UNTERLAGEN ZUR MULTIPLIKATIVEN IDEALTHEORIE IN KOMMUTATIVEN RINGEN

VORLESUNG "KOMMUTATIVE ALGEBRA", SOMMERSEMESTER 2008

1. Noethersche Ringe

Definition 1.1. Ein kommutativer Ring mit Eins R ist *Noethersch*, wenn die geordnete Menge $\langle \mathsf{Id}\ R, \subseteq \rangle$ die ACC erfüllt.

Lemma 1.2. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Dann sind äquivalent:*

(1) *R ist Noethersch.*
(2) *Jedes Ideal von R ist endlich erzeugt.*
(3) *Jede nichtleere Menge von Idealen von R hat ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element.*

Satz 1.3 (Hilberts Basissatz)**.** *Sei R ein Noetherscher kommutativer Ring mit Eins. Dann ist auch der Polynomring $R[x]$ Noethersch.*

2. Summen, Produkte und Quotienten von Idealen

Definition 2.1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien I, J Ideale von R. Wir definieren $I + J$ durch

$$I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}.$$

Lemma 2.2. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien I, J Ideale von R. Dann $I + J$ ein Ideal von R. Außerdem ist $I + J$ das von $I \cup J$ erzeugte Ideal.*

Definition 2.3. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien I, J Ideale von R. Wir definieren $I \cdot J$ durch

$$I \cdot J := \{\sum_{k=1}^{n} i_k j_k \mid n \in \mathbb{N}_0, i_1, \ldots, i_n \in I, j_1, \ldots, j_n \in J\}.$$

Definition 2.4. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien I, J Ideale von R. Dann ist $I \cdot J$ ein Ideal von R. Außerdem gilt $I \cdot J \subseteq I \cap J$.

Date: April 24, 2008.

Erhard Aichinger, Institut für Algebra, Johannes Kepler Universität Linz, Austria, erhard@algebra.uni-linz.ac.at.

Definition 2.5. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R. Dann definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein Ideal I^n durch

$$I^0 := R,\ I^k = I^{k-1} \cdot I \text{ für } k \geq 1.$$

Definition 2.6. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei A ein Ideal von R, und sei B eine Teilmenge von R. Wir definieren

$$(A : B)_R := \{r \in R \,|\, \forall b \in B : rb \in A\}.$$

$(A : B)_R$ ist der *Noethersche Quotient* von A und B.

Lemma 2.7. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei A ein Ideal von R, und sei B eine Teilmenge von R. Dann ist $(A : B)_R$ ein Ideal von R.*

3. Primär- und Primideale

Definition 3.1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei Q ein Ideal von R. Q ist *primär*, wenn

(1) $Q \neq R$,
(2) Für alle $a, b \in R$ mit $ab \in Q$ gilt $a \in Q$, oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $b^n \in Q$.

Definition 3.2. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei P ein Ideal von R. P ist *prim*, wenn

(1) $P \neq R$,
(2) Für alle $a, b \in R$ mit $ab \in P$ gilt $a \in P$ oder $b \in P$.

Definition 3.3. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R. Dann ist das *Radikal von I* gegeben durch

$$\sqrt{I} := \{r \in R \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\}.$$

Satz 3.4. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R. Dann ist $\sqrt{I}$ ein Ideal von R, und es gilt $I \subseteq \sqrt{I}$. Wenn $I \neq R$, gilt außerdem $\sqrt{I} \neq R$.*

Satz 3.5. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei Q ein primäres Ideal von R. Dann gilt:*

(1) *$\sqrt{Q}$ ist prim.*
(2) *Für jedes prime Ideal P von R mit $Q \subseteq P$ gilt auch $\sqrt{Q} \subseteq P$.*

4. Zerlegung von Idealen

Definition 4.1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R. Das Ideal I ist *schnitt-irreduzibel* wenn für alle Ideale A, B von R mit $A \cap B = I$ gilt: $A = I$ oder $B = I$.

Satz 4.2. *Sei R ein Noetherscher kommutativer Ring mit Eins. Dann ist jedes Ideal von R Durchschnitt endlich vieler schnitt-irreduzibler Ideale.*

Satz 4.3. *Sei R ein Noetherscher kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein schnitt-irreduzibles Ideal von R mit $I \neq R$. Dann ist I primär.*

Satz 4.4. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei $n \in \mathbb{N}$, seien $Q_1, \ldots, Q_n$ primäre Ideale von R mit $\sqrt{Q_1} = \cdots = \sqrt{Q_n}$. Sei $Q := Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$. Dann ist Q primär, und $\sqrt{Q} = \sqrt{Q_1} = \cdots = \sqrt{Q_n}$.*

5. Eindeutigkeit der Zerlegung in primäre Ideale

Definition 5.1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $Q_1, \ldots, Q_n$ und I Ideale von R mit $I \neq R$. Die Folge $(Q_1, \ldots, Q_n)$ ist eine *Darstellung von I durch größte Primärideale* [van der Waerden, 1967], wenn

(1) Alle Q_i sind primär,
(2) $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$,
(3) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt
$$Q_1 \cap \cdots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \cdots \cap Q_n \not\subseteq Q_i,$$
(4) Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$.

