GZ Theoretische Informatik (WS16/17)

Vorbereitung Endterm

Team der Tutoren

1 Definitionen

Definieren Sie folgende Begriffe möglichst präzise.

- Turingmaschine
- Universelle Turingmaschine
- Registermaschine
- Entscheidbarkeit
- Semi-Entscheidbarkeit
- Satz von Rice
- Rekursionssatz
- $f \in \mathcal{O}(g)$
- $f \in o(g)$
- DTIME(f)
- NTIME(f)
- DSPACE(f)
- NSPACE(f)
- P
- NP
- Satz von Cook-Levin
- Reduktion
- Polynomialzeitreduktion
- NP-vollständig
- berechenbare Funktion
- rekursiv aufzählbar (r.e.)

2 Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit

Aufgabe 2.1 *(Wahr oder Falsch)*

Sind die folgenden Aussagen wahr oder Falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Es gibt eine Sprache, die von einer TM erkannt wird aber nicht von einer Registermaschine. ☐ wahr ☐ falsch
2. L kontextfrei $\Rightarrow$ L entscheidbar. ☐ wahr ☐ falsch
3. $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist kontextfrei } \}$ ist entscheidbar. ☐ wahr ☐ falsch
4. Sei A entscheidbar, dann ist A auch semi-entscheidbar. ☐ wahr ☐ falsch
5. Sei $A \preceq B$. Dann gilt auch $\overline{A} \preceq \overline{B}$. ☐ wahr ☐ falsch
6. Sei $A \subseteq B$ und B entscheidbar, dann ist A entscheidbar. ☐ wahr ☐ falsch
7. Sei $A \preceq B$ und $B \preceq A$. Dann gilt $A = B$. ☐ wahr ☐ falsch
8. Aus $A \preceq B$, folgt $A \subseteq B$. ☐ wahr ☐ falsch
9. Jede unentscheidbare Sprache, enthält eine entscheidbare Teilmenge. ☐ wahr ☐ falsch
10. Jede unentscheidbare Sprache, enthält eine unentscheidbare Obermenge. ☐ wahr ☐ falsch
11. A entscheidbar, und $A \cap B$ entscheidbar $\Rightarrow$ B entscheidbar. ☐ wahr ☐ falsch
12. Sei f eine Reduktion von A auf B, dann ist f^{-1} eine gültige Reduktion von B auf A. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2.2 *(Klassifizierung)*

Geben Sie an ob folgende Sprachen semi-entscheidbar, entscheidbar, oder nicht-entscheidbar sind. Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $L_1 = \{ \mathit{cod}(M)\$\mathit{cod}(w)\$\mathit{cod}(q) \mid M \text{ erreicht bei der Eingabe von } w \text{ den Zustand } q\}$
2. Gegeben seien TM M und M'. Gilt $L(M) = \overline{L(M')}$?
3. Die Menge der Turingmaschinen die das Postsche Korrespondenzproblem entscheiden.
4. $ALL_{EA} = \{ A \mid A \text{ ist ein endlicher Automat mit } L(A) = \Sigma^*. \}$
5. Die Sprache $\{ w \mid \varphi_{M_w}(0) = 0 \ \wedge\ |w| < 1.000.000\}$
6. Gegeben seien kontextfreie Grammatiken G und G'. Gilt $L(G) = L(G')$?
7. *(Etwas schwieriger)* Gegeben seien TM M und ein Wort w. Wenn M Eingabe w bearbeitet, rückt sie je ihren Kopf nach links?

Aufgabe 3.1 *(Reduktionen)*

Sei $\varphi_M : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ eine Funktion, die für ein $x \in \{0,1\}$ den Output der Turingmaschine M auf Input x berechnet. Hält M auf x nicht, so ist $\psi_M(x)$ undefiniert. Seien die folgenden Probleme gegeben:

- $A = \{w \mid M_w \text{hält auf } w\ \}$
- $B = \{w \mid M_w \text{ gibt für alle Inputs 0 aus }\}$
- $C = \{(w, w') \mid im(\varphi_M) = im(\varphi_{M'})\ \}$
- $D = \{w \mid\ |im(\varphi(M_w)| > 1)\ \}$
- $E = \{w \mid M_w \text{ hält auf } w \text{ nicht} \vee \phi_{M_w}(w) = 0\ \}$
- $F = \{w \mid \exists x \in \{0,1\}^*, \text{ sodass } \varphi_{M_w}(x) = x\}$

Geben Sie folgende Reduktionen an und zeigen Sie jeweils Korrektheit.

