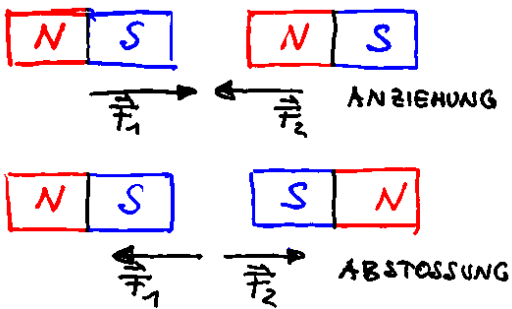


Magnetostatik: statische Magnetfelder ($j = \text{const.}$)

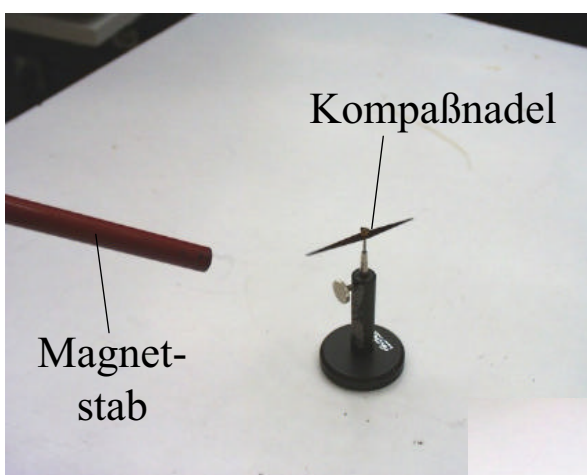
Experimentelle Beobachtungen:



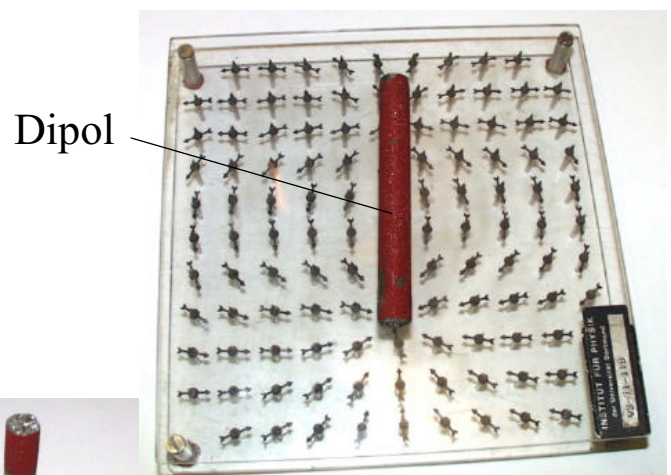
- es gibt elektrisch neutrale Körper (Eisen, "Magnete", ...) die sich je nach Ausrichtung anziehen oder abstoßen
- werden diese Permanentmagnete in der Mitte auseinandergebrochen, so entstehen zwei Teile mit den ebensolchen Eigenschaften
- es werden keine "magnetischen Monopole" gefunden, sondern nur "Nordpol" und "Südpol" im gleichen Objekt

- Eisenpulver richtet sich in der Nähe von Magneten entlang Linien aus
- ein Magnet, der an einem Faden aufgehängt ist, richtet sich aus
- in der Nähe eines Strom-durchflossenen Leiters ist ebenfalls eine Ausrichtung von Magneten zu finden
- zwei Strom-durchflossene Leiter ziehen sich an oder stoßen sich ab.

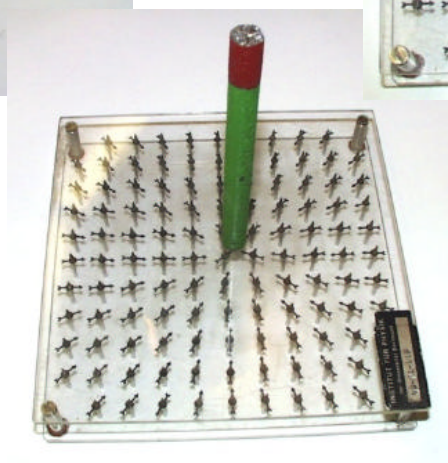
E. Riedle Physik^{LMU}



Zwischen Kompaßnadel und Magnetstab wirkt eine Kraft. Das ist ein erster Nachweis des magnetischen Kraftfeldes

