Sud-Theorie(1) VS 01 (FO 25.12.2009 korr.Jan 2010)

Mit einem Nachtrag Januar 2011 (Seite 47-50)

§1. Sudokugruppe

Sudoku-Raster, Sudoku, zulässige Transformation

Ein System $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} & \mathrm{A}_{1,3} \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} & \mathrm{A}_{2,3} \\ \mathrm{A}_{3,1} & \mathrm{A}_{3,2} & \mathrm{A}_{3,3} \end{pmatrix}$ aus Blöcken $\mathrm{A}_{i,j}=\begin{pmatrix} A_{i,j,1,1} & A_{i,j,1,2} & A_{i,j,1,3} \\ A_{i,j,2,1} & A_{i,j,2,2} & A_{i,j,2,3} \\ A_{i,j,3,1} & A_{i,j,3,2} & A_{i,j,3,3} \end{pmatrix}$, $i,j\in\{1,2,3\}$, und

Leerstellen $A_{i,j,k,l}$, $i,j,k,l\in\{1,2,3\}$ anschaulich betrachtet in fester Position auf einem Feld, nennen wir **Sudoku-Raster**. Es enthält neben den Blöcken und horizontalen sowie vertikalen Blockstreifen eine 9x9-Raster-Matrix $\mathrm{A}=(A_{i,j,k,l})$ und deren Zeilen (horizontale Reihen) sowie Spalten (vertikale Reihen).

Ein **Sudoku** ist eine 9x9-Matrix A, die sich bei einem Eintrag von Ziffern aus der Menge {1,2,3,...,9} in die 81 Leerstellen des Rasters $\mathbf{A}$ ergibt, sofern diese Ziffern-Belegung des Rasters die Sudoku-Bedingungen erfüllt, d.h. in allen Zeilen, Spalten und Blöcken des Rasters keine Ziffer mehrfach vorkommt.
Wir schreiben allgemein $A=(a_{i,j,k,l})\in X$, $a_{i,j,k,l}\in\{1,2,3,...,9\}$, $i,j,k,l\in\{1,2,3\}$,
wobei X die Menge aller Sudokus ist .
Die Elemente $a_{i,j,k,L}$ von A stehen also stets für Ziffern aus der Menge {1,2,3,...,9}, die in Relation zueinander betrachtet den Sudoku-Bedingungen genügen.
Ein $A\in X$ hat die vom Raster $\mathbf{A}$ übernommene Blockstruktur

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \text{ wobei } a_{i,j}=\begin{pmatrix} a_{i,j,1,1} & a_{i,j,1,2} & a_{i,j,1,3} \\ a_{i,j,2,1} & a_{i,j,2,2} & a_{i,j,2,3} \\ a_{i,j,3,1} & a_{i,j,3,2} & a_{i,j,3,3} \end{pmatrix} \text{ mit } i,j\in\{1,2,3\},$$

ferner Zeilen und Spalten gemäß seiner Matrixstruktur sowie horizontale und vertikale Blockstreifen, explizit notiert durch

$$HS_i=(a_{i,1}\ ,\ a_{i,2}\ ,\ a_{i,3})\ ,\ i\in\{1,2,3\}, \qquad VS_j=\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ a_{3,j} \end{pmatrix},\ j\in\{1,2,3\}.$$

Ein Element $A\in X$ nennen wir e-**normiertes Sudoku** , wenn der Block $a_{1,1}$ von A gleich dem

Normblock $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ist.

Eine **zulässige Transformation** (auch **Operator**) ist eine Permutation der Plätze eines Sudokus, die die geometrische Struktur respektiert, also

- Streifen in Streifen, Reihen in Reihen, Blöcke in Blöcke überführt,
- die Parallelität erhält, soll heißen: wird ein horizontaler Streifen in einen vertikalen überführt, so auch die beiden parallelen Streifen.

Da Reihen in Reihen und Streifen in Streifen übergehen, sind es notwendig nur die Reihen innerhalb eines Streifens, die permutiert werden. Dabei werden auch die gleichen Reihenvertauschungen in den drei Blöcken eines Streifens vorgenommen.
Eine zulässige Transformation φ führt jedes $A\in X$ in das durch die Permutation der Plätze entstandene Sudoku $\varphi(A)\in X$ über, auch kurz $\varphi A\in X$ notiert. Wir schreiben
$\varphi: X\to X: A\mapsto\varphi A$

Die Hintereinanderausführung zulässiger Transformationen ist wieder zulässig. Die zulässigen Transformationen bilden also eine Gruppe, die **Sudokugruppe G** (9-ten Grades).
G operiert auf dem Raum X. Die Wirkung eines Operators $\varphi\in G$ auf ein Sudoku A kann man als Bewegung (Permutation) der Reihen, Streifen und Blöcken von A auf dem Sudoku-Raster **A** ansehen und aus dieser Sicht dieOperatoren sortieren.

Lokale Operatoren

Ein Operator $\varphi \in G$ heißt **lokal**, wenn er alle Streifen von $A \in X$ nicht bewegt, also als Ganzes fest lässt, und nur innerhalb der Streifen Zeilen bzw. Spalten bewegt. Solch φ bewirkt also nur Permutationen der Reihen innerhalb der Streifen HS_i., $i \in \{1,2,3\}$ und VS_j , $j \in \{1,2,3\}$.
Die Hintereinanderausführung solcher Operatoren ist wieder lokal.
Zusammengenommen bilden sie eine Untergruppe, die **lokale Sudokugruppe T*** in G.

Ein lokaler Operator $w \in T^*$ transformiert auch jeden Block $a_{i,j}$, $i,j \in \{1,2,3\}$, in sich, induziert also auf diesem eine Permutation der Zeilen des Blocks, die der Zeilenpermutation von w im horizontalen Blockstreifen HS_i entspricht, und analog für die Spalten des Blocks eine Permutation, die der Spaltenpermutation im vertikalen Blockstreifen VS_j entspricht.
Die von einem lokalen Operator w bewirkte Permutation der Zeilen und Spalten eines Sudokus A lässt sich somit durch von w in den Blöcken $a_{i,j}$ von A induzierte Permutationen $w_{i,j}$ der Blockzeilen und Blockspalten kennzeichnen. Wir schreiben: $wA = (w_{i,j}a_{i,j})$, wobei $w_{i,j}$ der von w im Block $a_{i,j}$ induzierte Blockoperator ist .

