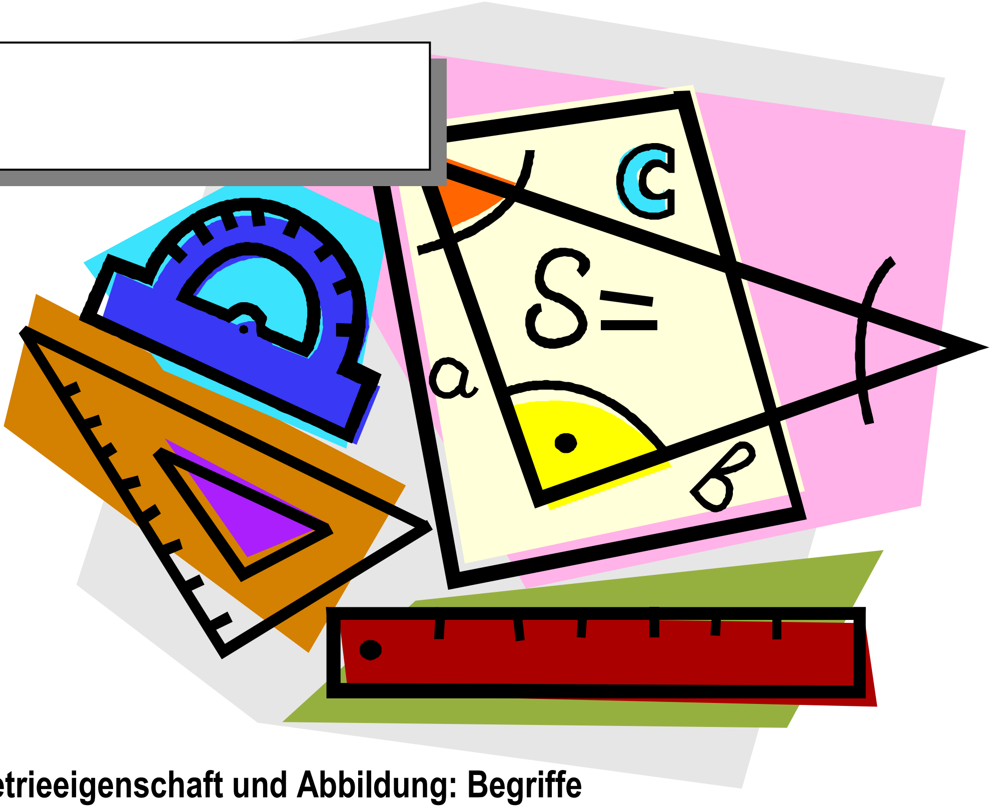
Geometrie-Dossier
Symmetrie in der Ebene

Name:

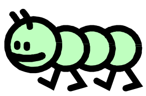


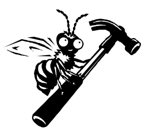
Inhalt:

- **Symmetrieeigenschaft und Abbildung: Begriffe**
- **Achsensymmetrie und Geradenspiegelung**
- **Drehsymmetrie und Drehung**
- **Punktsymmetrie und Punktspiegelung**

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*

1. Symmetrie und Abbildung: Begriffe

1.1 Symmetrie

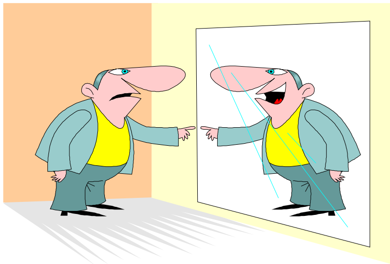
Symmetrie ist eine **Eigenschaft einer Figur**. Wenn du also eine Figur anschaust, sie in keiner Art und Weise veränderst kannst du entweder feststellen, dass die Figur auf irgend eine Art „symmetrisch" ist (achsensymmetrisch, drehsymmetrisch oder punktsymmetrisch) oder sie ist es nicht. **Symmetrie ist also eine passive Eigenschaft** (wo man nichts machen muss, es ist entweder da oder nicht).

1.2 Abbildung

Im Gegensatz zur Symmetrie ist die Abbildung eine dynamische, aktive Sache. **Die Abbildung produziert ein Bild, macht also aus einer Originalfigur eine neue Bildfigur** (die dann zusätzlich zur Originalfigur da ist). Eine Abbildung ist zum Beispiel dein Spiegelbild, wenn du am Morgen im Badezimmer stehst (es entsteht ein neues Bild von dir!).

In Kürze:

- **Symmetrie:**
  Eigenschaft einer Figur. Die Figur ist symmetrisch oder nicht.
- **Abbildung:**
  Erzeugt eine neue Bildfigur. Jede Figur kann abgebildet werden.



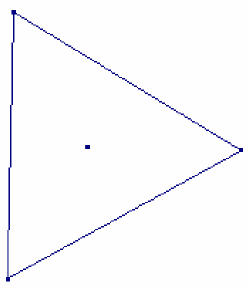
2. Achsensymmetrie und Geradenspiegelung

2.1 Achsensymmetrie

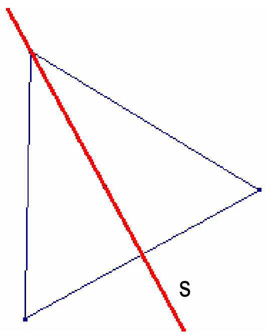
Eine **Figur ist achsensymmetrisch**, wenn sie sich so falten lässt, dass die **beiden Hälften der Figur sich vollständig abdecken**. Der Falz ist dann die Symmetrieachse.

Sehen wir uns die beiden untenstehenden Figuren an:

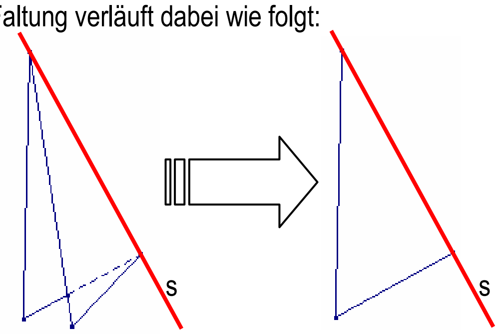
Figur 1 (achsensymmetrisch)



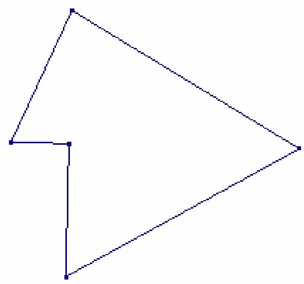
Diese Figur ist achsensymmetrisch, **denn sie lässt sich so falten, dass die beiden Hälften sich vollständig bedecken** (Faltz entlang der eingezeichneten Achse s) .



