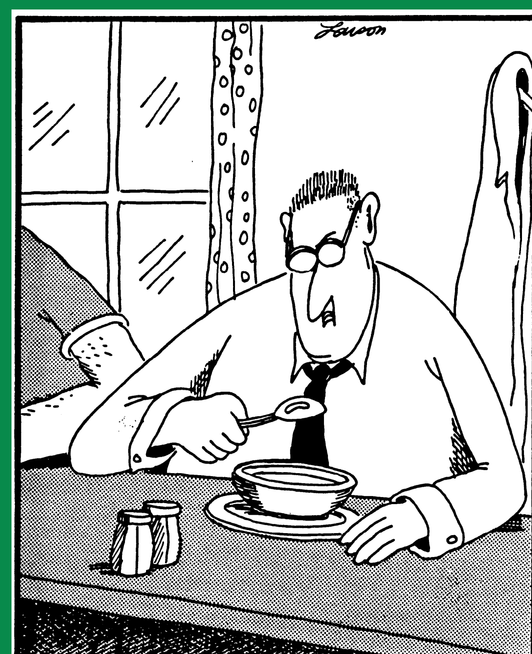
Universität St.Gallen

Extrema von Funktionen zweier Variablen

mit & ohne Nebenbedingungen



Schon wieder hatte jemand Darrell einen Löffel
mit der konkaven Seite nach oben untergejubelt.

Extrema von Funktionen zweier Variablen mit & ohne Nebenbedingungen

Universität St.Gallen

In diesem Kapitel behandeln wir Extrema (x_0, y_0) von Funktionen zweier reeller Variablen $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir betrachten zwei unterschiedliche Fälle:

(i) *Optimierung ohne Nebenbedingung:* Die Wahl der Variablen x und y ist nicht eingeschränkt, daher können die Extrema (x_0, y_0) beliebige Werte des Definitionsbereichs D_f annehmen;

(ii) *Optimierung mit Nebenbedingung:* Die Extrema müssen eine zusätzliche Bedingung, genannt Nebenbedingung, erfüllen, was sich als $\varphi(x_0, y_0) = 0$ schreiben lässt, wobei $\varphi: D_\varphi \to \mathbb{R}$, $D_\varphi \subset \mathbb{R}^2$, selbst eine Funktion zweier Variablen ist.

Programm

1. Extrema von Funktionen zweier Variablen ohne Nebenbedingung
   Notwendige Bedingungen
2. Extrema von Funktionen zweier Variablen ohne Nebenbedingung
   Hinreichende Bedingungen
3. Extrema von Funktionen zweier Variablen mit Nebenbedingung
   Fragestellung
4. Extrema von Funktionen zweier Variablen mit Nebenbedingung
   Variablensubstitution (Reduktionsmethode)
5. Extrema von Funktionen zweier Variablen mit Nebenbedingung
   Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Lernziele

Universität St.Gallen

1. Sie können Extremwertprobleme bei Funktionen mehrerer Variablen mit und ohne Nebenbedingungen erkennen und formalisieren.

2. Sie kennen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen von Extremstellen bei Extremwertproblemen mehrerer Variablen mit und ohne Nebenbedingungen.

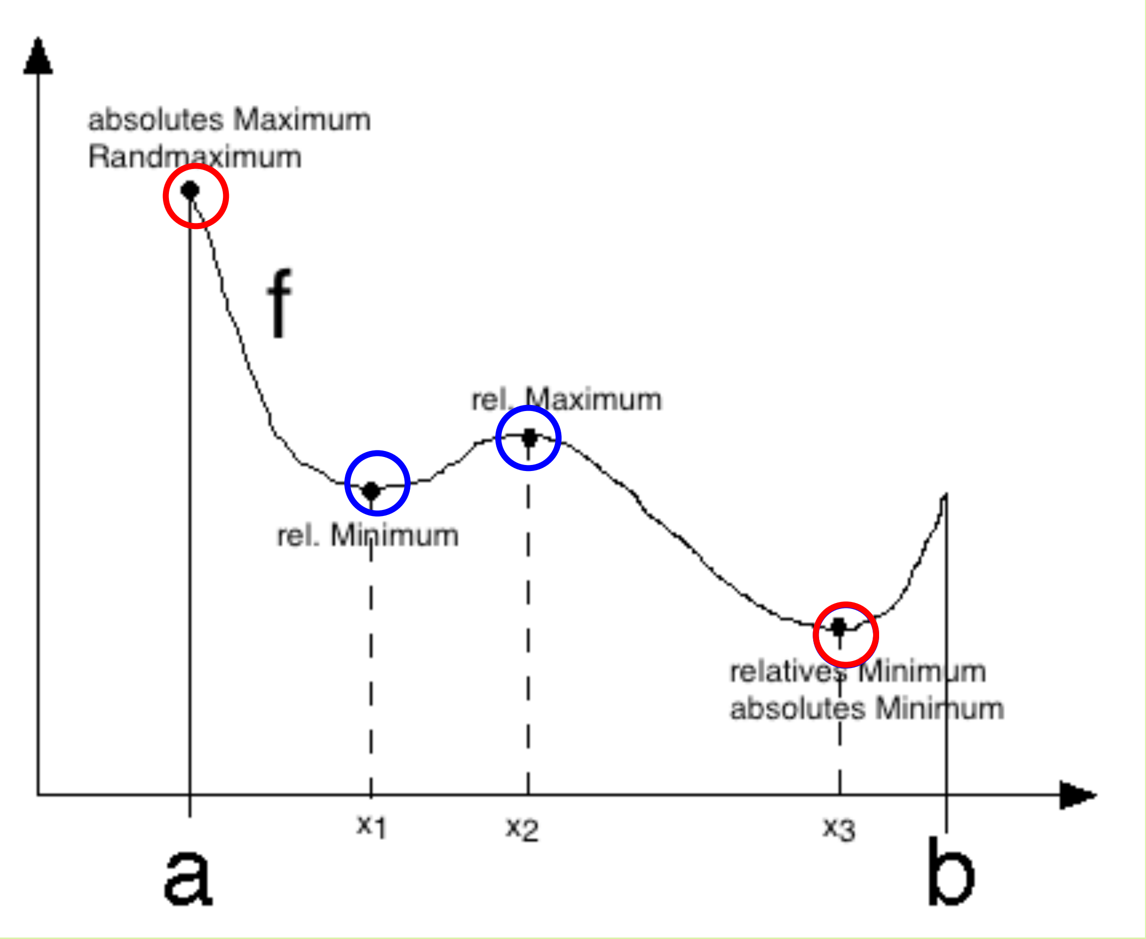
3. Sie kennen das Vorgehen für das Lösen von Extremwertproblemen bei Funktionen mehrerer Variablen mit und ohne Nebenbedingungen und können es anwenden.

Universität St.Gallen

1. Extrema von Funktionen zweier Variablen *ohne* Nebenbedingung

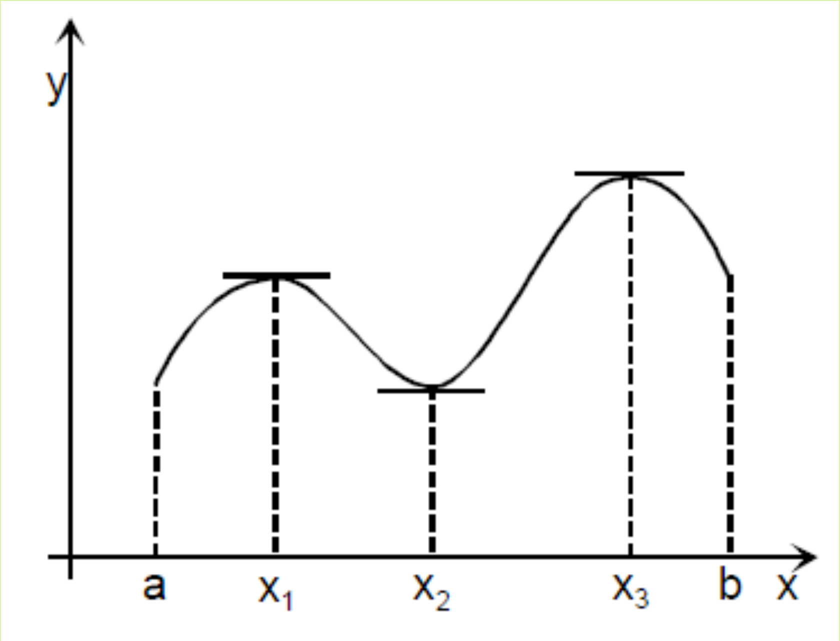
Notwendige Bedingungen

Was sind Extremstellen?



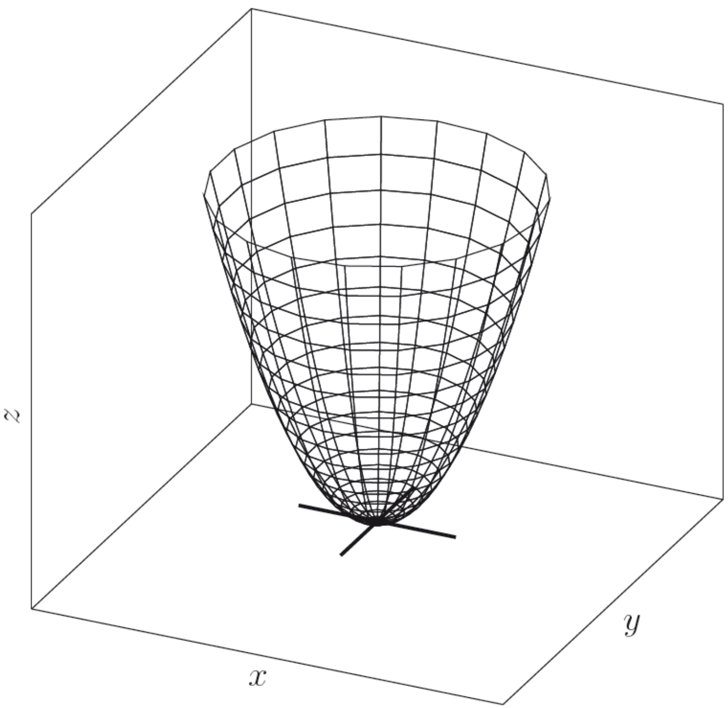
Notwendiges Kriterium für relative Extremstellen
(Fermatsches Kriterium für ein lokales Extremum, 1636/38)

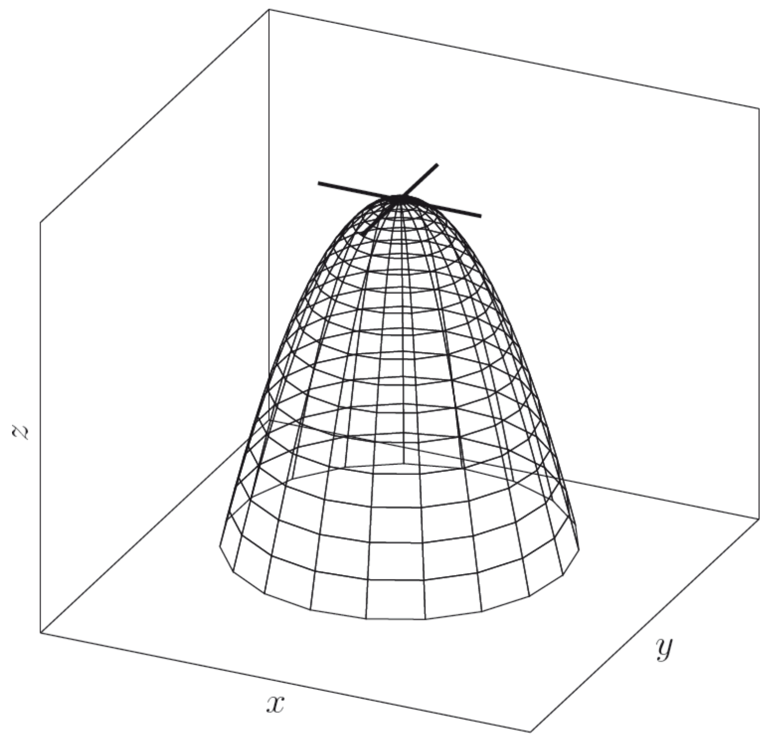
Universität St.Gallen



Theorem 10.15 (Notwendige Bedingungen für Extremalstellen). *Sei* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *auf dem offenen Intervall* $(a, b) \subseteq D_f$ *differenzierbar. Wenn* $x_0 \in (a, b)$ *ein lokales Extremum von* f *ist, dann ist* $f'(x_0) = 0$.