Satz 5.2 (Lasker-Noether)**.** *Sei R ein Noetherscher kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R mit $I \neq R$. Dann gibt es eine Darstellung von I durch größte Primärideale.*

Proposition 5.3. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei B ein primäres Ideal von R, und sei A ein Ideal von R mit $A \not\subseteq \sqrt{B}$. Dann gilt $(B : A)_R = B$.*

Beweis: Sei $x \in (B : A)_R$. Wir wählen $a \in A$ mit $a \notin \sqrt{B}$. Es gilt $xa \in B$. Da B primär ist, gilt entweder $x \in B$ oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n \in B$. Im zweiten Fall gilt $a \in \sqrt{B}$. $\square$

Proposition 5.4. *Sei R ein Noetherscher kommutativer Ring mit Eins, sei $n \geq 2$, sei I ein primäres Ideal, und sei $(Q_1, \ldots, Q_n)$ eine Darstellung von I durch größte Primärideale. Dann gilt $n = 1$.*

Beweis: Wir nehmen $n \geq 2$ an. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass $\sqrt{Q_i}$ minimal in $\{\sqrt{Q_j} \,|\, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Wir zeigen nun, dass für alle $j \in \{2, \ldots, m\}$ mit $j \neq i$ gilt:

$$\sqrt{Q_j} \not\subseteq \sqrt{Q_i}. \tag{5.1}$$

Sei dazu j so, dass $\sqrt{Q_j} \subseteq \sqrt{Q_i}$. Wegen der Minimalität von $\sqrt{Q_i}$ gilt dann $\sqrt{Q_j} = \sqrt{Q_i}$ und somit $j = i$. Das beweist (5.1). Es gibt also $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in R$, sodass für alle $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ gilt
$$a_j \in \sqrt{Q_j} \text{ und } a_j \notin \sqrt{Q_i}.$$

Sei ρ_j so, dass $a_j^{\rho_j} \in Q_j$, und sei

$$\rho := \max \{\rho_j \mid j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}\}.$$

Falls $Q_i \subseteq I$, so können alle anderen Q_j aus der Darstellung von I weggelassen werden. Also gilt in diesem Fall $n = 1$.

Somit gilt also $Q_i \not\subseteq I$. Sei $q \in Q_i$ mit $q \notin I$. Es gilt

$$q(a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} a_m)^\rho \in Q_1 \cap \cdots \cap Q_m = I.$$

Da I primär ist, gibt es ein $\sigma \in \mathbb{N}$ mit

$$(a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} a_m)^{\rho\sigma} \in I.$$

Da $I \subseteq Q_i \subseteq \sqrt{Q_i}$, gilt

$$(a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} a_m)^{\rho\sigma} \in \sqrt{Q_i}.$$

Das Ideal $\sqrt{Q_i}$ ist prim, also liegt ein a_j in $\sqrt{Q_i}$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl der a_j. Der Fall $n > 1$ kann also nicht eintreten. $\square$

Lemma 5.5. *Sei R ein Noetherscher kommutativer Ring mit Eins, seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei I ein Ideal von R mit $I \neq R$. Seien $(Q_1, \ldots, Q_m)$ und $(K_1, \ldots, K_n)$ Folgen von Idealen von R. Wir nehmen an, dass $(Q_1, \ldots, Q_m)$ und $(K_1, \ldots, K_n)$ Darstellungen von I durch größte Primärideale sind, und dass $\sqrt{Q_1}$ minimal in*

$$\{\sqrt{Q_j} \mid i \in \{j, \ldots, m\}\}$$

ist. Dann gilt $m = n$, und es gibt es eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $Q_1 = K_{\pi(1)}$ und für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\sqrt{Q_i} = \sqrt{K_{\pi(i)}}.$$

Beweis: Wir gehen mit Induktion nach $\min(m, n)$ vor. Sei $\min(m, n) = 1$.