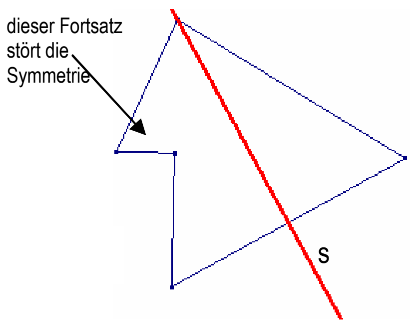
Die Faltung verläuft dabei wie folgt:



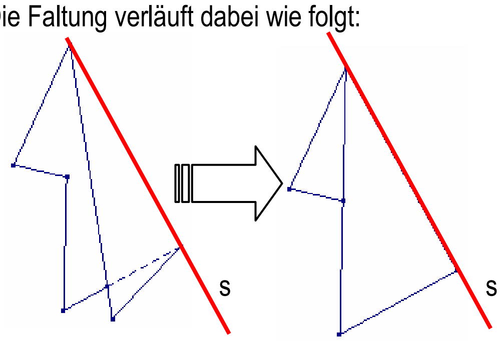
Figur 2 (nicht achsensymmetrisch)



Wenn wir diese Figur entlang der Achse s falten, wird der „Fortsatz" auf der linken Seite vorstehen. **Die beiden Hälften sind also nicht deckungsgleich.**



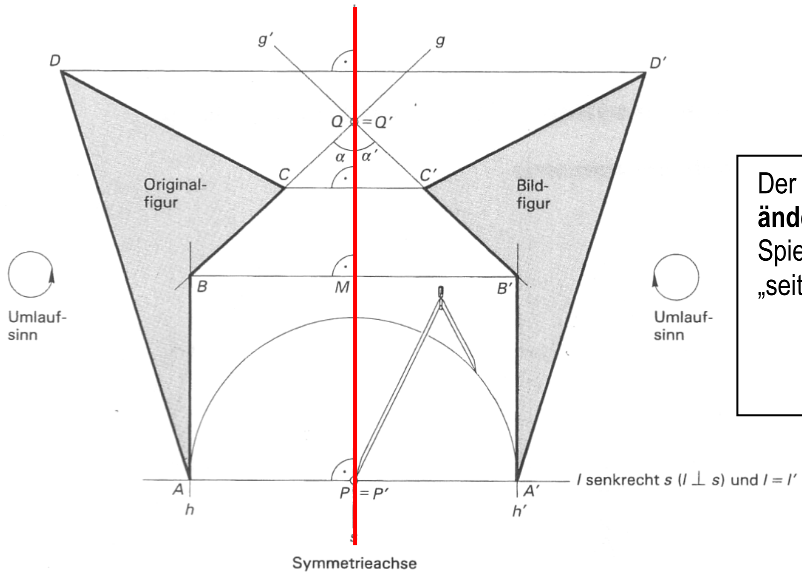
Die Faltung verläuft dabei wie folgt:



2.2 Geradenspiegelung

Die Geradenspiegelung ist eine Abbildung, die aus einer Originalfigur eine achsensymmetrische Bildfigur erzeugt *(Das bedeutet also, dass die Originalfigur nach der Abbildung achsensymmetrisch ist zur Bildfigur. Dabei ist die Spiegelachse nachher die Symmetrieachse)*.

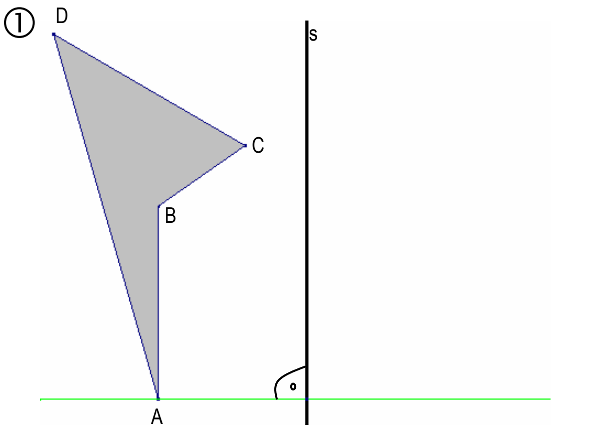
In der untenstehenden Figur findest du ein Originalfigur (die „Ausgangsfigur"), welche durch Geradenspiegelung abgebildet wurde. Auf diese Weise ist die Bildfigur („das Ergebnis der Geradenspiegelung") entstanden. Wenn man jetzt entlang der Symmetrieachse das Blatt falten würde, würden die beiden Figuren wieder deckungsgleich)



Der **Umlaufsinn der Figur ändert** (so wie beim Spiegelbild alles „seitenverkehrt" ist)

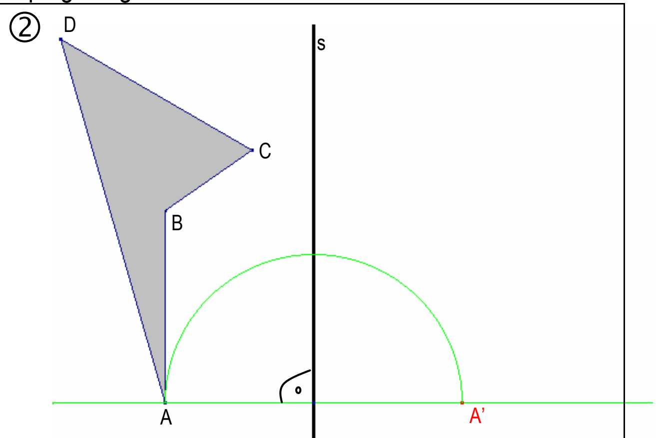
Wie aber geht man vor, wenn man eine Figur mittels Geradenspiegelung abbilden will?

①



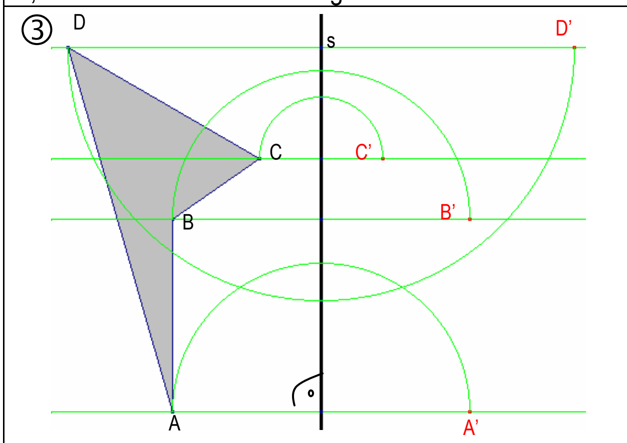
Zeichne eine Senkrechte (=Lot) auf die Symmetrieachse s, welche durch den Punkt A geht.

②



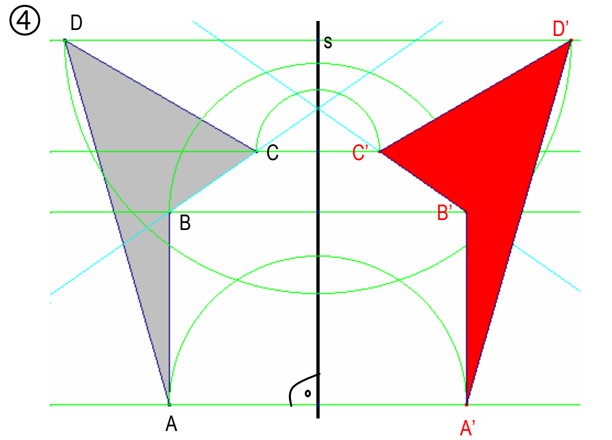
Nimm den Abstand von der Symmetrieachse s zum Punkt A in den Zirkel. Trage ihn auf die andere Seite ab. So entsteht der Bildpunkt A'.

