eines Punkts $x_0 \in X\}$
$\star$ $\mathcal{A}_2 = \{A \subset X : A$ ist punktsymmetrisch in Bezug auf $(0,0)$ $\}$
$\mathcal{A}_3 = \{A \subset X : A$ hat einen glatten Rand $\}$.
Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ Algebren? Und σ-Algebren?

2.2 Aufgabe

Gegeben seien der Einheitwürfel in $\mathbb{R}^2$
$X = (0,1] \times (0,1] \cup \{1,0\}$
und die Mengenfamilie
$\mathcal{A} = \{A \subset X : A$ eine Menge mit jeder Seite parallel zu einer von X und
$\forall x \in \partial A : x \in A \Leftrightarrow (1,0)$ oder $(0,1)$ sind die äußere Normale an A in der Punkt x oder wenn x Ecke einer Seite mit äußeren Normale (1,0) ist $\}$.
Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra? Und eine σ-Algebra?

2.3 $\star$ Aufgabe

Sei $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{Q} : A$ oder ${}^c A$ sind endlich $\}$.
Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra? Und eine σ-Algebra?

2.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien eine Menge X und die Familien $\mathcal{P}(X) = \{A : A$ Teilmenge von $X\}$, $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$.
Man beweise, daß $(X, \mathcal{P})$ und $(X, \mathcal{A})$ σ-Algebren sind.

2.5 Aufgabe

a) Sei $X = \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei fest. Das Dirac-Maß δ_{x_0} in x_0 wird definiert durch

$$\delta_{x_0} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in M \\ 0 & \text{falls } x_0 \notin M \end{cases}$$

Ist $(X, \mathcal{A}, \delta_{x_0})$ ein Maßraum?
b) Seien $X = \mathbb{Q}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ und μ das Zählmaß .
Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ?

2.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien zwei offene Intervalle $A = \prod_{i=1}^{n}(m_i, n_i)$; $B = \prod_{i=1}^{n}(p_i, q_i)$, man schreibe die Menge $A \cap B$ als Intervall.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 29.10.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

3 29.10.2002

3.1 Aufgabe

Man beweise, daß jede unendliche σ–Algebra sogar überabzählbar unendlich ist.

3.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ eine beliebige Familie von σ-Algebren; so ist $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{j\in J} \mathcal{A}_j$ ebenfalls eine σ Algebra.

3.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien die Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ist auch $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k\right)$ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$?

Definition

Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Wir nennen eine Funktion

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$$

eine *äußeres Maß* auf X, falls gilt:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. stets gilt: $M \subset N \Rightarrow \mu(M) \le \mu(N)$;
3. stets gilt: $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(M_k)$.

3.4 ⋆ Aufgabe

Wir definieren die folgende Abbildung $\mu^\star : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, so daß $\mu^\star(\emptyset) = 0$ und für $M \ne \emptyset$:

$$\mu^\star(M) = \sup\{|x_i - y_i|,\ i = 1, \dots, n,\ x, y \in M\}.$$

Ist $\mu^\star$ ein äußeres Maß ?

3.5 Aufgabe

Es sei $(\mu_j^\star)_{j\in J}$ eine Familie von äußeren Maßen über $\mathcal{P}(X)$.
a) Zeigen Sie: $\bar{\mu}(M) = \sup\{\mu_j^\star(M); j \in J\}$ ist ein äußeres Maß .
b) Ist $\psi(M) = \inf\{\mu_j^\star(M); j \in J\}$ ein äußeres Maß ?
c) Zeigen Sie: es gibt ein eindeutig bestimmtes äußeres Maß $\underline{\mu}$ mit
  1) $\underline{\mu} \le \mu_j^\star$ für alle $j \in J$.
  2) Ist λ ein weiteres äußeres Maß mit $\lambda \le \mu_j^\star$ für alle $j \in J$, so folgt $\lambda \le \underline{\mu}$.

