Dielektrika im elektrischen Feld

Bringt man zwischen die Platten eines Kondensators mit Ladung Q = C U eine isolierende Platte (Dielektrikum) so gilt

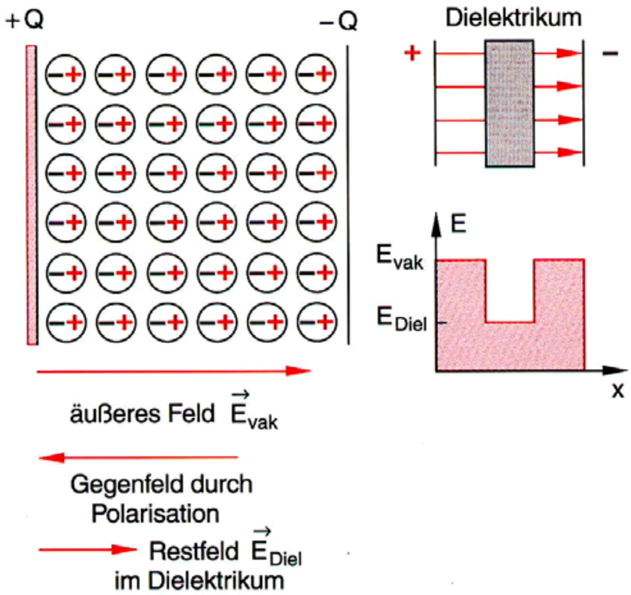
$$U \rightarrow \frac{U}{\varepsilon} \qquad \text{d.h.} \qquad C \rightarrow \varepsilon \cdot C \qquad \text{da} \quad Q = \text{const.}$$

Plattenkondensator: $$C_{Diel.} = \varepsilon \cdot C_{Vak.} = \varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{A}{d} \qquad \varepsilon > 1$$

ε **relative Dielektrizitätskonstante**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Feld einer Ladung im Dielektrikum



Dielektrische Polarisation:
Verschiebung von Ladungen analog Influenz;
jedoch Verschiebung nur innerhalb Molekül

Trennung der Ladungsschwerpunkte
→ induzierte Dipole
→ **Polarisierung**

E. Riedle E2p 26.06.2007

Stoff	ε_r
Quarzglas	3,75
Pyrexglas	4,3
Porzellan	6 - 7
Kupferoxid CuO_2	18
Keramiken	
TiO_2	≈ 80
$CaTiO_3$	≈ 160
$(SrBi)TiO_3$	≈ 1000
Flüssigkeiten	
Wasser	81
Ethylalkohol	25,8
Benzol	2,3
Nitrobenzol	37
Gase	
Luft	1,000576
H_2	1,000264
SO_2	1,0099

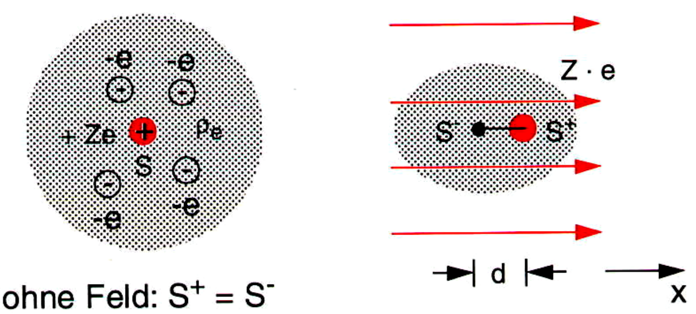
$\vec{p} = q \cdot \vec{d}$ je Atom

$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i$ Polarisation

rücktreibende Kräfte kompensieren $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

$-\vec{F}_{rück} \propto d \propto E$ (ungefähr)

