Hallo liebe wissbegierige Mathe-Leistungskursleute,

hier kommen Einführung und Aufgaben zu einer weiteren Anwendung der Differenzialrechnung. Dem Freitagkurs sollte der Anfang bekannt vorkommen.
Die Lösungen zu den Aufgaben findet ihr im Anschluss.

Bei Fragen bin ich unter utanoske@yahoo.de zu erreichen.

Viel Spaß und Freude

Es geht um Extremwertaufgaben. Das sind Aufgaben, mit denen man bei gegebene Vorgaben die optimalen Bedingungen finden muss, damit eine Größe möglichst klein oder groß wird.

- **<u>Beispiele:</u>**

  - Man hat ein Blech mit einer bestimmten Fläche, aus dem eine Kiste gefertigt werden soll. Welche Maße muss die Kiste haben, damit das Volumen der Kiste möglichst groß wird

  - Bei welcher Geschwindigkeit eines LKW werden die Kosten für den Transport von Gütern vom Ort A zum Ort B minimal? (so eine Aufgabe hatten wir schon gerechnet)

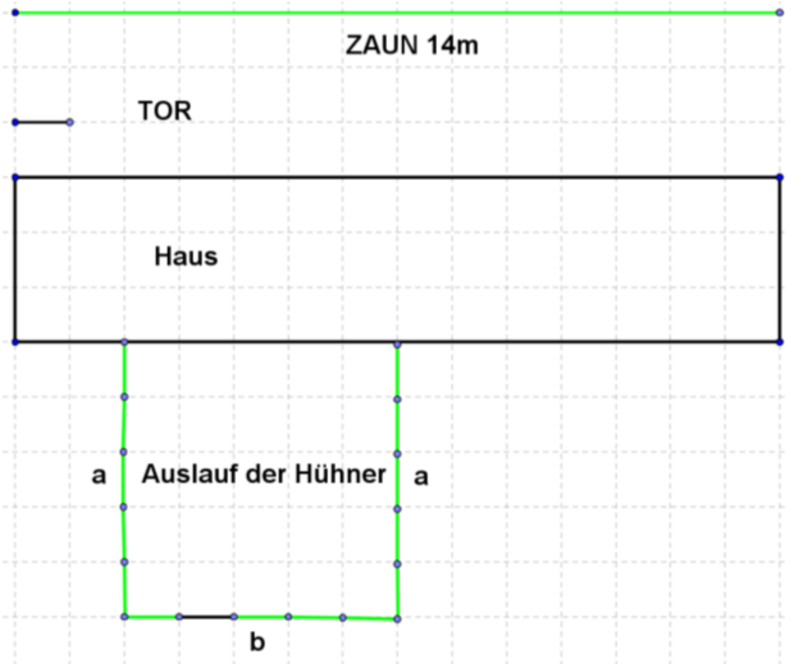
  - Ein Kanal soll von A nach B durch unterschiedliche Böden (Straße/Feld) verlegt werden. Die Kosten für die einzelnen Böden sind unterschiedlich. Wie muss der Kanal verlegt werden, damit die Kosten minimal werden.

- **<u>Einführungsbeispiel:</u>**

  - Lb. 4.9 Extremwertprobleme (bitte Seite suchen) Beispiel mit dem Zaun

2.9 Extremwertaufgaben
2.9.1 Einführung

- **einfache Sachaufgaben**



Ziel:

Auslauf für Hühner möglichst groß

Hauptbedingung:

$$A(a,b) = a \cdot b \rightarrow \text{Maximum}$$

Nebenbedingungen:

Zaunlänge 14m, Tor 1m

$$2a + b = 15$$

Nebenbedingung nach einer Variablen umstellen und in die Hauptbedingung einsetzen:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 15 \\ b &= 15 - 2a \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} A(a,b) &= a \cdot b \\ A(a) &= a \cdot (15 - 2a) \end{aligned}$$

$$\text{Db.: } 0 \le a \le 7{,}5 \quad a \in \mathbb{R}$$

Taschenrechner:

$$\left.\begin{aligned} a &\rightarrow x \\ A &\rightarrow y \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad y = x \cdot (15 - 2x) \quad \rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{MAX} &= 3{,}75 \\ y_{MAX} &= 28{,}125 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} a_{MAX} &= 3{,}75\text{m} \\ b_{MAX} &= 7{,}5\text{m} \\ A_{MAX} &= 28{,}125\text{m}^2 \end{aligned}\right.$$