Notwendige Bedingungen





Notwendige Bedingungen [Euler, 1755]

Universität St.Gallen

Theorem 12.1 (Notwendige Bedingungen für Extrema). *Sei* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, *partiell differenzierbar. Wenn* $(x_0, y_0) \in D_f$ *ein Extremum von* f *ist (d.h. entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum), dann gilt*

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ und } f_y(x_0, y_0) = 0,} \qquad (12.1)$$

d.h., dass die partiellen Ableitungen von f *im Punkt* (x_0, y_0) *gleich Null sind.*

Wirkungsverlauf von Medikamenten

Die Wirkung W(x,t), die x Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, wird in vielen Fällen dargestellt durch die Funktion:

$$W(x,t) = x^2 \cdot (a - x) \cdot t^2 \cdot e^{-t} = \left(a \cdot x^2 - x^3\right) \cdot t^2 \cdot e^{-t}$$

Wirkungsverlauf von Medikamenten

Universität St.Gallen

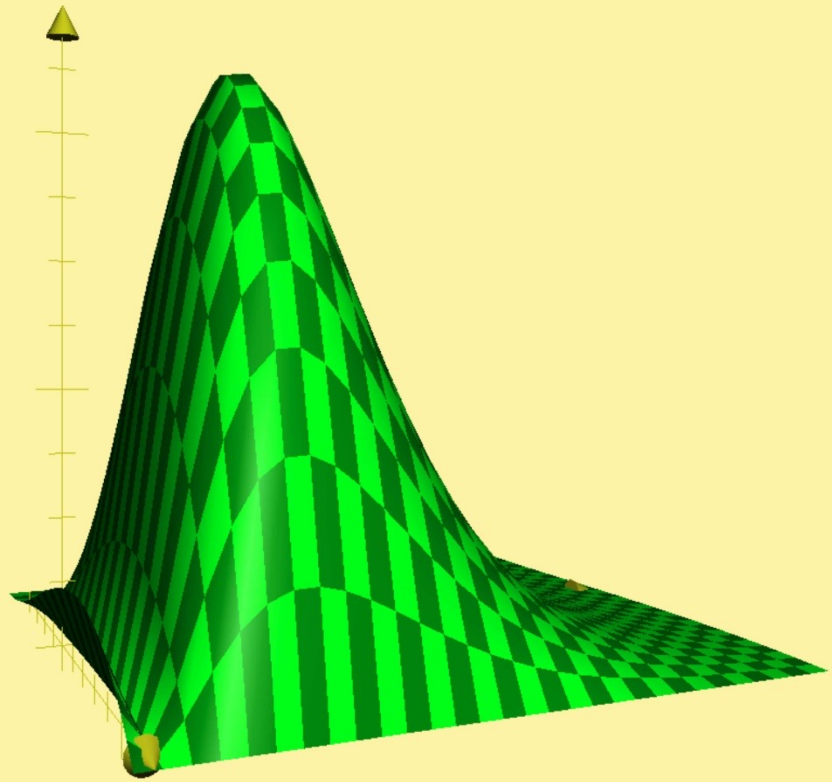
Bestimmen Sie die Dosis und die Zeit t so, dass W(x,t) maximal ist!

$$W(x,t) = x^2 \cdot (a - x) \cdot t^2 \cdot e^{-t} = \left(a \cdot x^2 - x^3\right) \cdot t^2 \cdot e^{-t}$$

Wirkungsverlauf von Medikamenten

Universität St.Gallen

$$W(x,t) = x^2 \cdot (a - x) \cdot t^2 \cdot e^{-t} = \left(a \cdot x^2 - x^3\right) \cdot t^2 \cdot e^{-t}$$



Wirkungsverlauf von Medikamenten

Universität St.Gallen

$$W(x,t) = x^2 \cdot (a - x) \cdot t^2 \cdot e^{-t} = (ax^2 - x^3) \cdot t^2 \cdot e^{-t}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial x}(x,t) = (2ax - 3x^2) \cdot t^2 \cdot e^{-t} = x \cdot (2a - 3x) \cdot t^2 \cdot e^{-t} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x = 0} \quad \vee \quad \boxed{x = \frac{2}{3}a} \quad \vee \quad \boxed{t = 0}$$

offensichtliches Minimum (für $x = 0$)

offensichtliches Minimum (für $t = 0$)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial t}(x,t) = x^2 \cdot (a - x) \cdot (2t \cdot e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t})$$

$$= x^2 \cdot (a - x) \cdot t \cdot e^{-t} \cdot (2 - t) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x = 0} \quad \vee \quad \boxed{x = a} \quad \vee \quad \boxed{t = 0} \quad \vee \quad \boxed{t = 2}$$

offensichtliches Minimum (für $x = 0$)

offensichtliches Minimum (für $x = a$)

offensichtliches Minimum (für $t = 0$)

Die maximale Wirkung wird zur Zeit t = 2 erreicht,

wenn die Doxis $x = \frac{2}{3} \cdot a$ verabreicht wird.

Notwendige Bedingungen [Euler, 1755]

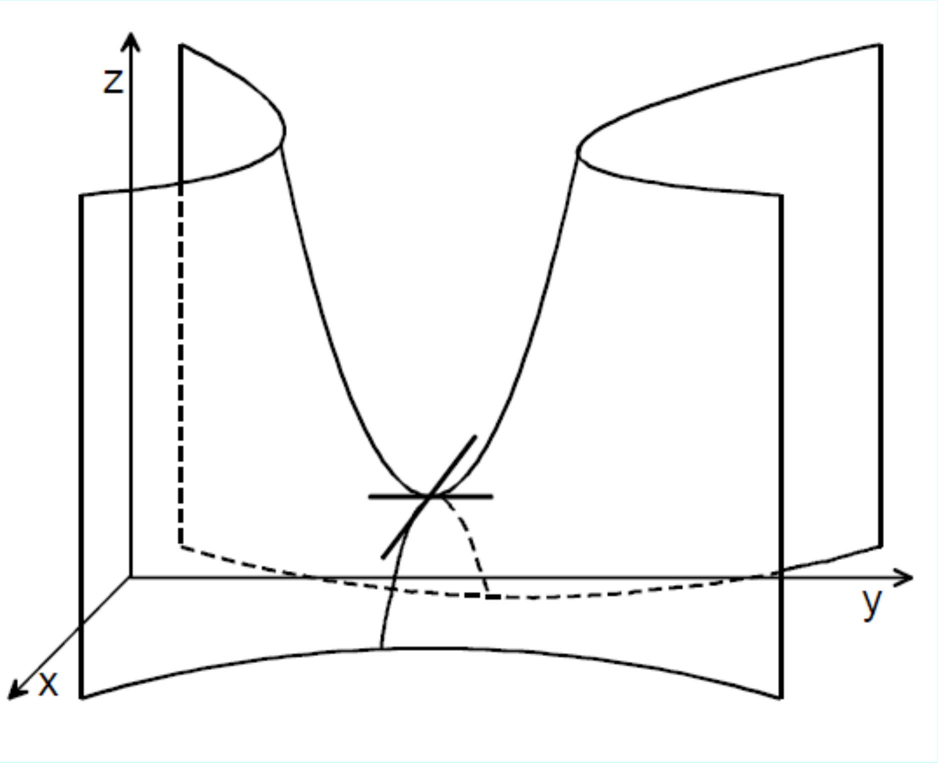
Universität St.Gallen

Theorem 12.1 (Notwendige Bedingungen für Extrema). *Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, partiell differenzierbar. Wenn $(x_0, y_0) \in D_f$ ein Extremum von f ist (d.h. entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum), dann gilt*

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = 0 \textit{ und } f_y(x_0, y_0) = 0,} \tag{12.1}$$

d.h., dass die partiellen Ableitungen von f im Punkt (x_0, y_0) gleich Null sind.

Die notwendige Bedingungen sind nicht hinreichend!



Gegenbeispiel:
Sattelfläche

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

(x_0,y_0) ist kein lokales Extremum

2. Extrema von Funktionen zweier Variablen *ohne* Nebenbedingung

Hinreichende Bedingungen

Hinreichendes Kriterium für relative Extremstellen

Theorem 10.16 (Hinreichende Bedingungen für Extremalstellen). *Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion auf dem offenen Intervall $(a, b) \subset D_f$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn es eine gerade natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt, so dass*

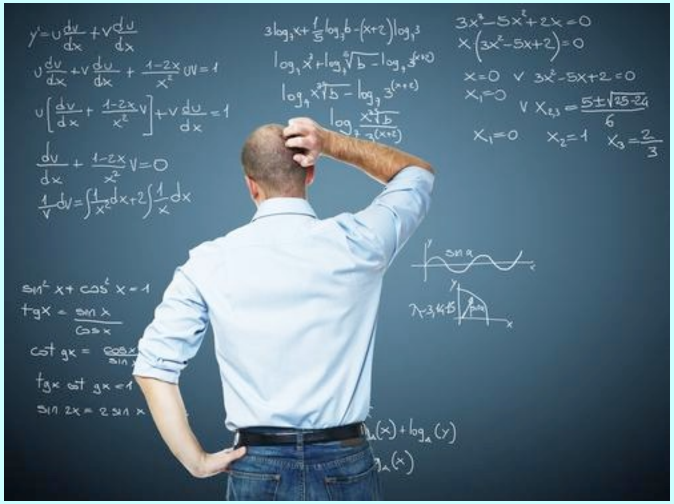
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

gilt, dann ist x_0 eine lokale Extremalstelle von f. Für $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist x_0 ein lokales Minimum und für $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist x_0 ein lokales Maximum.

Hinreichende Bedingungen: Vermutung



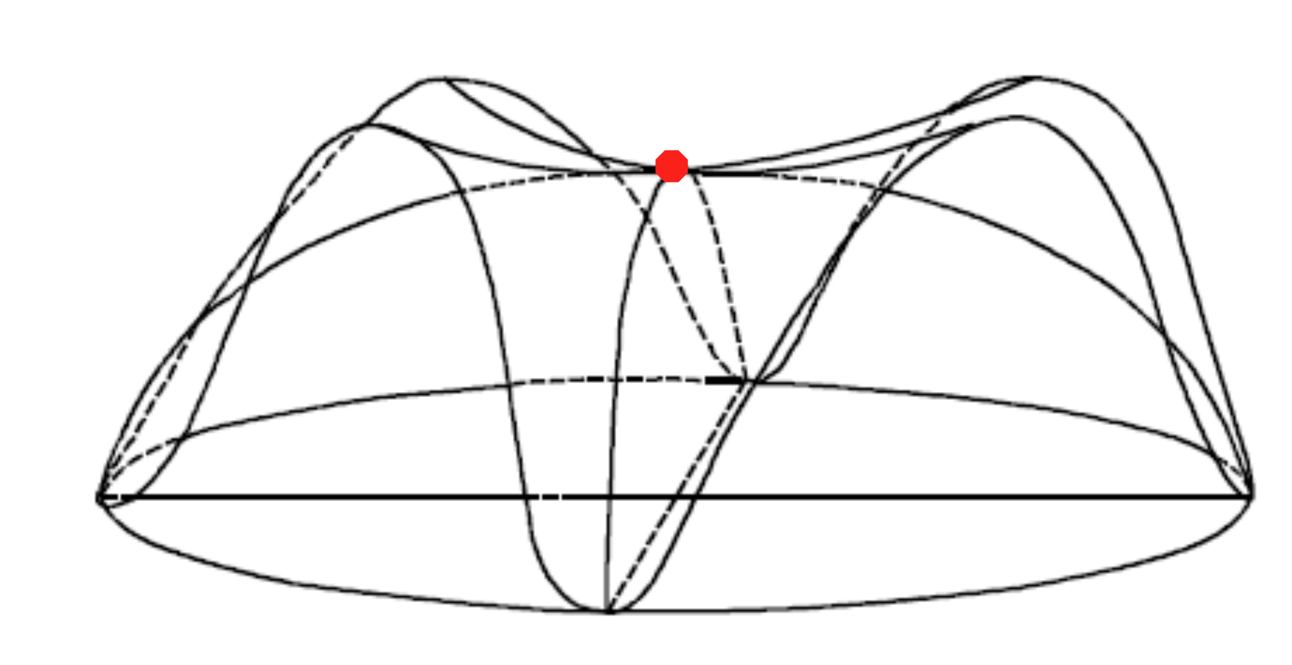
$$f_x(x_0,y_0) = 0 \text{ und } f_y(x_0,y_0) = 0$$

$$\text{und} \quad f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \text{ und } f_{yy}(x_0,y_0) < 0$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ hat in } (x_0,y_0) \text{ ein lokales Maximum}$$

Diese Vermutung ist falsch!