1. $A \preceq B$
2. $\bar{A} \preceq B$
3. $B \preceq C$
4. $A \preceq D$
5. $E \preceq \bar{A}$
6. $A \preceq F$
7. *Bonus:* $F \preceq A$

3 Komplexitätstheorie

Aufgabe 3.1 *(Wahr oder Falsch)*

Sind die folgenden Aussagen wahr oder Falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Es gibt eine Sprache L, sodass $L \in \text{P}$ aber $\overline{L} \notin \text{P}$. ☐ wahr ☐ falsch
2. Jede Sprache in DSPACE($\mathcal{O}(1)$) ist regulär. ☐ wahr ☐ falsch
3. Jede Sprache in NP ist entscheidbar. ☐ wahr ☐ falsch
4. Es gilt P $\neq$ co-P. ☐ wahr ☐ falsch
5. Es gibt eine TM, die in polynomieller Zeit bei Eingabe n in Binärkodierung, 1^n ausgibt. ☐ wahr ☐ falsch
6. Es gibt eine Funktion f, sodass DSPACE(f) = REG (Menge aller regulären Sprachen). ☐ wahr ☐ falsch
7. Es gibt eine Funktion f, sodass DSPACE(f) = REC (Menge aller entsch. Sprachen). ☐ wahr ☐ falsch
8. Auch außerhalb von P gibt es kontextfreie Sprachen. ☐ wahr ☐ falsch
9. Wenn P = NP und $A \in$ NP, mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Sigma^*$, dann ist A NP-vollständig. ☐ wahr ☐ falsch
10. P = NP. Bei Lösung, bitte melden :) ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 3.2 *(Sortieren)*

Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum. Dabei ist ε irgendeine positive reelle Zahl kleiner als 1.

$$\log n \qquad 2^{\sqrt{n}} \qquad n^2 \log n \qquad n^{2+\varepsilon} \qquad \sqrt{n} \qquad 2^n \qquad n \log n \qquad (1+\varepsilon)^n$$

Aufgabe 3.3 *(Inklusionshierarchie)*

Sortieren Sie folgende Mengen bezüglich Inklusion. Welche Inklusionen sind echt?

$$\text{NSPACE}(\mathcal{O}(3^n)) \qquad \text{P} \qquad \text{DSPACE}(\mathcal{O}(7^n)) \qquad \text{RE} \qquad \text{NP}$$
$$\text{DTIME}(\mathcal{O}(n^5)) \qquad \text{DSPACE}(\mathcal{O}(\log n)) \qquad \text{NSPACE}(\mathcal{O}(\log n))$$

Aufgabe 3.4 *(Nichtdeterminismus vs. Determinismus)*

Zeigen oder Widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. $\text{DSPACE}(2^{\mathcal{O}(n)}) = \text{NSPACE}(2^{\mathcal{O}(n)})$
2. $\text{DTIME}(\log n) = \text{DSPACE}(\log n)$
3. $\text{DTIME}(2^{\mathcal{O}(\log n)}) = \text{P}$
4. $\text{NTIME}(\mathcal{O}(\log n)) = \text{DTIME}(\mathcal{O}(n))$

Aufgabe 3.5 *(Komposition von Funktionen)*

Sei M eine monoton wachsende Funktion, und seien $f, g \in$ FÜP. Folgt aus $f \in \mathcal{O}(g)$, dass auch $M \circ f \in \mathcal{O}(M \circ g)$?

Aufgabe 3.6 *(Polynomialzeitreduktion)*

Sei *DNF* die Menge aller aussagenlogischer Formeln in disjunktiver Normalform. Betrachte Sie das folgende Problem:

$$L = \{F \in \mathit{DNF} \mid F \text{ ist keine Tautologie } \}$$

Zeigen Sie, dass L NP-schwer ist.

Aufgabe 3.7 *(NP-Vollständigkeit Zeigen)*

1. *(Double-SAT)*
   Sei *CNF* die Menge aller aussagenlogischer Formeln in konjunktiver Normalform.

   $$\text{Double-SAT} = \{F \in \mathit{CNF} \mid F \text{ hat mindestens zwei verschiedene erfüllende Belegungen}\}.$$

   Zeigen Sie, dass Double-SAT NP-vollständig ist.