③



Die Schritte 1 und 2 wiederholst du für jeden Eckpunkt. (Alternative für Schritt 2: Parallel verschieben)

④



Jetzt kannst du alle Bildpunkt miteinander verbinden und bist fertig. *Beachte: Gerade und ihre Bildgerade schneiden sich auf der Symmetrieachse s!*
Markiere die Lösung rot.!

offizielle Abbildungsvorschrift (Bezeichnungen beziehen sich auf die Figur ganz oben auf Seite 3):

Man erhält den Bildpunkt A' eines Punktes A…

- ➔ indem man durch A eine senkrechte Gerade auf die Achse S (LOT) zeichnet.
- ➔ Der Schnittpunkt dieser Lotstrecke und der Achse s ist der Fusspunkt P.
- ➔ Auf der Lotstrecke trägt man nun die Strecke PA von P aus auf die andere Seite ab und erhält so A'

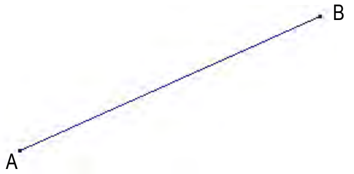
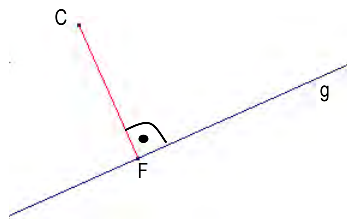
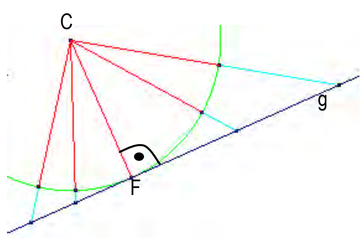
Die Originalfigur ABCD und die Bildfigur A'B'C'D' sind jetzt achsensymmetrisch bezüglich der Symmetrieachse s. Dies bringt uns zur Frage, welche Eigenschaften Original- und der Bildfigur nun haben müssen, weil sie eben achsensymmetrisch sind:

Eigenschaften von Original- und Bildfigur (Bezeichnungen beziehen sich auf die Figur ganz oben auf Seite 3):

1. Original – und Bildfigur sind deckungsgleich (=kongruent)→ ABCD ≡ A'B'C'D' *(Das Zeichen ≡ bedeutet kongruent)*
2. Die Symmetrieachse s halbiert die Verbindungsstrecken von AA', BB' usw und bildet mit ihnen rechte Winkel (s ist Mittelsenkrechte von AA', BB' usw.) Alle Senkrechten sind zueinander parallel.
3. Die Symmetrieachse halbiert den Winkel zwischen der Geraden g und ihrer Bildgeraden g'. Sie ist somit Winkelhalbierende von ∠ CQC' *(∠ bedeutet: Winkel)*
4. Alle Bildstrecken sind gleich lang wie die Originalstrecken (längentreu), alle Winkel bleiben erhalten (winkeltreu).
5. Der Schnittpunkt von Geraden mit ihren Bildgeraden liegt auf der Symmetrieachse. (wobei zur Achse parallele Geraden auf zur Achse parallelen Bildgeraden abgebildet werden..

Wichtige zusätzliche Begriffe und Begriffserklärungen:

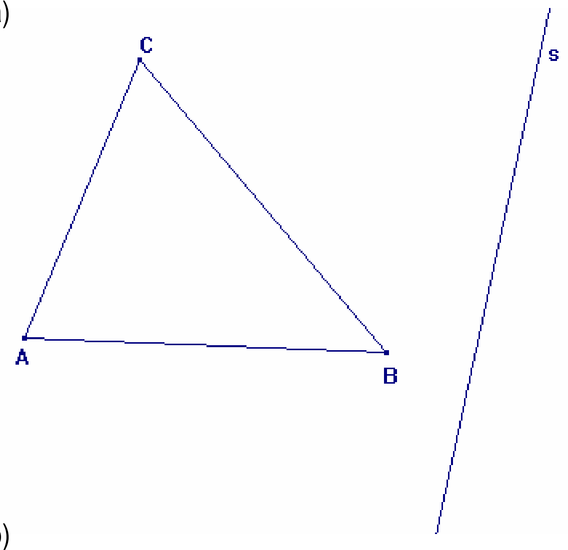
In der Geometrie werden immer wieder verschiedene Begriffe verwendet, die eine ganz bestimmte Bedeutung haben. Darum ist es wichtig, diese Begriffe zu kennen. Die für dieses Thema wichtigen Begriffe findest du darum hier!

	**Entfernung zweier Punkte:** Die Verbindungsstrecke AB heisst Entfernung der Punkte A und B. Diese Entfernung wird mit $\overline{AB}$ bezeichnet. Der „Querstrich" ist also ein Symbol für einen „Messwert").
	**Lot (Lotstrecke) und Fusspunkt:** Die Senkrechte auf eine Gerade g (oder auf eine Strecke) wird als **Lot oder Lotstrecke** bezeichnet. (Hier: Lot auf g durch den Punkt C). Der Schnittpunkt von Lotstrecke und Gerade g heisst **Fusspunkt F**.
	**Abstand eines Punktes von einer Gerade (oder Strecke):** Die kleinste Entfernung des Punktes C von der Gerade g heisst **Abstand des Punktes C von g**. (Dies wird mit dem Symbol Cg beschrieben). Anders gesagt: Der Abstand des Punktes C von der Geraden g bezeichnet die kleinste Entfernung von C zu einem Punkt von g.

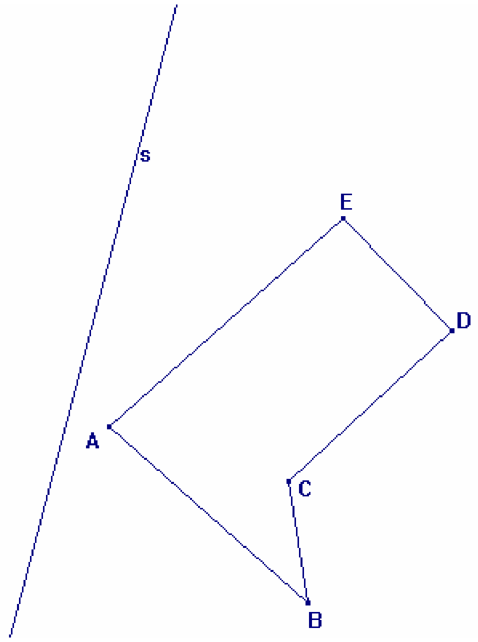
Aufgaben Achsensymmetrie und Geradenspiegelung:

1. Spiegle die gegebenen Figuren an der Symmetrieachse s:

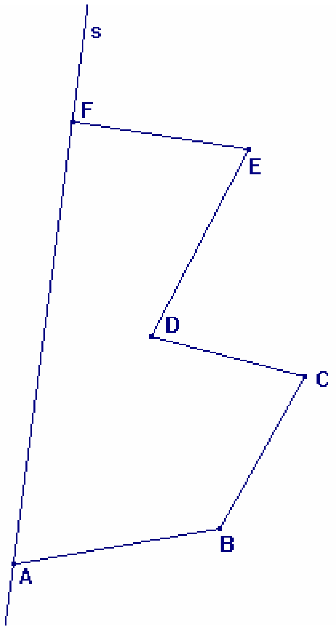
a)