3.6 $\star$ Aufgabe

Nehmen Sie ohne Beweis an, daß es eine offene beschränkte Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $|\partial G|_a > 0$. Diese offene Menge ist also insbesondere nicht Jordan-meßbar.
Man beweise: Ist D eine beschränkte offene Jordan–meßbare Menge mit $\bar{G} \subset D \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\mathcal{A} = \{M \subset D : M \text{ ist Jordan-meßbar } \}$ keine $\sigma-$Algebra.

3.7 Aufgabe

(Lebesguesches Lemma)
Man beweise die folgende Behauptung.
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, $(G_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiert ein $\lambda > 0$, so daß man für jedes $M \subset K$ mit $\operatorname{diam}(M) \leq \lambda$ ein i finden kann mit $M \subset G_i$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 05.11.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

4 05.11.2002

4.1 $\star$ Aufgabe

Sei $G = [0, 1]$; man schneide das offene Stück der Länge $1/q$ in der Mitte heraus; man entferne jeweils ein $(1/q)^2$ langes offenes Stück aus der Mitte der zwei neuen Intervalle. Wenn man unendlich oft dieselbe Prozedur mit offenen Stücken der Länge $(1/q)^n$ in allen neuen Intervallen wiederholt, bekommt man die sogenannte *Cantormenge*. Man beweise, daß die Cantormenge mit $q = 3$ eine überabzählbare (Lebesguesche) Nullmenge ist.

4.2 Aufgabe

Sei C die Cantormenge mit $q \geq 4$; man beweise daß $C = \partial C = \partial([0, 1] \setminus C)$.

4.3 $\star$ Aufgabe

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so gilt:
K ist eine Lebesguesche Nullmenge genau dann, wenn K auch eine Jordansche Nullmenge ist.

4.4 $\star$ Aufgabe

Es sei X eine beliebige Menge, $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von X und $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion. Die Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ sei definiert durch $\mu(\emptyset) = 0$
$\mu(E) = \inf \{\sum m(A_i) : A_i \in \mathcal{A}, E \subset \cup A_i\}$ für $\emptyset \neq E \subset X$ mit endlichen oder abzählbaren Überdeckungen (A_i) von E und $\mu(E) = \infty$ falls es keine abzählbare Überdeckung von E in $\mathcal{A}$ gibt. Man beweise, daß μ ein äußeres Maß auf X ist.

4.5 Aufgabe

Sei X ein metrischer Raum, $\mathcal{A}_\varepsilon = \{A \subset X : \operatorname{diam}(A) < \varepsilon\}$ und $m(A) = h(\operatorname{diam}(A))$ wo h eine stetige monoton wachsende Funktion ist, mit $h(0) = 0$. Wir wissen nach Aufgabe 4.4, daß $\mathcal{A}_\varepsilon$ ein äußeres Maß μ_ε induziert. Wir definieren jetzt $\mu(E) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \mu_\epsilon(E)$ für $E \subset X$. Man beweise, daß μ ein äußeres Maß mit der folgenden Eigenschaft ist: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, falls der Abstand der beiden Mengen A und B größer als Null ist.
Sei $h(s) = s^\alpha$ (α reell und positiv); wir nennen $\mu = \mu^{(\alpha)}$ das *α-dimensionale Hausdorff-Maß*.
Das eindimensionale Hausdorff-Maß ist also durch

$$\mu^{(1)}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \inf \left\{ \sum \operatorname{diam}(A_i) : \, E \subset \cup A_i, \, \operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon \right\}$$

definiert. Man beweise, daß das eindimensionale Hausdorff-Maß $\mu^{(1)}$ für stetig differenzierbare Kurven in $\mathbb{R}^n$ gerade die Kurvenlänge ist.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 12.11.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

5 12.11.2002

5.1 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien eine Cantorsche Menge G (für die Definition siehe man die Aufgabe 4.1) und eine beschränkte offene Menge D mit $\bar{G} \subset D \subset \mathbb{R}$; man berechne das Maß von G.
Man beweise: $\mathcal{A} = \{M \subset D : M \text{ ist Jordan-meßbar } \}$ ist keine $\sigma-$Algebra.