Blockoperatoren, Blockgruppe

Zur Bestimmung der Operatoren auf einem Block b = $\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$ werden Zeilen und Spalten des Blocks von oben nach unten bzw. links nach rechts nummeriert.
Permutationen von Zeilen als auch Reihen des Blocks kann man durch die Elemente der symmetrischen Gruppe S_3 , die wir hier in Zyklendarstellung notieren, beschreiben .
Die S_3 hat einen sehr einfachen Aufbau. Ihre alternierende Gruppe $A_3 = \{1,s,ss\}$, wobei ss für $= s^{-1} = s \cdot s$ gesetzt, wird durch einen Zykel $s = (123)$ erzeugt, damit ist $ss = (321)$, und es gibt drei 2-er Zyklen $r_1 = (23)$, $r_2 = (13)$, $r_3 = (12)$. Sie ist semidirektes Produkt: $S_3 = A_3 \otimes \{1,r_i\}$ bei jedem $i \in \{1,2,3\}$.
Grundlegende Eigenschaften ihrer Verknüpfung sind $s \cdot s \cdot s = 1$, $r_i \cdot r_i = 1$, $r_i \cdot s \cdot r_i = ss$, $i \in \{1,2,3\}$.
Zum Umrechnen der Produkte werden Gleichungen benutzt:
$ss \cdot ss \cdot ss = 1$, $s \cdot ss = 1$, $r_i \cdot s = ss \cdot r_i$, $s \cdot r_i = r_i \cdot ss$, $i \in \{1,2,3\}$, $s \cdot r_1 = r_3$, $s \cdot r_2 = r_1$, $s \cdot r_3 = r_2$
sowie die Konjugationen $s \cdot r_3 \cdot ss = r_1 = ss \cdot r_2 \cdot s$, $s \cdot r_1 \cdot ss = r_2 = ss \cdot r_3 \cdot s$, $s \cdot r_2 \cdot ss = r_3 = ss \cdot r_1 \cdot s$.
Die Menge der Zeilen-Permutationen eines Blocks b schreiben wir als isomorphes Bild von S_3 nun
$S_3 = \{1, s=(123), ss=(321), r_1 =(23), r_2 =(13), r_3 =(12)\}$, wobei ss für $s \cdot s$ alias s^{-1} steht.
Analog werden Permutationen der Spalten durch Permutationen der Spaltennummern $j \in \{1,2,3\}$ bestimmt und in Zyklendarstellung notiert . Deren Menge schreiben wir als Bild der S_3 analog
$S_3° = \{1°, s°=(123), ss°=(321), r_1°=(23), r_2°=(13), r_3°=(12)\}$, wobei 1°=1=id die identische Abbildung.
Die Notation beschreibt einen Isomorphismus $° : S_3 \to S_3°$ zwischen den beiden Exemplaren der symmetrischen Gruppe zur Ordnung 3 . Demnach gilt $(g \cdot h)° = g° \cdot h°$ für $g,h \in S_3$.
Es wird $g°° = g$ gesetzt . Damit gilt dann auch $(g° \cdot h°)° = g \cdot h$ für $g°, h° \in S_3°$.
Die Elemente $g \in S_3$ kommutieren mit den $h° \in S_3°$. Ihr direktes Produkt ist die
kleine Blockgruppe $\Gamma_o = S_3 \times S_3°$.

Die Operatoren $r_2 = (13) \in S_3$ und $r_2° = (13) \in S_3°$ bewirken geometrisch betrachtet Spiegelungen an der mittleren Zeile bzw. Spalte des Blocks als Achse. Weitere geometrisch basierte Operationen auf einem Block sind die 90°-Drehungen um den Mittelpunkt sowie die Spiegelungen an einer Diagonalen. Das Produkt zweier Spiegelungen sich schneidender Achsen ist eine Drehung. Das Produkt der Spiegelung an der mittleren Zeile mit der Spiegelung an der Hauptdiagonalen ist also die 90°-Drehung im Uhrzeigersinn. Wir erweitern die kleine Blockgruppe um all die angesprochenen Operatoren, indem wir die Spiegelung an der Hauptdiagonalen zur Gruppe Γ_o hinzu nehmen, also den

Block-Tranponierer t mit t(b) = $\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & b_{3,2} \\ b_{1,3} & b_{2,3} & b_{3,3} \end{pmatrix}$.

Bei Verknüpfung von t mit den Elementen $g \cdot h° \in \Gamma_o$ gilt $t \cdot g = g°$, $t \cdot h° = h$ sowie allgemein $t \cdot g \cdot h° = g° \cdot h$.
Der Block-Transponierer t ist **Dualisator** des direkten Produkts $\Gamma_o = S_3 \times S_3°$, er tauscht die Faktoren, von denen jeder als Duplikat des anderen betrachtet werden kann.
Die Operatoren von Γ_o der kleinen Blockgruppe zusammen mit dem Block-Transponierer erzeugen ein semidirektes Produkt. Man erhält die **Blockgruppe $\Gamma = \Gamma_o \otimes \{1, t\}$** .

Struktur der lokalen Sudokugruppe

Lokale Operatoren $w \in T^*$, die nur Zeilen von A innerhalb ihrer Horizontalstreifen HS_i, $i \in \{1,2,3\}$, permutieren und die Position aller Spalten von A fest lassen, bilden eine Untergruppe T in T*.
Ein Operator $g \in T$ bewirkt auf den horizontalen Streifen HS_i, $i \in \{1,2,3\}$, eine Permutation der Zeilen, die in den Blöcken des Streifens deren Zeilen simultan permutieren. Wir wählen oBdA in einem der Blöcke, beispielsweise im ersten, den betreffenden Blockoperator $g_i \in S_3$ und repräsentieren damit die Wirkung von g auf die Zeilen von HS_i, $i \in \{1,2,3\}$.
Da der lokale Operator $g \in T$ auf drei im Raster untereinanderstehende Horizontalstreifen operiert, beschreiben wir den Operator $g \in T$ durchs Tripel $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$, wobei $g_i \in S_3$ die Einschränkung von g auf einen der Blöcke des Streifens HS_i, $i \in \{1,2,3\}$, ist.