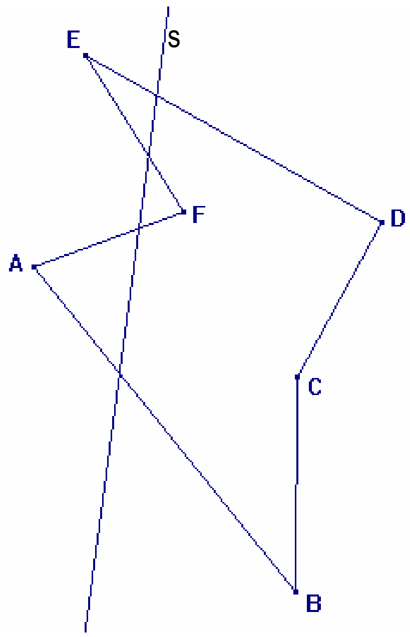
b)



c)

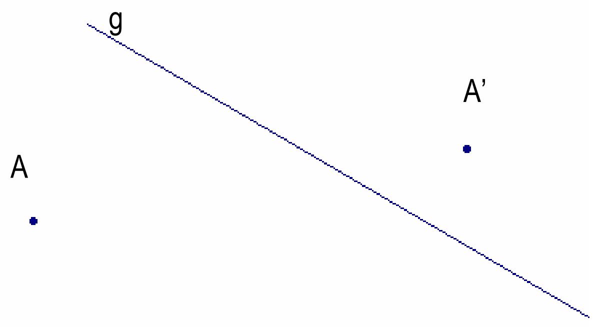


d)

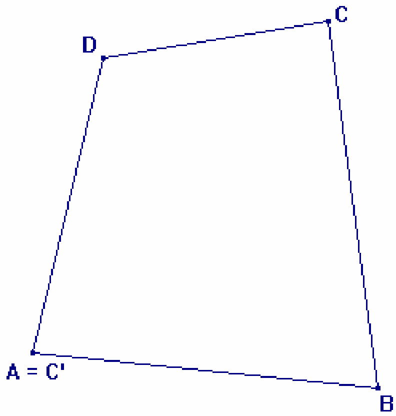


2. **Gegeben sind die Punkte A,B und das Bild von A = A'. Konstruiere den Bildpunkt B' und lasse alle Konstruktionslinien stehen**

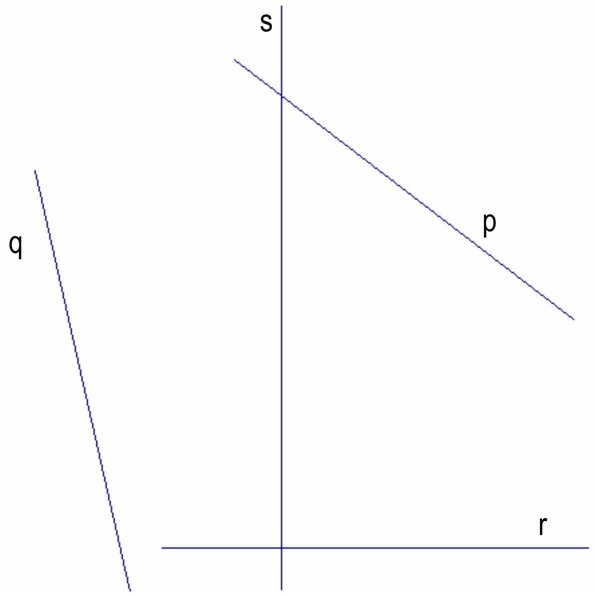
3. **Konstruiere die Symmetrieachse s und das Bild der Geraden g**



4. **Gegeben ist das Viereck ABCD. Konstruiere das achsensymmetrische Bild dieser Figur, wobei die Ecke C' mit der Ecke A zusammenfällt.:**



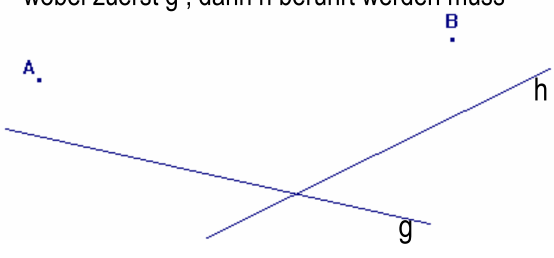
5. **Konstruiere das achsensymmetrische Bild der Geraden p, q und r. Verbinde danach alle Schnittpunkte der Geraden zu einem Fünfeck. Bemale den entstandenen Stern rot.**



6. **Suche den kürzesten Weg von A nach B,**

a) wobei die Gerade g berührt werden muss

b) wobei zuerst g , dann h berührt werden muss



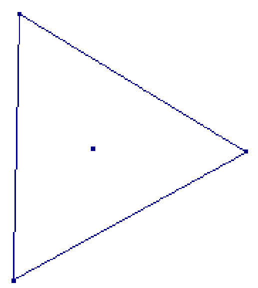
3. Drehsymmetrie und Drehung (Drehspiegelung)

3.1 Drehsymmetrie

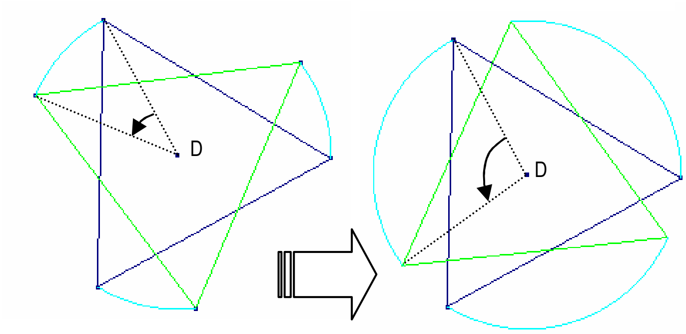
Eine **Figur ist drehsymmetrisch**, wenn sie sich **so drehen lässt, dass sie sich nach einer Drehung um einen Winkel** (der nicht 360° oder ein Vielfaches davon) **wieder vollständig abdeckt**. Der Punkt, um den man gedreht hat, ist dann der Drehpunkt, der kleinste Winkel, um den man drehen muss, damit die Figur sich vollständig abdeckt, heisst dann Drehwinkel.

Sehen wir uns die beiden untenstehenden Figuren an:

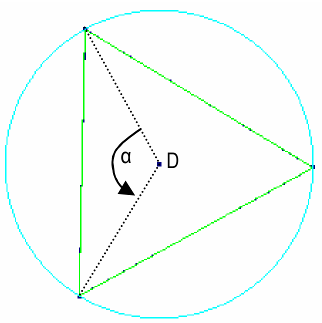
Figur 1 (drehsymmetrisch)



Diese Figur ist drehsymmetrisch, **denn sie lässt sich so drehen, dass die gedrehte Figur die ursprüngliche Figur wieder abdeckt.**

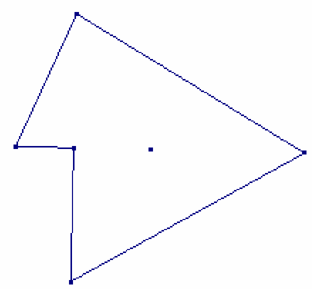


Die Drehung erfolgt um den Punkt D (Drehpunkt). Dabei öffnet sich der Drehwinkel α.