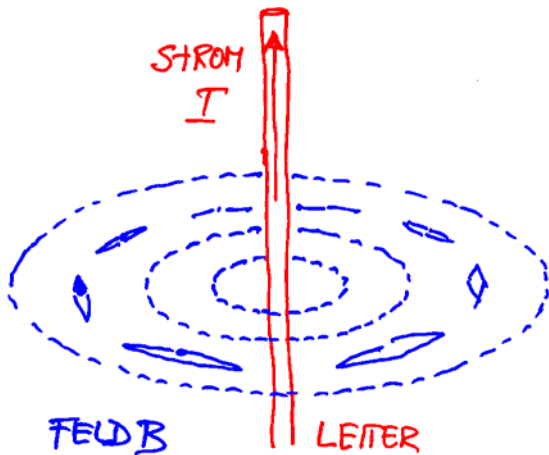


Feldlinien eines magnetischen Dipols



Feldlinien an einem Pol

Das magnetisches Feld



- Alle genannten Beobachtungen führen zu der Folgerung, dass es eine zusätzliche Kraft geben muss!
- Diese wird im **magnetischen Feld** zusammengefasst
- die magnetischen Feldlinien sind immer geschlossen
- Ähnlich zum Coulomb-Gesetz findet man für zwei Pole

$$\vec{F} = f \cdot \frac{p_1 \cdot p_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{4\pi\mu_0} \quad \text{wobei} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

magnetische Permeabilitätskonstante

E. Riedle Physik^{LMU}

Die magnetische Feldstärke

- Die Größe $\vec{H} = \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{\vec{F}}{p_2} \right)$ wird als **magnetische Erregung** bezeichnet

- Die **magnetische Feldstärke** wird definiert durch

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

$$[H] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad [B] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T} \quad 1 \text{ Gau\ss} = 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

für 2 parallele Leiter gilt (Oersted):

$$\frac{\vec{F}_{12}}{\ell} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \vec{r} = -\frac{\vec{F}_{21}}{\ell}$$

Damit ergibt sich die Definition der Stromstärke:

1 A ist diejenige Stromstärke, die zwischen zwei unendlich langen, geraden Leitern im Abstand von 1 m eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N pro m verursacht.

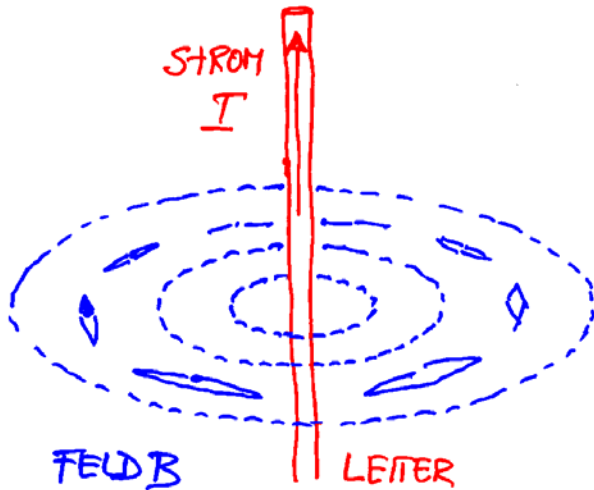
E. Riedle Physik^{LMU}

Ampèresches Gesetz

Experimentell wird für einen Strom durch einen Leiter und das dadurch erzeugte Magnetfeld gefunden:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

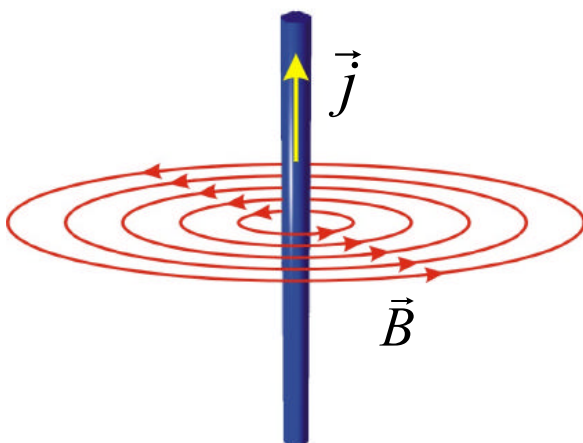


Hierbei ist der Integrationsweg beliebig, solange er geschlossen ist und eine Fläche umschließt, die vom Strom durchflossen wird.

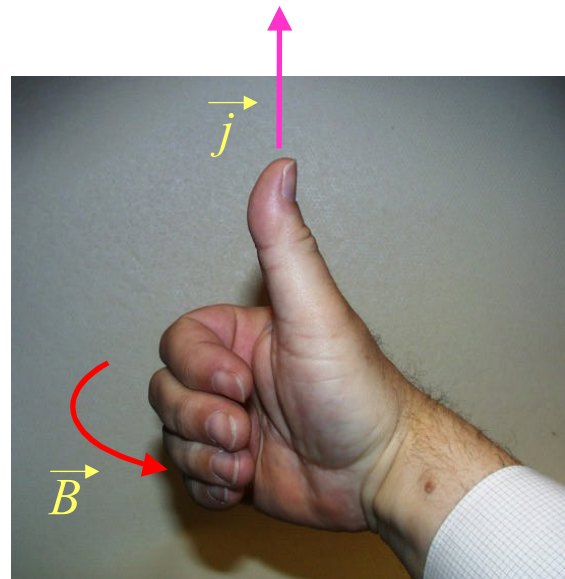
Speziell bei symmetrischen Anordnungen kann aus dem Ampèreschen Gesetz das Magnetfeld berechnet werden.