Einen Operator $g \in T$, der nur in einem der drei horizontalen Streifen deren Zeilen permutiert und alle Zeilen in den anderen zwei Streifen nicht bewegt, also diese Streifen nicht nur als Ganzes sondern auch in all seinen Teilen fest lässt, schreiben wir als Tripel dem entsprechend
$\overline{g_1} = \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{g_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ g_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{g_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ g_3 \end{pmatrix}$. Deren Verkettung in T kann man $\bar{g} = \overline{g_1} \cdot \overline{g_2} \cdot \overline{g_3}$ schreiben, explizit also $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g_2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ g_3 \end{pmatrix}$, wobei $g_i \in S_3$ für $i \in \{1,2,3\}$.
Dem gemäß ist T ein direktes Produkt $T = T_1 x T_2 x T_3$, wobei T_1, T_2, T_3 zur Blockgruppe S_3 isomorphe Untergruppen von T sind, deren Operatoren jeweils Zeilen in einem der Horizontalstreifen permutieren.
Die Anordnung der Komponenten im Tripel ist an die Position der Streifen HS_1,HS_2,HS_3 im Raster gebunden. Wenn wir allgemein $g \in T = T_1 x T_2 x T_3$ durch $g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$ mit $g_i \in S_3$ für $i \in \{1,2,3\}$ notieren, ist dies zu beachten.

Lokale Operatoren $w \in T^*$, die nur Spalten von A innerhalb ihrer Vertikalstreifen VS_j, $j \in \{1,2,3\}$, permutieren und die Position aller Zeilen von A fest lassen, bilden entsprechend eine Untergruppe T° von T*. Für die Elemente der Gruppe T° gilt analog:
Sie bilden ein direktes Produkt $T° = T_1° \text{ x } T_2° \text{ x } T_3°$ in T*, wobei $T_1°$, $T_2°$, $T_3°$ zur Blockgruppe $S_3°$ isomorphe Untergruppen von T° sind, deren Operatoren nur Spalten in einem der Vertikalstreifen permutieren.
Die Anordnung der Komponenten im Tripel ist an die Position der Streifen VS_1,VS_2,VS_3 im Raster gebunden. Wenn wir allgemein $h° \in T° = T_1° \text{ x } T_2° \text{x } T_3°$ durch $h° = h_1° \cdot h_2° \cdot h_3°$ notieren, wobei $h_j° \in S_3°$ für $j \in \{1,2,3\}$, ist dies zu beachten.

Zur Begründung argumentiert man analog wie für $g \in T$.
Ein Operator $h° \in T°$ bewirkt auf den vertikalen Streifen VS_j, $j \in \{1,2,3\}$, eine Permutation der Spalten, die in den drei Blöcken des Streifen deren Spalten simultan permutieren. Wir wählen oBdA in einem der Blöcke, beispielsweise im obersten, den betreffenden Blockoperator $h_j° \in S_3°$ und repräsentieren damit die Wirkung von h° auf die Spalten von VS_j. Da der lokale Operator $h° \in T°$ auf drei im Raster nebeneinander stehende Vertikalstreifen operiert, beschreiben wir den Operator $h° \in T°$ durchs Tripel $\overline{h°} = (h_1°, h_2°, h_3°)$, wobei $h_j° \in S_3°$ die Einschränkung von h° auf einen der Blöcke des Streifens VS_j für $j \in \{1,2,3\}$ ist. Ein Operator $h° \in T°$, der nur in einem der drei vertikalen Streifen deren Spalten permutiert und alle Spalten in den anderen zwei Streifen fest lässt, wird als Tripel dem entsprechend $\overline{h_1°} = (h_1°, 1°, 1°)$, $\overline{h_2°} = (1°, h_2°, 1°)$, $\overline{h_3°} = (1°, 1°, h_2°)$ geschrieben und deren Verkettung in T somit
$\overline{h°} = h_1°, h_2°, h_3°) = (h_1°, 1°, 1°) \cdot (1°, h_2°, 1°) \cdot (1°, 1°, h_2°)$.
Dem gemäß ist T° ein direktes Produkt $T_1° \text{ x } T_2° \text{ x } T_3°$, wobei $T_1°$, $T_2°$, $T_3°$ zur Blockgruppe $S_3°$ isomorphe Untergruppen in T° sind, deren Operatoren nur Spalten in einem der Vertikalstreifen permutieren. Die Elemente $g \in T$ und $h° \in T°$ kommutieren. Verkettet durch Hintereinanderausführung erzeugen sie als direktes Produkt die **lokale Sudokugruppe T* = TxT° .**

Anhand der Tripel $\bar{g}$ und $\overline{h°}$ ergibt sich die **Operatormatrix**

$$\bar{g}\cdot\overline{h^\circ} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \cdot (h_1^\circ, h_2^\circ, h_3^\circ) = \begin{pmatrix} g_1\cdot h_1^\circ & g_1\cdot h_2^\circ & g_1\cdot h_3^\circ \\ g_2\cdot h_1^\circ & g_2\cdot h_2^\circ & g_2\cdot h_3^\circ \\ g_3\cdot h_1^\circ & g_3\cdot h_2^\circ & g_3\cdot h_3^\circ \end{pmatrix} \text{ von } w = g\cdot h^\circ \in T x T^\circ = T^* .$$

Das Bild w(A) eines Sudokus $A=(a_{ij})$ unter $w = g\cdot h^\circ = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \cdot h_1^\circ\cdot h_2^\circ\cdot h_3^\circ$ lässt sich damit leicht bilden:

$$w\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} g_1\cdot h_1^\circ a_{1,1} & g_1\cdot h_2^\circ a_{1,2} & g_1\cdot h_3^\circ a_{1,3} \\ g_2\cdot h_1^\circ a_{2,1} & g_2\cdot h_2^\circ a_{2,2} & g_2\cdot h_3^\circ a_{2,3} \\ g_3\cdot h_1^\circ a_{3,1} & g_3\cdot h_2^\circ a_{3,2} & g_3\cdot h_3^\circ a_{3,3} \end{pmatrix} .$$

Ein Element $w \in T^* = TxT^\circ = T_1 \times T_2 \times T_3 \times T_1^\circ \times T_2^\circ \times T_3^\circ$ schreiben wir allgemein
$w = g \cdot h^\circ = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \cdot h_1^\circ\cdot h_2^\circ\cdot h_3^\circ$, wobei $g_i \in S_3$ und $h_j^\circ \in S_3^\circ$ für i, j∈{1,2,3} .
Die Faktoren Ti und Tj° der Gruppen $T=T_1xT_2xT_3$ und $T^\circ=T_1^\circ xT_2^\circ xT_3^\circ$ sind alle zur symmetrischen Gruppe S_3 isomorph. Die Gruppenordnung ist demnach $\#T^*= 6^6 = 46\,656$.