$\Rightarrow \vec{P} = \alpha \vec{E}$ mit α Polarisierbarkeit (Tensor)



ohne Feld: $S^+ = S^-$

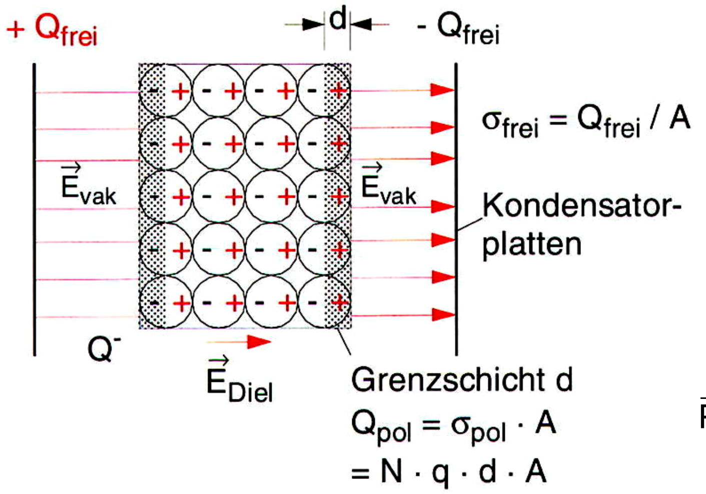
$$\vec{p}_{ind} = Z \cdot e \cdot \vec{d} = Z\,e\,d\,\hat{x}$$

Polarisationsladungen: unkompensierte Ladungen auf Stirnflächen

Ladungsdichte $\sigma_{pol} = \frac{Q_{pol}}{A} = \frac{N \cdot q \cdot d \cdot A}{A} = P$ Polarisation

"leerer" Kondensator: $\Phi_{el} = \frac{Q_{frei}}{\varepsilon_0} = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot A \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

mit Dielektrikum: $\vec{E}_{Diel} = \frac{\sigma_{frei} - \sigma_{pol}}{\varepsilon_0} \vec{x} = \vec{E}_{vak} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$



Feldstärke wird im Dielektrikum kleiner !!

$$\vec{P} = N \cdot \alpha \cdot \vec{E}_{Diel} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}_{Diel}$$

$$\chi = \frac{N \cdot \alpha}{\varepsilon_0} \qquad \text{dielektrische Suszeptibilität}$$

$$\vec{E}_{Diel} = \frac{\vec{E}_{vak.}}{1+\chi} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{E}_{vak.} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 1 + \chi$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}_{Diel} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}_{Diel} = \varepsilon_0 \left(\vec{E}_{vak.} - \vec{E}_{Diel} \right)$$

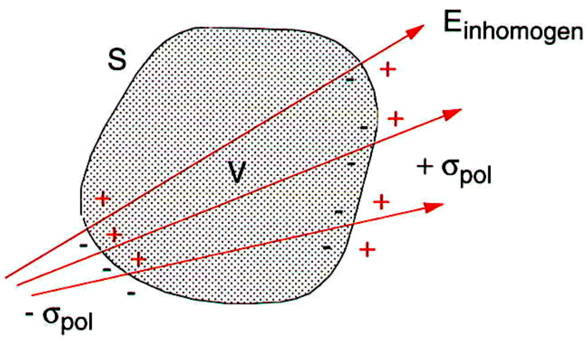
Gleichungen des elektrostatischen Feldes in Materie

homogenes Feld: nur an der Oberfläche unkompensierte Polarisationsladungen, d.h. Sprung von $E_{vak.}$ auf $\frac{1}{\varepsilon} E_{vak.}$

inhomogenes Feld: auch im Inneren Polarisationladungen

$$\Delta Q_{pol} = \int_V \rho_{pol} \, dV = \int_S \sigma_{pol} \, dS = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div} \vec{P} \cdot dV$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div} \vec{P} = \rho_{pol}$$



$$\Delta Q_{pol} = \oint_S \sigma_{pol} \, dS$$

Durch äußeres Feld erzeugte Polarisationsladungen sind Quellen der elektrischen Polarisation !!!

$$\mathrm{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div} \vec{E}_{Diel} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{frei} - \rho_{pol}) = \mathrm{div} \left(\vec{E}_{vak.} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right)$$

dielektrische Verschiebungsdichte

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_{Diel} + \vec{P} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_{vak.}$$