Wir betrachten zuerst den Fall $m = 1$. Dann gilt wegen Proposition 5.4 auch $n = 1$. Somit gilt $I = Q_1$ und $I = K_1$, also leistet $\pi = \mathrm{id}_{\{1\}}$ das Gewünschte. Ebenso gilt im Fall $n = 1$ nach Proposition 5.4 $m = 1$, und somit $I = Q_1 = K_1$. Damit haben wir den Induktionsanfang $\min(m, n) = 1$ gezeigt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, $m \geq 2$ und $n \geq 2$. Sei P ein maximales Element in

$$\{\sqrt{Q_i} \mid i \in \{1, \ldots, m\}\} \cup \{\sqrt{K_j} \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}. \tag{5.2}$$

mit $P \neq \sqrt{Q_1}$. So ein P muss es geben: nehmen wir, an $\sqrt{Q_1}$ wäre das einzige maximale Element. Dann gilt $\sqrt{Q_1} \geq \sqrt{Q_2}$, und wegen der Minimalität von $\sqrt{Q_1}$ somit $\sqrt{Q_1} = \sqrt{Q_2}$. Das steht im Widerspruch dazu, dass $(Q_1, \ldots, Q_n)$ eine Zerlegung in größte Primärkomponenten ist. Wir zeigen als erstes, dass P in beiden der in (5.2) vereinigten Mengen enthalten ist.

Nehmen wir dazu an, dass $k \in \{1, \dots, m\}$ so ist, dass $P = \sqrt{Q_k}$ und P nicht in $\{\sqrt{K_j} \,|\, j \in \{1, \dots, n\}\}$ liegt. Es gilt nun:

$$\text{(5.3)} \qquad \text{Für alle } i \in \{1, \dots, m\} \text{ mit } i \neq k \text{ gilt } Q_k \not\subseteq \sqrt{Q_i}.$$

Um (5.3) zu beweisen, nehmen wir $Q_k \subseteq \sqrt{Q_i}$ an. Dann gilt $\sqrt{Q_k} \subseteq \sqrt{Q_i}$, und somit erhalten wir aus der Maximalität von $\sqrt{Q_k}$ die Gleichheit $\sqrt{Q_k} = \sqrt{Q_i}$, im Widerspruch zu einer der Zerlegungseigenschaften. Das beweist (5.3). Ebenso gilt

$$\text{(5.4)} \qquad \text{Für alle } j \in \{1, \dots, n\} \text{ gilt } Q_k \not\subseteq \sqrt{K_j}.$$

Denn $\sqrt{Q_k} \subseteq \sqrt{K_j}$ bedeutet wegen der Maximalität von $\sqrt{Q_k}$, dass $\sqrt{Q_k} = \sqrt{K_j}$, im Widerspruch dazu dass P nicht in $\{\sqrt{K_j} \,|\, j \in \{1, \dots, n\}\}$ liegt. Das beweist (5.4). Es gilt

$$(I : Q_k) = (I : Q_k),$$

also

$$(Q_1 \cap \cdots \cap Q_m : Q_k) = (K_1 \cap \cdots \cap K_n : Q_k),$$

und folglich

$$\bigcap\{(Q_i : Q_k) \,|\, i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}\} = \bigcap\{(K_j : Q_k) \,|\, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Nach Proposition 5.3 gilt daher

$$\bigcap\{Q_i \,|\, i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}\} = \bigcap\{K_j \,|\, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Also gilt $\bigcap\{Q_i \,|\, i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}\} = I \subseteq Q_k$, im Widerspruch zu einer Zerlegungseigenschaft. Ebenso führt der Fall, dass P unter den $\sqrt{K_j}$, aber nicht unter den $\sqrt{Q_i}$ vorkommt, auf einen Widerspruch.

Wir wissen also, dass es ein $k \in \{2, \dots, m\}$ und ein $l \in \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass $P = \sqrt{Q_k} = \sqrt{K_l}$. Wir zeigen nun, dass für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq k$, $j \neq l$ gilt:

$$Q_k \cdot K_l \not\subseteq \sqrt{Q_i} \text{ und } Q_k \cdot K_l \not\subseteq \sqrt{K_j}.$$

Dazu zeigen wir als erstes $Q_k \not\subseteq \sqrt{Q_i}$. Wenn $Q_k \subseteq \sqrt{Q_i}$, so gilt $\sqrt{Q_k} \subseteq \sqrt{Q_i}$, und daher wegen der Maximalität von P auch $\sqrt{Q_k} = \sqrt{Q_i}$, im Widerspruch zu $k \neq i$. Also gilt $Q_k \not\subseteq \sqrt{Q_i}$. Ebenso gilt $K_l \not\subseteq \sqrt{Q_i}$. Denn wenn $K_l \subseteq \sqrt{Q_i}$, so gilt $\sqrt{K_l} \subseteq \sqrt{Q_i}$ und somit wegen der Maximalität von $P = \sqrt{K_l}$ auch $\sqrt{K_l} = \sqrt{Q_i}$. Dann gilt $\sqrt{Q_k} = \sqrt{Q_i}$ und somit $k = i$, im Widerspruch zu $k \neq i$. Es gibt also $q_1 \in Q_k \setminus \sqrt{Q_i}$ und $q_2 \in K_l \setminus \sqrt{Q_i}$. Da $\sqrt{Q_i}$ prim ist, gilt $q_1 q_2 \in Q_k \cdot K_l$ und $q_1 q_2 \notin \sqrt{Q_i}$. Ebenso beweist man $Q_k \cdot K_l \not\subseteq \sqrt{K_j}$ für $j \neq l$. Es gilt