Randbedingungen untersuchen:

$$A(0) = 0 \cdot (15 - 2 \cdot 0) = 0 \qquad A(7{,}5) = 7{,}5 \cdot (15 - 2 \cdot 7{,}5) = 0$$

D.h., das relative Maximum ist auch das absolute Maximum.

Für das Lösen von Extremwertaufgaben gibt es eine Schrittfolge, an die man sich halten sollte!!!! → muss verstanden und gemerkt werden!!!!

- Für die Lösung einer **Extremwertaufgabe** benötigt man in der Regel eine Haupt- und eine Nebenbedingung.
- Die **Hauptbedingung** enthält eine Formel für die zu optimierende Größe. Diese Formel wird als Funktion aufgefasst, die jedoch meistens von mehr als einer Variablen abhängig ist.
- Eine **Nebenbedingung** ist eine Gleichung, die einen gegebenen Zusammenhang zwischen den Variablen der Hauptbedingung beschreibt.
- Die **Zielfunktion** erhält man aus der Hauptbedingung, indem man die nach einer Variablen umgestellte Nebenbedingung dort einsetzt. Enthält die Hauptbedingung mehr als zwei Variablen, so werden zwei oder gegebenenfalls mehr Nebenbedingungen benötigt.
- Durch eine Extremwertbestimmung für die Zielfunktion erhält man die gesuchten optimalen Werte. Dabei ist der in der Regel eingeschränkte **Definitionsbereich** zu berücksichtigen.

Arbeitsschritte zur Lösung von Extremwertaufgaben:
- **Skizze** erstellen, dabei alle in der Hauptbedingung auftretenden Variablen verwenden.
- **Hauptbedingung** aufstellen: Formel für die zu optimierende Größe als Funktion mit zwei oder mehr Variablen angeben.
- **Nebenbedingungen** aufstellen: Gleichungen mit weiteren Beziehungen zwischen den Variablen der Hauptbedingung ermitteln. Im Fall zweier Variablen ist meist eine Nebenbedingung ausreichend.
- **Zielfunktion** aufstellen: Variablen der Hauptbedingung durch Einsetzen der Nebenbedingungen auf *eine* Variable reduzieren.
- **Definitionsbereich** festlegen: Alle möglichen Werte der Zielfunktionsvariablen berücksichtigen.
- Zielfunktion auf **lokale Extremwerte** innerhalb des Definitionsbereichs untersuchen.
- **Randwerte** berechnen und mit lokalem Extremwert vergleichen.
- **Übrige** gesuchte **Größen** bestimmen.
- Gegebenenfalls den **Graphen** der Zielfunktion zeichnen.
- **Ergebnis** im Sachzusammenhang formulieren.

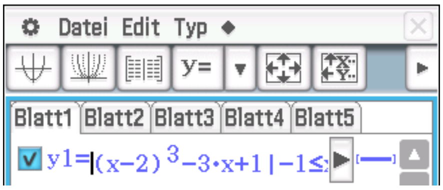
Zuerst sollt ihr euch formale Aufgaben ansehen, d.h. Aufgaben mit rein mathematischen Hintergrund.