E. Riedle

Physik^{LMU}



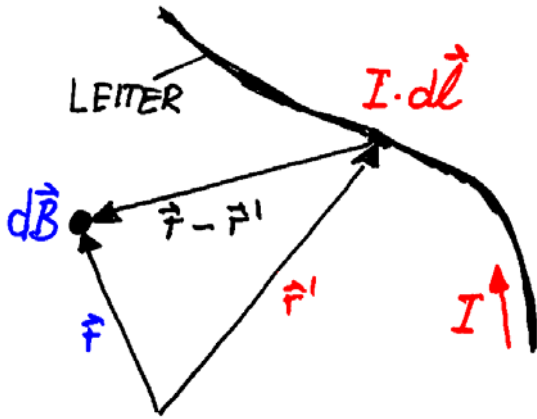
Die Richtung von Strom und Magnetfeld kann einfach durch die „rechte Hand“ demonstriert werden.



Veranschaulichung der „Rechte-Hand-Regel“

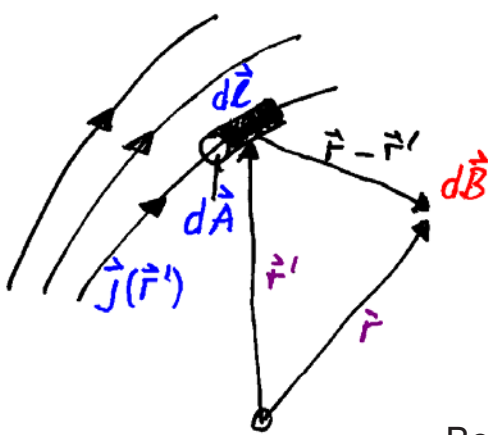
DAS BIOT-SAVARTSCHE GESETZ

EIN VOM STROM I DURCHFLOSSENES LEITERELEMENT $d\vec{\ell}$
 AN ORT \vec{r}' ERZEUGT AN ORT \vec{r} DAS MAGNETFELD



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

E. Riedle Physik^{LMU}



Magnetfeld einer Stromverteilung

Das Fadenelement der Stromverteilung erzeugt den Beitrag zum Magnetfeld

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Berücksichtigung der "Geometrie" ergibt:

$$dI = \vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{A} \quad \text{und} \quad dI d\vec{\ell} = \vec{j}(\vec{r}') |d\vec{\ell}| |d\vec{A}| = \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Bio-Savart'sches
Gesetz

E. Riedle Physik^{LMU}

ANALOGIE ZUR ELEKTROSTATIK

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

SUPERPOSITIONSPRINZIP GILT AUCH FÜR
MAGNETFELDER

MAGN. KRAFT, DIE AUF EINE STROMDICHTE $\vec{j}(\vec{r})$
VON EINEM ANDEREN STROMFÜHR. LEITER ERZEUGT.
MAGNETFELD AUSGEÜBT WIRD

$$\vec{F} = \iiint dV' [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')]]$$

E. Riedle

Physik^{LMU}

aus $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ und $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

folgt $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \vec{j}(\vec{r}') \times \left\{ -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}$

umformen liefert $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

damit gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$

mit $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$ folgt schließlich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Maxwell-Gleichung

es gibt keine magnetischen Monopole !!!

E. Riedle

Physik^{LMU}

Rotation des Magnetfeldes

... mit entsprechenden "trickreichen" Überlegungen lässt sich errechnen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

noch eine **Maxwell-Gleichung**

Aus dieser Gleichung kann das experimentell gefundene Ampèresche Gesetz für zeitlich konstante Ströme hergeleitet werden.

Alternativ kann man die Maxwell-Gleichung leicht aus dem Ampèreschen Gesetz $\mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ herleiten:

Es wird der Satz von Stokes $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot d\vec{A}$ benutzt

$$\mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

Dies gilt für alle Volumina \rightarrow die Integranden stimmen überein \rightarrow Maxwell

E. Riedle

Physik^{LMU}

Elektromagnetische Felder und Relativitätstheorie

$$E'_x = E_x$$

$$E'_y = \gamma \cdot (E_y - v_x \cdot B_z)$$

$$E'_z = \gamma \cdot (E_z + v_x \cdot B_y)$$

$$B'_x = B_x$$

$$B'_y = \gamma \cdot \left(B_y + \frac{v}{c^2} \cdot E_z \right)$$

$$B'_z = \gamma \cdot \left(B_z - \frac{v}{c^2} \cdot E_y \right)$$

$$E_x = E'_x$$

$$E_y = \gamma \cdot (E'_y + v_x \cdot B'_z)$$

$$E_z = \gamma \cdot (E'_z - v_x \cdot B'_y)$$

$$B_x = B'_x$$

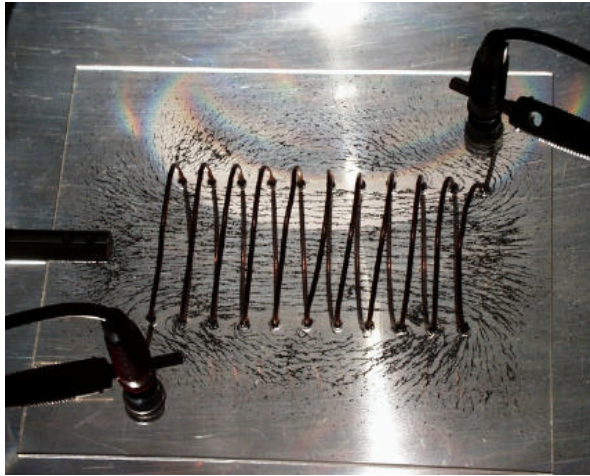
$$B_y = \gamma \cdot \left(B'_y - \frac{v}{c^2} \cdot E'_z \right)$$