Definition

Gegeben sei eine Menge M, wir definieren eine Relation $\sim$ auf den Elementen von M. Sie wird genau dann eine *Äquivalenzrelation* genannt, wenn gilt:

a) Für jedes $a \in M : a \sim a$.
b) Für alle $a, b \in M : a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
c) Für alle $a, b, c \in M$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt stets $a \sim c$.

Wir nennen $[a] = \{b \in M : b \sim a\}$ die *Äquivalenzklasse* von a, *Klasseneinteilung* die Einteilung von M in Äquivalenzklassen. M ist paarweise disjunkte Vereinigung dieser Äquivalenzklassen.

5.2 ⋆ Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest. Wir definieren die *Äquivalenzrelation Modulo n* auf den Elementen von $\mathbb{Z}$ so, daß $a \sim b$ genau dann, wenn $a - b = kn$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Man beweise, daß dieses eine Äquivalenzrelation ist.

5.3 Aufgabe

Sei die folgende Äquivalenzrelation in $\mathbb{R}$ definiert : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Die zugehörigen Klassen sind die Mengen $a + \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{R}$, und es ist $a + \mathbb{Q} = b + \mathbb{Q} \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. Man wähle aus jeder Klasse einen Vertreter vom Betrag kleiner als 1. Es sei $A \subset (-1, 1)$ die Menge dieser Vertreter (hier wird das Auswahlaxiom benutzt). In folgenden sind r, s rationale Zahlen. Man zeige:

a) $(r + A) \cap (s + A) = \emptyset$ für $r \neq s$.
b) $\bigcup\limits_{r} (r + A) = \mathbb{R}$.
c) Für die Menge $S = \bigcup\limits_{|r|<2} (r + A)$ ist $(-1, 1) \subset S \subset (-3, 3)$.

Man zeige, daß A nicht meßbar ist.

[Hinweis: Mit Hilfe von a) und c) leite man aus der Meßbarkeit der Mengen $r + A$ einen Widerspruch ab; dabei sind die Fälle $\lambda(A) = 0$ und $\lambda(A) > 0$ zu unterscheiden.]

5.4 Aufgabe

Es sei μ ein äußeres Maß in $\mathbb{R}^n$ mit der folgenden Additivitätseigenschaft:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{falls } \operatorname{dist}(A, B) > 0, \tag{1}$$

wobei dist (A, B) den Abstand der beiden Mengen bezeichnet.
Die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ wird analog zur Vorlesung μ–meßbar genannt, wenn

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap {}^c A) \quad \text{für alle } E \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Die μ–meßbaren Mengen bilden eine σ–Algebra S, auf der μ $\sigma-$additiv ist. Man beweise die folgenden Sätze:

(a) Seien $G \neq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und G_k die Menge aller Punkte $x \in G$ mit $\operatorname{dist}(x, {}^c G) > \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, ...$ Zeigen Sie: Hat μ die Eigenschaft (1), so gilt für jede beliebige Menge $E \subset G$:

$$\mu(E) = \lim_{k \to \infty} \mu(E \cap G_k).$$

Man kann $G_k \neq \emptyset$ annehmen. Es sei $R_k = G_{k+1} \setminus G_k$, $E_k = E \cap G_k$ und $F_k = E \cap R_k$. Man zeige nacheinander: $\operatorname{dist}(G_k, {}^c G_{k+1}) > 0$, $\operatorname{dist}(R_k, {}^c G_{k+2}) > 0$ also $\operatorname{dist}(E_k, E \setminus E_{k+1}) > 0$, $\operatorname{dist}(F_k, F_{k+2}) \geq \operatorname{dist}((F_k, E \setminus E_{k+2}) > 0$ (falls keine leere Menge auftritt). Aus $\sum \mu(F_k) = \infty$ folgt $\sum \mu(F_{2k}) = \infty$ oder $\sum \mu(F_{2k+1}) = \infty$, und hieraus ergibt sich mit (1), angewandt auf endliche Teilsummen, $\lim \mu(E_k) = \mu(E) = \infty$. Sind die beiden Summen konvergent, so strebt $\mu(E \setminus E_k) \to 0$ und aus $\mu(E) \leq \mu(E_k) + \mu(E \setminus E_k)$ folgt die Behauptung.