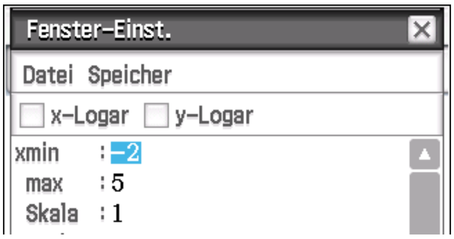
Im Lehrbuch soweit weiterumschlagen, bis die Aufgaben kommen.
Es geht um die Aufgaben Nr. 1 bis 7 (die Hinweise bei den Aufgaben 6 und 7 sind für uns nicht relevant, weil wir den TR haben und im Graphmodus das Maximum/Minimum bestimmen)

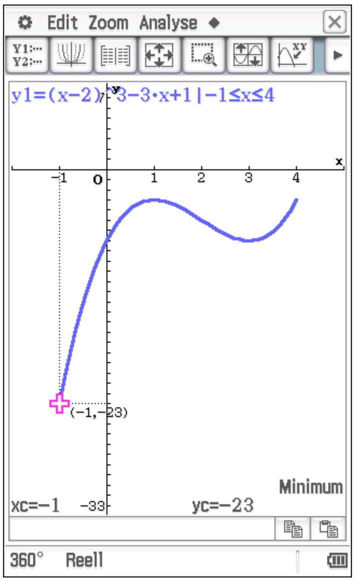
Wenn die Extremwertaufgaben nicht im Teil A vorkommen, wird immer der Graph zum Auffinden des Extrema genutzt!!!!

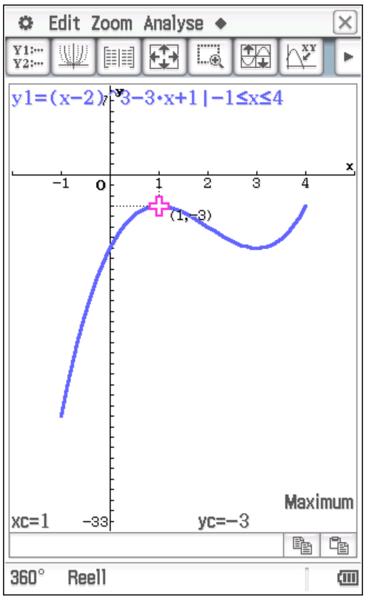
Nr. 1 **<u>Definitionsbereich beachten!!!!</u>**

a) $f(x) = (x-2)^3 - 3x + 1$ Db: $x \in [-1|4]$









Analyse, graphische Lösung,
f_{min} und f_{max}

4.9 Extremwertprobleme

1 a) $T(3|-7)$; $R_1(-1|-23)$; $R_2(4|-3)$

Das absolute Minimum ist −23. Es wird für $x = -1$ angenommen (Randminimum).

b) $T(0|0)$;

$f(x) \to 4$ für $x \to -2 \wedge f(x) \to 9$ für $x \to 3$.

Das absolute Minimum ist 0. Es wird für $x = 0$ angenommen.

c) $T\left(\frac{2}{5}\middle|-\frac{64}{375}\right)$; $R_1\left(-4\middle|-\frac{16}{3}\right)$; $R_2\left(1\middle|\frac{1}{3}\right)$

Das absolute Minimum ist $-\frac{16}{3}$. Es wird für $x = -4$ angenommen (Randminimum).

d) Kein relatives Minimum. Da der Definitionsbereich ein offenes Intervall ist, gibt es auch kein Randminimum. Kein absolutes Minimum.

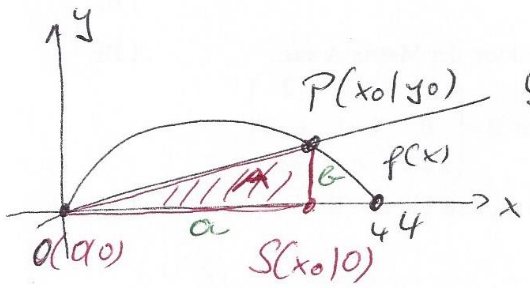
Für die folgenden Aufgaben unbedingt an einer Skizze den Sachverhalt darstellen!!!!
D.h. alle Informationen in eine Skizze eintragen!!!!

Nr.2a

2a

- Skizze $f(x) = -x^2 + 4x$ NSt $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

$y = mx$ $0 \leq m < 4$



- Ziel: Fläche des rechtwinkligen Dreiecks soll maximal werden.