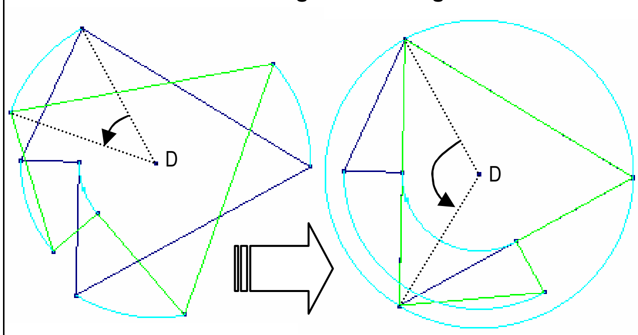


Die gedrehte Figur deckt die ursprüngliche Figur vollständig ab. (Diese Figur würde sich auch weiterdrehen lassen, es gibt weitere zwei Drehwinkel, die diese Figur so dreht, dass sie sich vollständig abdeckt. Dennoch wird normalerweise nur der kleinste Drehwinkel angegeben).
In diesem Fall ist der Drehwinkel α = 120°
(Das Dreieck kommt in 3 Positionen vollständig zur Deckung. Da eine volle Drehung = 360° ist, so entspricht unser α = 360° : 3 = 120°

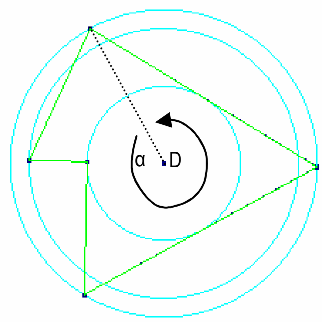
Figur 2 (nicht drehsymmetrisch)



Drehen wir diese Figur um den Punkt M, so wird sie erst **nach einer vollen Drehung (360°) wieder zur vollständigen Deckung** kommen.



Der Drehwinkel α= 120° erzeugt keine deckungsgleiche Figur! Auch mit 240° wird es nicht klappen, **der „Fortsatz“ stört die Symmetrie!**



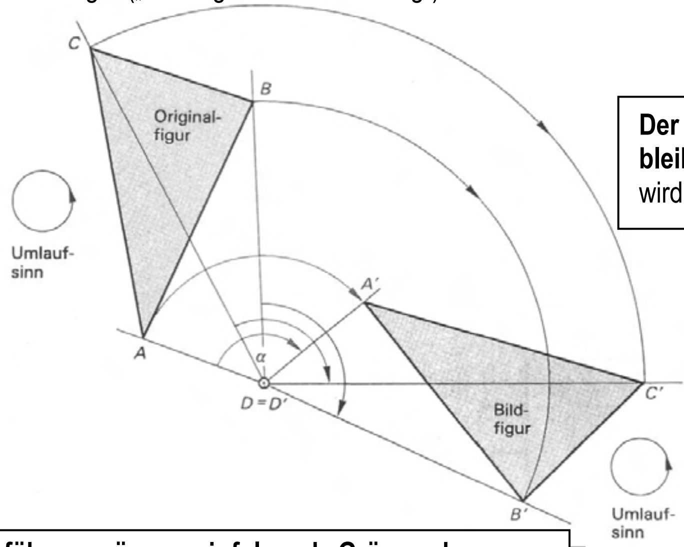
Erst die vollständige Drehung um 360° bringt die Figur wieder zur Deckung. Dies gilt aber für jede beliebige Figur und ist darum kein Grund, dass eine Figur als drehsymmetrisch gilt.
Eine Figur mit einem Drehwinkel von 360° oder einem Vielfachen von 360° gilt NICHT als drehysmmetrisch.

➔ **Die Drehfolie ist ein gutes Hilfsmittel, um drehsymmetrische Figuren zu erkennen!**

Drehung (Drehspiegelung)

Die Drehung ist eine Abbildung, die aus einer Originalfigur eine drehsymmetrische Bildfigur erzeugt *(Das bedeutet also, dass die Originalfigur nach der Abbildung drehsymmetrisch ist zur Bildfigur)*.

In der untenstehenden Figur findest du ein Originalfigur (die „Ausgangsfigur"), welche durch Drehung abgebildet wurde. Auf diese Weise ist die Bildfigur („das Ergebnis der Drehung") entstanden.



Der Umlaufsinn der Figur bleibt erhalten (die Figur wird ja bloss gedreht)

spezielle Drehwinkel:
volle Drehung 360°
halbe Drehung: 180°
Vierteldrehung: 90°

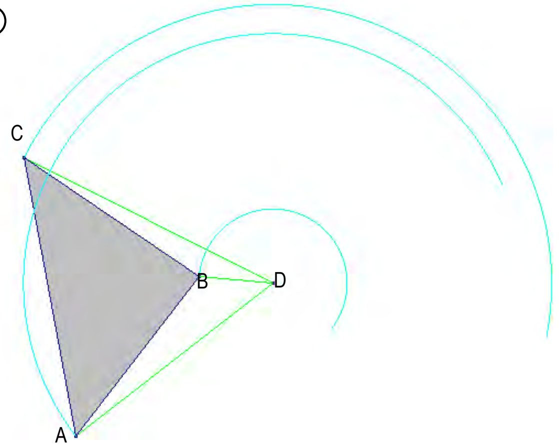
usw.

Um eine Drehung durchzuführen, müssen wir folgende Grössen kennen:

1. der **Drehpunkt D** (*Um welchen Punkt dreht man?*)
2. der **Drehwinkel α in °** (*Um welchen Winkel dreht man?*)
3. der **Drehsinn** (*Also die „Richtung, in welche man drehen soll", angegeben als Uhrzeiger- oder Gegenuhrzeigersinn*).

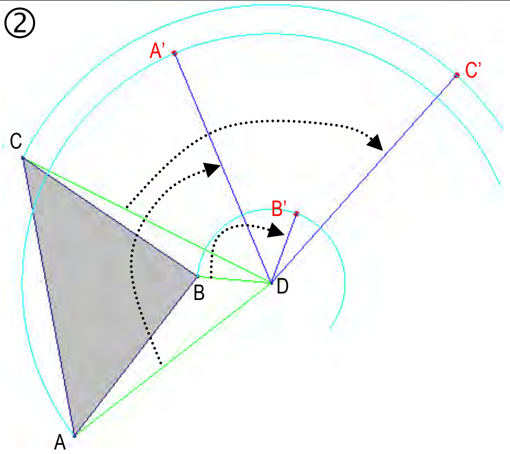
Wie aber geht man vor, wenn man eine Figur mittels Drehung abbilden will?
→ *Hier wird eine Drehung um den Punkt D im Uhrzeigersinn um 105° verlangt.*

①



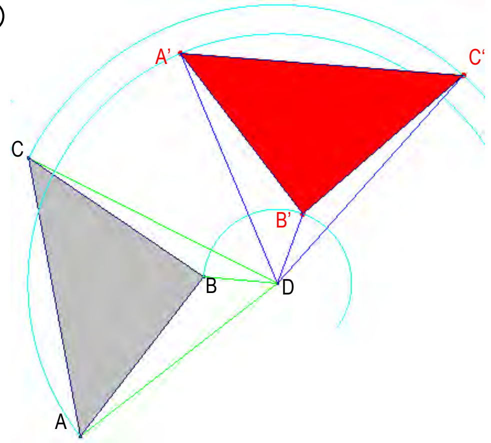
Verbinde den Drehpunkt mit allen Eckpunkten der Originalfigur und zeichne für jeden Punkt seinen „Drehweg" mit dem Zirkel (bei D einstecken) ein.