Hinreichende Bedingungen: Gegenbeispiel



$f_x(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) = 0$

und $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ und $f_{yy}(x_0,y_0) < 0$

aber: f hat in (x_0,y_0) kein lokales Maximum

Hinreichende Bedingungen: 2. Gegenbeispiel

$$f(x,y) = x^2 - 4\cdot x\cdot y + y^2$$

$$f_x(x,y) = 2\cdot x - 4\cdot y \overset{!}{=} 0 \qquad f_y(x,y) = 2\cdot y - 4\cdot x \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 2y_0 \qquad \Rightarrow \quad y_0 = 2x_0$$

P(0,0) ist der einzige Kandidat für eine Extremstelle.

$$f_{xx}(x,y) = 2 = f_{xx}(0.0) > 0 \qquad f_{yy}(x,y) = 2 = f_{yy}(0,0) > 0$$

P(0,0) ist aber kein Minimum, denn:

Veränderung in Richtung y = x:

$$f(x,x) = x^2 - 4\cdot x\cdot x + x^2 = -2\cdot x^2$$

fallend

Veränderung in Richtung y = -x:

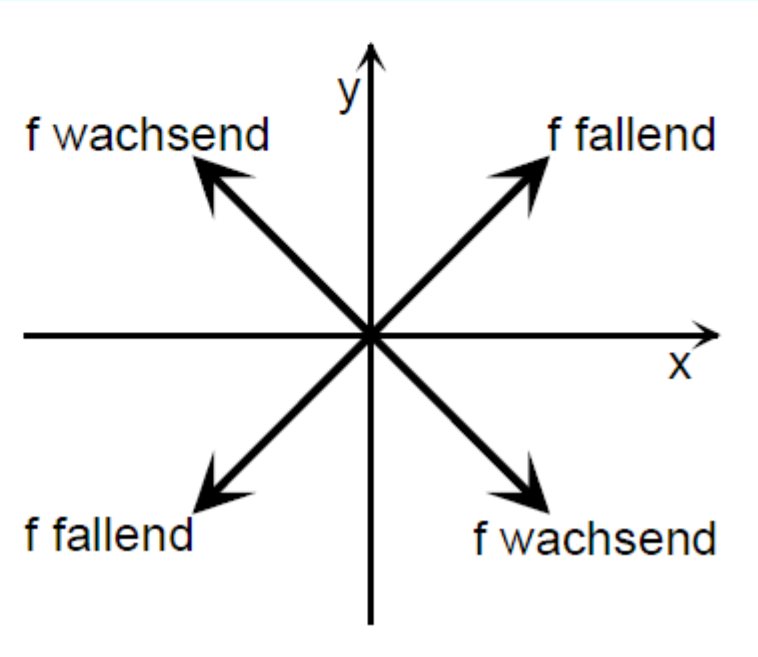
$$f(x,-x) = x^2 - 4\cdot x\cdot -x + (-x)^2 = 6\cdot x^2$$

wachsend

Hinreichende Bedingungen: 2. Gegenbeispiel

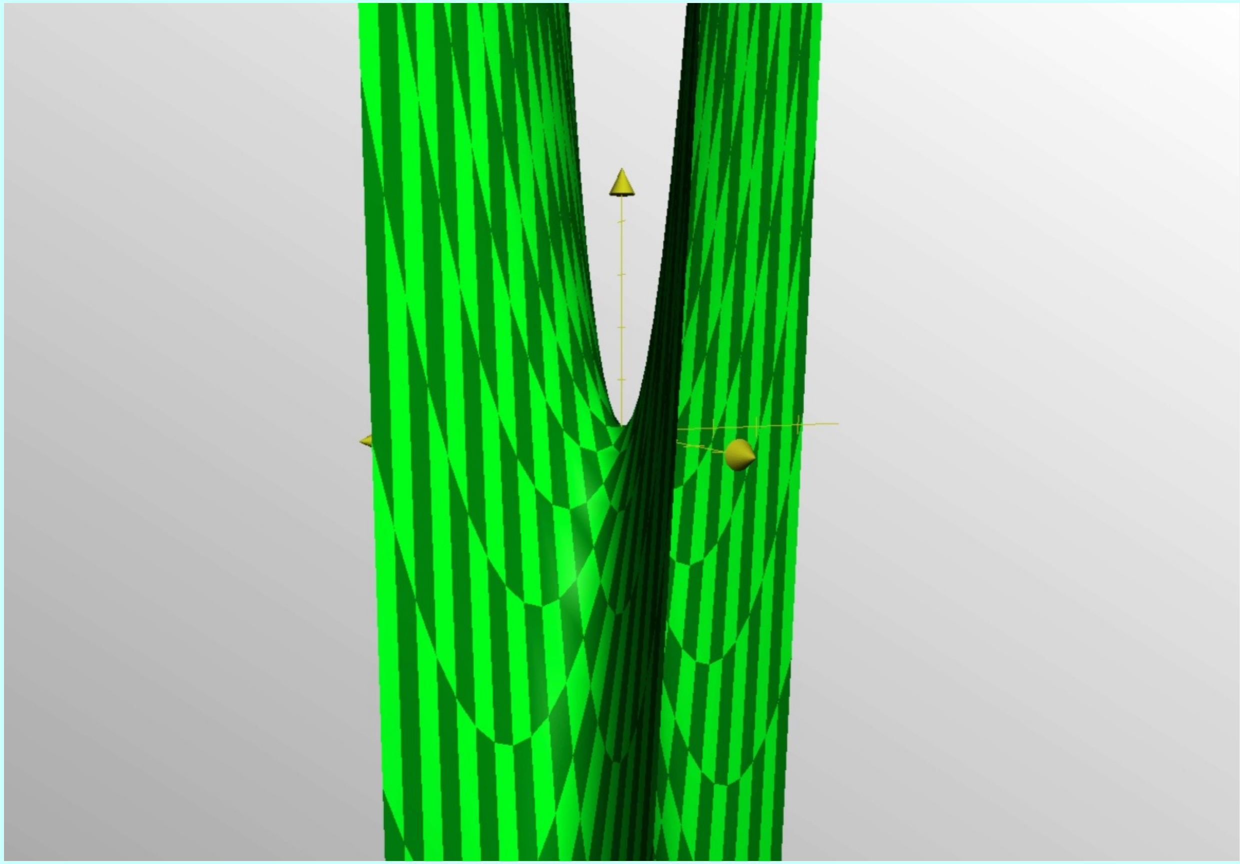
Universität St.Gallen

$$f(x,y) = x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2$$



P(0,0) ist ein Sattelpunkt!

Hinreichende Bedingungen: 2. Gegenbeispiel



$$f(x,y) = x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2$$

Moral:
Nicht nur die Steigungen in x- und y-Richtung spielen eine Rolle – auch die „Zwischenrichtungen" müssen miteinbezogen werden!

Hinreichende Bedingungen [Lagrange, 1759]

Theorem 12.2 (Hinreichende Bedingungen für Extrema). *Sei* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, *eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion zweier Variablen. Sei* $(x_0, y_0) \in D_f$ *ein stationärer Punkt von* f*, also*

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Wenn

$$\boxed{f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0}$$

erfüllt ist, dann ist (x_0, y_0) *ein Extremum von* f*. Ausserdem gilt:*

(i) Wenn $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ *und* $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$ *gilt, dann ist* (x_0, y_0) *ein lokales Maximum von* f*;*

(ii) Wenn $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ *und* $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$ *gilt, dann ist* (x_0, y_0) *ein lokales Minimum von* f*.*

Beispiel

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$$

Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung:

$$f_x(x,y) = 2x + y + 1$$

$$f_y(x,y) = 2y + x - 1$$

$$f_{xx}(x,y) = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1$$

$$f_{yy}(x,y) = 2$$

Beispiel

Universität St.Gallen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$$

Notwendige Bedingungen:

$$f_x(x_0,y_0) = 2x_0 + y_0 + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$f_y(x_0,y_0) = 2y_0 + x_0 - 1 \overset{!}{=} 0$$

$$2x_0 + y_0 + 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -2x_0 - 1$$

$$2y_0 + x_0 - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot(-2x_0 - 1) + x_0 - 1 = 0$$

$$-3\cdot x_0 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1$$

Beispiel

Universität St.Gallen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$$

Notwendige Bedingungen:

Die Funktion f *könnte* im Punkt (-1,1) ein Extremum haben!

Beispiel

Universität St.Gallen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$$

Hinreichende Bedingungen:

	für Maximum	für Minimum	für Sattelpunkt
notwendige Bedingungen	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
hinreichende Bedingungen	$f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$f_{xx} > 0,\ f_{yy} > 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

$$f_{xx}(-1,1) = 2 > 0 \qquad f_{yy}(-1,1) = 2 > 0 \qquad f_{xy}(-1,1) = 1$$

$$f_{xx}(-1,1) \cdot f_{yy}(-1,1) - f_{xy}^2(-1,1) = 2 \cdot 2 - 1^2 > 0$$

Beispiel

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$$

Notwendige Bedingungen:

Die Funktion f könnte im Punkt (-1,1) ein Extremum haben!

Hinreichende Bedingungen:

Die Funktion f hat im Punkt (-1,1) ein relatives Minimum!

Ökonomisches Beispiel

Universität St.Gallen

x = produzierte bzw. verkaufte Einheiten des Gutes A

y = produzierte bzw. verkaufte Einheiten des Gutes B

$R(x,y) = 30\cdot x + 50\cdot y$ Erlösfunktion

$C(x,y) = 300 + x^2 + 1.5\cdot y^2 + 25\cdot x - 35\cdot y$ Kostenfunktion

$$P(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$$
$$= 30\cdot x + 50\cdot y - (300 + x^2 + 1.5\cdot y^2 - 25\cdot x - 35\cdot y)$$
$$= - x^2 - 1.5\cdot y^2 + 55\cdot x + 85\cdot y - 300$$ Gewinnfunktion

Für welche Produktionsverteilung (x_0,y_0) ist der Gewinn maximal?

Ökonomisches Beispiel

$P(x,y) = -x^2 - 1.5 \cdot y^2 + 55 \cdot x + 85 \cdot y - 300$ Gewinnfunktion

Notwendige Bedingungen:

$$P_x(x,y) = -2x + 55 \quad \Rightarrow \quad -2x_0 + 55 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{55}{2} = 27.5$$

$$P_y(x,y) = -3y + 85 \quad \Rightarrow \quad -3y_0 + 85 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{85}{3} = 28.\overline{3}$$

Einzig mögliches Maximum $(x_0,y_0) = (27.5,28.333...)$!

Hinreichend Bedingungen:

$$P_x(x,y) = -2x + 55 \quad \Rightarrow \quad P_{xx}(x,y) = -2, P_{xy}(x,y) = 0$$

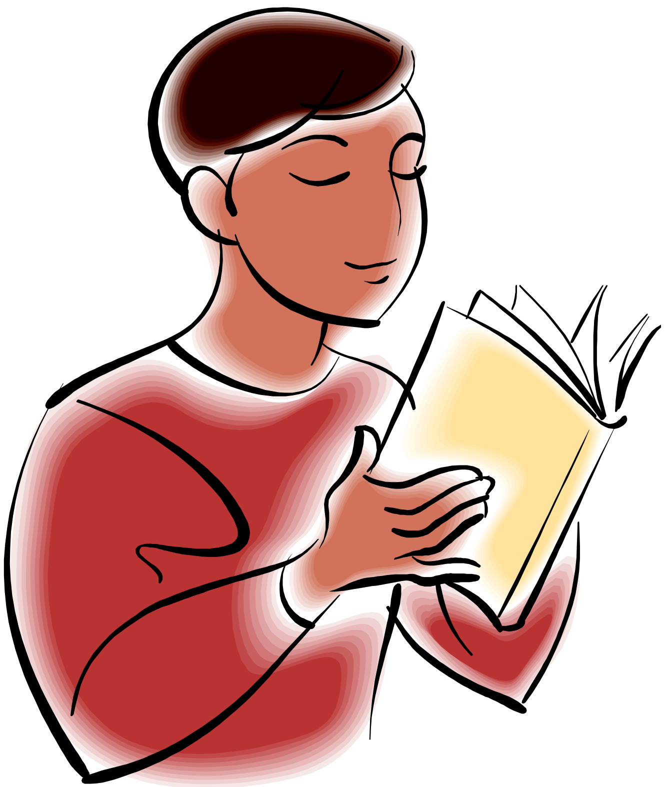
$$P_y(x,y) = -3y + 85 \quad \Rightarrow \quad P_{yy}(x,y) = -3, P_{yx}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_{xx}\left(\frac{55}{2},\frac{85}{3}\right) = -2, P_{xy}\left(\frac{55}{2},\frac{85}{3}\right) = 0, \; P_{yy}\left(\frac{55}{2},\frac{85}{3}\right) = -3$$

$$\Rightarrow \quad P_{xx}\left(\frac{55}{2},\frac{85}{3}\right) \cdot P_{yy}\left(\frac{55}{2},\frac{85}{3}\right) - \left[P_{xy}\left(\frac{55}{2},\frac{85}{3}\right)\right]^2 = (-2)\cdot(-3) - 0^2 > 0$$

$(x_0,y_0) = (27.5,28.333...)$ ist ein lokales Maximum!

