MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CARSTEN FELDKAMP

19. JANUAR 2021

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 12. Übungsblatt

Aufgabe 31:

Für stetige Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, ist das Bernoullische Anfangswert durch

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^p, \; y(t_0) = y_0 > 0, \; t_0 \in I, \; p \neq 0, 1$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem in einer Umgebung I_0 von t_0 genau eine Lösung besitzt.

Hinweis: Durch die Substitution $x = y^{1-p}$ wird das Anfangswertproblem linear. Die Rücktransformation $y = x^{\frac{1}{1-p}}$ liefert dann die gesuchte Lösung.

Aufgabe 32:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \; y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mittels Picarditeration.

Hinweis: Wenden Sie den Picardoperator auf die konstante Funktion $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und iterieren Sie dann. Die dabei entstehende Reihe setzt sich aus bekannten Funktionen zusammen.

Aufgabe 33:

Asterix und Obelix erhalten Besuch von Diffgleichnix und gehen in einer Ebene auf Wildschweinjagd. Da erspähen sie in 5 km Entfernung einen Römer. Plötzlich zieht Nebel auf. Der Römer rennt kopflos (geradlinig) davon. Obelix nimmt Diffgleichnix auf den Rücken und läuft viermal so schnell wie der Römer auf den Punkt zu, wo der Römer gesichtet wurde. Nachdem Obelix 4 km zurückgelegt hat, hat Diffgleichnix berechnet, wie sie nun laufen müssen, um den Römer sicher zu treffen.

(a) Diffgleichnix hat die Ebene mit Hilfe von Polarkoordinaten (r, ϕ) beschrieben und dabei folgende Gleichung für die Kurve, die den einzuschlagenden Weg beschreibt, gefunden: $4(r(\phi) - 1) = \int_0^\phi (r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{\frac{1}{2}} d\theta$. Wie ist er darauf gekommen?

(b) Bestimmen Sie aus obiger Formel die Bahnkurve, der Asterix und Obelix nun folgen, um sicher auf den Römer zu treffen.

Aufgabe 34:

Skizzieren Sie die Lösungen der folgenden zweidimensionalen Systeme im Phasenraum:

(a) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \sin(y_1) \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y_1 - y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2 \\ y_1 - y_2^2 \end{pmatrix}$

b.w

Präsenzaufgabe 32:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = ty(t),\ y(0) = y_0$$

mittels Picarditeration.

Präsenzaufgabe 33:

Skizzieren Sie die Lösungen des folgenden zweidimensionalen Systems im Phasenraum:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Präsenzaufgabe 34:

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \sqrt{y(t)},\ y(0) = 0$$

die Lösungen $u, u_\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $(\lambda > 0)$

$$u : t \mapsto 0 \quad \text{und} \quad u_\lambda : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0, \lambda] \\ \frac{1}{4}(t-\lambda)^2 & \text{für } t \in (\lambda, \infty) \end{cases}$$

besitzt.

Präsenzaufgabe 35:

Ein Boot wird mit konstanter Geschwindigkeit $v_1 > 0$ in x_1 Richtung über einen See ((x_1, x_2)-Ebene) gerudert. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ gerät es in einen Strudel mit Geschwindigkeitsfeld

$$\begin{pmatrix} \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Die Position des Bootes $q(t)$ zum Zeitpunkt $t > 0$ folgt dann der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-q_2(t)}{\sqrt{q_1^2(t)+q_2^2(t)}} + v_1 \\ \frac{q_1(t)}{\sqrt{q_1^2(t)+q_2^2(t)}} \end{pmatrix}.$$

(a) Transformieren Sie das System auf Polarkoordinaten (r, ϕ).
(Ergebnis: $r' = v_1 \cos(\phi),\ r\phi' = 1 - v_1 \sin(\phi)$).

(b) Berechnen Sie die Gleichung der Bahnkurve. Für welche Werte von v_1 bleibt das Boot im Strudel gefangen? Skizzieren Sie in den Verlauf der Lösung durch den Punkt $q_1(0) = 1$ und $q_2(0) = 0$ für einige Werte von v_1

Auf dem nächsten Blatt (Blatt 13) gibt es nochmal 4 schriftliche Aufgaben. Auf den Blättern 14 und 15 finden Sie dann noch Aufgaben für die Übungen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 26. Januar, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 20. und 21. Januar.