Globale Operatoren

Ein Operator $\varphi\in G$ heißt **rein global**, wenn er die Streifen von $A\in X$ als Ganzes bewegt und dabei alle Zeilen bzw. Spalten der Streifen in der Position innerhalb ihres Streifen belässt.
φ bewirkt also nur Permutationen der Streifen als Ganzes mit all seinen Teilen.
Die Hintereinanderausführung solcher Operatoren ist wieder rein global.
Zusammengenommen bilden sie eine Untergruppe H* in G.
Die Operatoren von H* permutieren simultan die Blöcke eines Streifens und lassen dabei alle Zeilen und Spalten der Blöcke in ihrer Position. So besehen operieren sie auf einer 3x3-Matrix von Blöcken und lassen sich als Blockoperatoren ansehen. Demnach gibt es in der Gruppe H* analog zur kleinen Blockgruppe Γ_0 Untergruppen H und H° .
Es gibt auch einen Transponierer t_B . Für ihn gilt nicht $A\in X \Rightarrow t_B(A)\in X$., denn t_B zerreißt die Zeilen und Spalten eines Sudokus A. Damit ist t_B keine zulässige Transformation.

Die Operatoren von H permutieren nur horizontale Streifen, die von H° nur vertikale Streifen. Anhand der Streifennummern notieren wir die Permutationen durch Zyklen .
Die Menge der Permutationen der horizontalen Streifen HS_i , i∈{1,2,3}, schreiben wir
H = {1, σ=(123), $\sigma\sigma$=(321), ρ_1=(23), ρ_2=(13), ρ_3=(12)} und
die Menge der Permutationen der vertikalen Streifen VS_j , j∈{1,2,3},
H°= {1, σ°=(123), $\sigma^\circ\sigma^\circ$=(321), ρ_1°=(23), ρ_2°=(13), ρ_3°=(12)}.
Die Notation entspricht der für die Blockgruppe benutzten Terminologie und beschreibt mit dem hochgestellten Zeichen ° wie dort nun einen Isomorphismus zwischen dem Duplikat H der Gruppe S_3 und seinem Pendant H°, auch ein Duplikat der S_3° .
Für $\eta\in H$ ist $\eta^\circ\in H^\circ$ und $(\eta^\circ)^\circ = \eta\in H$. Es wird kurz $\eta^{\circ\circ}= \eta$ gesetzt .
Für die Elemente von H gelten die Gleichungen der S_3 , insbesondere also
$\sigma\cdot\sigma\cdot\sigma =1$, $\sigma\cdot\sigma\sigma =1$, $\rho_i \cdot \rho_i =1$, $\sigma\cdot \rho_i = \rho_i \cdot\sigma\sigma$, i∈{1,2,3},
und isomorph dazu für die Elemente von H° die Gleichungen
$\sigma^\circ\cdot\sigma^\circ\cdot\sigma^\circ =1$, $\sigma^\circ\cdot\sigma\sigma^\circ =1$, $\rho_i^\circ\cdot \rho_i^\circ=1$, $\sigma^\circ\cdot \rho_i^\circ = \rho_i^\circ\cdot\sigma\sigma^\circ$.
Die Elemente $\theta\in H$ kommutieren mit den Elementen $\eta^\circ\in H^\circ$.
Verkettet durch Hintereinanderausführung erzeugen sie als direktes Produkt die
globale Streifengruppe H* = H x H° .
Die Gruppen H und H° sind isomorph zur S_3 . Die Gruppenordnung von H* ist $\#H^* = 6^2 =36$.

Kleine Sudokugruppe G_0

Das Erzeugnis G_0 = [T, T°, H, H°] ist eine Untergruppe der Sudokugruppe G.
Da die Elemente $g\in T$ horizontale Zeilen, hingegen die Element $\eta^\circ\in H^\circ$ vertikale Streifen permutieren, ist die Verkettung von Operatoren $g\in T$ und $\eta^\circ\in H^\circ$ vertauschbar.
Aus analogem Grunde ist die Verkettung von Operatoren $h^\circ\in T^\circ$ und $\eta\in H$ vertauschbar.
Das Erzeugnis G_0 =[T, T°, H, H°] enthält demnach direkte Produkte TxH° und T°xH .

Bei der Verkettung der Operatoren $g = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \in T_1xT_2xT_3 = T$ mit Operatoren $\eta\in H$ werden durch den globalen Operator η die horizontalen Streifen auf dem Raster bewegt. Die Zeilen eines Streifens behalten dabei ihre Position im Streifen.

Die Anordnung der Blockoperatoren g_1, g_2, g_3 in $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$ ist dem entsprechend zu ändern. Lesen wir die Hintereinanderausführung der Operatoren von rechts nach links, sieht man, dass folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}\cdot\sigma = \sigma\cdot\begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \\ g_1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}\cdot\sigma\sigma = \sigma\sigma\cdot\begin{pmatrix} g_3 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}\cdot\rho_1 = \rho_1\cdot\begin{pmatrix} g_1 \\ g_3 \\ g_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}\cdot\rho_2 = \rho_2\cdot\begin{pmatrix} g_3 \\ g_2 \\ g_1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}\cdot\rho_3 = \rho_3\cdot\begin{pmatrix} g_2 \\ g_1 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

Die Permutation der Komponenten im Tripel $\bar{g}$ und damit die der Faktoren in $g = g_1\cdot g_2\cdot g_3$ ist invers zur Permutation der horizontalen Streifen durch den Operators $\eta\in H$.
Das von $g\in T$ und $\eta\in H$ erzeugte semidirekte Produkt $T\otimes H$ ist eine Untergruppe in G_0.

Analoges gilt bei der Verkettung von Operatoren $h°\in T°$ mit Operatoren $\eta°\in H°$.
Bei der Verkettung von $h° = h_1°\cdot h_2°\cdot h_3° \in T_1° \times T_2° \times T_3° = T°$ mit $\eta°\in H°$ werden durch den globalen Operator $\eta°$ die vertikalen Streifen im Raster bewegt und dem entsprechend ist die Anordnung von $h_1°, h_2°, h_3°$ in $\overline{h°} = (h_1°, h_2°, h_3°)$ alias im Produkt $h° = h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°$ zu ändern. Wie zuvor sieht man:
$h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\sigma° = \sigma°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot h_1°$, $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\sigma\sigma° = \sigma\sigma°\cdot h_3°\cdot h_1°\cdot h_2°$,
$h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\rho_1° = \rho_1°\cdot h_1°\cdot h_3°\cdot h_2°$, $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\rho_2° = \rho_2°\cdot h_3°\cdot h_2°\cdot h_1°$, $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\rho_3° = \rho_3°\cdot h_2°\cdot h_1°\cdot h_3°$.