$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$ mit $\rho = \rho_{frei}$

$$[D] = [\varepsilon_0 E] = 1 \frac{A\,s}{m^2} = 1 \frac{C}{m^2}$$

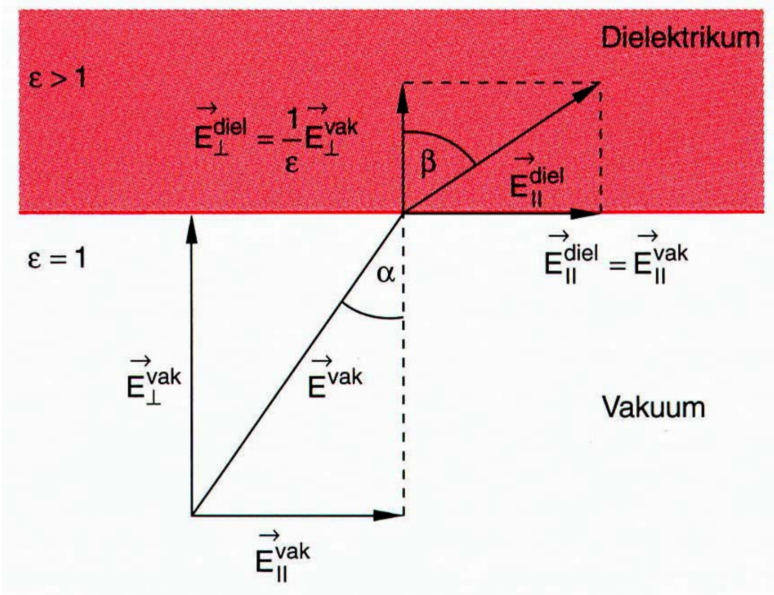
Grenzfläche:

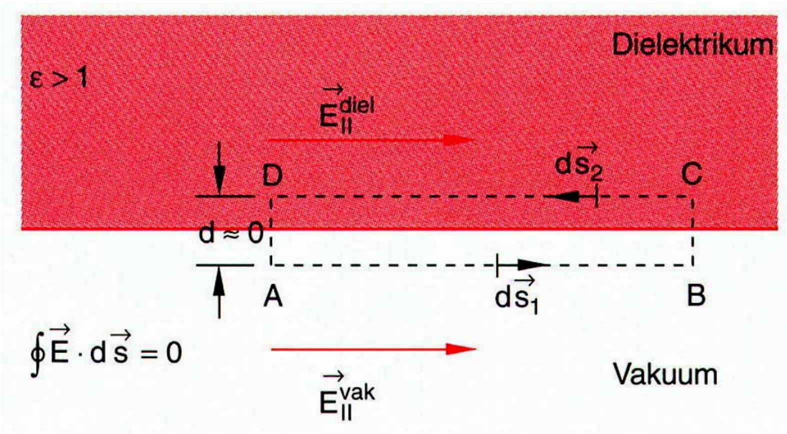
$$\varepsilon_0 \, \varepsilon \vec{E}_{Diel} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vak.}$$

→ Normalkomponente von $\vec{D}$ stetig

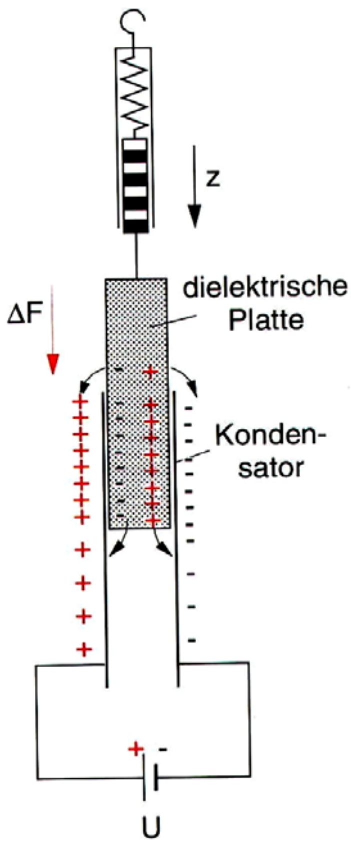
Tangentialkomponente von $\vec{D}$ nicht stetig

→ **Brechungsgesetz**

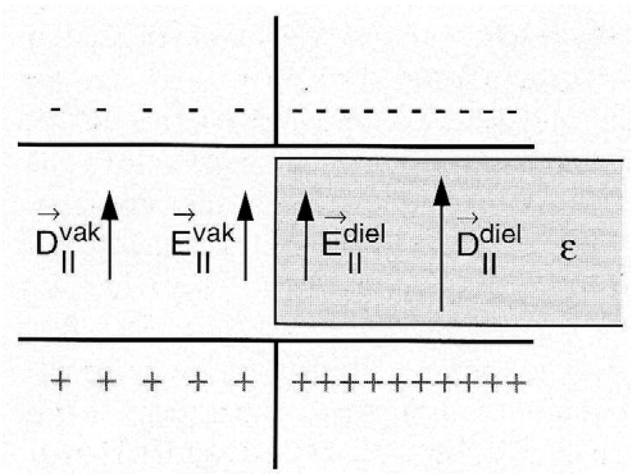




Teilweise Einbringung des Dielektrikums in einen Kondensator (mit Q const.) führt zur Verschiebung von Ladung auf den Platten.