Beispiele



☛ Weitere Beispiele finden Sie im Skriptum!

Skriptum, Seiten 26-28

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017

Universität St.Gallen

Sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = (x + y + a) \cdot e^x - e^y.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

---

1. Ableitungen:

$$f_x(x, y) = e^x + (x + y + a) \cdot e^x = (x + y + a + 1) \cdot e^x$$

$$f_y(x, y) = e^x - e^y$$

$$f_{xx}(x, y) = e^x + (x + y + a + 1) \cdot e^x = (x + y + a + 2) \cdot e^x$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = e^x$$

$$f_{yy}(x, y) = -e^y$$

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017

Universität St.Gallen

Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = (x + y + a) \cdot e^x - e^y.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

---

2. Notwendige Bedingungen:

$$f_x(x, y) = (x + y + a + 1) \cdot e^x = 0 \qquad f_y(x, y) = e^x - e^y = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x + y + a + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \quad e^x - e^y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

$$\Longrightarrow \quad 2x + a + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{a + 1}{2} = y$$

$$\Longrightarrow \quad \left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2}\right)$$ einziger stationärer Punkt

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017

Universität St.Gallen

Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = (x + y + a) \cdot e^x - e^y.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

---

3. Hinreichende Bedingungen:

$\left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2}\right)$ einziger stationärer Punkt $\vartheta := -\frac{a+1}{2}$

$$f_{xx}(x,y) = (x + y + a + 2) \cdot e^x \quad \Longrightarrow \quad f_{xx}(\vartheta, \vartheta) = e^{\vartheta}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f_{xy}(\vartheta, \vartheta) = e^{\vartheta}$$

$$f_{yy}(x,y) = -e^y \quad \Longrightarrow \quad f_{yy}(\vartheta, \vartheta) = -e^{\vartheta}$$

$$\Longrightarrow f_{xx}(\vartheta,\vartheta) f_{yy}(\vartheta,\vartheta) - \left(f_{xy}(\vartheta,\vartheta)\right)^2 = e^{\vartheta} \cdot (-e^{\vartheta}) - \left(e^{\vartheta}\right)^2 < 0$$

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017

Universität St.Gallen

Sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = (x + y + a) \cdot e^x - e^y.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

---

3. Hinreichende Bedingungen:

$\left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2}\right)$ einziger stationärer Punkt $\vartheta \coloneqq -\frac{a+1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad f_{xx}(\vartheta,\vartheta) f_{yy}(\vartheta,\vartheta) - \left(f_{xy}(\vartheta,\vartheta)\right)^2 = e^{\vartheta} \cdot (-e^{\vartheta}) - \left(e^{\vartheta}\right)^2 < 0$$

	für Maximum	für Minimum	für Sattelpunkt
notwendige Bedingungen	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
hinreichende Bedingungen	$f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$f_{xx} > 0,\ f_{yy} > 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017

Universität St.Gallen

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = (x + y + a) \cdot e^x - e^y.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

---

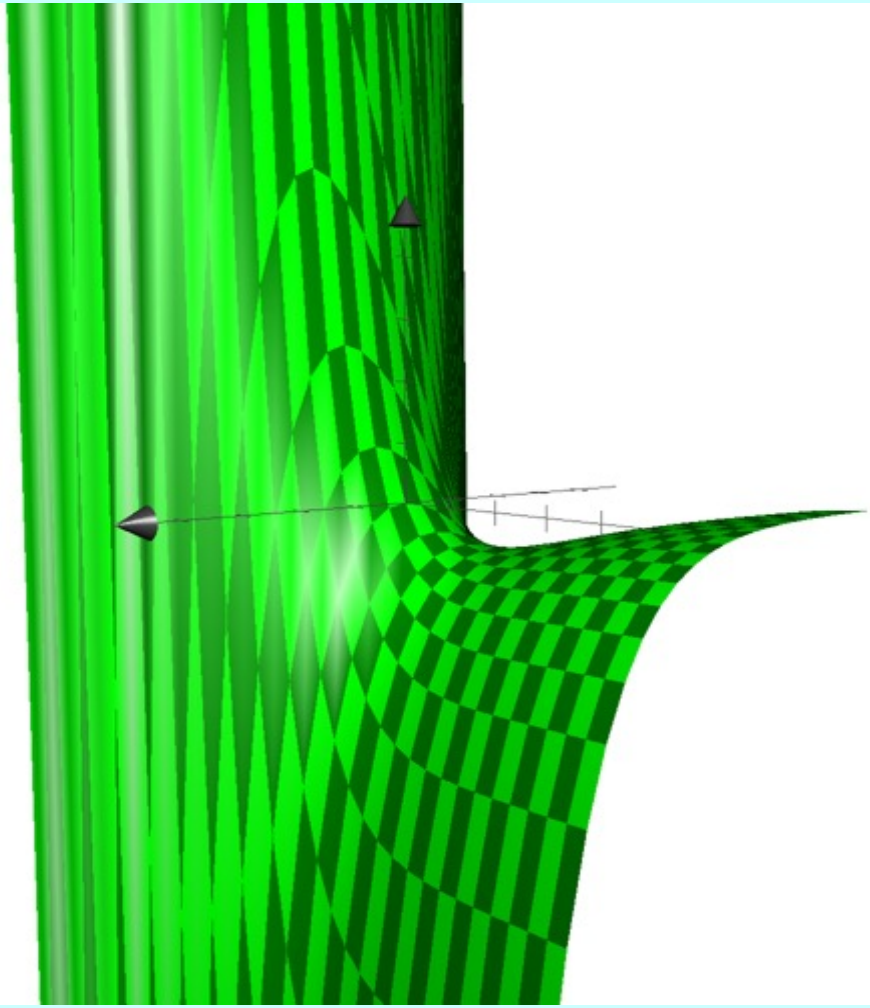
3. Hinreichende Bedingungen:

$\left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2}\right)$ einziger stationärer Punkt $\vartheta := -\dfrac{a+1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad f_{xx}(\vartheta,\vartheta) f_{yy}(\vartheta,\vartheta) - \left(f_{xy}(\vartheta,\vartheta)\right)^2 = e^{\vartheta} \cdot (-e^{\vartheta}) - \left(e^{\vartheta}\right)^2 < 0$$

$\Longrightarrow \quad \left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2}\right)$ Sattelpunkt

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017



3. Extrema von Funktionen zweier Variablen *mit* Nebenbedingungen

Fragestellung

c_1 = konsumierte Menge des Gutes 1

c_2 = konsumierte Menge des Gutes 2

p_1 = Preis einer Einheit des Gutes 1

p_2 = Preis einer Einheit des Gutes 2

e = verfügbares Einkommen (Budget)

$u = u(c_1,c_2)$ = Nutzen eines Konsumenten

Gesucht: Konsumplan (c_1^*,c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2)$ maximal

Nebenbedingung: $p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 = e$ (Budgetrestriktion)

Einführungsbeispiel 1:
Nutzenmaximierung eines Konsumenten

Universität St.Gallen

c_1 = konsumierte Menge des Gutes 1

c_2 = konsumierte Menge des Gutes 2

p_1 = Preis einer Einheit des Gutes 1

p_2 = Preis einer Einheit des Gutes 2

e = verfügbares Einkommen (Budget)

$u = u(c_1,c_2)$ = Nutzen eines Konsumenten

Gesucht: Konsumplan (c_1^*,c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

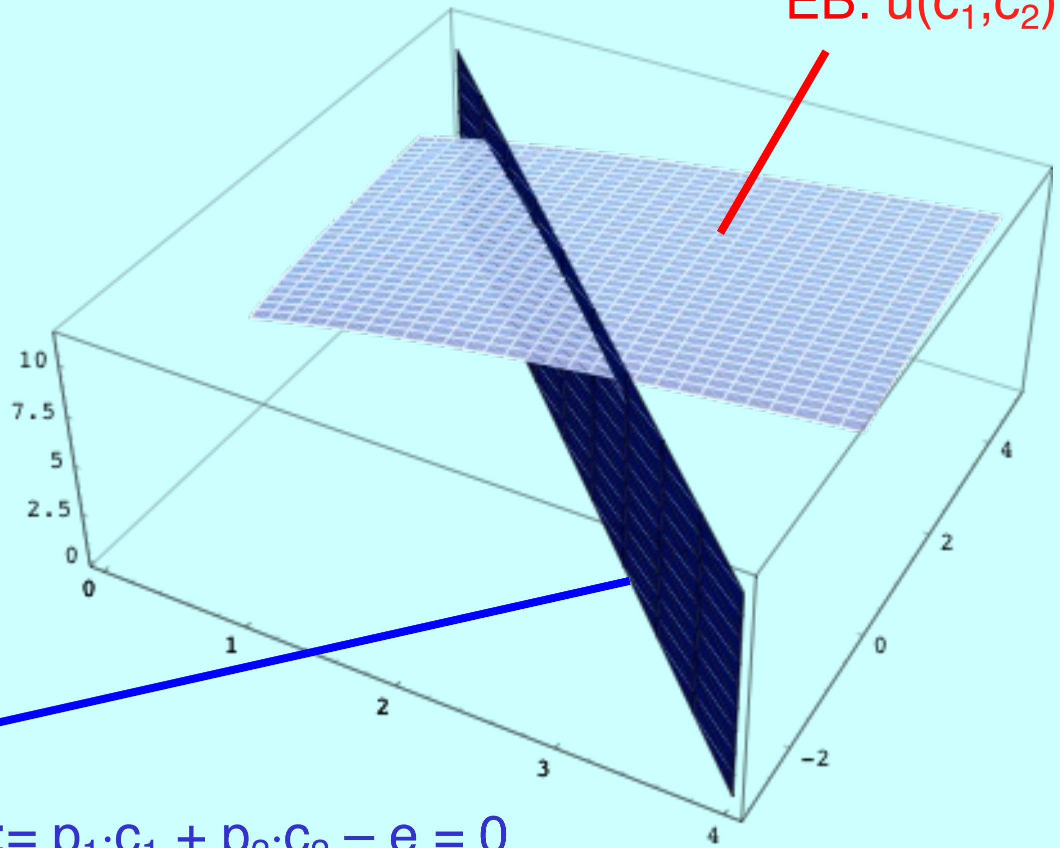
Extremalbedingung: $u(c_1,c_2)$ maximal

Nebenbedingung: : $\varphi(c_1,c_2) := p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 - e = 0$ (Budgetrestriktion)

Einführungsbeispiel 1:
Nutzenmaximierung eines Konsumenten

Universität St.Gallen

EB: $u(c_1,c_2)$ maximal



NB: $\varphi(c_1,c_2) := p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 - e = 0$

Kostenminimierung eines Produzenten

Universität St.Gallen

K = Kapitaleinsatz

A = Arbeitseinsatz

c_K = Kostensatz für Kapitalbenützung

c_A = Lohnsatz

$Q^* = P(K,A)$ = Output der Produktionsfunktion P

$C(K,A) = c_K \cdot K + c_A \cdot A$ = Produktionskosten

Gesucht: Produktionsplan (K^*,A^*), $K^* \geq 0$, $A^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $C(K,A) = c_K \cdot K + c_A \cdot A$ minimal