(b) $\star$ Wenn μ die Eigenschaft (1) hat, dann sind alle Borelschen Mengen μ–meßbar.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß Bedingung (2) für offene Mengen erfüllt ist. Natürlich dürfen Sie (a) und frühere Aufgaben verwenden.

(c) $\star$ Folgern Sie daraus, daß das Hausdorff–Maß in der Tat ein Maß auf der Borel–σ– Algebra des $\mathbb{R}^n$ ist.

5.5 $\star$ Aufgabe

Man definiert die *Hausdorff-Dimension* für eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$:

$$D(M) = \inf\{\alpha : \quad \alpha\text{−dimensionales Hausdorffsches Maß von } A \text{ ist Null } \}$$

Bestimmen Sie dann die Hausdorff–Dimension von k-dimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^n$ (geschnitten mit einer beliebigen Kugel).

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 19.11.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

6 19.11.2002

6.1 Aufgabe

Man beweise, daß jede abgeschlossene Menge $H \subset \mathbb{R}^n$ eine $G_\delta-$ Menge ist.

6.2 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : D \to \mathbb{R}$ meßbar. Man beweise: $f \circ g$ ist auch meßbar.

6.3 $\star$ Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Seien $g, h : D \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar. Man beweise

- die Äquivalenz von (a) - (d) von Satz 4.5 für die Funktion h
  d.h: h ist meßbar genau dann, wenn eine der folgenden gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist:
  (a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{h > \alpha\} \in \mathcal{L}(D)$
  (b) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{h \geq \alpha\} \in \mathcal{L}(D)$
  (c) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{h < \alpha\} \in \mathcal{L}(D)$
  (d) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{h \leq \alpha\} \in \mathcal{L}(D)$
- g^+, $g^n (n \in \mathbb{N})$, $\frac{1}{g}($ falls $g \neq 0$ in $D)$, $g \cdot h$ sind meßbar.

6.4 $\star$ Aufgabe

Seien $f : E_1 \to E_2$ eine Abbildung, $\mathcal{E}_1$ eine $\sigma-$Algebra auf E_1. Man zeige, daß $\{A \subset E_2 : f^{-1}(A) \in \mathcal{E}_1\}$ eine $\sigma-$Algebra ist auf E_2 ist.

6.5 $\star$ Aufgabe

Seien $(a_k)_{k \in K}$, $K \subset \mathbb{N}$, die paarweise verschiedenen Werte der Treppenfunktion f, so daß die Mengen $D_k = \{x \in D : \ f(x) = a_k\}$ disjunkt sind, und $f(x) = \sum\limits_k a_k 1_{D_k}$.
Man beweise, daß die Treppenfunktion genau dann meßbar ist, wenn alle D_k meßbar sind.

6.6 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : D \to [-\infty, \infty]$, meßbar. Man beweise, daß die Menge $P = \{x \in D : \ f(x) < g(x)\}$ meßbar ist.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 26.11.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie WS 2002/03

Prof. H.–Ch. Grunau, E. Sassone

7 26.11.2002

7.1 ⋆ Aufgabe

Man beweise, daß die Menge der Punkte, wo eine Folge von reellen, meßbaren Funktionen (punktweise) konvergiert, eine meßbare Menge ist.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich (noch) auf das (uneigentliche) Riemann–Integral und dienen dazu, Ihnen Hilfsmittel für praktische Rechnungen an die Hand zu geben.