- Hauptbedingung: (Formel) $A(a;b) = \frac{1}{2} a \cdot b$

- Nebenbedingungen

  - $a = x_0$
  $b = f(x_0) = y_0$ } koordinaten von P

  - P ist Schnittpunkt beider Graphen

$y = f(x)$

$m \cdot x = -x^2 + 4x$ (TR solve..., muss aber auch per Hand gelöst werden können!)

$x_1 = 0$

$\underline{\underline{x_2 = 4 - m}}$

$x_2 = \underline{x_0 = 4 - m}$ $y_0 = m \cdot x_0 = m \cdot (4 - m)$

$\underline{\underline{y_0 = 4m - m^2}}$

$a = x_0 = 4 - m$ $\quad$ $b = y_0 = 4m - m^2$

- Nebenbedingungen in Hauptbedingungen einsetzen

$A(a, b) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

$A(m) = \frac{1}{2}(4-m) \cdot (4m - m^2)$

↳ Zielfunktion → TR Maximum bestimmen

$a = x_0 = 4 - m$ $\quad$ $b = y_0 = 4m - m^2$

- Nebenbedingungen in Hauptbedingungen einsetzen

$A(a, b) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

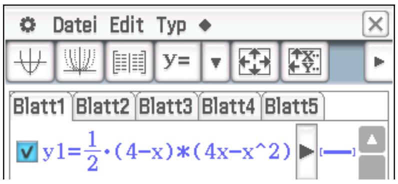
$A(m) = \frac{1}{2}(4-m) \cdot (4m - m^2)$

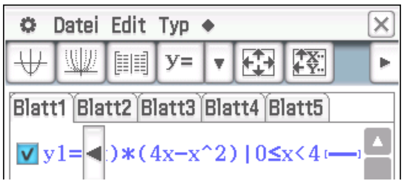
↳ Zielfunktion → TR Maximum bestimmen

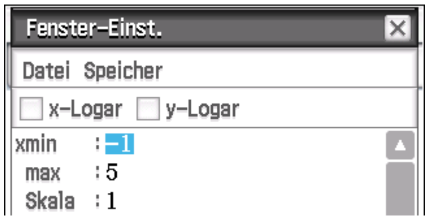
$m \to x$ $\quad$ Db $0 \leq x < 4$

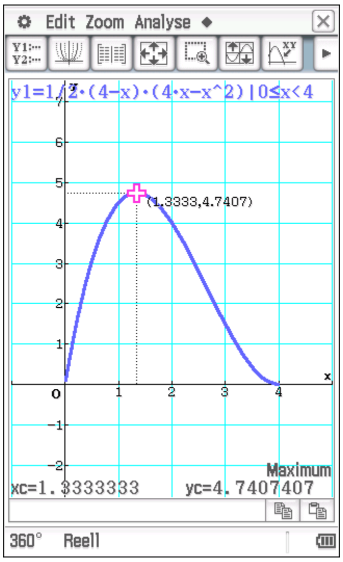
$A(m) \to y$

- Def. in der Formel angeben
- Fenstereinstellung $x_{min} = -1$
  $x_{max} = 5$
- Autozoom









Für $m = \dfrac{4}{3}$ hat das Dreieck den größten Flächeninhalt.

Bei Extremwertaufgaben gehört **<u>immer</u>** ein Antwortsatz dazu.
Genau lesen, was gefragt ist!

Hier kommen jetzt die Lösungen der anderen Aufgaben:
(Die Ableitungen müssen nicht erfolgen, da wir den Taschenrechner haben! Die Aufgaben sind aber z.T. auch ohne Taschenrechner, also im Teil A, denkbar

2 Schnitt: $mx = -x^2 + 4x$

$$x = 0 \vee x = 4 - m$$

$P(4-m|4m-m^2)$; $O(0|0)$; $S(4-m|0)$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OS} \cdot \overline{SP}$$

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot (4-m) \cdot (4m-m^2)$$

$$= \frac{1}{2}m^3 - 4m^2 + 8m$$

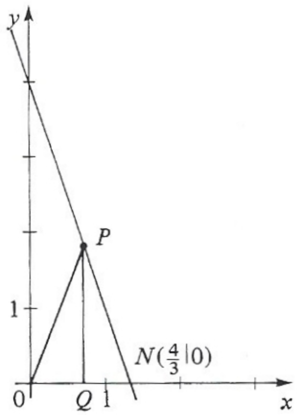
$$A'(m) = \frac{3}{2}m^2 - 8m + 8$$

$$A''(m) = 3m - 8$$

Die hinreichende Bedingung liefert $m = \frac{4}{3}$ als einzigen Wert für ein relatives Maximum.