Nebenbedingung: $P(K,A) = Q^*$

Einführungsbeispiel 2:
Kostenminimierung eines Produzenten

Universität St.Gallen

K = Kapitaleinsatz

A = Arbeitseinsatz

c_K = Kostensatz für Kapitalbenützung

c_A = Lohnsatz

$Q^* = P(K,A)$ = Output der Produktionsfunktion P

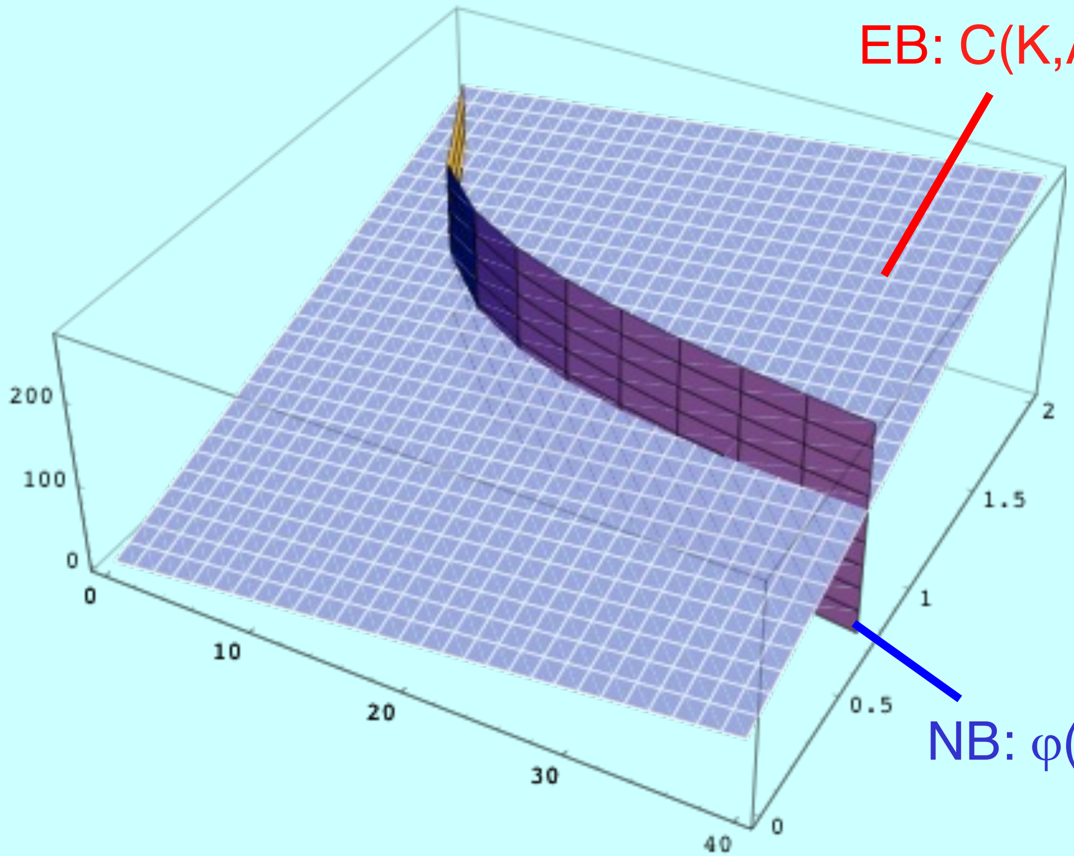
$C(K,A) = c_K \cdot K + c_A \cdot A$ = Produktionskosten

Gesucht: Produktionsplan (K^*,A^*), $K^* \geq 0$, $A^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $C(K,A) = c_K \cdot K + c_A \cdot A$ minimal

Nebenbedingung: $\varphi(K,A) := P(K,A) - Q^* = 0$

Einführungsbeispiel 2:
Kostenminimierung eines Produzenten



EB: $C(K,A) = c_K \cdot K + c_A \cdot A$ minimal

NB: $\varphi(K,A) := P(K,A) - Q^* = 0$

Fragestellung: Allgemeine Formulierung

Universität St.Gallen

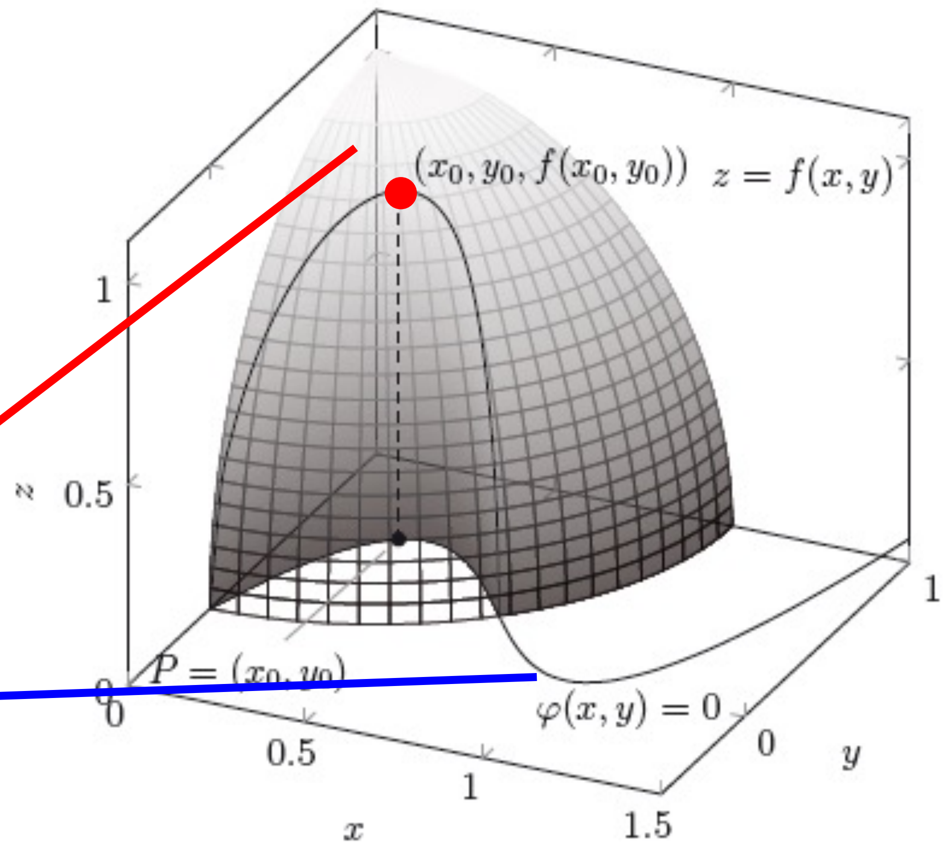
Gesucht: (x*,y*) mit

Extremalbedingung (EB):

z = f(x,y) extremal
(minimal/maximal)

Nebenbedingung (NB):

φ(x,y)= 0



4. Extrema von Funktionen zweier Variablen *mit* Nebenbedingungen

Optimierung durch Variablensubstitution (Reduktionsmethode)

Variablensubstitution/Reduktionsmethode

Voraussetzung: Die Nebenbedingung lässt sich nach einer Variablen auflösen

z. B. $\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x)$

Vorgehen: Einsetzen in Extremalbedingung

$$f(x,y) = f(x,h(x)) =: F(x)$$

Lösen des Extremalproblems für die Funktion F(x) einer Variablen!

Einführungsbeispiel 1:
Nutzenmaximierung eines Konsumenten

c_1 = konsumierte Menge des Gutes 1

c_2 = konsumierte Menge des Gutes 2

p_1 = Preis einer Einheit des Gutes 1

p_2 = Preis einer Einheit des Gutes 2

e = verfügbares Einkommen (Budget)

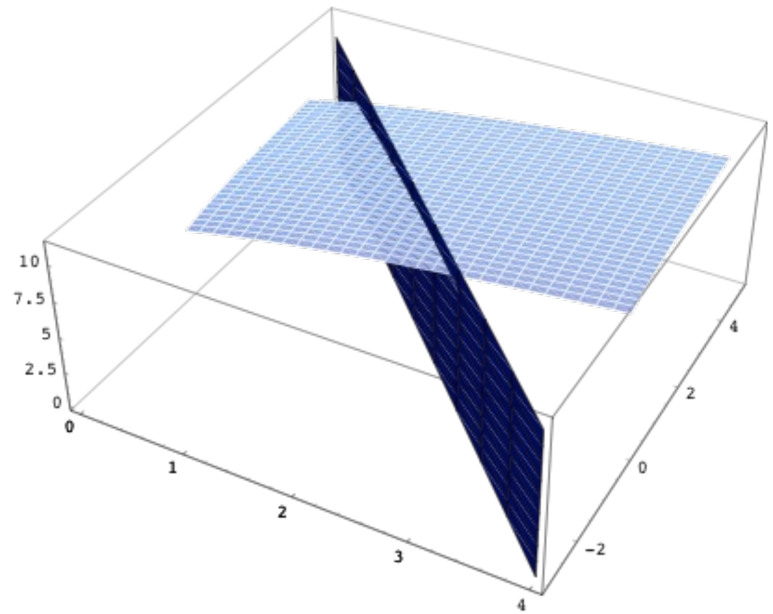
$u = u(c_1,c_2)$ = Nutzen eines Konsumenten

Gesucht: Konsumplan (c_1^*,c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2)$ maximal

Nebenbedingung: : $\varphi(c_1,c_2) := p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 - e = 0$ (Budgetrestriktion)

Variablensubstitution/Reduktionsmethode: Beispiel



Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln(c_2 + 1)$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 2 \cdot c_1 + c_2 - 5 = 0$ (Budgetrestriktion)

Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln(c_2 + 1)$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 2 \cdot c_1 + c_2 - 5 = 0$ (Budgetrestriktion)

$$\Rightarrow \quad c_2 = 5 - 2 \cdot c_1$$

$$\Rightarrow \quad u(c_1) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln\left(\left[5 - 2 \cdot c_1\right] + 1\right) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln(6 - 2 \cdot c_1)$$

Notwendige Bedingung:

$$u'(c_1^*) = \frac{5}{c_1^* + 3} - \frac{2}{6 - 2 \cdot c_1^*} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{c_1^* + 3} = \frac{2}{6 - 2 \cdot c_1^*}$$

$$\Rightarrow \quad 5 \cdot \left(6 - 2 \cdot c_1^*\right) = 2 \cdot \left(c_1^* + 3\right) \quad \Rightarrow \quad 30 - 10 \cdot c_1^* = 2 \cdot c_1^* + 6$$

$$\Rightarrow \quad 24 = 12 \cdot c_1^* \quad \Rightarrow \quad c_1^* = 2$$

[einzig mögliche Extremstelle]

Variablensubstitution/Reduktionsmethode: Beispiel

Universität St.Gallen

Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1, c_2) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln(c_2 + 1)$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1, c_2) := 2 \cdot c_1 + c_2 - 5 = 0$ (Budgetrestriktion)

$$\Rightarrow \quad c_2 = 5 - 2 \cdot c_1$$

$$\Rightarrow \quad u(c_1) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln\left(\left[5 - 2 \cdot c_1\right] + 1\right) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln(6 - 2 \cdot c_1)$$

Hinreichende Bedingung:

$$u'(c_1) = 5 \cdot (c_1 + 3)^{-1} - 2 \cdot (6 - 2 \cdot c_1)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad u''(c_1) = -5 \cdot (c_1 + 3)^{-2} - 2 \cdot (-1) \cdot (6 - 2 \cdot c_1)^{-2} \cdot (-2) = -\frac{5}{(c_1 + 3)^2} - \frac{4}{(6 - 2 \cdot c_1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad u''(c_1^* = 2) = -\frac{5}{(2 + 3)^2} - \frac{4}{(6 - 2 \cdot 2)^2} < 0$$

[(lokales) Maximum!]

Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln(c_2 + 1)$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 2 \cdot c_1 + c_2 - 5 = 0$ (Budgetrestriktion)

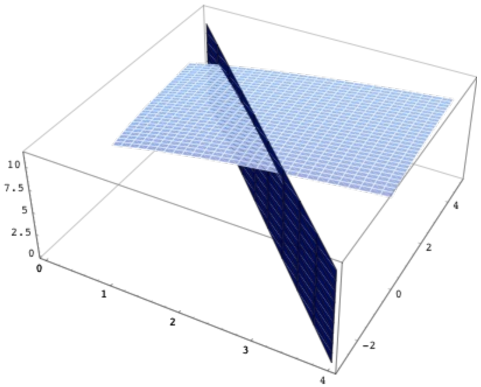
$$\Rightarrow \quad c_2 = 5 - 2 \cdot c_1$$

$$\Rightarrow \quad u(c_1) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln\left(\left[5 - 2 \cdot c_1\right] + 1\right) = 5 \cdot \ln(c_1 + 3) + \ln(6 - 2 \cdot c_1)$$

Resultat:

Für $c_1^* = 2$ und $c_2^* = 5 - 2c_1^* = 1$

hat man ein lokales Maximum!



Bemerkung 1

Wir müssen darauf hinweisen, dass der explizite Ausdruck $y = h(x)$ nicht immer aus dem impliziten Ausdruck $\varphi(x, y) = 0$ hergeleitet werden kann. Darum kann die Optimierung durch Variablensubstitution nicht immer angewandt werden. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $x^2 + y^2 = 4$. Diese Nebenbedingung an (x, y) besagt, dass die Zielfunktion auf der Menge der Punkte (x, y) optimiert werden soll, die auf dem Rand eines Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2 liegen. In diesem Fall lässt sich der implizite Ausdruck $x^2 + y^2 = 4$ nicht eindeutig als explizite Funktion der Form $y = h(x)$ schreiben und die Substitutionsmethode kann nicht angewandt werden.