7.2 Aufgabe

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, man beweise die folgende Formel für radialsymmetrische Integration:

$$F(R) := \int_{\|x\| \leq R} f(\|x\|) \; dx = n e_n \int_0^R r^{n-1} f(r) \; dr,$$

wobei $e_n = vol_n(B_1(0)) = \int_{B_1(0)} 1 \, dx$ ist.

7.3 ⋆ Aufgabe

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) \, d(x, y)$$

und stellen Sie eine Verbindung mit dem (Gaußschen Fehler–) Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \, dx$$

her.

7.4 ⋆ Aufgabe

Zeigen Sie, daß für das Volumen der Einheitskugel $e_n = vol_n(B_1(0)) = \int_{B_1(0)} 1 \, dx$ gilt:

$$e_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)},$$

dabei ist $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$ die Gamma-Funktion.
Hinweis: Mittels des Satzes von Fubini und Aufgabe 7.2 können Sie eine Rekursionsformel für e_n herleiten. Bei der Bestimmung von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ hilft Aufgabe 7.3.

Bemerkung. In einer “korrekt normierten” Definition des α–dimensionalen Hausdorffmaßes ist noch der Faktor $e_\alpha 2^{-\alpha}$ mit aufzunehmen. Die vorhergehende Aufgabe gibt uns die Möglichkeit, e_α für reelles positives α zu betrachten.

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 03.12.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.–Ch. Grunau
E. Sassone

8 03.12.2002

8.1 Aufgabe

Man benutze die Definition, um das Integral $\int_0^1 x^\alpha dx$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ zu berechnen.

8.2 Aufgabe

Man beweise den folgenden Fortsetzungssatz (von Tietze):
Jede auf einer abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ stetige und reellwertige Funktion g besitzt eine stetige Fortsetzung h auf den ganzen Raum.
Hinweise: man nimmt eine Folge von Punkten $\{a_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ so daß die Folge dicht in A ist.

Dann, für $x \notin A$ sei $\rho(x,a) = max(2 - \frac{|x-a|}{dist(x,A)}, 0)$ und man baue die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in A \\ \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\rho(x,a_k)g(a_k)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\rho(x,a_k)} & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

8.3 ⋆ Aufgabe

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, meßbar, $\lambda(D) < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar und $\varepsilon > 0$.
Man beweise, daß ein kompaktes $K \subset D$ existiert, mit $\lambda(D\backslash K) < \varepsilon$, und eine stetige Funktion $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sodaß $\bar{f} = f$ auf K.

8.4 Aufgabe

Analog zur Vorlesung formuliere und diskutiere man das Integral auf $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$,Zählmaß).

8.5 ⋆ Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $\lambda(D) < \infty$. Sei $f_k \to f$ punktweise fast überall in D .
Außerdem existiere ein Zahl M so daß für jedes k gilt: $|f_k(x)| \le M$ fast überall in D.
Man zeige, daß

$$\lim_{h\to\infty} \int_D f_h(x)dx = \int f(x)dx$$

8.6 $\star$ Aufgabe

Man kontrolliere, falls man den lim mit dem Integral wechseln kann:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} f_k(x) := \begin{cases} k^2x(1-kx) & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{k}; \\ 0 & \text{falls } x > \frac{1}{k}. \end{cases}$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 10.12.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

9 10.12.2002

9.1 $*$ Aufgabe

Man beweise den Hilfsatz 5.4:
Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue–meßbare Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Es gebe eine Partition π_0 von D, so daß $S^*(|f|, \pi_0) < \infty$, d.h. (AK) gelte. Dann gilt

(a) $\pi_2 \succ \pi_1 \succ \pi_0 : -\infty < S_*(f, \pi_1) \leq S_*(f, \pi_2) \leq S^*(f, \pi_2) \leq S^*(f, \pi_1) < \infty$

