Informatik OTG	Theoretische Informatik	
Abzählbarkeit, Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit		

Zurzeit sind Probleme wie zum Beispiel korrekte Übersetzungen von Texten oder der mathematische Beweis der Existenz unendlich vieler Primzahlzwillinge nicht lösbar.
Allerdings hat ein Wissenschaftler bewiesen, dass es unendlich viele Paare (Cousins) gibt, die weniger als 70000000 auseinanderliegen. Kommen da noch kleinere Abstände im Beweis?

Abzählbarkeit
Die unendlich vielen Programme reichen nicht aus, um *alle* definierbaren Funktionen zu programmieren. Es gibt mehr Teilmengen von N als Elemente von N.
Mit anderen Worten: Die Menge ist *über-abzählbar*, somit aber auch die Menge aller Funktionen

Es gibt also *nicht-berechenbare* Funktionen und damit *nicht-programmierbare* Aufgaben.
Und es gibt *abzählbar* viele *berechenbare* Funktionen (zu jeder gibt es einen entsprechenden Algorithmus).

Berechenbarkeit
Was bedeutet "berechenbar"?
Der wohl weitgehendste Ansatz ist der, dass man sagt, dass alles, was mit der Turing-Maschine berechenbar ist, berechenbar ist.

Entscheidbarkeit
Bei der Entscheidbarkeit eines Algorithmus wird geprüft, ob es eine berechenbare Funktion zu diesem Algorithmus gibt.
Der Sachverhalt selbst wird als Entscheidungsproblem bezeichnet und führt zu entscheidbaren und nichtentscheidbaren Problemen.

Mit anderen Worten:
Kann man bei jeder Aussage per Algorithmus entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist?
Kann man immer zeigen, dass jedes Problem entweder lösbar oder unlösbar ist? Dies führt uns zum Entscheidungsproblem.

Der Wissenschaftler Gödel sagt: Streng algorithmisch arbeitende Computer können prinzipiell nicht jedes Problem lösen. Ein Problem mit der Eigenschaft, dass positive Beantwortung prinzipiell bzw. manchmal möglich ist, negative jedoch nicht, heißt semi-entscheidbares Problem.

Was ist nicht entscheidbar?
Äquivalenzproblem: (Äquivalenz heißt Gleichwertigkeit.) Ob bei zwei Programmen für die gleiche Eingabe die gleiche Ausgabe erzeugt wird, ist nicht entscheidbar. Achtung: Es gibt keine allgemein gültige Methode, die Äquivalenz zweier Programme zu beweisen, wenn diese sogar tatsächlich äquivalent sind.
Hilbert-Entscheidungsproblem: Für jede beliebige mathematische Aussage soll geprüft werden, ob sie wahr oder falsch ist. (Anm.: Es gibt zwar Aussagen, die richtig sind, deren Richtigkeit kann aber nicht festgestellt werden.)
Problem Diophantische Gleichungen: Es soll für eine beliebige Gleichung bestimmt werden, ob sie eine ganzzahlige Lösung hat.
Das Halteproblem beschreibt die Tatsache, dass es kein Programm geben kann, das für ein anderes Programm entscheiden kann, ob dieses hält oder nicht.
Kann man ein Programm H schreiben, das zu jedem anderen Programm P in endlicher Zeit sagt, ob dieses, wenn man es mit einer Eingabe E startet, sich irgendwann beendet oder unendlich lange weiterläuft,
vorausgesetzt, es steht ihm beliebig viel Speicher zur Verfügung?

Das Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Was ist nicht berechenbar?