$$Q = C \cdot U = C_0 \cdot \varepsilon \cdot U$$



Elektrische Feldenergie im Dielektrikum

$$C \rightarrow C \cdot \varepsilon$$

$$W_{el} = \frac{1}{2} C U^2 = \varepsilon \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot A \cdot d$$

$$\boxed{w_{el} = \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 = \frac{1}{2} E \cdot D}$$

allgemein !!

Grund: Zur Energiedichte $1/2\,\varepsilon_o E^2$ im Vakuum addiert sich die Energie der Ladungsverschiebung.

$$W_{Pol} = \int_0^d F\,dx = \frac{1}{2} k\,d^2 \qquad k = \frac{Q \cdot E}{d} \qquad \text{(pro Molekül)}$$

$$\Rightarrow \qquad W_{Pol} = \frac{1}{2} Q \cdot E \cdot d = \frac{1}{2} p \cdot E$$

$$w_{el} = \frac{1}{V} W_{Pol} = \frac{1}{2} N p E = \frac{1}{2} P \cdot E = \frac{1}{2} \varepsilon_o (\varepsilon - 1) E^2$$

Isolierter Kondensator mit Dielektrikum (Q konstant):

$$W = \frac{1}{2} E_o D_o V \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2\,\varepsilon} E_o D_o V$$

Differenz ist mechanische Energie !

Kondensator mit Dielektrikum bei konstanter Spannung:

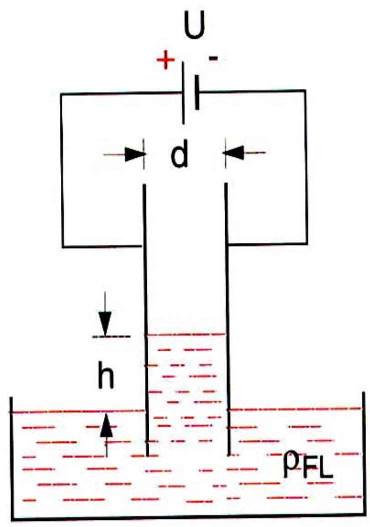
Kondensator wird weiter geladen !

$$W_{Batterie} = \Delta Q \cdot U = (\varepsilon - 1) C_o U \cdot U$$

$$\Delta W_{el} = \frac{1}{2} (\varepsilon - 1)\, C_o\, U^2$$

Energie fließt ins Dielektrikum $\rightarrow$ mech. Kraft

Bei Flüssigkeit, die in den Kondensator gezogen werden kann, ergibt sich ein Gleichgewicht.



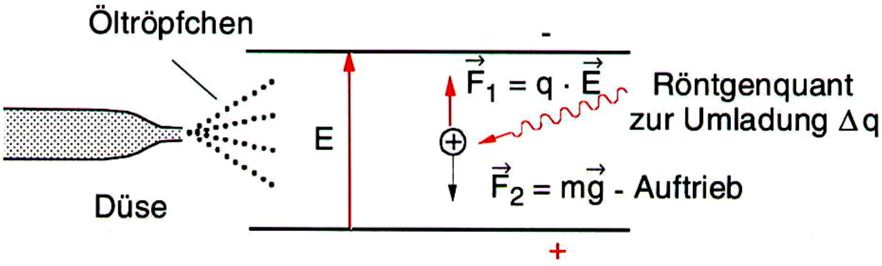
$$W_{mech.} = \rho_{fl} \cdot g \cdot h \cdot dV \quad \leftrightarrow \quad \Delta W_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_o (\varepsilon - 1) E^2\, dV$$

$$\Rightarrow \qquad h = \frac{\varepsilon_o (\varepsilon - 1)}{2\,\rho_{fl} \cdot g} E^2$$