Die Permutation der Position der Komponenten im Tripel $\overline{h°}$ und die der Faktoren in $h°=h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°$ ist invers zur Permutation der vertikalen Streifen durch den Operators $\eta°\in H°$.
Das von $h°\in T°$ und $\eta°\in H°$ erzeugte semidirekte Produkt $T°\otimes H°$ ist eine Untergruppe in G_0.

Wir betrachten $G_0 = [T, T°, H, H°]$ als Erzeugnis von $T^*=T\times T°$ und $H^*=H\times H°$. Man erhält das semidirekte Produkt $\mathbf{G_0 = T^*\otimes H^* = T_1 \times T_2 \times T_3 \times T_1° \times T_2° \times T_3° \otimes H\times H°}$.
Ein Element $\varphi\in Go$ schreiben wir allgemein $\varphi = g\cdot h°\cdot \theta\cdot\eta° = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot \theta\cdot\eta°$, wobei $g_i\in S_3$, $h_j°\in S_3°$ für $i,j\in\{1,2,3\}$ sowie $\theta\in H$ und $\eta°\in H°$.
Die Gruppenordnung ist $\#G_0 = \#T^*\cdot \#H^* = 6^8 = 1\,679\,616$.

Sudokugruppe G

Eine zulässige globale Operationen für $A\in X$ ist der Transponierer τ für 9x9-Matrizen.
Das einem Sudoku $A=(a_{i,j,k,L}) \in X$ zugeordnete $\tau(A)$ ist ein an der Hauptdiagonalen gespiegeltes Bild von A . Man sieht leicht, dass $\tau(A) = t\cdot t_B(A)$, wobei t die Elemente in den Blöcken und t_B die Blöcke in der Matrix A transponiert.
Im ersten Schritt wird A gemäß der Blockstruktur anhand von t_B von der Form $(a_{i,j})$ in die Form $(a_{j,i})$ gebracht und anschließend wird jeder Block mittels $t\in\Gamma$ an seiner Hauptdiagonalen gespiegelt.
Die von t_B zerrissenen Zeilen und Spalten flickt der Blockoperator t wieder zusammen. Die Abbildung durch $\tau = t\cdot t_B$ ergibt explizit also

$$\tau(A) = t\cdot t_B(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}) = t(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} ta_{1,1} & ta_{2,1} & ta_{3,1} \\ ta_{1,2} & ta_{2,2} & ta_{2,3} \\ ta_{1,3} & ta_{2,3} & ta_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Die Operatoren der kleinen Sudokugruppe G_o zusammen mit dem Transponierer τ erzeugen ein semidirektes Produkt. Man erhält die **Sudokugruppe** $\mathbf{G = G_o\otimes\{1, \tau\}}$.
Ein Element $\varphi\in G = T\times T°\otimes H\times H°\otimes\{1,\tau\}$ schreiben wir allgemein $\varphi = g\cdot h°\cdot\theta\cdot\eta°\cdot\delta$, wobei $g\in T$, $h°\in T°$, $\theta\in H$, $\eta°\in H°$, $\delta\in\{1,\tau\}$. Die Gruppenordnung ist $n = \#G = \#Go\cdot\#\{1,\tau\} = 6^8\cdot 2 = 3359232$.

Dualität in G

Die Verkettung von $\tau = t\cdot t_B$ mit den golbalen Operatoren $\theta\in H$ und $\eta°\in H°$ ergibt $\tau\cdot\theta = \theta°$, $\tau\cdot\eta° = \eta$ sowie allgemein $\tau\cdot\theta\cdot\eta° = \theta°\cdot\eta$, jeweils bewirkt durch den Faktor t_B in τ .
Die Verkettung von τ mit den Repräsentanten $g_i\cdot h_j°\in\Gamma_o$ im Block $a_{i,j}$ eines lokalen Operators $w = g\cdot h°\in T\times T°$ ergibt $t\cdot g_i = g_i°$, $t\cdot h_j° = h_j$ sowie allgemein $t\cdot g_i\cdot h_j° = g_i°\cdot h_j$ für $i,j\in\{1,2,3\}$, hier nun stets durch den Faktor t in $\tau = t\cdot t_B$ bewirkt .

Im semidirekten Produkt $G_0 = TxT°\otimes HxH°$ tauscht der Transponierer $\tau = t \cdot t_B$ in kanonischer Weise die Elemente von H gegen jene von H° als auch die von T gegen jene von T°, es gilt allgemein $\tau \cdot g \cdot h° \cdot \theta \cdot \eta° = h \cdot g° \cdot \eta \cdot \theta° \cdot \tau$. Damit ist τ ein **Dualisator** für die Gruppe $G_o \subseteq G$.