2. *(3-CLIQUES)*
   Das Problem 3-Cliques ist folgendermaßen definiert:
   Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$
   Frage: Besitzt G (mindestens) *drei* k-Cliques?
   Zeigen Sie, dass 3-Cliques NP-vollständig ist.

3. *(Tunnelsysteme)*
   Wir betrachten das folgende Problem: Gegeben ist ein Tunnelsystem bestehend aus Tunnelstücken und Kreuzungen, den denen sich beliebig viele Tunnelstücke treffen können. Nun soll jedes Tunnelstück belüftet werden. Ein Tunnelstück ist belüftet, wenn an einem seiner beiden Enden (das ist entweder eine Kreuzung oder der Endpunkt des Tunnelstücks) eine Entlüftungsanlage installiert ist. Die Anzahl der Belüftungsanlagen soll dabei minimal sein.

   (a) Geben Sie eine mathematische Formulierung dieses Problems an.

   (b) Zeigen Sie, dass dieses Problem NP-vollständig ist.

4. *(Ich packe meine Koffer. . .)*
   Nehmen wir an, wir wollen für eine längere Zeit auf eine einsame Insel ohne Anschluss an das Internet. Natürlich wollen Sie Ihre persönliche, sehr große digitale Mediensammlung mitnehmen. Diese besteht aus diversen Dateien mit bekannten Größen (in Bytes). Sie wollen zu diesem Zweck diese Dateien auf Memorysticks speichern, die Sie in einer bestimmten, einheitlichen Speicherkapatzität relativ billig erwerben können. Aus Transport- und Kostengründen, ist es besser wenn Sie möglichst wenige solcher Sticks zum Speichern verwenden.

   Formulieren Sie dieses Optimierungsproblem als abstraktes Entscheidungsproblem und zeigen Sie, dass dieses Problem im Allgemeinen NP-vollständig ist.

4 Verständnisaufgaben

- Wie hängen die folgenden Begriffe (im Hinblick auf das Thema Entscheidbarkeit) zusammen?
  - Problem
  - Instanz
  - Eingabe
  - Sprache
  - Wort
  - Algorithmus
- Was bedeutet "X ist entscheidbar" intuitiv? Was ist der Unterschied zu "X ist semientscheidbar"?
- Welche Aussagen sind äquivalent zu "X ist semientscheidbar"?
- Gib eine Sprache an, die semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist.

- Gib eine Sprache an, die von keiner Turingmaschine akzeptiert wird.
- Gib eine Funktion an (echte Funktion, also überall definiert), die nicht berechenbar ist.
- Was ist die formale Definition von $A \preceq B$? Wozu benutzen wir die Aussage $A \preceq B$ normalerweise? Wie zeigt man $A \preceq B$?
- Überlege Dir eine Sprache, deren Unentscheidbarkeit aus dem Satz von Rice folgt.

Postsches Korrespondenzproblem (PCP):

- Was ist eine Instanz von PCP? (informell, nicht die mathematische Definition)
- Was ist eine Lösung einer PCP-Instanz?
- Welche PCP-Instanzen sind in der Sprache PCP enthalten?
- Was lässt sich allgemein über die Anzahl der Lösungen einer beliebigen PCP-Instanz sagen?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Wenn $A \subset B$, und A ist nicht entscheidbar, dann ist B nicht entscheidbar.
- Wenn $A \subset B$, und A ist nicht r.e, dann ist B nicht r.e.
- Wenn $A \preceq B$, und A ist nicht entscheidbar, dann ist B nicht entscheidbar.
- Wenn $A \preceq B$, und A ist nicht r.e, dann ist B nicht r.e.
- Wenn A und B entscheidbar sind, dann sind auch $A \cap B$ und $A \cup B$ entscheidbar.

NP-Schwere, NP-Vollständigkeit, Polynomialzeitreduktion:

- Was ist die formale Definition von $A \preceq_p B$? Wozu benutzen wir die Aussage $A \preceq_p B$ normalerweise? Wie zeigt man $A \preceq_p B$?
- Wie zeigt man normalerweise, dass ein Problem NP-schwer ist?
- Wie zeigt man normalerweise, dass ein Problem NP-vollständig ist?