Atomare Grundlagen

negative Ladungen: Elektronen

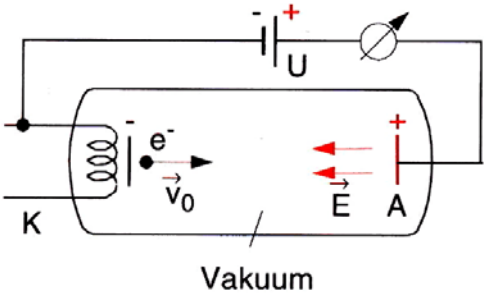
positive Ladungen: Protonen



Millikan-Versuch: $q = n \cdot e^-$

1) Schwerkraft = Auftriebskraft + Reibungskraft
   → konstante Geschwindigkeit → Radius, Masse

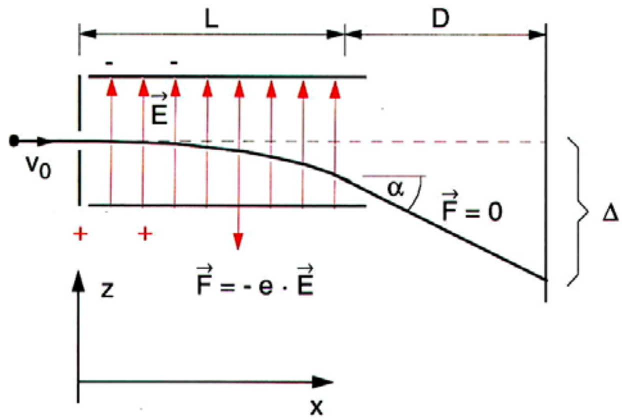
2) elektrische Kraft = Schwerkraft → Ladung → **Elementarladung**



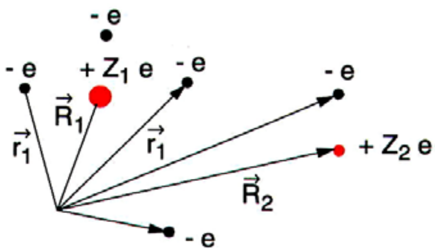
Brownsche Röhre, Lisajous – Figuren

Ablenkung von Elektronen:

Beschleunigung → Parabelbahn



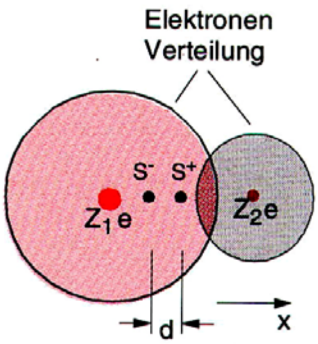
Molekulare Dipolmomente: permanente Dipolmomente
induzierte Dipolmomente → Anlagerung an Ion



$$\vec{p} = \Sigma Z_k e \vec{R}_k - \Sigma e \vec{r}_i$$

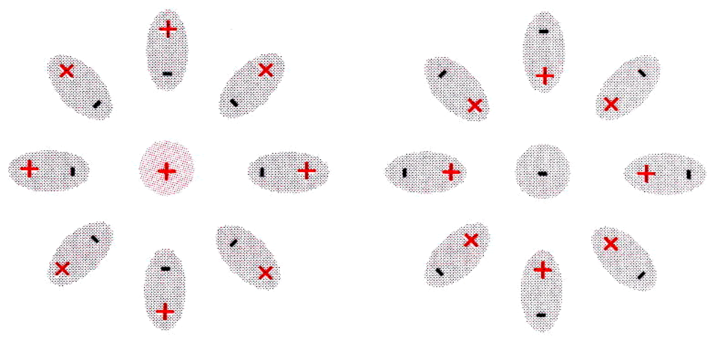
$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