Diagonalen von $T=T_1xT_2xT_3$, $T°=T_1°xT_2°xT_3°$, $H^*=HxH°$

Die speziellen lokalen Operatoren s·s·s, ss·ss·ss und $r_i \cdot r_i \cdot r_i$ für $i \in\{1,2,3\}$ aus T als auch die Operatoren s°·s°·s°, ss°·ss°·ss° und $r_j° \cdot r_j° \cdot r_j°$ für $j \in\{1,2,3\}$ aus T° kommutieren auf Grund der Gleichheit der jeweils drei Faktoren mit allen globalen Operatoren. Zusammen mit der identischen Abbildung id (=1) bilden sie, jede Sorte für sich genommen, Untergruppen D in T bzw. D° in T°.
Man nennt D die **Diagonale von T** und analog D° die **Diagonale von T°**.
Anhand der Isomorphismen der direkten Faktoren von T zu S_3 und von T° zu $S_3°$ sind diese Diagonalen kanonisch gebildet. Wir notieren die Elemente der Diagonalen kurz durch fetten Druck der betreffenden Buchstaben, also beispielsweise **s** = s·s·s, **s°** =s°·s°·s°, **ss** = ss·ss·ss, **ss°** = ss°·ss°·ss° .
Die lokalen Operatoren s·s·s· s°·s°·s° und ss·ss·ss· ss°·ss°·ss° aus T*=TxT° sind Beispiele für Elemente der kanonisch gebildeten Diagonalen des Produkts $T_1xT_2xT_3\ xT_1°xT_2°xT_3°$.
Ihre Elemente und darüber hinaus alle Produkte $d \cdot d°$ mit $d \in D$, $d° \in D°$ kommutieren mit allen globalen Operatoren.
Die kanonisch gebildete **Diagonale von H*=HxH°** wird gebildet aus den Operatoren der Menge $H'=\{1, \sigma \cdot \sigma°, \sigma\sigma° \cdot \sigma\sigma°, \rho_1 \cdot \rho_1°, \rho_2 \cdot \rho_2°, \rho_3 \cdot \rho_3°\} \subseteq H^*=HxH°$. Diese Operatoren bewirken das gleiche vertikal und horizontal auf den Streifen, permutieren also die Blöcke in der Hauptdiagonalen, also auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $A_{3,3}$ und simultan dazu jeweils jene Blöcke, die schräg aneinander gereiht parallel zur Hauptdiagonale (mod 3) liegen, also auf den Feldern $A_{1,2}$, $A_{2,3}$, $A_{3,1}$ oder auf den Feldern $A_{1,3}$, $A_{2,1}$, $A_{3,2}$. Geometrisch betrachtet bewirkt $\sigma \cdot \sigma°$ eine zyklische Verschiebung mod 3 aller Blöcke von links oben nach rechts unten um eine Position und $\rho_2 \cdot \rho_2°$ bewirkt „a la Punktspiegelung“ am Mittelblock auf dem Rasterfeld $A_{2,2}$ einen Tausch der sich gegenüber liegenden Blöcke am Rande.
Zufolge der Isomorphien zur S_3 ist #D = #D° = #H' =6 .

Die Blockdiagonalgruppe

Eine besondere Rolle spielen in der Blockstruktur eines Sudokus die Blöcke $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$ auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $A_{3,3}$ der Hauptdiagonalen. Dieser Teil *K* eines Sudokus wird **Blockdiagonale** genannt. Die Menge aller Operatoren $\varphi \in G$, die *K* in sich überführen, bilden eine Untergruppe K in G, sie ist der Stabilisator von *K* in G, jedoch kein Normalteiler von G, und wird **Blockdiagonalgruppe K** von *K* in G genannt.

Bestimmung von K

Als lokale Gruppe ist $T^* \subseteq K$. Die Operatoren aus der Diagonalen $H'=\{1, \sigma \cdot \sigma°, \sigma\sigma° \cdot \sigma\sigma°, \rho_1 \cdot \rho_1°, \rho_2 \cdot \rho_2°, \rho_3 \cdot \rho_3°\} \subseteq H^* =HxH°$ bewirken das gleiche vertikal und horizontal auf den Streifen, permutieren also die Blöcke der Blockdiagonalen. Da diese Aktion treu ist, werden alle 6 Permutationen der Blöcke erreicht.
Somit ist die Diagonale $H' \subseteq K$.
Offenbar gehört auch der Transponierer τ zur Blockdiagonalgruppe K.
H' und τ kommutieren, beispielsweise ist $\tau \cdot \sigma \cdot \sigma° = \sigma° \cdot \sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \sigma° \cdot \tau$.
Die lokale Gruppe T* ist Normalteiler in G, insbesondere also in K, somit gilt das
Lemma
Das Erzeugnis $K=[T^*,H',\{1,\tau\}]$ ist semidirektes Produkt $K= T^*\otimes(H'x\{1,\tau\})$
mit den Konjugationsregeln (a) $g \cdot h° \cdot \tau = \tau \cdot g° \cdot h$

(b)
$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° \cdot \sigma \cdot \sigma° = \sigma \cdot \sigma° \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_1 \cdot h_2° \cdot h_3° \cdot h_1°$$
$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° \cdot \sigma\sigma \cdot \sigma\sigma° = \sigma\sigma \cdot \sigma\sigma° \cdot g_3 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot h_3° \cdot h_1° \cdot h_2°$$
$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° \cdot \rho_1 \cdot \rho_1° = \rho_1 \cdot \rho_1° \cdot g_1 \cdot g_3 \cdot g_2 \cdot h_1° \cdot h_3° \cdot h_2°$$
$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° \cdot \rho_2 \cdot \rho_2° = \rho_2 \cdot \rho_2° \cdot g_3 \cdot g_3 \cdot g_1 \cdot h_3° \cdot h_3° \cdot h_1°$$
$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° \cdot \rho_3 \cdot \rho_3° = \rho_3 \cdot \rho_3° \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_3 \cdot h_2° \cdot h_1° \cdot h_3°$$

K ist nicht fixpunktfrei auf X . Die Ordnung ist $\#K = 2 \cdot 6^7$.
Die Wirkungen der Operatoren $\sigma \cdot \sigma°$ und $\rho_2 \cdot \rho_2°$ werden häufig explizit benötigt.
Geometrisch bedeutet die Transformation durch $\sigma \cdot \sigma°$ eine zyklische Verschiebung aller Blöcke um eine Position diagonal von links oben nach rechts unten und die mit dem Operator $\rho_2 \cdot \rho_2°$ eine Punktspiegelung am mittleren Block a_{22}. Explizit notiert hat man

$$\sigma \cdot \sigma° \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} , \quad \rho_2 \cdot \rho_2° \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{3,3} & a_{1,3} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{3,2} & a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} .$$

§2. Zifferngruppe, Mischgruppen, Anzahl aller Sudoukus

Diagonalblocknormierte Sudokus

Eine wesentliche Rolle bei computergestützten Anzahlbestimmungen in der Menge X aller Sudokus spielen diagonalblocknormierte Sudokus, wir sagen kurz **dbn-Sudokus**. Diagonalblocknormierte Sudokus können als Basis einer Parametrisierung aller Sudokus dienen.

Ein Sudoku $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ ist ein e-normiertes Sudoku, wenn, $a_{1,1} = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Ein e-normiertes Sudoku hat diagonalblocknormierte Gestalt, wenn in den übrigen zwei Blöcken $a_{2,2}$ und $a_{3,3}$ der Hauptdiagonalen

1) die Raster-Positionen $A_{2,2,1,1}$, $A_{3,3,1,1}$ mit Ziffer 1 belegt sind
2) die Ziffer in Raster-Position $A_{2,2,2,2}$ kleiner ist als die Ziffern in den Raster-Positionen $A_{2,2,2,3}$, $A_{2,2,3,2}$ $A_{2,2,3,3}$
3) die Ziffer in Raster-Position $A_{3,3,2,2}$ kleiner ist als die Ziffern in den Raster-Positionen $A_{3,3,2,3}$, $A_{3,3,3,2}$ $A_{3,3,3,3}$.