②



Jetzt misst du den Drehwinkel für den ersten Punkt (hier P) mit dem Geodreieck ab. So erhältst du P'. Genau so findest du auch die anderen Bildpunkte.

③



Verbinde die Bildpunkte miteinander und markiere die Lösung mit rot .

➔ Achte beim Übertragen der Bildpunkte ganz genau, dass du die richtige „Wanderbahn" des Originalpunktes erwischst. So kannst du Fehler vermeiden!

offizielle Abbildungsvorschrift (Bezeichnungen beziehen sich auf die Figur ganz oben auf Seite 8):
Man erhält den Bildpunkt A' eines Punktes A…
➔ indem man die Strecke DA um den Drehwinkel α um D in Drehrichtung dreht
➔ das heisst, man trägt den Winkel α in die entsprechende Richtung ab (Uhrzeiger- oder Gegenuhrzeigersinn)

➔ **Objekte sind nur punktweise drehbar** (das heisst, man muss jeden Punkt einzeln drehen, man kommt auf keinem anderen Weg zum Ziel)

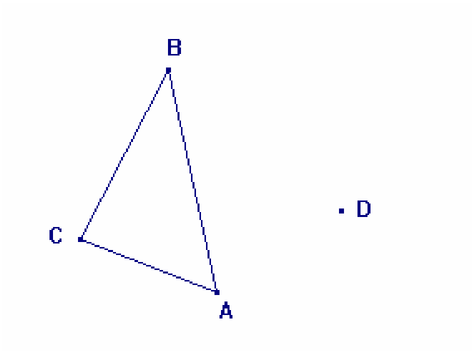
Die Originalfigur ABC und die Bildfigur A'B'C' sind jetzt drehsymmetrisch bezüglich des Drehpunktes D und dem Drehwinkel α. Dies bringt uns zur Frage, welche Eigenschaften Original- und der Bildfigur nun haben müssen, weil sie eben drehsymmetrisch sind:

Eigenschaften von Original- und Bildfigur (Bezeichnungen beziehen sich auf die Figur ganz oben auf Seite 8):
1. Original – und Bildfigur sind deckungsgleich (=kongruent)→ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$
   (Das Zeichen ≡ bedeutet „kongruent", das Zeichen △ bedeutet „Dreieck")
2. Original und Bild haben gleichen Umlaufsinn.
3. Alle Bildstrecken sind gleich lang wie die Originalstrecken (längentreu), alle Winkel bleiben erhalten (winkeltreu).
4. Geraden werden nicht auf parallele Geraden abgebildet.

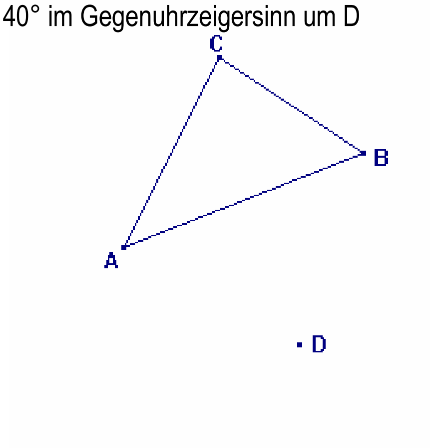
Aufgaben Drehsymmetrie und Drehung:

1. Drehe das Dreieck:

a) Um 70° im Uhrzeigersinn um D

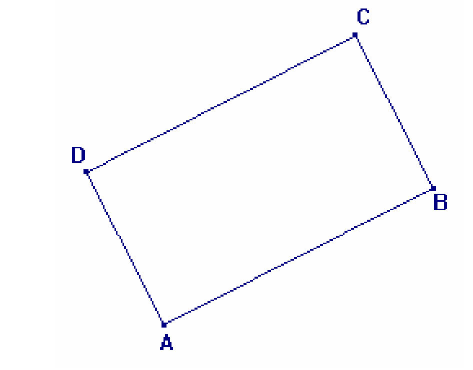


b) um 40° im Gegenuhrzeigersinn um D

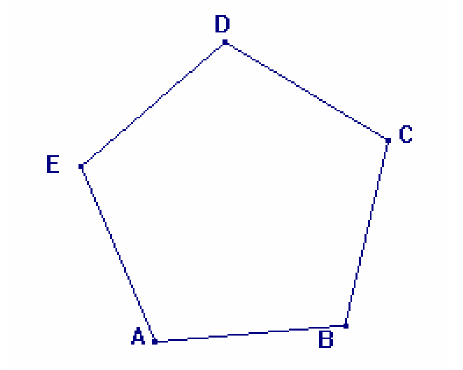


2. Drehe die Figur:

a) Um 145° im Uhrzeigersinn um den Schnittpunkt der Diagonalen

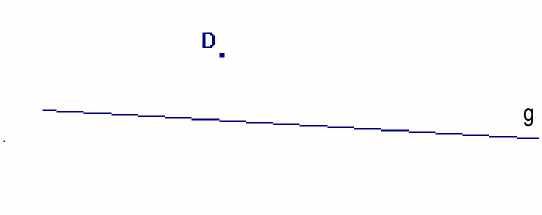


b) um 50° im Gegenuhrzeigersinn um den Schnittpunkt von AC und BD

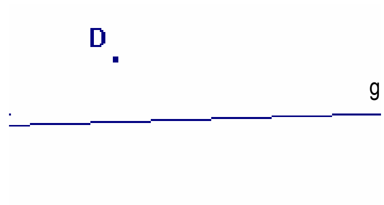


3. Drehe die Gerade g

a) um 75° im Gegenuhrzeigersinn

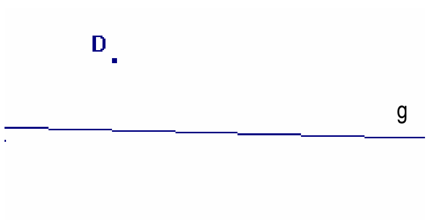


b) um 110° im Uhrzeigersinn

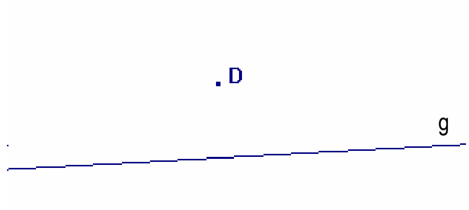


4. Drehe die Gerade g so,

a) dass g' senkrecht auf g zu stehen kommt

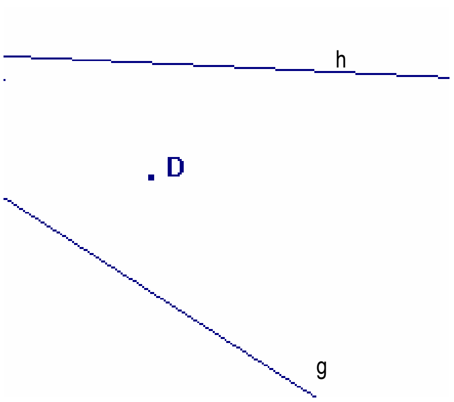


b) dass g' parallel zu g zu liegen kommt

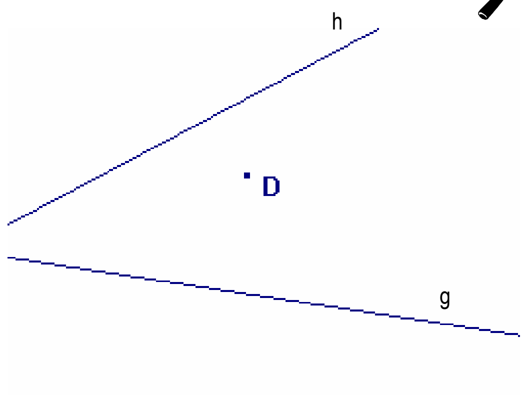


5. Drehe die Gerade g so,

a) dass g' senkrecht auf h zu stehen kommt



b) dass g' parallel zu h zu liegen kommt



Fragen / Bemerkungen:

4. Punktsymmetrie und Punktspiegelung

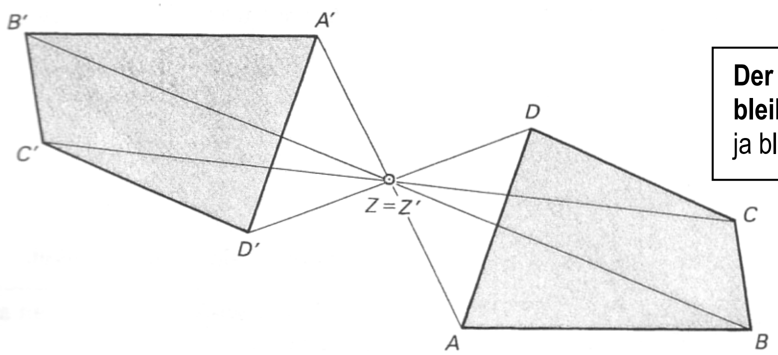
4.1 Punktsymmetrie

Eine **Figur ist punktsymmetrisch**, wenn sie sich **nach einer Drehung um 180° wieder vollständig abdeckt**. Hierzu gibt es kein besonderes Beispiel, denn Drehungen hast du gerade eben behandelt. Wenn du also jetzt nicht ganz sicher bist, schaue unter „Drehung und Drehsymmetrie“ nach.

4.2 Punktspiegelung

Die Punktspiegelung ist ein Spezialfall der Drehung (Drehung um 180°). Entsprechend kann man jede Punktspiegelung als Drehung behandeln. Dennoch ist der Vorgang der Punktspiegelung noch eine Spur einfacher und darum wird dieser Vorgang speziell behandelt:

In der untenstehenden Figur findest du ein Originalfigur (die „Ausgangsfigur“), welche durch Punktspiegelung abgebildet wurde. Auf diese Weise ist die Bildfigur („das Ergebnis der Punktsspiegelung“) entstanden.



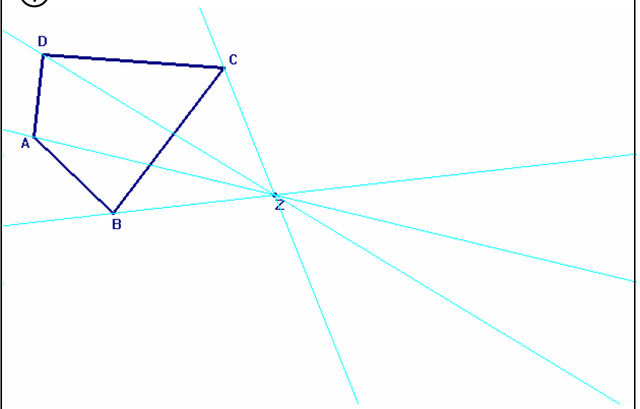
Der Umlaufsinn der Figur bleibt erhalten (die Figur wird ja bloss um 180° gedreht)

Bezeichnungsänderung bei der Punktspiegelung im Vergleich zur Drehung:

- der Drehpunkt heisst neu: **Zentrum Z**

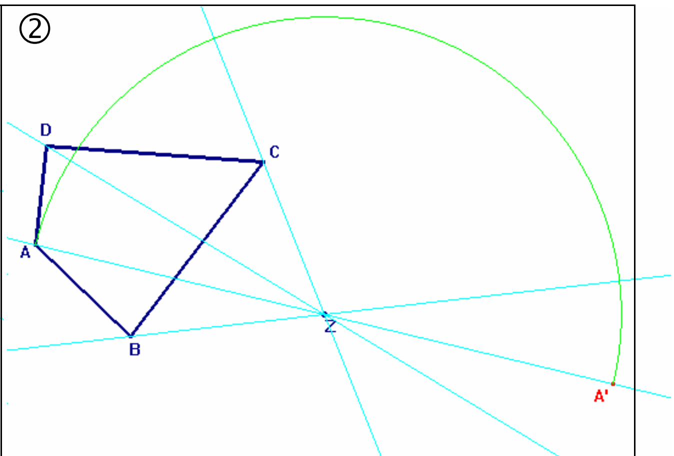
Wie genau ist nun dieses geänderte Vorgehen?

①



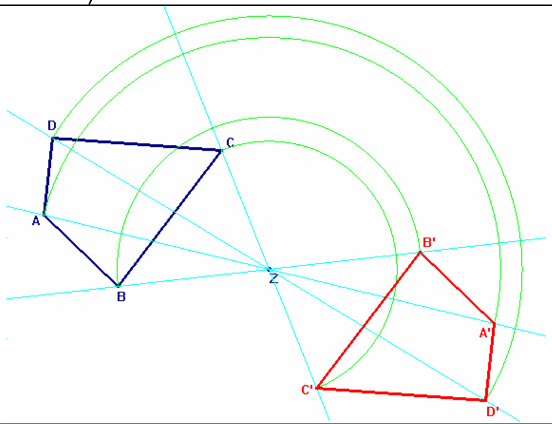
Verbinde das Symmetriezentrum Z mit allen Eckpunkten der Originalfigur (Zeichne diese Verbindungen als Geraden ein!)

②



Mit dem Zirkel trägst du die Entfernung der Eckpunkte der Originalfigur zu Z auf die andere Seite ab (Hier gezeigt für AZ). So erhältst du den jeweiligen Bildpunkt.

③



Auf diese Weise erhältst du alle Bildpunkte, diese kannst du verbinden. Markiere die Lösung rot.

➔ Bei der Punktspiegelung kannst du, sobald du einen Bildpunkt gefunden hast, mit Parallelverschieben weiterarbeiten (AB ist parallel zu A’B’, BC ist parallel zu B’C’ und so weiter)

<u>offizielle Abbildungsvorschrift (Bezeichnungen beziehen sich auf die Figur ganz oben auf Seite 11):</u>

Man erhält den Bildpunkt A' eines Punktes A…

➔ indem man die Strecke AZ über Z hinaus um sich selber verlängert

➔ Z wird dann Mittelpunkt der Strecke AA'.