$$B_z = \gamma \cdot \left(B'_z + \frac{v}{c^2} \cdot E'_y \right)$$

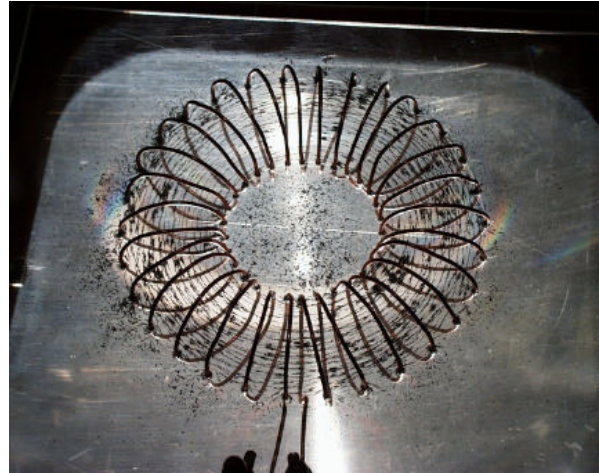
Zur Herleitung und Erläuterung siehe Lehrbücher oder handout von H. Lesch !

E. Riedle

Physik^{LMU}



Feldlinien einer stromdurchflossenen Spule



Feldlinien eines stromdurchflossenen Torus

Magnetfelder in speziellen Anordnungen

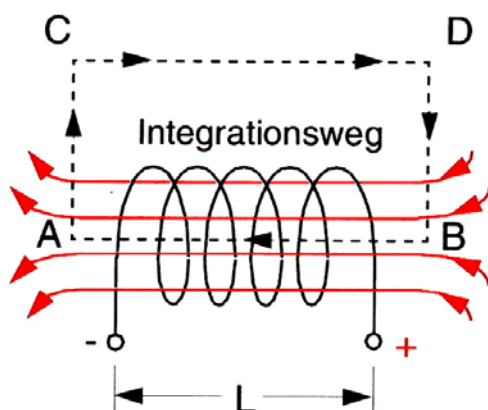
"unendlich" lange Luft-Spule N Windungen / Meter, Radius R , Strom I

a) Gibt es radiale Komponente B_r ?

Umkehrung von I würde zu einer Umkehrung von B_r führen; dies ist äquivalent zur Rotation der Spule um senkrechte Achse, die B_r nicht ändert $\rightarrow B_r = 0$

b) Gibt es B_θ entlang Umfang? $B_\theta 2\pi r = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = 0$

dies gilt strikt innerhalb, im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ auch außerhalb $\Rightarrow \vec{B} \parallel \text{Spulenachse}$



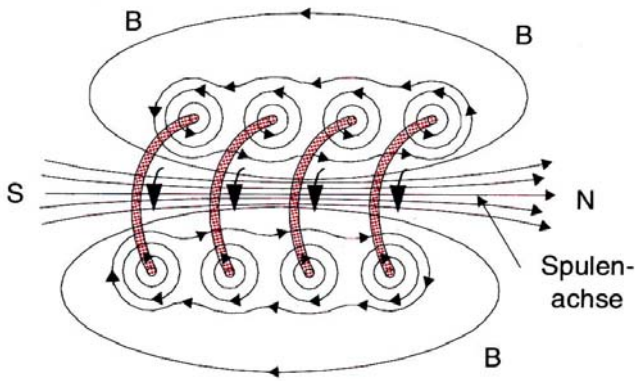
c) "Beobachtung": $r \rightarrow \infty \Rightarrow B \rightarrow 0$

d) $[B("A") - B("B")]L = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I = 0$
 \rightarrow Feld außerhalb der Spule unabhängig vom Abstand

$\rightarrow B = 0$ außerhalb

e) $B \cdot L = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I_{\text{ges}} = \mu_0 N I L$

$\rightarrow \vec{B} = \mu_0 N I \hat{z}$ innerhalb



Für reale (endlich lange) Spulen treten Randeffekte auf, sowie leichte Einflüsse der diskreten Wicklung. Trotzdem ist die Luftspule eine gute Anordnung, über eine lange Strecke ein gleichförmiges Magnetfeld zu erzeugen.

Dies wird z.B. beim Faraday-Rotator in der Laseroptik genutzt.