Durch Operatoren aus $T_{23}^* = T_2 x T_2^\circ$ x $T_3 x T_3^\circ$, also Permutation von Zeilen und Spalten innerhalb der Streifen HS_2,VS_2,HS_3,VS_3, kann ein e-normiertes Sudoku stets in diagonalblocknormierte Gestalt transformiert werden.

Zifferngruppe und Totale Mischgruppe

Die Operatoren $\varphi \in G$ sind nicht die einzigen Operatoren, die Sudokus in Sudokus transformieren, also Abbildungen von X derart, dass $A \in X \Rightarrow \varphi(A) \in X$.
Durch eine Permutation der Ziffern aus {1,2,3,...,9} nach ihrem Eintrag in die 81 Leerstellen des Rasters gemäß den Sudokubedingungen zur Erstellung eines Sudokus $A \in X$ wird das Sudoku A in eine Matrix $\pi(A)$ transformiert, die offenbar auch den Sudokubedingungen genügt. Diese **Ziffernpermutationen** eines Sudoku A bilden bezüglich ihrer Hintereinanderausführung eine zur symmetrischen Gruppe S_9 isomorphe Gruppe Z . Wir nennen sie die **Zifferngruppe Z** von X.
Sie hat die Ordnung $\#Z = \#S_9 = 9!$.
Die Gruppe Z operiert neben der Sudokugruppe G auf der Menge X mit Bildern in X. Jeder Operator $\pi \in Z$ führt Zeilen, Spalten sowie Blöcke in sich über und seine simultan in allen 9 Blöcken bewirkte Ziffernpermutation ist eindeutig bestimmt durch die Ziffernpermutation in einem der Blöcke, etwa im Block $a_{1,1}$. Durch die Permutation der Ziffern im Block $a_{1,1}$ lässt sich also jedes $\pi \in Z$ als Element der S_9 notieren. Bequem ist das bei e-normierten Sudokus, also wenn $a_{1,1}$=e, der Normblock.
Nicht e-normierte Sudokus A lassen sich stets durch ein $\pi \in Z$ in e-normierte Gestalt transformieren. Es gibt stets genau einen Operator $\pi \in Z$, dessen Einschränkung auf Block $a_{1,1}$ von A die Normierung $\pi(a_{1,1}) = e$ leistet.
Das Erzeugnis $G^* =[Z, G]$ der Operatoren $\pi \in Z$ und $\varphi \in G$ bei deren Hintereinanderausführung nennen wir **Totale Mischgruppe** oder kurz **Totalgruppe** von X .
Die Hintereinanderausführung der Permutationen $\pi \in Z$ mit den $\varphi \in G$ ist offenbar vertauschbar.
Zudem gilt: Zwei Produkte $\pi \cdot \varphi$ und $\pi' \cdot \varphi'$ aus dem Erzeugnis [Z,G] haben genau dann gleiche Wirkung auf X, wenn sie in beiden Faktoren übereinstimmen.
Intuitiv ist dies klar. Auf einen Beweis wird hier verzichtet.
Die Totalgruppe ist somit ein direktes Produkt $G^* = Z \times G$.
Ihre Elementanzahl ist $\#G^* = \#Z \cdot \#G = 9! \cdot 6^8 \cdot 2$.

Mischgruppe M

Die Permutationen der Zifferngruppe Z verkettet mit den Operatoren von $T_{23}^* = T_2 x T_2^\circ$ x $T_3 x T_3^\circ$, also jenen Transformation, mit denen ein e-normiertes Sudokus $A \in X$ in dbn-Form gebracht werden kann, bilden die kleine Mischgruppe $M = Z \times T_{23}^*$
Mit einem Operator aus der Zifferngruppe Z kann jedes $A \in X$ in e-normierte Gestalt transformiert werden und mit denen der Gruppe T_{23}^*, die nur Zeilen und Spalten innerhalb der Streifen HS_2 ,VS_2 HS_3,VS_3 permutiert, kann jedes e-normierte Sudoku auf dbn-Gestalt gebracht werden.
Die Elementanzahl von M ist $\#M= \cdot\#Z \cdot \#T_{23}^* = 9! \cdot 6^4 = 470\ 292\ 480$.

Die Bildung von M ist generell betrachtet nicht kanonisch. Es könnte eine Mischgruppe auch mit anderen Indizes gebildet werden. Für e-normierte Sudokus $A \in X$ mit der Auszeichnung der Block-Position $A_{1,1}$ im Rasters hat die Bildung jedoch kanonischen Charakter.
Für Zählprozesse bedeutsam ist folgendes

Lemma: $M = Z \times T_{23}^*$ operiert fixpunktfrei auf X,
d.h. $\varphi A \neq A$ für alle $\varphi \in M$, sofern $\varphi \neq 1$.

Beweis. Angenommen, ein Operator $\varphi = \pi \cdot w \in M$ mit $\pi \in Z$ und $w \in T_{23}^*$ hätte einen Fixpunkt A in X, es wäre also $\varphi A = A$. Die Einschränkung von $\varphi = \pi \cdot w$ auf die Blöcke $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$ der Blockdiagonalen von A ergäbe $\varphi a_{1,1} = \pi \cdot w a_{1,1} = \pi a_{1,1} = a_{1,1}$, denn $w a_{1,1} = 1$, also $\pi = 1$. Zudem folgt mit $\pi = 1$nun $w = 1$ aus der Annahme $\pi w a_{2,2} = a_{2,2}$ und $\pi w a_{3,3} = a_{3,3}$. Es wäre also $\varphi = 1$ entgegen der Voraussetzung im Lemma.