(b) Sind $\pi_1, \pi_2 \succ \pi_0$, so ist $S_*(f, \pi_1) \leq S^*(f, \pi_2)$

(c) Für alle $\pi \succ \pi_0$ und alle entsprechenden Stützstellenauswahlen gilt:
$-S^*(|f|, \pi_0) \leq S_*(f, \pi) \leq \sigma(f, \pi, \xi) \leq S^*(f, \pi) \leq S^*(|f|, \pi_0)$

9.2 $*$ Aufgabe

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und es gebe eine Partition π_0 von D, so daß $S^\star(|f|, \pi_0) < \infty$, d.h. (AK) gelte.
Man beweise, daß die Definition von (Lebesgueschem) Ober- und Unterintegral keine Abhängigkeit von der Wahl der Partition π_0 hat.

9.3 Aufgabe

Sei $f \in \mathcal{L}^1(D)$. Falls $m \leq f \leq n$ und $\lambda(D) < \infty$, dann existiert ein c, $m \leq c \leq n$, so daß

$$\int_D f(x)\, dx = c\, \lambda(D)$$

.

9.4 $*$ Aufgabe

Seien $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), (D_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$, $D_k \cap D_j = \emptyset$ falls $k \neq j$ und $f \in \mathcal{L}^1(D)$.
Man beweise, daß f auf D integrierbar ist genau dann, wenn für alle k f auf D_k integrierbar ist und $\sum_k \int_{D_k} |f|\, dx < \infty$. In diesem Falle gilt

$$\int_D f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} f(x)\, dx$$

9.5 Aufgabe

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Man zeige:

(a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K > 0$, so daß mit $D := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > K\}$ gilt:

$$\int_D |f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine beschränkte meßbare Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus D} |f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

Hinweis: Sie dürfen bereits benutzen, daß jede integrierbare Funktion auch meßbar ist.

9.6 $*$ Aufgabe

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Man zeige: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für jede meßbare Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda(D) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_D |f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

Hinweis: Die vorhergehende Aufgabe.

[Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 17.12.02 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau, E. Sassone

10 07.01.03

10.1 Aufgabe

Man benutze den Satz von Beppo Levi, um zu beweisen

$$\lim_{k\to\infty}\int_2^4 \frac{7k+3}{k(x-2)^2+3}\,dx = \int_2^4 \lim_{k\to\infty}\frac{7k+3}{k(x-2)^2+3}\,dx.$$

10.2 * Aufgabe

Seien

$$D_k = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq k\}$$
$$f_k = e^{\frac{-kx^2}{k+2}}\, e^{-\frac{x^2+(y(k+1))^2}{k^2}}$$

Was können wir über $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{D_k} f_k(x,y)d(x,y)$ sagen?

10.3 Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, daß sogar $|f|$ auf $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Man zeige: Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Gilt dieselbe Behauptung auch, wenn man nur f als uneigentlich Riemann-integrierbar voraussetzt?

10.4 * Aufgabe

Sei $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq x < n+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

a) Man finde die Funktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Man beweise, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

c) Welche Eigenschaft des Satzes von majorisierten Konvergenz von Lebesgue ist nicht erfüllt?

10.5 * Aufgabe

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man beweise, daß

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f(x^k)dx = f(0).$$

10.6 $*$ Aufgabe

Sei $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$. Man beweise, daß die Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ stetig in $[a,b]$ ist.
Hinweis: man benutze die Aufgabe 9.6.

10.7 Aufgabe

Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt und f_k $(k \in \mathbb{N}), g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbare Funktionen mit den Eigenschaften:

- Es gibt eine Konstante $C > 0$ derart, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\int_D |f_k(x)|^2\,dx \le C.$$
- Für fast alle $x \in D$ gilt:
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0.$$
- Das folgende Integral ist endlich:
$$\int_D |g(x)|^2\,dx < \infty.$$

Man zeige, daß dann gilt:
$$\lim_{k\to\infty} \int_D (f_k(x) \cdot g(x))\,dx = 0.$$
Hinweis: Für beliebiges $\delta > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ hat man $|ab| \le \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2$. Absolutstetigkeit des Integrals.

[Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 14.01.03 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau, E. Sassone

11 14.01.03

11.1 Aufgabe

Man beweise den folgenden Satz über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale:
Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen, $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f : G \times D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so daß gilt:

- Für fast alle $y \in D$ ist $G \ni x \mapsto f(x,y)$ stetig.
- Für alle $x \in G$ ist $D \ni y \mapsto f(x,y)$ integrierbar.
- Es gibt eine integrierbare Funktion $F \in \mathcal{L}^1(D)$, so daß für alle $(x,y) \in G \times D$ gilt:
$$|f(x,y)| \le F(y).$$

Dann gilt:
$$G \ni x \mapsto \int_D f(x,y)\,dy$$
ist stetig.

11.2 ∗ Aufgabe

Man beweise den folgenden Satz über die Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale:
Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen, $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f : G \times D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so daß gilt:

- Für fast alle $y \in D$ existieren die partiellen Ableitungen $G \ni x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)$ $(j = 1,\ldots,m)$ und sind stetig.
- Für alle $x \in G$ ist $D \ni y \mapsto f(x,y)$ integrierbar.
- Es gibt eine integrierbare Funktion $F \in \mathcal{L}^1(D)$, so daß für alle $(x,y) \in G \times D$ und alle $j = 1,\ldots,m$ gilt:
$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\right| \le F(y).$$

Dann ist
$$G \ni x \mapsto \int_D f(x,y)\,dy$$
stetig partiell differenzierbar und es gilt:
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_D f(x,y)\,dy = \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,dy.$$

11.3 Aufgabe

Gegeben seien eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, die Abbildung

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_n e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

wo c_n so ist, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, und ein reeller Wert $h > 0$; man beweise, daß die Abbildung

$$(f)_h(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y)dy$$

in $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.
Hinweis: Parameterabhängige Integrale, Satz von Fubini.

11.4 $\star$ Aufgabe

Man beweise, daß die *Gamma-Funktion*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

beliebig oft stetig differenzierbar ist.

11.5 $*$ Aufgabe

Gegeben sei eine beliebige positive meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$. Man prüfe, daß diese Funktion durch

$$\mathcal{L} \ni M \mapsto \mu(M) := \int_M f(x)\, dx$$

auf $\mathbb{R}^n$ ein bzgl. des Lebesgueschen Maßes λ absolutstetiges Maß μ induziert.
Hinweis: Satz von Beppo Levi.

Man folgere daraus: Das Tragheitmoment eines (meßbaren) Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$ bzgl. einer Drehachse G kann als Maß interpretiert werden.
Hinweis: Das Tragheitsmoment eines Körpers K bzgl. einer Drehachse G ist $\Gamma = \int_K d^2(x)\mu(x)dx$, wo $d(x)$ der Abstand zwischen x und G und $\mu(x)$ die meßbare Dichte des Körpers K ist.

[Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 21.01.03 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

Termin für die Scheinklausur: 31.01.2003, 9-11 Uhr, Gebäude 2, Raum 20

12 21.01.2003

12.1 Aufgabe

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar. Man zeige daß auch die Faltung

$$(x, y) \longmapsto f(x-y)g(y)$$

in $\mathbb{R}^{2n}$ meßbar ist.
Hinweis: Transformationsformel in $\mathbb{R}^{2n}$.

12.2 $*$ Aufgabe

Gegeben seien das Lebesguesche Maß λ auf $\mathbb{R}^n$, die Menge $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \ \leq 1\}$ und die Abbildung $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, so daß für jedes $M \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\mu(M) = \lambda(M \cap B).$$

Ist μ ein Maß? Darf man den Satz von Radon-Nikodym benutzen? Falls ja, welches ist die Funktion f, so daß $\mu(M) = \int_M f(x)dx$?