Kreisförmige Stromschleife (in x-y-Ebene)

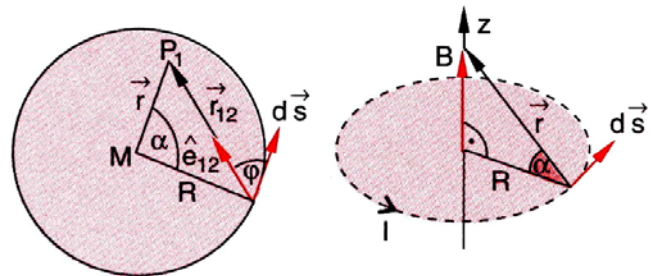
In x-y-Ebene: $\vec{B} = (0,0,B_z)$

es gilt:

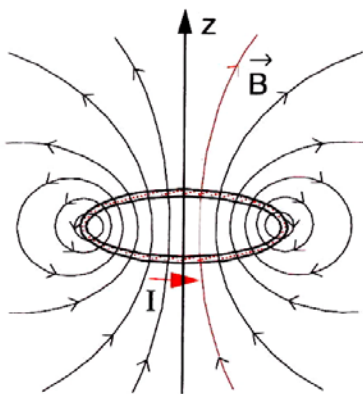
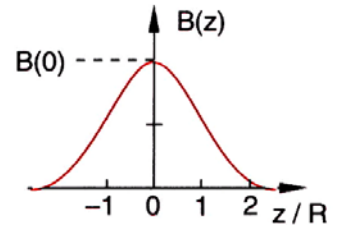
$$|\hat{e}_{12} \times d\vec{s}| = \sin \varphi ds \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\sin \varphi}{r_{12}^2} ds$$

in Mittelpunkt gilt:

$$r_{12} = R, \quad \varphi = \pi/2 \Rightarrow B_z(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot R}$$



$$|\hat{e}_{12} \times d\vec{s}| = \sin \varphi ds$$



auf Achse:

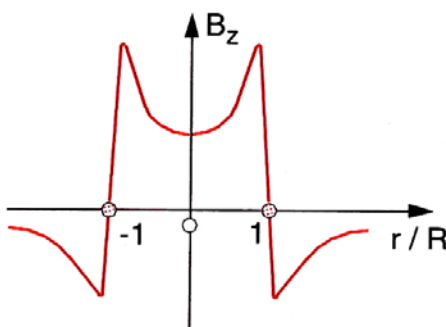
$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{r^3}$$

$B_{\perp} = 0$ wegen Symmetrie !

$$dB_z = dB \cdot \cos \alpha \quad |\vec{r} \times d\vec{s}| = r \cdot ds = \frac{R}{\cos \alpha} ds$$

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint R ds = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} 2\pi R$$

$$B_z(x=y=0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$$



Außerhalb der Symmetrieachse **numerische** Integration !

Feldlinien wie kurzer Stabmagnet

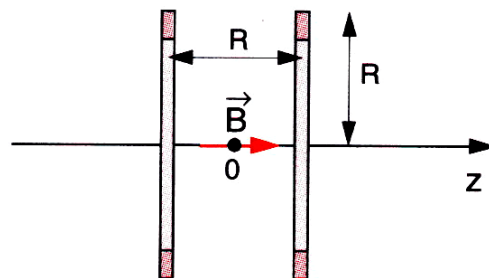
→ **magnetischer Dipol**

Helmholtz - Spulenpaar

Abstand $d = \text{Radius } R$; Strom I

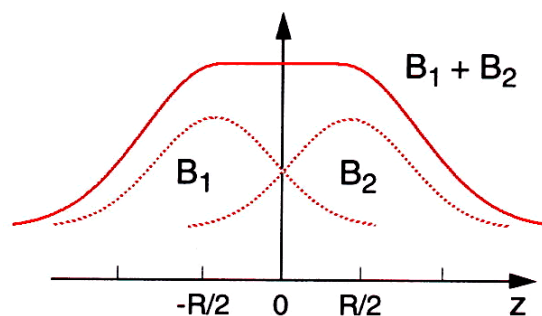
$$B(z) = B_1\left(\frac{d}{2} + z\right) + B_2\left(-\frac{d}{2} + z\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2} + z\right)^2 + R^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\left(-\frac{d}{2} + z\right)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \right\}$$



Taylorentwicklung um $z = 0$ ergibt

$$B(z) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \cdot \left[1 + A_1(d,R) \cdot z + A_2(d,R) \cdot z^2 + A_3(d,R) \cdot z^3 + A_4(d,R) \cdot z^4 + \dots \right]$$



E. Riedle

Physik ^{LMU}

Die Terme $A_1(d,R)$ und $A_3(d,R)$ verschwinden aufgrund der Symmetrie des Problems.

$$B(z) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \frac{d^2 - R^2}{\left[\frac{d^2}{4} + R^2 \right]^2} \cdot z^2 + \frac{15}{8} \frac{d^4/2 - 3d^2R^2 + R^4}{\left[\frac{d^2}{4} + R^2 \right]^4} \cdot z^4 + \dots \right]$$

Damit gilt für $d = R$:

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I}{\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} R} \left[1 - \frac{144 z^4}{125 R^4} \right]$$

für $z / R = 0,3$ gilt noch

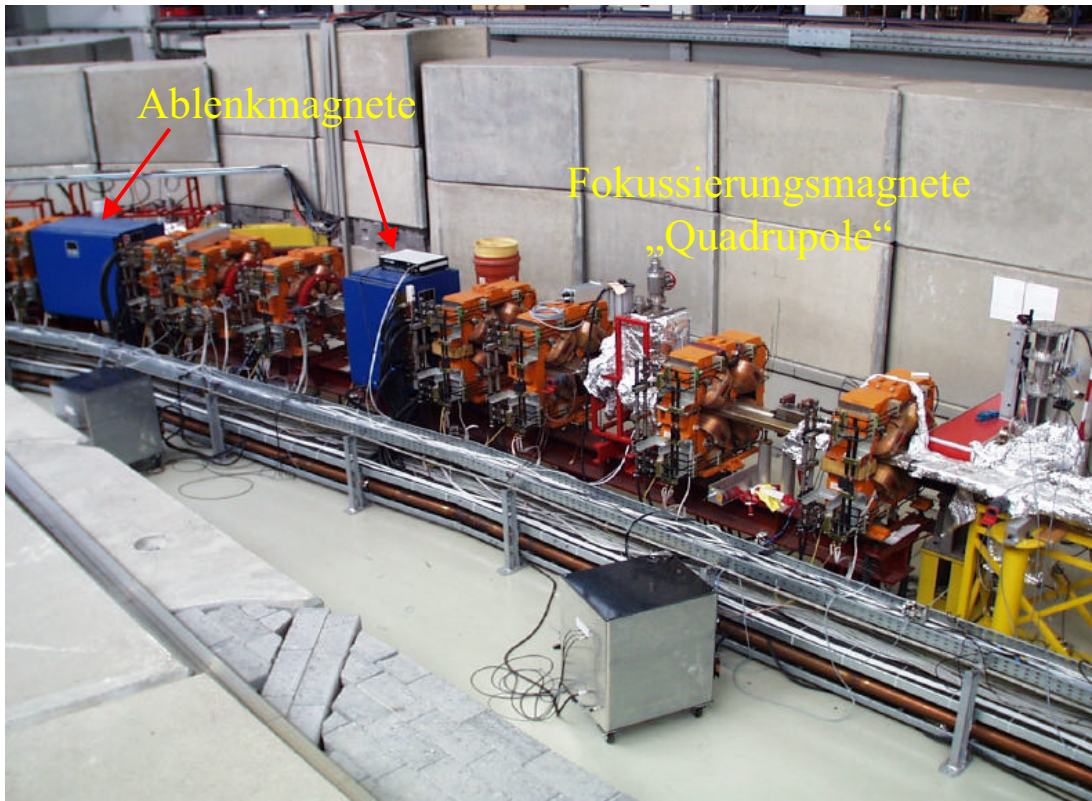
$$|B(z) - B(0)| < 0,01 \cdot B(0)$$

Durch ein Helmholtz-Spulenpaar lässt sich also ein sehr homogenes Magnetfeld erzeugen, das auch "zugänglich" ist.

Kompensation eines beliebig gerichteten Magnetfelds kann durch 3 Paare erreicht werden.

E. Riedle

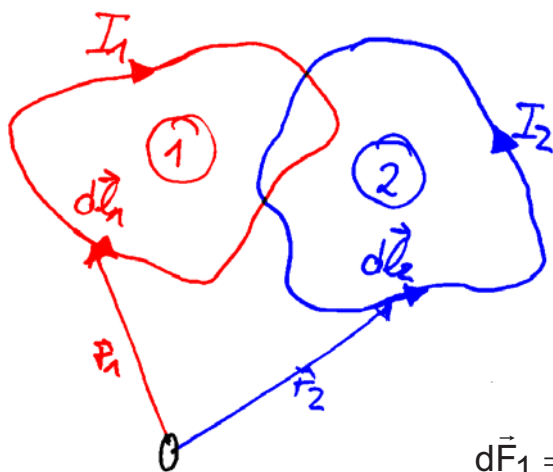
Physik ^{LMU}



Ein Quadrupol wirkt ähnlich wie eine Linse

Teil der Magnetstruktur des Speicherrings

Kräfte zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern



Leiter (2) erzeugt am Leiterelement $d\vec{l}_1$ das Feld

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(2)} \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Die Kraft auf das Leiterelement ist

