

## 9. Übung zu Numerik I

18. (Bandmatrizen)
- (a) Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen (falls durchführbar) die Struktur von Bandmatrizen in folgendem Sinne erhält: Falls  $a_{ij} = 0$  für  $|i - j| > p$ , so ist  $l_{ij} = 0$  für  $i - j > p$  und  $r_{ij} = 0$  für  $j - i > p$ .
  - (b) Wie viele Operationen sind zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer derartigen Matrix nötig?
  - (c) Welche maximale Bandbreite haben  $L$  und  $R$  bei Spaltenpivot-suche?
19. Ist  $L$  nichtsingulär und  $D$  eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen, so ist  $A := LDL^T$  positiv definit.
20. Es sei  $j_1, \dots, j_n$  eine Permutation  $p$  von  $1, 2, \dots, n$ . Dann heißt die Matrix  $P := (e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$  Permutationsmatrix zur Permutation  $p$ .
- (a) Man beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen:
    - i.  $P$  ist immer symmetrisch.
    - ii.  $P$  ist orthogonal.
    - iii.  $P$  ist involutorisch, d.h.  $P^2 = I$ .
    - iv. Sind  $P_1$  und  $P_2$  Permutationsmatrizen, so auch  $P_1 \cdot P_2$ .
  - (b) Wie wirkt sich die Multiplikation einer Permutationsmatrix von links bzw. von rechts an eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  aus?