12.3 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$h(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^4} & \text{falls} \quad (x, y, z) \notin B_1(0), \\ 0 & \text{falls} \quad (x, y, z) \in B_1(0). \end{cases}$$

Kann man das Integral nur bezüglich x auf dem ganzen Gebiet $\mathbb{R}$ als reelle Zahl berechnen? und bezüglich z? Kann man das Integral $G(D) = \int_D h(x, y, z)d(x, y, z)$ für jede Menge $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ (wiederum als reelle Zahl) berechnen?

12.4 Aufgabe

Gegeben sei die Abbildung $G : \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$, definiert wie oben.

a) Ist G ein Maß?

b) Kann man den Satz von Radon-Nikodym benutzen?
Falls ja, finde man auch die erzeugende Funktion!

12.5 $\ast$ Aufgabe

Gegeben seien das Gebiet $G = \{(x, y, z) : -3 < x < 3,\ -3 \le x^2 \cdot y \le 3\}$ und die Funktion $f(x, y, z) = \frac{y}{xz^2}$, man berechne das Integral mit der Transformationsformel in $\mathbb{R}^3$.

12.6 Aufgabe

Man berechne das Integral

$$\int_{x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}} \cos(x^2 + y^2) d(x, y).$$

12.7 $\ast$ Aufgabe

Sei $B = B_1(0) \in \mathbb{R}^3$ die Kugel vom Radius 1 mit Zentrum in dem Nullpunkt.
Seien $f \in \mathcal{L}^1(B)$, $D = (0, 1) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$,

$$\phi : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(r, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\psi) \\ r\sin(\theta)\sin(\psi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Man bestimme das Bild $\phi(D)$. Man beweise, daß

$$\int_D (f \circ \phi)(r, \theta, \psi) r^2 \sin(\theta)\, d(r, \theta, \psi) = \int_B f(x, y, z)\, d(x, y, z).$$

[Die mit $\ast$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 28.01.03 in der Vorlesung ab.]

Maß- und Integrationstheorie
WS 2002/03
Klausur, 31.01.2003, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.C. Grunau, E. Sassone

Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet. Ab 14 erreichten Punkten betrachten wir die Teilnahme an dieser Klausur als erfolgreich. Viel Erfolg!

1 Aufgabe

Gegeben seien die Menge $A = [0,1]$ und die Familie $\mathcal{A} = \{B \subset A : B = \emptyset$ oder B ist endliche Vereinigung von Intervallen mit rationalen Endpunkten $\}$. Man beweise, daß $\mathcal{A}$ eine Algebra, aber keine $\sigma-$Algebra ist.

2 Aufgabe

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{x=1}^{n} x_i$ auf $\mathbb{R}^n$ messbar? Und integrierbar?

3 Aufgabe

Man formuliere die Sätze von Beppo Levi und Lebesgue.

4 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} & \text{falls} \quad x^2+y^2 \geq 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x^2+y^2 < 1 \end{cases},$

Man entscheide begründet, für welche y das Integral $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$ existiert. In diesem Fall berechne man es.

5 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, man berechne das Integral von f auf dem Gebiet $G = \{(x,y) : x \geq 0, 1 \leq (x^2+y^2) \leq e\}$.

6 Aufgabe

Gegeben sei die Folge von Funktionen

$$f_k(x) = \begin{cases} x^{\frac{k+5}{2k+(-1)^k}} + 5x, & \text{falls} \quad 0 < x < 10\,, x \notin \mathbb{N}, \\ (-1)^k k, & \text{falls} \quad x \in [0,10] \cap \mathbb{N}. \end{cases}$$

Kann man $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{10} f_k(x)\,dx$ berechnen? Welchen Wert erhält man?

7 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar, es seien $f_k : D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Die Folge sei monoton wachsend: $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$; $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Außerdem sei $f_1 \in \mathcal{L}^1(D)$. Dann gilt:

$$\int_D^* f(x)\,dx = \infty \text{ oder } \int_D f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\,dx.$$