Die Methode der Variablensubstitution (Reduktionsmethode) lässt sich nicht immer anwenden!

Bemerkung 2

Ein weiteres Problem der Substitutionsmethode ist, dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungen von Problem (12.3) sich nicht immer einfach mit dem ursprünglichen Problem (12.2) in Beziehung setzen lassen. Dies erschwert eine mögliche ökonomische Interpretation der Resultate.

Bei der Methode der Variablensubstitution (Reduktionsmethode) ist die ökomische Interpretation schwierig!

5. Extrema von Funktionen zweier Variablen *mit* Nebenbedingungen

Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Fragestellung: Allgemeine Formulierung

Universität St.Gallen

Gesucht: (x*,y*) mit

Extremalbedingung (EB):

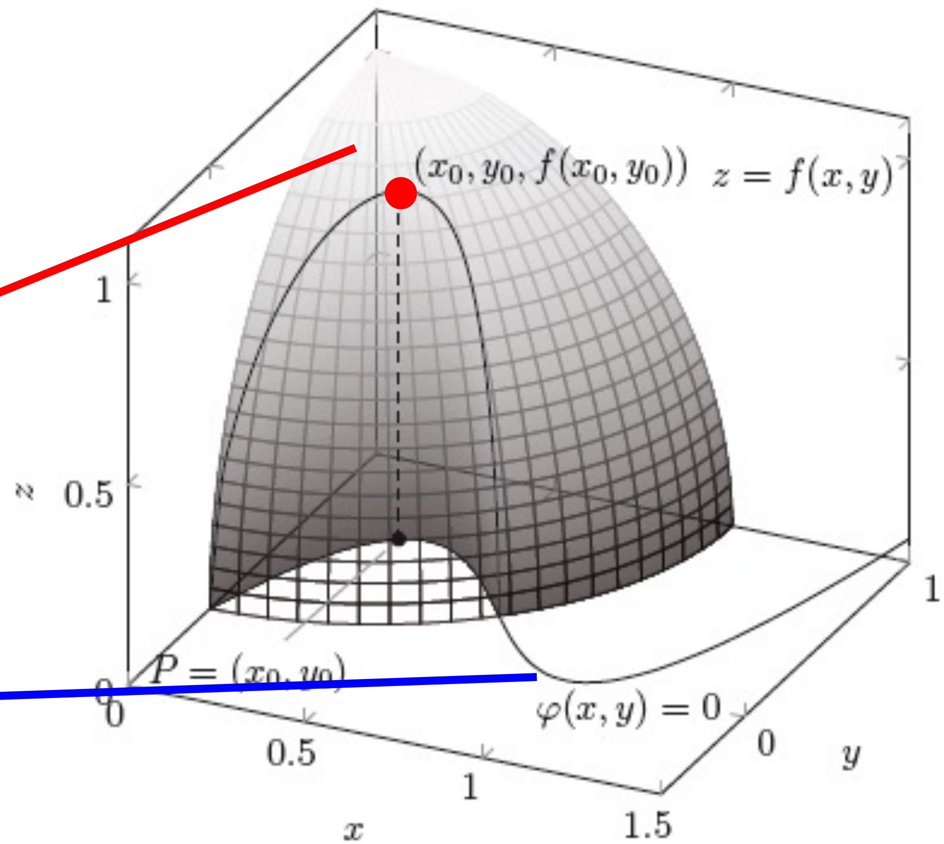
z = f(x,y) extremal (minimal/maximal)

Fläche im Raum

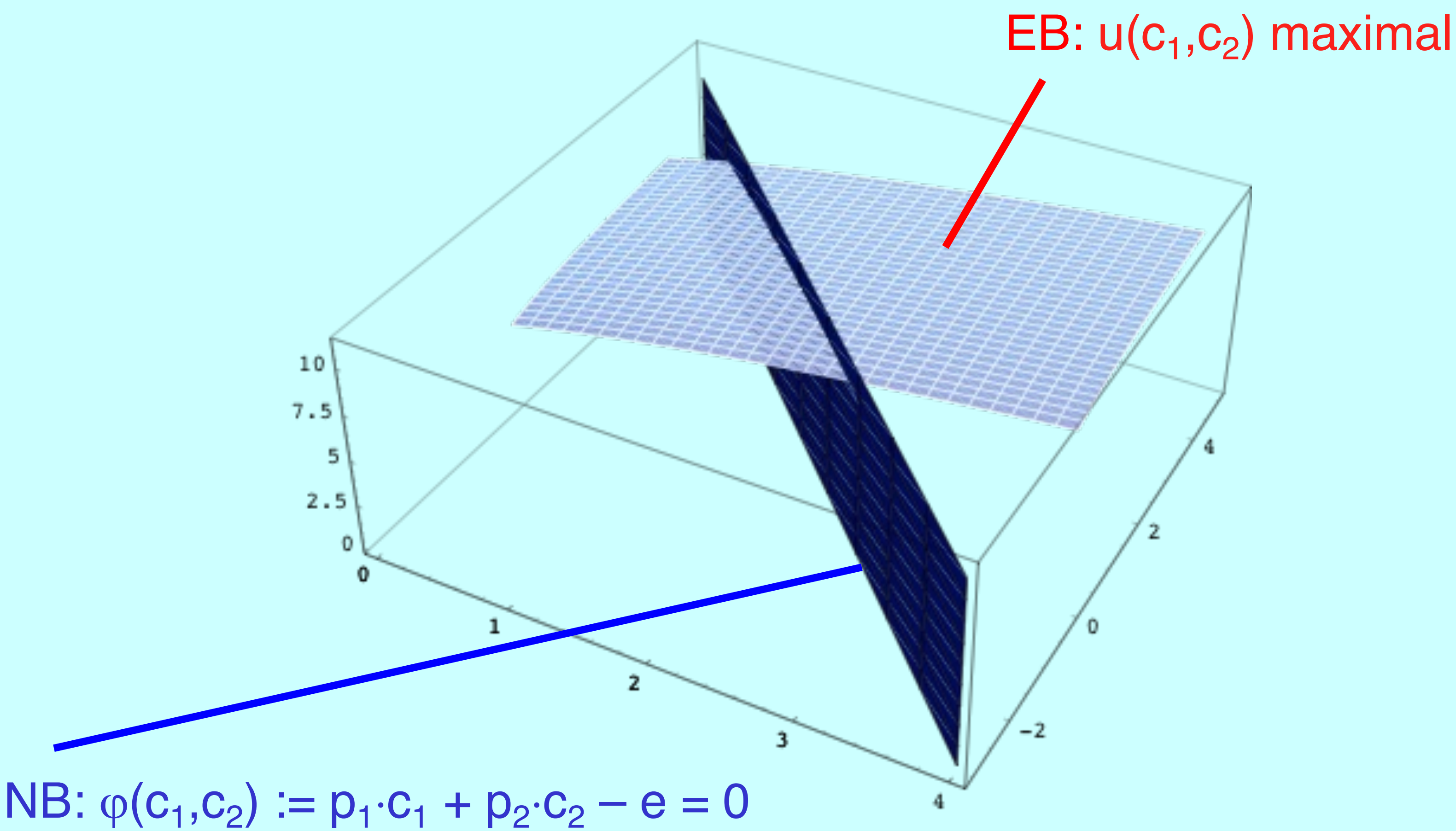
Nebenbedingung (NB):

φ(x,y)= 0

Kurve in der x-y-Ebene

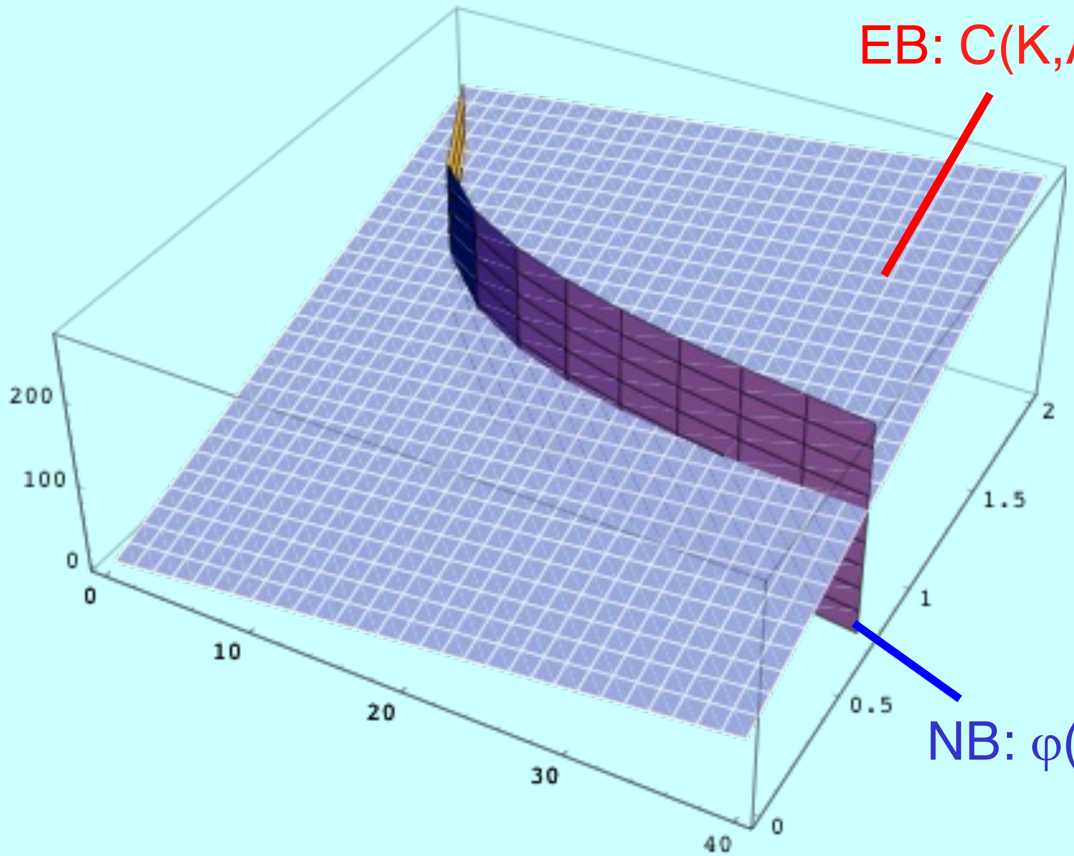


Einführungsbeispiel 1:
Nutzenmaximierung eines Konsumenten



Einführungsbeispiel 2:
Kostenminimierung eines Produzenten

Universität St.Gallen

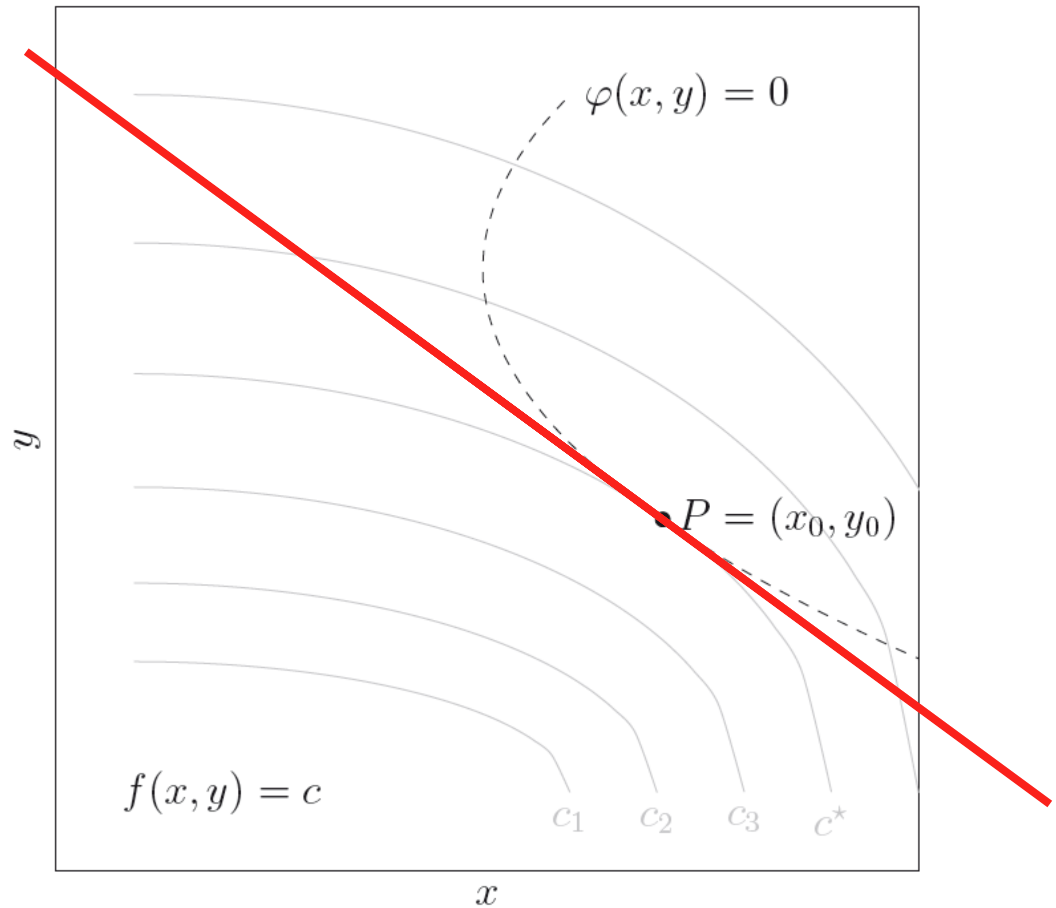


EB: $C(K,A) = c_K \cdot K + c_A \cdot A$ minimal

NB: $\varphi(K,A) := P(K,A) - Q^* = 0$

Herleitung der Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Gemeinsame Tangente
der Niveaulinie f(x,y) = c
und der Kurve φ(x,y) = 0