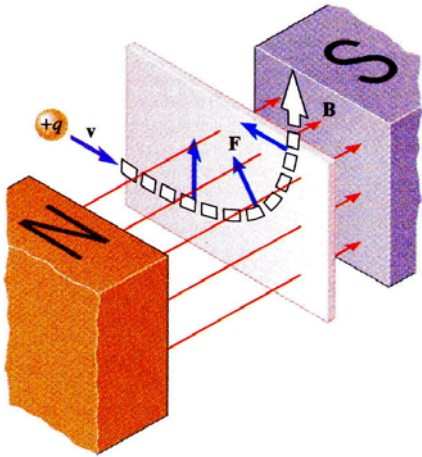
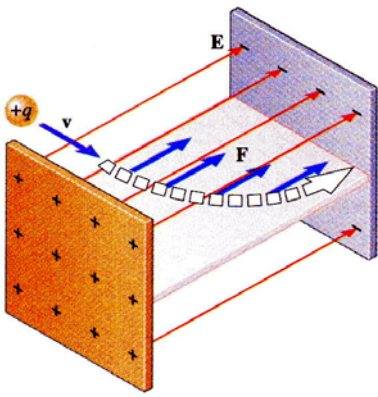
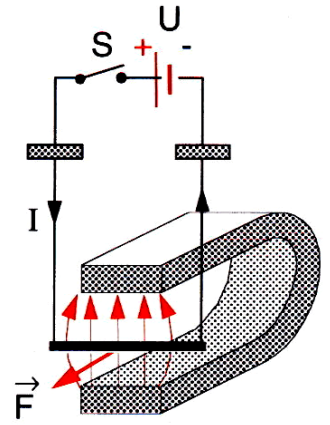
$$d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} d\vec{l}_1 \times \left\{ \oint_{(2)} \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right\}$$

Die Kraft auf den gesamten Leiter (1) ist

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{(d\vec{l}_1 d\vec{l}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Kräfte auf bewegte Ladungen im Magnetfeld

- Ablenkung von stromdurchflossenem Leiter im Magnetfeld
- Anziehung / Abstoßung zweier stromdurchflossener Leiter
- Ablenkung eines Elektronenstrahls im Magnetfeld



Kraft $\vec{F} \perp \vec{v}$ und \vec{B} , proportional zu beiden
 $\Rightarrow \vec{F} = k \cdot q (\vec{v} \times \vec{B})$

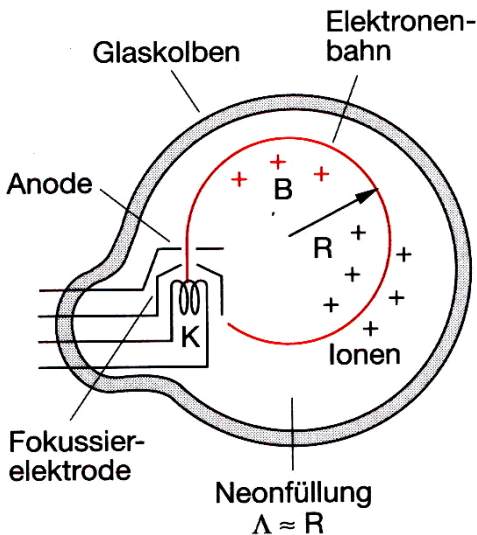
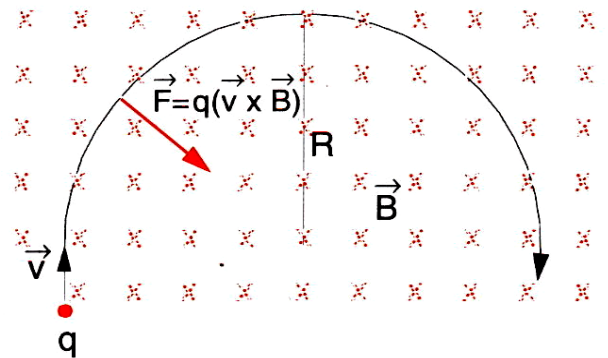
Im SI-System: $\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$ **Lorentz-Kraft**

allgemein: $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Fadenstrahlrohr

$$v = \sqrt{\frac{2e \cdot U}{m}} \quad \vec{v}_0 = (v_x, 0, 0) \quad \vec{B} = (0, 0, B_z)$$

→ Kreisbewegung in x-y-Ebene



$$e \cdot v \cdot B = \frac{m v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m v}{e B} = \frac{m}{e B} \sqrt{\frac{2e \cdot U}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m \cdot U}{e}}$$

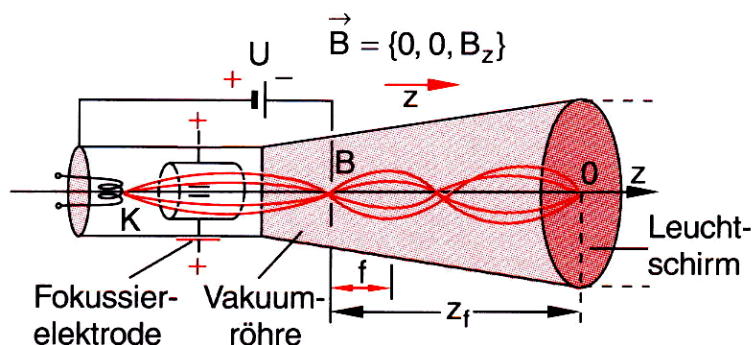
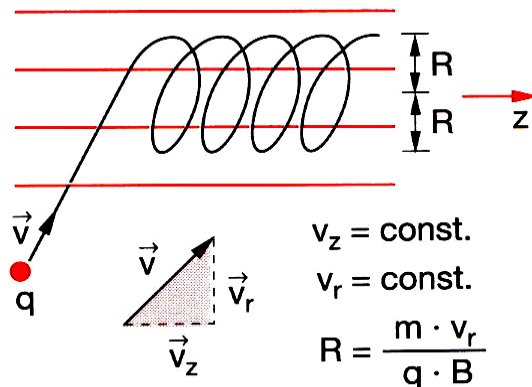
Sichtbarkeit durch Stöße mit Restgas.