Wegen $A\left(\frac{4}{3}\right) = 4\frac{20}{27} \wedge A(0) = 0 \wedge \lim\limits_{m \to 4} A(m) = 0$ ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

3



$P(u|v)$; $O(0|0)$; $Q(u|0)$.

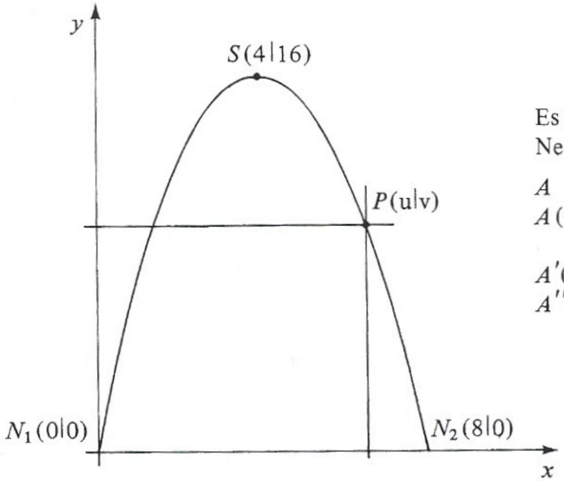
Es wird vorausgesetzt: $0 < u < \frac{4}{3}$.

Nebenbedingung: $v = -3u + 4$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}u \cdot v \\ A(u) &= \frac{1}{2}u \cdot (-3u + 4) \\ &= -\frac{3}{2}u^2 + 2u \\ A'(u) &= -3u + 2 \\ A''(u) &= -3 \end{aligned}$$

Das hinreichende Kriterium liefert für das relative Maximum $u = \frac{2}{3}$ und $A\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.
Wegen $A(u) \to 0$ für $u \to 0$ oder $u \to \frac{4}{3}$ ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

4

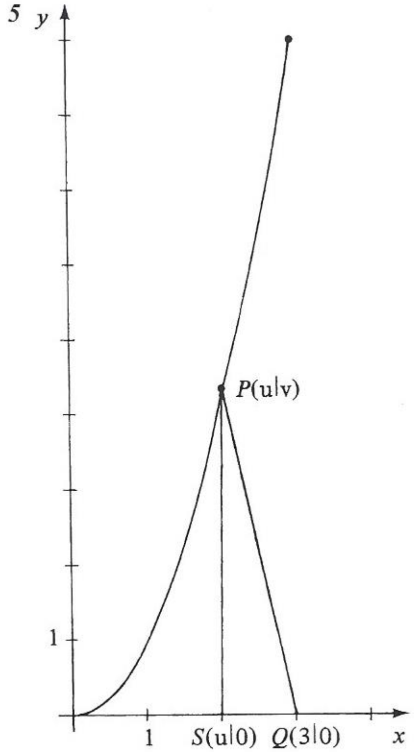


Es wird vorausgesetzt: $0 < u < 8$.
Nebenbedingung: $v = -u^2 + 8u$.

$$\begin{aligned} A &= u \cdot v \\ A(u) &= u \cdot (-u^2 + 8u) \\ &= -u^3 + 8u^2 \\ A'(u) &= -3u^2 + 16u \\ A''(u) &= -6u + 16 \end{aligned}$$

Das hinreichende Kriterium liefert für das relative Maximum $u = \frac{16}{3}$ und $A\left(\frac{16}{3}\right) = 75\frac{23}{27}$.
Wegen $A(u) \to 0$ für $u \to 0$ oder $u \to 8$ ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