Herleitung der Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Steigung der Kurve $\varphi(x_0,y_0) = 0$ **=** Steigung der Höhenlinie $f(x_0,y_0) - c = 0$

$$-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)} = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{f_x(x_0,y_0)}{\varphi_x(x_0,y_0)} = -\frac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)} =: \lambda_0$$

Lagrange-Multiplikator

$$\Rightarrow \quad f_x(x_0,y_0) = -\lambda_0 \cdot \varphi_x(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \quad f_y(x_0,y_0) = -\lambda_0 \cdot \varphi_y(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_x(x_0,y_0) + \lambda_0 \cdot \varphi_x(x_0,y_0) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_y(x_0,y_0) + \lambda_0 \cdot \varphi_y(x_0,y_0) = 0}$$

Lagrange-Bedingungen:

(i) $$f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \cdot \varphi_x(x_0, y_0) = 0$$

(ii) $$f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \cdot \varphi_y(x_0, y_0) = 0$$

(iii) $$\varphi(x_0, y_0) = 0$$

Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$$

Lagrange-Bedingungen:

(i) $f_x(x_0,y_0) + \lambda_0 \cdot \varphi_x(x_0,y_0) = 0$

(ii) $f_y(x_0,y_0) + \lambda_0 \cdot \varphi_y(x_0,y_0) = 0$

(iii) $\varphi(x_0,y_0) = 0$

Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$$

Lagrange-Bedingungen:

(i) $F_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$

(ii) $F_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$

(iii) $F_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$

Lagrange‘sche Multiplikationsregel (1788)

Universität St.Gallen

Theorem 12.3 (Lagrange-Theorem, notwendige Bedingungen für Extrema). *Seien* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, *und* $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, *partiell differenzierbare Funktionen zweier reeller Variablen. Wenn* $(x_0, y_0) \in D_f \cap D_\varphi$ *ein Extremum von* f *unter der Nebenbedingung* $\varphi(x_0, y_0) = 0$ *ist, dann gilt*

$$F_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \tag{12.9}$$

$$F_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \tag{12.10}$$

$$F_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \tag{12.11}$$

für $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, *wobei*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \tag{12.12}$$

die Lagrange-Funktion ist.

Einführungsbeispiel 1:
Nutzenmaximierung eines Konsumenten

Universität St.Gallen

c_1 = konsumierte Menge des Gutes 1

c_2 = konsumierte Menge des Gutes 2

p_1 = Preis einer Einheit des Gutes 1

p_2 = Preis einer Einheit des Gutes 2

e = verfügbares Einkommen (Budget)

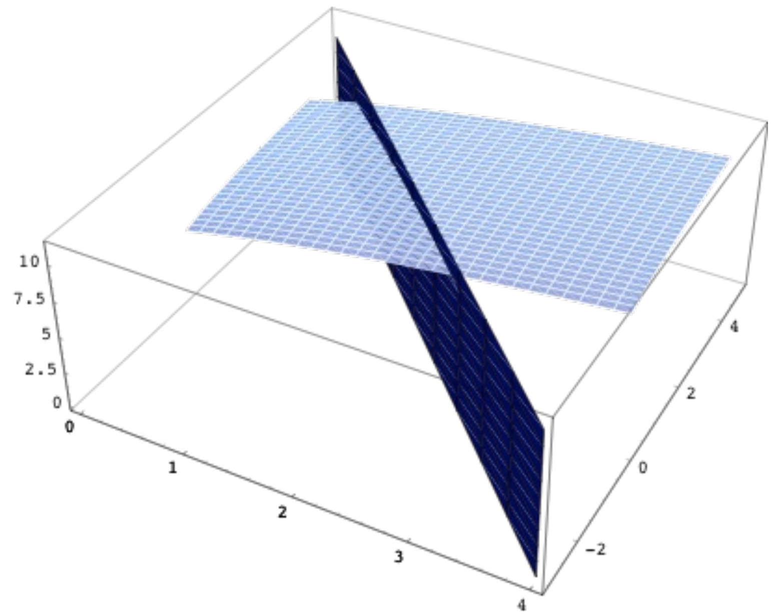
$u = u(c_1,c_2)$ = Nutzen eines Konsumenten

Gesucht: Konsumplan (c_1^*,c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2)$ maximal

Nebenbedingung: : $\varphi(c_1,c_2) := p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 - e = 0$ (Budgetrestriktion)

Beispiel zur Lagrange-Methode



Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = = c_1^{0.5 \cdot}\ c_2^{0.5}$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105 = 0$ (Budgetrestriktion)

Beispiel zur Lagrange-Methode

Universität St.Gallen

Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = c_1^{0.5} \cdot c_2^{0.5}$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105 = 0$ (Budgetrestriktion)

Lagrange-Funktion:

$$F(c_1,c_2,\lambda) = c_1^{0.5} \cdot c_2^{0.5} + \lambda \cdot \left(7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105\right)$$

Lagrange-Bedingungen:

(1) $F_{c_1}(c_1^*, c_2^*, \lambda^*) = 0: \quad 0.5 \cdot c_1^{*-0.5} \cdot c_2^{*0.5} + 7 \cdot \lambda^* = 0$

(2) $F_{c_2}(c_1^*, c_2^*, \lambda^*) = 0: \quad 0.5 \cdot c_1^{*0.5} \cdot c_2^{*-0.5} + 5 \cdot \lambda^* = 0$

(3) $F_{\lambda}(c_1^*, c_2^*, \lambda^*) = 0: \quad 7 \cdot c_1^* + 5 \cdot c_2^* - 105 = 0$

Beispiel zur Lagrange-Methode

$$(1)\quad 0.5\cdot c_1^{*-0.5}\cdot c_2^{*0.5}+7\cdot\lambda^*=0 \;\Rightarrow\; 7\lambda^*=-0.5\,c_1^{*-0.5}\cdot c_2^{*0.5}$$

$$(2)\quad 0.5\cdot c_1^{*0.5}\cdot c_2^{*-0.5}+5\cdot\lambda^*=0 \;\Rightarrow\; 5\lambda^*=-0.5\,c_1^{*0.5}\cdot c_2^{*-0.5}$$

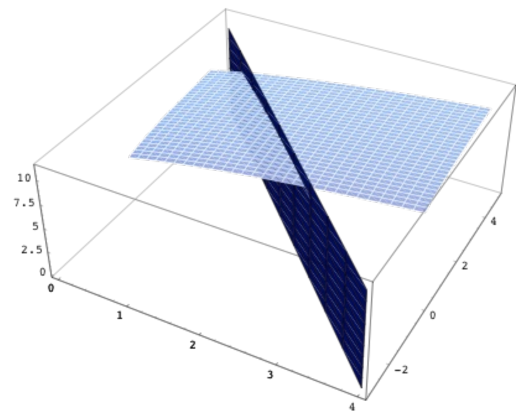
$$(3)\quad 7\cdot c_1^*+5\cdot c_2^*-105=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{7}{5}=\frac{7\cdot\lambda^*}{5\cdot\lambda^*}=\frac{-0.5\cdot c_1^{*-0.5}\cdot c_2^{*0.5}}{-0.5\cdot c_1^{*0.5}\cdot c_2^{*-0.5}}=\frac{c_2^*}{c_1^*}$$

$$\Rightarrow\quad 7\cdot c_1^*=5\cdot c_2^* \quad\overset{(3)}{\Rightarrow}\quad 14\cdot c_1^*-105=0$$

$$\Rightarrow\quad c_1^*=7.5 \quad\Rightarrow\quad c_2^*=10.5$$

Beispiel zur Lagrange-Methode



Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = = c_1^{0.5} \cdot c_2^{0.5}$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105 = 0$ (Budgetrestriktion)

Resultat: Für $c_1^* = 7.5$ und $c_2^* = 10.5$ hat man ein lokales Maximum!

wirklich?

Bemerkung zu den Lagrange-Bedingungen

ABER

Ein Punkt (x_0, y_0, λ_0), der die Lagrange-Bedingungen erfüllt, wird als *stationärer Punkt* der Lagrange-Funktion F bezeichnet. Theorem 12.3 besagt, dass wir bei partiell differenzierbaren Funktionen nur unter den stationären Punkten der Lagrange-Funktion nach Extrema suchen müssen. Allerdings sind stationäre Punkte der Lagrange-Funktion nicht unbedingt Extrema des Optimierungsproblems mit Nebenbedingung, da die Bedingungen in Theorem 12.3 nur notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen sind.

Hinreichende Bedingungen für Extrema

Theorem 12.4 (Hinreichende Bedingungen für Extrema). *Seien* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, *und* $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, $D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^2$, *zweimal stetig partiell differenzierbar. Sei* (x_0, y_0, λ_0) *ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion* $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y)$, *d.h.*

$$\begin{aligned} F_x(x_0,y_0,\lambda_0) &= 0 \\ F_y(x_0,y_0,\lambda_0) &= 0 \\ F_\lambda(x_0,y_0,\lambda_0) &= 0. \end{aligned}$$

Dann gilt:

(i) Falls[a]

$$\boxed{\begin{aligned} &2\,\varphi_x(x_0,y_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)\,F_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ &\quad -F_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)\,(\varphi_y(x_0,y_0))^2 - F_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)\,(\varphi_x(x_0,y_0))^2 > 0, \end{aligned}}$$

dann ist (x_0, y_0) *ein lokales Maximum von* f *unter der Nebenbedingung*

$$\varphi(x_0,y_0) = 0;$$

(ii) Falls

$$\boxed{\begin{aligned} &2\,\varphi_x(x_0,y_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)\,F_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ &\quad -F_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)\,(\varphi_y(x_0,y_0))^2 - F_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)\,(\varphi_x(x_0,y_0))^2 < 0, \end{aligned}}$$

dann ist (x_0, y_0) *ein lokales Minimum von* f *unter der Nebenbedingung*

$$\varphi(x_0,y_0) = 0.$$

Hinreichende Bedingungen für Extrema

$$2\varphi_x\varphi_y F_{xy} - F_{xx}\varphi_y^2 - F_{yy}\varphi_x^2 \begin{cases} > 0 \to \text{Maximum} \\ < 0 \to \text{Minimum} \end{cases}$$

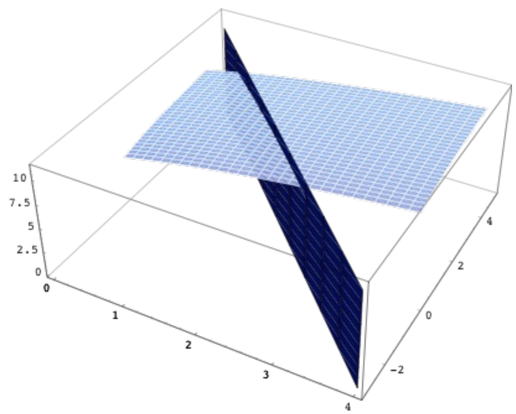
Der Ausdruck entspricht der Determinante der **geänderten Hesse-Matrix**:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi_x(x_0, y_0) & \varphi_y(x_0, y_0) \\ \varphi_x(x_0, y_0) & F_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi_y(x_0, y_0) & F_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{pmatrix}$$

Otto Hesse (1811-1874)

Beispiel zur Lagrange-Methode

Universität St.Gallen



Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

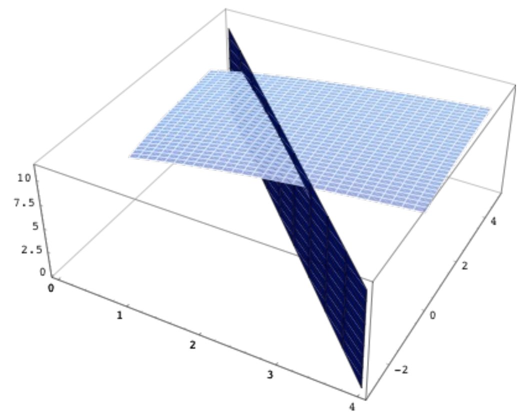
Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = = c_1^{0.5} \cdot c_2^{0.5}$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105 = 0$ (Budgetrestriktion)

Resultat: Für $c_1^* = 7.5$ und $c_2^* = 10.5$ hat man ein lokales Maximum!

wirklich?