1 Debye = 3,3356 x 10^{-30} Cm

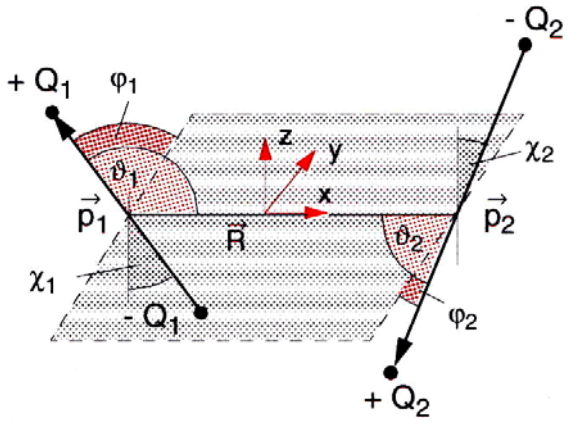


$$\vec{p} = (Z_1 + Z_2)\, e \cdot d \cdot \hat{x}$$

polarisierte Moleküle

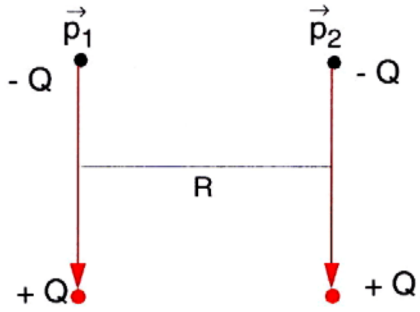


Dipol-Dipol-Wechselwirkung → Anziehung

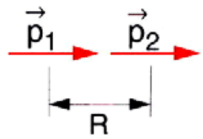


$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 \,.\, p_2 \,[\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\chi_1 - \chi_2)]$$

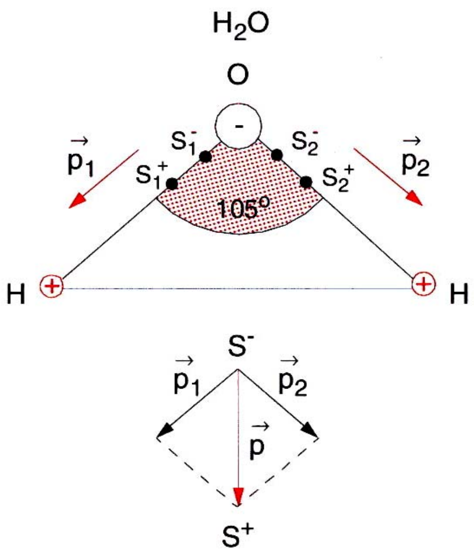
$$\vec{p}_1 \cdot \vec{R} = p_i \cdot R \cdot \cos\vartheta_i$$

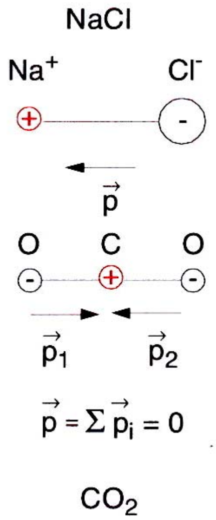


$$E_{pot} = \frac{\vec{p}_1\,\vec{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

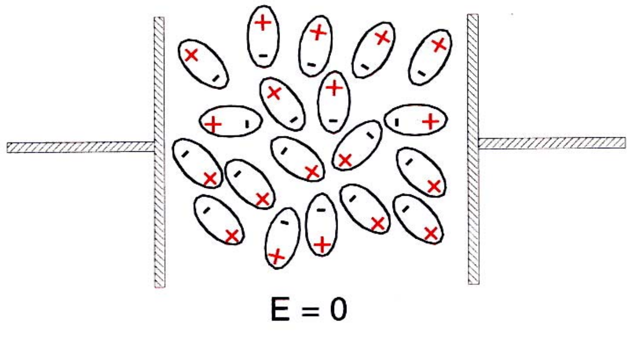


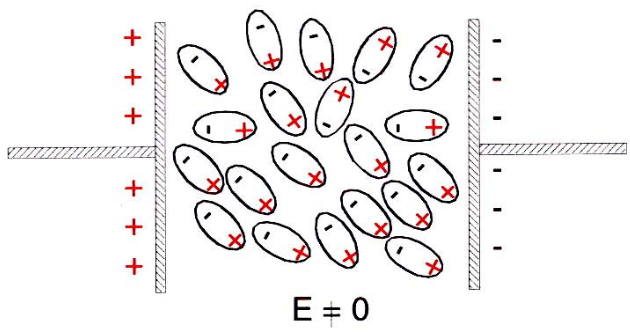
$$E_{pot} = -\,\frac{2p_1\,p_2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$





Symmetrische Moleküle haben kein permanentes Dipolmoment





Nur **teilweise** Ausrichtung im elektrischen Feld (Boltzmann !)