9 Kompressible Strömungen

Adiabatische Strömungen dürfen in guter Näherung als inkompressibel betrachtet werden, solange Ma << 1 (Kapitel 6.1). Für Flüssigkeiten ist dies praktisch immer der Fall:

Beispiel:

Wasser bei 20°C: $a = 1482$ m/s. Damit Ma = 0.3 braucht es ein

$$\Delta p = \rho \frac{(0.3a)^2}{2} \approx 1000 \text{ atm} \tag{9.1}$$

Ein Druckunterschied von Δp = 1 atm (10^5 Pa) bewirkt in Wasser lediglich eine Geschwindigkeitsänderung von 14 m/s, in Luft hingegen erhält man

$$\Delta u = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \approx 400 \text{ m/s} \tag{9.2}$$

Kompressible Effekte kommen in Gasen viel eher vor als in Flüssigkeiten. Die Lehre von den kompressiblen Strömungen heisst deshalb auch „Gasdynamik".

In kompressiblen Strömungen treten neue Phänomene auf wie akustische Wellen, Überschallströmungen und Stossfronten.

Für Strömungen mit hoher Machzahl ist in der Regel auch die Reynoldszahl sehr hoch: Reibungseffekte sind auf Grenzschichten beschränkt.

9.1 Schallwellen

Wir betrachten kleine adiabatische Störungen in einem Gas, als Funktion der Zeit und einer räumlichen Koordinate *x*.

Kontinuitäts- und Impulsgleichung sind (ohne äussere Kräfte und Reibung)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{9.4}$$

Mit der Schallgeschwindigkeit *a:*

$$a^2 \equiv \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s \tag{9.5}$$

haben wir den Druck aus der Bewegungsgleichung eliminiert.

Differenzieren wir (9.4) nach der Zeit und setzen die Ableitung von (9.5) nach *x* ein, erhalten wir (unter Vernachlässigung quadratischer Terme in *u*):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}(\rho u) = \\ &\qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Dies ist eine Wellengleichung für ρ, Lösungen sind beliebige Funktionen der Form

$$\rho(x,t) = f(x - at) \tag{9.7}$$

beziehungsweise für u:

$$u(x,t) = g(x - at) \tag{9.8}$$

zum Beispiel harmonische akustische Wellen:

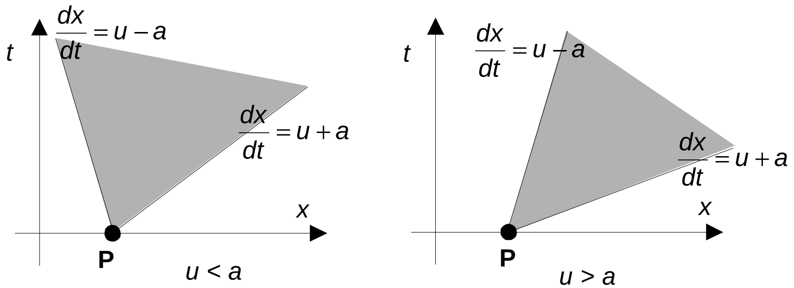
$$\rho = A \exp\{i(kx - \omega t)\} \tag{9.9}$$

$$u = B \exp\{i(kx - \omega t)\} \tag{9.10}$$

$$\frac{\omega}{k} = a \tag{9.11}$$

Die Schallgeschwindigkeit *a* hat also mehrere Bedeutungen:

- wir haben sie definiert aus der Beziehung zwischen Druck- und Dichteänderung in einem Gas (Gl. 9.5)
- sie ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von akustischen Wellen in einem Gas
- vor allem ist sie aber auch die Geschwindigkeit, mit der sich Störungen relativ zum Gas ausbreiten, beziehungsweise mit der sich Information (relativ zur Strömung) ausbreitet.



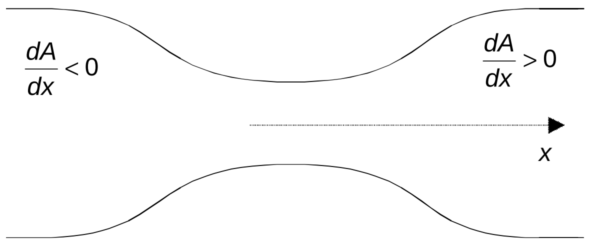
Das Gebiet in der Strömung, das vom Punkt P aus beeinflusst wird.

Für Unterschallströmung (links) breiten sich Störungen in beide Richtungen aus, für Überschallströmungen (rechts) nur in Richtung der Strömung.

Diese Abhängigkeit der Informationsausbreitung von Geschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit hat Konsequenzen für die Art der Randbedingungen, die für ein gegebenes Strömungsproblem vorgegeben werden können (vor allem auch bei numerischen Lösungsverfahren).