5

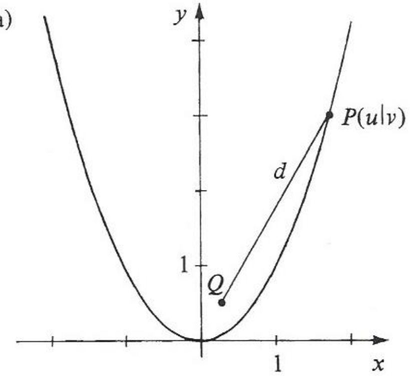


Es wird vorausgesetzt: $0 \leqslant u \leqslant 3$.
Nebenbedingung: $v = u^2$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \overline{SQ} \cdot \overline{SP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (3 - u) \cdot v \\ A(u) &= \frac{1}{2} \cdot (3 - u) \cdot u^2 \\ &= \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}u^3 \\ A'(u) &= 3u - \frac{3}{2}u^2 \\ A''(u) &= 3 - 3u \end{aligned}$$

Das hinreichende Kriterium für das relative Maximum liefert $u = 2$ und $A(2) = 2$.
Wegen $A(0) = 0$ und $A(3) = 0$ ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

6 a)



Es wird vorausgesetzt: $u \in \mathbb{R}$.
Nebenbedingung: $v = u^2$.

Der Abstand d des Punktes $P(u|v)$ vom Punkt $Q\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}\right)$ ist

$d = \sqrt{\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2}.$

Es ist das Minimum von d^2 zu bestimmen!

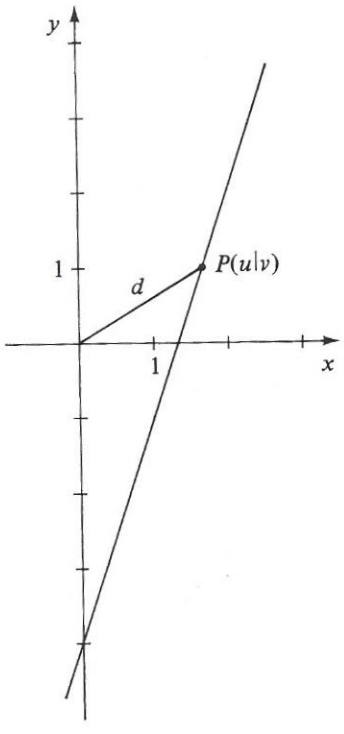
$$
\begin{aligned}
d^2 &= \left(u - \tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(v - \tfrac{1}{2}\right)^2 \\
&= u^2 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{16} + v^2 - v + \tfrac{1}{4} \\
d^2(u) &= u^4 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{5}{16} \\
(d^2(u))' &= 4u^3 - \tfrac{1}{2} \\
(d^2(u))'' &= 12u^2
\end{aligned}
$$

Aus der hinreichenden Bedingung ergibt sich $u = \frac{1}{2}$ und damit $d = \sqrt{\frac{1}{8}}$ als relatives Minimum.

Für $u \to \pm\infty$ folgt $d^2 \to \infty$. Somit ist das relative Minimum auch absolutes Minimum. $P\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$

b) $P(3|9)$ und $d = \sqrt{2673{,}25}$ c) $P\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\middle|\frac{1}{2}\right)$ und $d = \sqrt{\frac{3}{4}}$

7



Es wird vorausgesetzt: $u \in \mathbb{R}$.

Nebenbedingung: $v = 3u - 4$.

$$
\begin{aligned}
d^2 &= u^2 + v^2 \\
d^2(u) &= u^2 + 9u^2 - 24u + 16 \\
&= 10u^2 - 24u + 16 \\
(d^2(u))' &= 20u - 24 \\
(d^2(u))'' &= 20
\end{aligned}
$$

Aus der hinreichenden Bedingung für das relative Minimum folgt $u = \frac{6}{5}$ und $d\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{8}{5}$.

Da $d^2(u) \to \infty$ für $u \to \pm\infty$, ist das relative Minimum auch das absolute Minimum.