Spiralbahnen von Elektronen für $\vec{v} \not\perp \vec{B}$

$$R = \frac{m v_r}{e B} \quad v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi R}{v_r} = \frac{2\pi m}{e B} \quad \text{Umlaufzeit}$$

$$\Delta z = v_z \cdot \Delta t = \frac{2\pi m}{e \cdot B} v_z \quad \text{Steighöhe}$$



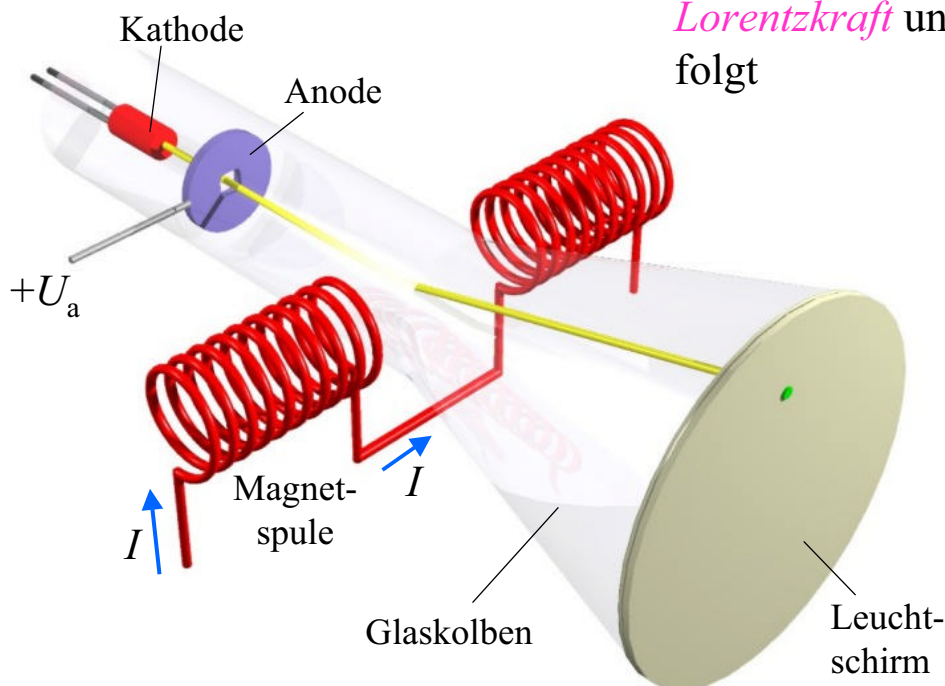
Elektronen- und Ionenoptik

Magnetische Elektronenlinse

Optische Linse sammelt Licht aus einem Punkt im Abstand $4f$

$$v_z \approx v \quad 4f = \frac{2\pi m}{eB} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\pi}{B} \sqrt{\frac{mU}{2e}}$$

Experiment: Strahlableitung in der Oszillographenröhre



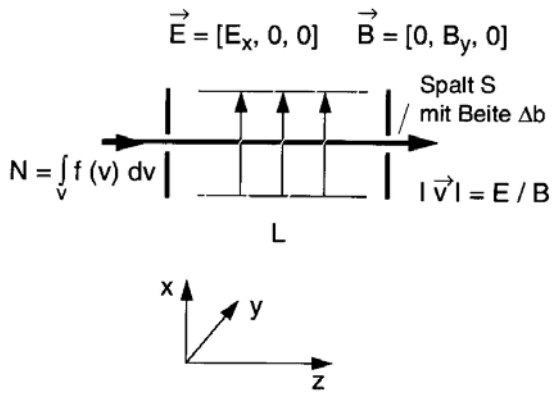
Man muß jetzt noch den Biegeradius R bestimmen. Aus der Gleichheit von *Lorentzkraft* und *Zentrifugalkraft* folgt

$$e|\vec{v}_0 \times \vec{B}| = m \frac{v_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{eB}{m v_0}$$

Dann ist der Ablenkwinkel

$$\alpha \approx \frac{l}{R} = \frac{eBl}{m v_0}$$



Wienfilter

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad \text{für } v = \frac{E}{B} \quad \text{und} \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

Selektion "monochromatischer" Elektronen

Sektorfilter (Massenspektrometer)

Beschleunigung von Ionen mit U
Ablenkung mit homogenem Magnetfeld um 180°

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

Abbildung von verschiedenen Massen auf verschiedene Punkte