9.2 Strömung in einem Rohr mit variablem Querschnitt: Laval-Düse

Wir betrachten eine stationäre, eindimensionale Strömung in einem Rohr mit variablem Querschnitt *A(x)* (vernachlässigen aber Krümmungseffekte, bzw. betrachten den zentralen Stromfaden).



Aus der Kontinuitätsgleichung haben wir

$$A\rho u = const. \tag{9.12}$$

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \tag{9.13}$$

Die Bewegungsgleichung (nur Trägheitsterm und Druckgradient) schreiben wir als

$$u\,du = -\frac{dp}{\rho} = -a^2\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u^2}{Ma^2}\frac{d\rho}{\rho} \tag{9.14}$$

Eliminieren wir dp und $d\rho$ mit Hilfe von (9.14) aus der Kontinuitätsgleichung (9.13), erhalten wir eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeits- und Querschnittsänderung als Funktion der Machzahl:

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{Ma^2 - 1}\frac{dA}{A} = -\frac{dp}{\rho u^2} \tag{9.15}$$

Das Vorzeichen von *du* hängt davon ab, ob die Machzahl grösser oder kleiner als 1 ist:

	$dA < 0$	$dA > 0$
Ma < 0 :	$du > 0$, $dp < 0$	$du < 0$, $dp > 0$
Ma > 0 :	$du < 0$, $dp > 0$	$du > 0$, $dp < 0$

Eine Unterschallströmung wird in der Verengung beschleunigt, eine Überschallströmung wird in der Verengung abgebremst.

Für Ma = 1 wird (9.15) singulär: die Beschleunigung wird unendlich!

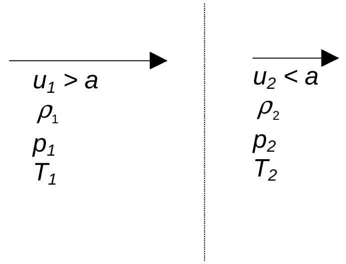
Ist aber Ma = 1 für $dA = 0$, so bleibt das Vorzeichen von *du* immer gleich: die Strömung wird von Unterschall vor der Düse auf Überschall nach der Düse beschleunigt, und erreicht an der engsten Stelle Überschallgeschwindigkeit. Eine solche Düse heisst Laval-Düse.

Wir finden ausserdem eine weitere Eigenschaft der Schallgeschwindigkeit: für $u = a$ (Ma = 1) treten Singularitäten in den Gleichungen für stationäre Strömung auf.

9.3 Stossfronten

Wird eine Überschallströmung abgebremst, wird bei Ma = 1 formal die Beschleunigung *du/dx* = -∞: es kommt zu einem Verdichtungsstoss (engl. „shock"). Ein solcher Stoss ist ein irreversibler Übergang von einer Überschall- zu einer Unterschall-Strömung. Der Übergang erfolgt quasi-diskontinuierlich; dissipative Kräfte (Viskosität) treten nur in einem sehr kleinen Abstand vom Stoss auf.

Wir betrachten einen senkrechten Stoss (Geschwindigkeit senkrecht zur Stossfront).



Die Beziehungen zwischen den Grössen stromaufwärts und stromabwärts vom Stoss sind die *Rankine-Hugoniot*-Beziehungen:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{9.16}$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \tag{9.17}$$

$$h_1 + \tfrac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \tfrac{1}{2} u_2^2 \tag{9.18}$$

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \tag{9.19}$$

Es sind dies die Gleichungen für die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie und die Zustandsgleichung für das ideale Gas.

Die Entalpie *h* ist gegeben durch

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad , \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} \tag{9.20}$$

Wenn die Grössen vor dem Stoss gegeben sind, so lassen sich die vier unbekannten Grössen ρ_2, u_2, p_2, T_2 aus den vier Gleichungen (9.16 – 9.19) berechnen. Die Gleichungen sind quadratisch in *u*, und es gibt zwei Lösungen. Die eine ist die Identität ($u_2 = u_1$, etc.), die andere beschreibt den Verdichtungsstoss:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{2}{\gamma + 1}\left(1 - \frac{1}{Ma^2}\right) \tag{9.21}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\left(Ma^2 - 1\right) \tag{9.22}$$