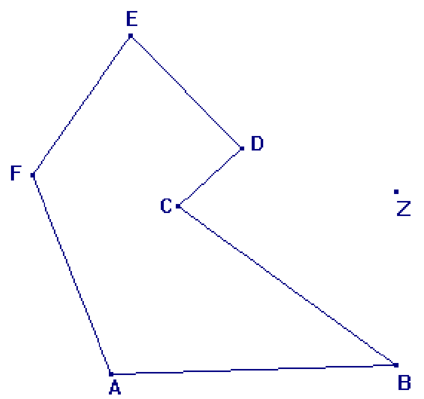
Die Originalfigur ABC und die Bildfigur A'B'C' sind jetzt punktsysmmetrisch bezüglich des Symmetriezentrums Z. Dies bringt uns zur Frage, welche Eigenschaften Original- und der Bildfigur nun haben müssen, weil sie eben punktsymmetrisch sind:

<u>Eigenschaften von Original- und Bildfigur (Bezeichnungen beziehen sich auf die Figur ganz oben auf Seite 11):</u>

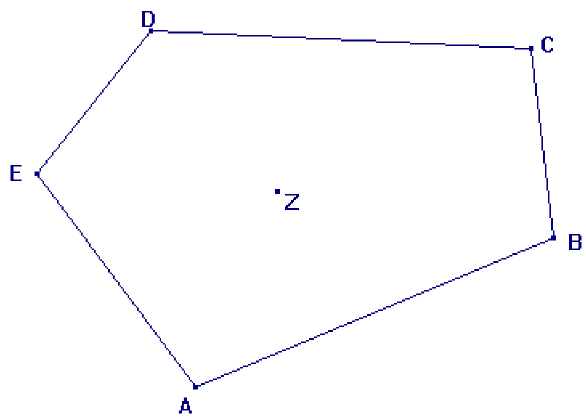
1. Original – und Bildfigur sind deckungsgleich (=kongruent)➔ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$
   (Das Zeichen ≡ bedeutet „kongruent", das Zeichen △ bedeutet „Dreieck")
2. Original und Bild haben gleichen Umlaufsinn.
3. Alle Bildstrecken sind gleich lang wie die Originalstrecken (längentreu), alle Winkel bleiben erhalten (winkeltreu).
4. Jede Geraden wird auf eine parallele Geraden abgebildet
5. Jede Verbindungsstrecke entsprechender Punkte geht durch das Zentrum Z und wird von Z halbiert

Aufgaben Punktsymmetrie und Punktsspiegelung:

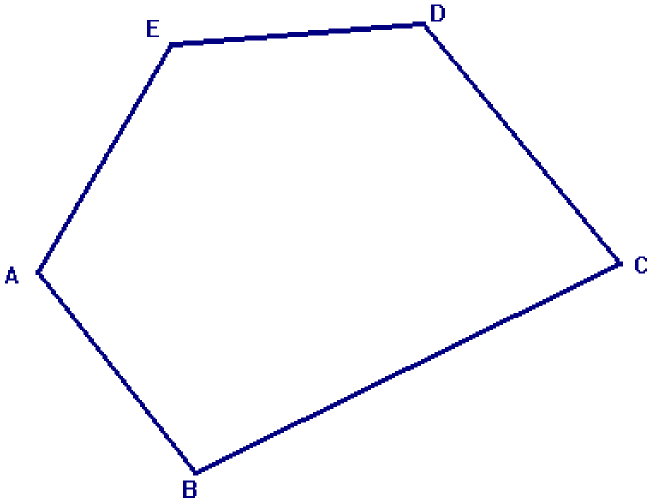
1. Spiegle das gegebene Vieleck am Punkt Z:



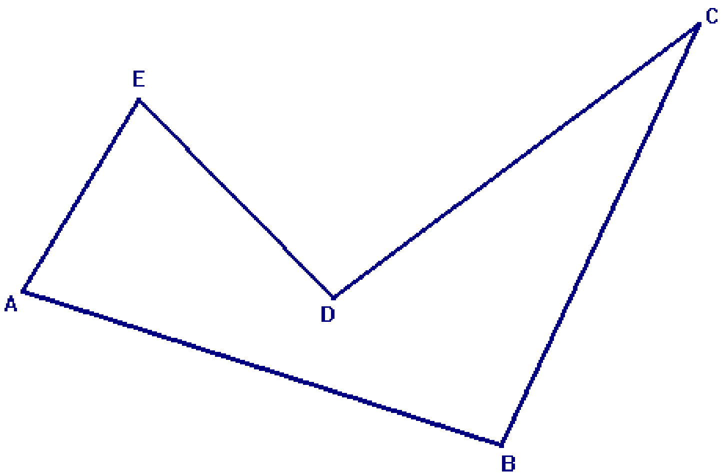
2. Spiegle das gegebene Vieleck am Punkt Z:



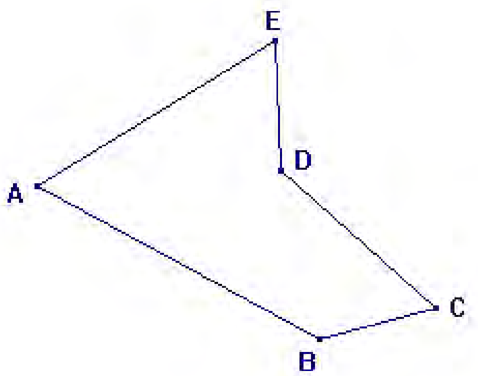
3. **Spiegle das gegebene Vieleck am Punkt Z, den du erhältst, wenn du die Mittelsenkrechte von ED mit der Mittelsenkrechten von DC schneidest:**



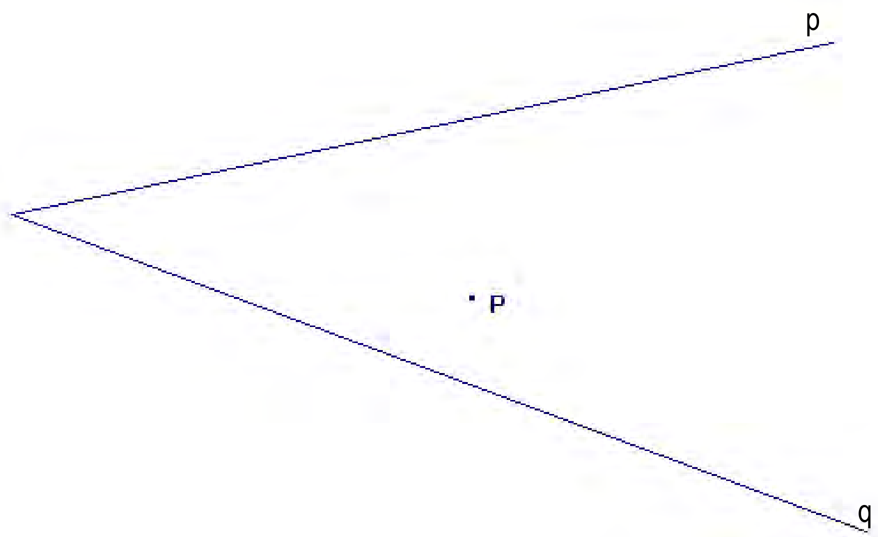
4. **Spiegle die gegebene Figur am Schnittpunkt von EC mit der Mittelsenkrechten von AB.**



5. Das Vieleck ABCDE wird mit Punktspiegelung abgebildet. Vom Bild kennst du den Punkt A'. Konstruiere das Symmetriezentrum Z und die ganze Bildfigur.



6. Zeichne eine Strecke, deren Mittelpunkt P ist und deren Endpunkte auf den Schenkeln p und q des Winkels liegen.



7. Konstruiere eine Strecke, deren Mittelpunkt P ist und deren Endpunkte auf je einer der Rechtecksseiten liegen.