$$I = \bigcap\{Q_i \,|\, i \in \{1, \dots, m\}\} = \bigcap\{K_j \,|\, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Wir berechnen $(I : Q_k \cdot K_l)$. Nach Proposition 5.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} &Q_1 \cap \cdots \cap Q_{k-1} \cap (Q_k : Q_k \cdot K_l) \cap Q_{k+1} \cap \cdots \cap Q_m \\ &\qquad = K_1 \cap \cdots \cap K_{l-1} \cap (K_l : Q_k \cdot K_l) \cap K_{l+1} \cap \cdots \cap K_n. \end{aligned}$$

Da $Q_k \cdot K_l \subseteq Q_k$, gilt $(Q_k : Q_k \cdot K_l) = R$, und ebenso $(K_l : Q_k \cdot K_l) = R$. Wir erhalten also zwei Darstellungen von $(I : Q_k \cdot K_l)$, eine durch $m-1$ und eine durch $n-1$ Primärideale. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also ein $\pi' : \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\} \to \{1, \ldots, n\} \setminus \{l\}$, sodass $Q_1 = K_{\pi'(1)}$ und $\sqrt{Q_i} = \sqrt{K_{\pi'(i)}}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$. Daher leistet $\pi := \pi' \cup \{(k, l)\}$ das Gewünschte. $\square$

Theorem 5.6 (Erster Eindeutigkeitssatz). *Sei R ein Noetherscher kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R mit $I \neq R$. Seien $(Q_1, \ldots, Q_n)$ und $(K_1, \ldots, K_m)$ Folgen von Idealen von R. Wir nehmen an, dass $(Q_1, \ldots, Q_n)$ und $(K_1, \ldots, K_m)$ Darstellungen von I durch größte Primärideale sind. Dann gilt $n = m$, und es gibt es eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:*

$$\sqrt{Q_i} = \sqrt{K_{\pi(i)}}.$$

Theorem 5.7 (Zweiter Eindeutigkeitssatz). *Sei R ein Noetherscher kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R mit $I \neq R$. Seien $(Q_1, \ldots, Q_n)$ und $(K_1, \ldots, K_m)$ Folgen von Idealen von R. Wir nehmen an, dass $(Q_1, \ldots, Q_n)$ und $(K_1, \ldots, K_n)$ Darstellungen von I durch größte Primärideale sind, sodass für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:*

$$\sqrt{Q_j} = \sqrt{K_j}.$$

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass $\sqrt{Q_i}$ minimal in $\{\sqrt{Q_j} \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$ ist. Dann gilt $Q_i = K_i$.

Beweis: Wir betrachten die Folgen $(Q'_1, \ldots, Q'_n)$ und $(K'_1, \ldots, K'_n)$, die durch $Q'_1 := Q_i$, $Q'_i := Q_1$, $Q'_j = Q_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{1, i\}$ und $K'_1 := K_i$, $K'_i := K_1$, $K'_j = K_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{1, i\}$ gegeben sind. Wegen Lemma 5.5 gibt es eine bijektive Abbildung π, sodass $\sqrt{Q'_j} = \sqrt{K'_{\pi(j)}}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $Q'_1 = K'_{\pi(1)}$. Daraus erhalten wir eine bijektive Abbildung σ, sodass für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Gleichheit $\sqrt{Q_j} = \sqrt{K_{\sigma(j)}}$ gilt, und weiters $Q_i = K_{\sigma(i)}$. Es gilt also $\sqrt{K_{\sigma(i)}} = \sqrt{Q_i} = \sqrt{K_i}$. Da $(K_1, \ldots, K_n)$ eine Darstellung durch grösste Primärideale ist, gilt $i = \sigma(i)$. Also gilt $Q_i = K_i$. $\square$

References

[van der Waerden, 1967] van der Waerden, B. L. (1967). *Algebra. Teil II.* Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Fünfte Auflage. Heidelberger Taschenbücher, Band 23. Springer-Verlag, Berlin.