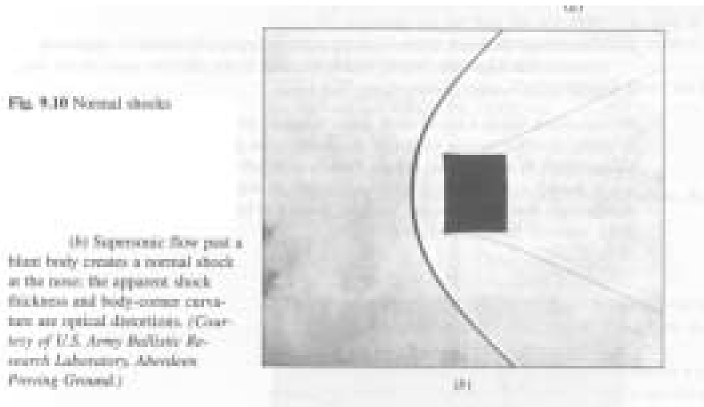
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \tag{9.23}$$

Die Lösungen sind Funktionen der Machzahl Ma:

$$Ma \equiv Ma_1 = \frac{u_1}{\sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}}} \tag{9.24}$$

(vgl.: HÜTTE: Grundlagen der Ingenieurwissenschaften).
Damit die Lösung physikalisch sinnvoll ist, muss *Ma* > 1 gelten: der Stoss kann nur ein Verdichtungsstoss sein, denn nur in diesem Fall wird die Entropie im Stoss erhöht (ein „Verdünnungsstoss" würde den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verletzen).

Verdichtungsstösse treten überall dort auf, wo eine Überschallströmung auf ein Hindernis auftrifft: die Strömung muss zuerst auf Unterschall abgebremst werden, bevor sie das Hindernis „sieht" (oder besser: „hört").

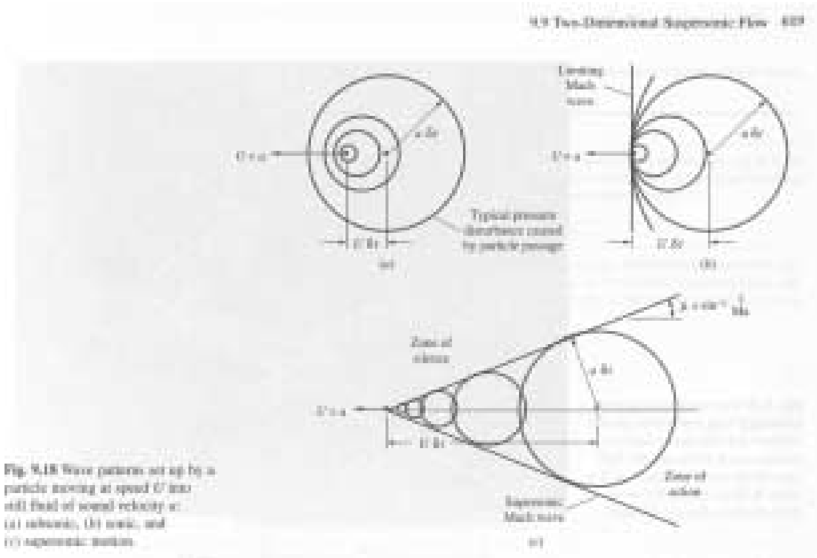


Stossfront vor einem Hindernis, Figur aus White)

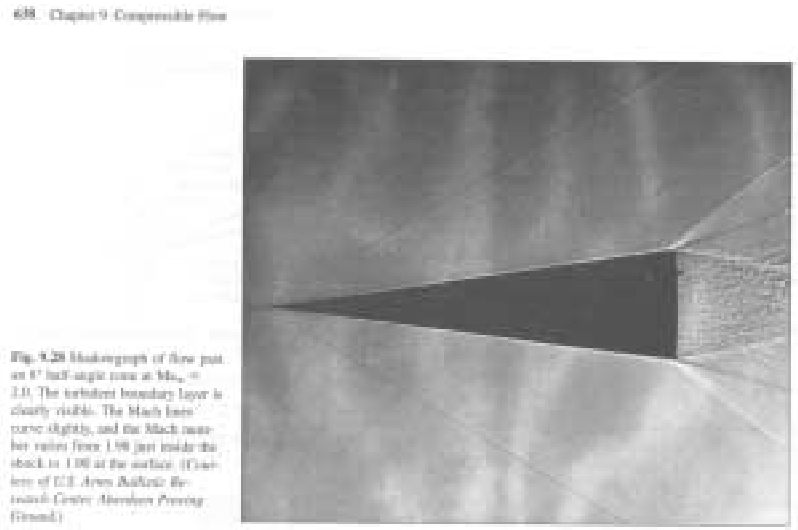
9.4 Mach-Kegel

Bewegt sich ein Körper mit Überschallgeschwindigkeit durch ein Medium, so breiten sich von ihm erzeugte akustische Wellen nur innerhalb eines Kegels (des „Mach-Kegels") aus, dessen Öffnungswinkel μ gegeben ist durch

$$\sin\mu = \frac{1}{Ma} \qquad (9.25)$$



(Mach-Kegel: Figur aus White)



(Mach-Kegel: Figur aus White)