Beispiel zur Lagrange-Methode



Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = = c_1^{0.5} \cdot c_2^{0.5}$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105 = 0$ (Budgetrestriktion)

Resultat: Für $c_1^* = 7.5$ und $c_2^* = 10.5$ **könnte** man ein lokales Maximum haben!

Beispiel zur Lagrange-Methode

$$F(c_1,c_2,\lambda) = c_1^{0.5} \cdot c_2^{0.5} + \lambda \cdot (7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105)$$

$$\varphi(c_1,c_2) = 7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105$$

$$\Rightarrow \quad F_{c_1}(c_1,c_2,\lambda) = 0.5 \cdot c_1^{-0.5} \cdot c_2^{0.5} + 7 \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \quad F_{c_2}(c_1,c_2,\lambda) = 0.5 \cdot c_1^{0.5} \cdot c_2^{-0.5} + 5 \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \quad (c_1^*,c_2^*,\lambda^*) = \left(7.5, 10.5, -\frac{\sqrt{35}}{70}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{c_1}(c_1,c_2) = 7 \qquad \Rightarrow \quad \varphi_{c_1}(7.5,10.5) = 7$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{c_2}(c_1,c_2) = 5 \qquad \Rightarrow \quad \varphi_{c_2}(7.5,10.5) = 5$$

$$\Rightarrow \quad F_{c_1c_1}(c_1,c_2,\lambda) = -0.25 \cdot c_1^{-1.5} \cdot c_2^{0.5} \qquad \Rightarrow \quad F_{c_1c_1}\left(7.5, 10.5, -\frac{\sqrt{35}}{70}\right) = -\frac{\sqrt{35}}{150}$$

$$\Rightarrow \quad F_{c_1c_2}(c_1,c_2,\lambda) = -0.25 \cdot c_1^{-0.5} \cdot c_2^{-0.5} \qquad \Rightarrow \quad F_{c_1c_2}\left(7.5, 10.5, -\frac{\sqrt{35}}{70}\right) = \frac{\sqrt{35}}{210}$$

$$\Rightarrow \quad F_{c_2c_2}(c_1,c_2,\lambda) = -0.25 \cdot c_1^{0.5} \cdot c_2^{-1.5} \qquad \Rightarrow \quad F_{c_2c_2}\left(7.5, 10.5, -\frac{\sqrt{35}}{70}\right) = -\frac{\sqrt{35}}{294}$$

Beispiel zur Lagrange-Methode

$\Rightarrow \quad \varphi_{c_1}(c_1,c_2)=7 \qquad \Rightarrow \quad \varphi_{c_1}(7.5,10.5)=7$

$\Rightarrow \quad \varphi_{c_2}(c_1,c_2)=5 \qquad \Rightarrow \quad \varphi_{c_2}(7.5,10.5)=5$

$\Rightarrow \quad F_{c_1c_1}(c_1,c_2,\lambda)=-0.25\cdot c_1^{-1.5}\cdot c_2^{0.5} \qquad \Rightarrow \quad F_{c_1c_1}\left(7.5,10.5,-\frac{\sqrt{35}}{70}\right)=-\frac{\sqrt{35}}{150}$

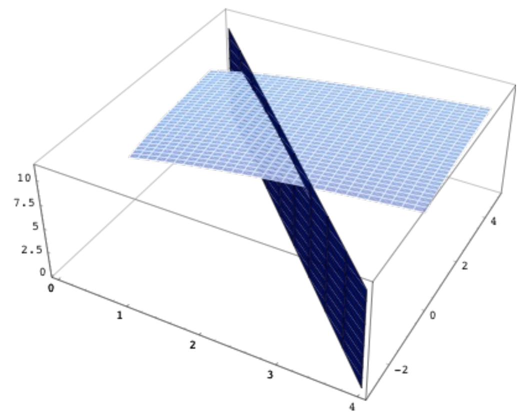
$\Rightarrow \quad F_{c_1c_2}(c_1,c_2,\lambda)=-0.25\cdot c_1^{-0.5}\cdot c_2^{-0.5} \qquad \Rightarrow \quad F_{c_1c_2}\left(7.5,10.5,-\frac{\sqrt{35}}{70}\right)=\frac{\sqrt{35}}{210}$

$\Rightarrow \quad F_{c_2c_2}(c_1,c_2,\lambda)=-0.25\cdot c_1^{0.5}\cdot c_2^{-0.5} \qquad \Rightarrow \quad F_{c_2c_2}\left(7.5,10.5,-\frac{\sqrt{35}}{70}\right)=-\frac{\sqrt{35}}{294}$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot\varphi_{c_1}(7.5,10.5)\cdot\varphi_{c_2}(7.5,10.5)\cdot F_{c_1c_2}\left(7.5,10.5,-\frac{\sqrt{35}}{70}\right)$$

$$-F_{c_1c_1}\left(7.5,10.5,-\frac{\sqrt{35}}{70}\right)\cdot\varphi_{c_2}(7.5,10.5)^2-F_{c_2c_2}\left(7.5,10.5,-\frac{\sqrt{35}}{70}\right)\cdot\varphi_{c_1}(7.5,10.5)^2>0$$

Beispiel zur Lagrange-Methode



Gesucht: Konsumplan (c_1^*, c_2^*), $c_1^* \geq 0$, $c_2^* \geq 0$ mit

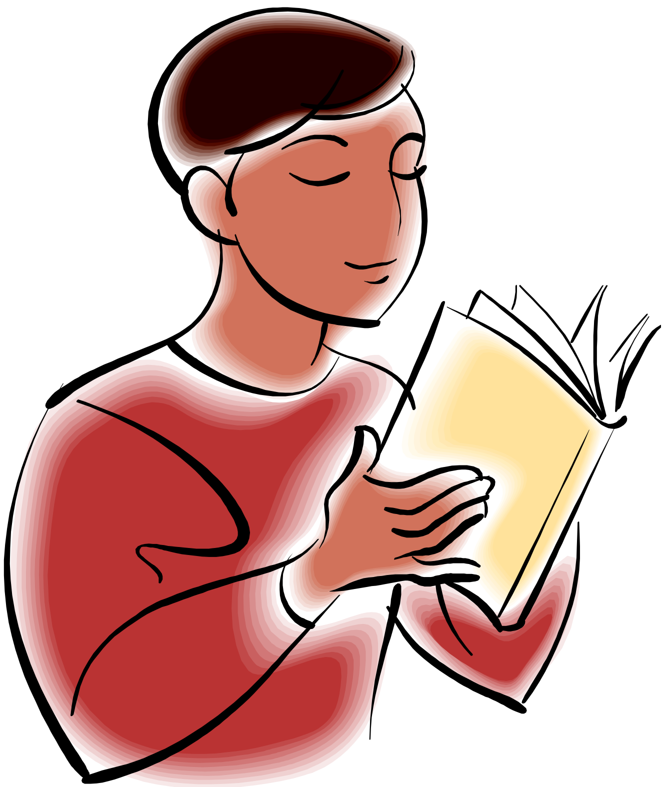
Extremalbedingung: $u(c_1,c_2) = = c_1^{0.5} \cdot c_2^{0.5}$ maximal

Nebenbedingung: $\varphi(c_1,c_2) := 7 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 - 105 = 0$ (Budgetrestriktion)

Resultat: Für $c_1^* = 7.5$ und $c_2^* = 10.5$ hat man ein lokales Maximum!

SICHER!

Beispiele



☛ Ein weiteres Beispiel finden Sie im Skriptum!

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017

Die Funktion

[EB] $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

ist unter der Nebenbedingung

[NB] $\varphi(x,y) = ax^2 + bxy + 5y^2 - 16 = 0$

zu optimieren.

Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass im Punkt (1,1) eine mögliche Extremstelle sein könnte.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich bei (1,1) tatsächlich um eine Extremstelle (und nicht einen Sattelpunkt) handelt und von welcher Art die Extremstelle ist (Maximum oder Minimum), wird nicht verlangt.

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017

Lagrange-Funktion:

$$F(x, y, \lambda) = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y)} + \lambda \cdot \underbrace{(ax^2 + bxy + 5y^2 - 16)}_{\varphi(x,y)}$$

Lagrange-Bedingungen:

$$\begin{array}{ll|r|l} F_x(x, y, \lambda) & = 0: & 2x + \lambda \cdot (2ax + by) = 0 & \text{①} \\ F_y(x, y, \lambda) & = 0: & 2y + \lambda \cdot (bx + 10y) = 0 & \text{②} \\ F_\lambda(x, y, \lambda) & = 0: & ax^2 + bxy + 5y^2 - 16 = 0 & \text{③} \end{array}$$

Im Punkt (1,1) soll eine mögliche Extremstelle sein: Setze x = 1 und y = 1 in die Lagrange-Bedingungen ein!

Beispiel aus der Assessmentprüfung 2017

Universität St.Gallen

Lagrange-Bedingungen im Punkt (1,1):

$$\begin{array}{rl|r|l} F_x(x,y,\lambda) & = 0: & 2+\lambda\cdot(2a+b)=0 & (1) \\ F_y(x,y,\lambda) & = 0: & 2+\lambda\cdot(b+10)=0 & (2) \\ F_\lambda(x,y,\lambda) & = 0: & a+b-11=0 & (3) \end{array}$$

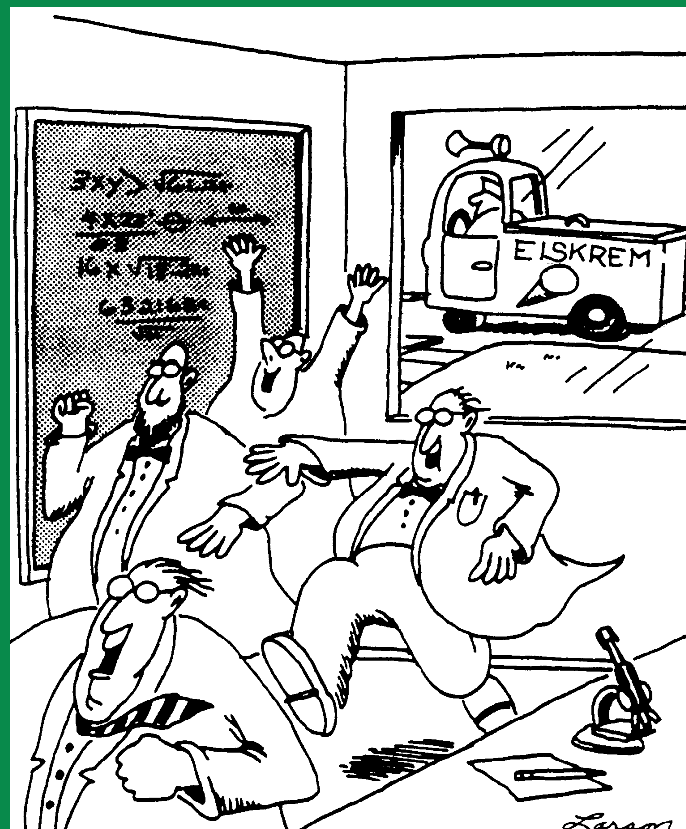
$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \lambda = -\frac{2}{2a+b}$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \lambda = -\frac{2}{b+10}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{2a+b} = \frac{2}{b+10} \quad \Longrightarrow \quad 2a+b=b+10 \quad \Longrightarrow \quad a=5$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad 5+b-11=0 \quad \Longrightarrow \quad b=6$$

Universität St.Gallen



Ende der Vorlesung