Die etwas größere Mischgruppe $M^* = Z \times T^*$ mit $T^* = T_1 \times T_2 \times T_3 \times T_1° \times T_2° \times T_3°$ als Faktor hat Fixpunkte. Das ergibt sich aus dem Vergleich der Elementanzahl $\#M^* = 9! \cdot 6^6$ mit der von B.Felgenhauer/F.Javis [5] genannten Elementanzahl für die Menge X aller Sudokus:
$N = 9! \cdot 3^4 \cdot 2^{13} \cdot p = 6670\,903752\,021072\,936960$, wobei $p = 27704\,267971$ prim.
Würde die Mischgruppe M^* auf X fixpunktfrei operieren, müsste $\#M^* = 9! \cdot 6^6 = 9! \cdot 3^6 \cdot 2^6$ Teiler von N sein. Das aber ist offenbar nicht der Fall.

Es gibt Operatoren in der totalen Gruppe $G^* = Z \times G$, die nicht in G liegen, und dazu Sudokus, die der Operator auf sich abbildet.

Beispiel

Der Operator $\pi \cdot \tau \in Z \times G$, wobei $\pi \in Z$ die Permutation, die $\pi(te) = e$ leistet, t der Transponierer aus Γ,

bildet $D = \begin{pmatrix} e & s \cdot s° e & ss \cdot ss° e \\ s \cdot s° e & ss \cdot ss° e & e \\ ss \cdot ss° e & e & s \cdot s° e \end{pmatrix}$ auf sich ab.

In Zyklendarstellung ist $\pi = (24)(37)(68)$. Man kontrolliert leicht, dass D die Sudokubedingungen erfüllt und dass die Fixelement-Gleichung $\omega \cdot \tau\,(D) = D$ erfüllt wird, explizit also

$$\pi \cdot \tau\left(\begin{pmatrix} e & s \cdot s° e & ss \cdot ss° e \\ s \cdot s° e & ss \cdot ss° e & e \\ ss \cdot ss° e & e & s \cdot s° e \end{pmatrix}\right) = \pi\left(\begin{pmatrix} te & s \cdot s° te & ss \cdot ss° te \\ s \cdot s° te & ss \cdot ss° te & te \\ ss \cdot ss° te & te & s \cdot s° te \end{pmatrix}\right).$$

Anhand der Sudokus, die in §5 betrachtetet werden, sieht man, dass $D = \rho_1 U_2$, wobei U_2 eines der vier möglichen diagonalblocknormierten „Superfixe“ ist.

M-Bahnen diagonalblocknormierter Sudokus, Zählergebnis

Die diagonalblocknormierte Gestalt ist neben der Vorgabe $a_{1,1} = e$ durch die Bedingungen der Leerstellenbelegung in den Blöcken $a_{2,2}$, $a_{3,3}$ gekennzeichnet. In jedem der Blöcken $a_{2,2}$, $a_{3,3}$ gibt es $8!/4 = 10080$ Möglichkeiten für die Belegung dieser Plätze, insgesamt also $(8!/4)^2 = 101\,606400$ Möglichkeiten. Jede dieser Belegungen liefert zusammen mit der Vorgabe $a_{1,1} = e$ ein in der Hauptdiagonalen gelagertes Tripel $(e, a_{2,2}, a_{3,3})$, aus dem durch **Fortsetzung**, d.h. Belegung der jeweils 9 Leerstellen in den Blöcken $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{2,3}$, $A_{2,1}$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$ des Rasters gemäß den Sudokubedingungen, ein diagonalblocknormiertes Sudoku gebildet werden kann. Zur Menge X_{dn} aller diagonalblocknormierten Sudokus öffnet sich damit ein konstruktiver Zugang.
Die Anzahl der Fortsetzungsmöglichkeiten bezüglich einer Vorgabe $(a_{2,2}, a_{3,3})$ schreiben wir $N(a_{2,2}, a_{3,3})$. Das Blockpaar ist sozusagen die „Hausnummer“ und $N(a_{2,2}, a_{3,3})$ die Zahl der diagonalblocknormierten Sudokus, die in diesem Hause „leben“.
Die Summe aller Zahlen $N(a_{2,2}, a_{3,3})$, im Sprachbild also die Summe der Bewohner in den 101 606400 Häusern, liefert die Zahl aller diagonalblocknormierten Sudokus.
A.Schönhage hat (siehe [1]) diese Anzahl mit seinem Homecomputer (Pentium-4) bestimmt, also die Mächtigkeit $nn_0 = \#X_{dn}$ der Menge X_{dn} aller diagonalblocknormierten Sudokus, dabei zugleich feststellend, dass es zu jeder Vorgabe $(a_{2,2}, a_{3,3})$ mindestens eine Fortsetzung zum Sudoku gibt, also jedes $N(a_{2,2}, a_{3,3}) > 0$ ist, im Sprachbild „kein Haus leer steht“.
Derartiges geht schwerlich auf direktem Wege. Die Rechenzeit wäre gewaltig.
Zur Minderung der Rechenzeit entwarf er ein ausgeklügeltes Programm und zerlegte die 101 606400 Vorgaben schrittweise in schließlich nur noch 237083 Bereiche, jeweils Vorgaben zusammenfassend, die zur gleichen Fortsetzungszahl $N(a_{2,2}, a_{3,3})$ führten, im Sprachbild bildete er also Bezirke, deren Häuser gleich viele Bewohner (Sudokus) hatten.
Er zählte dann die Anzahl der Häuser eines Bereichs und nur noch in einem der Häuser die Anzahl der „einwohnenden“ Sudokus. Anstelle von 101 606400 Hausnummern hatte er nur noch bei 237083 Hausnummern nach der Bewohnerzahl zu fragen. Das kürzte die Rechenzeit seines Homecomputers aufs erträgliche Maß von 60 Stunden.
Er zählte $nn_0 = 2^9 \cdot p = 14\,184585\,201152$ dbn-Sudokus, wobei $p = 27704\,267971$ die bereits bekannte Primzahl.

Mit diesem Zählergebnis bestätigte er die Zahl $N = 9!\cdot 3^4\cdot 2^{13}\cdot p$ aller Sudokus .
Denn die Mischgruppe $M = Z \times T_{23}^*$ operiert mit ihren $\#M = 9! \cdot 6^4$ Elementen auf der Menge X aller Sudokus fixpunktfrei. Zudem kann jedes Sudoku $A\in X$ mittels eines dbn-Sudokus und eines Operators von M erzeugt werden. Mit den dbn-Sudokus als Leader von M-Bahnen ergibt sich
$N = 9!\cdot 6^4\cdot nn_0 = 9!\cdot 3^4\cdot 2^{13}\cdot p = 6670\ 903752\ 021072\ 936960$.

§3. Fixsudokus, Typen der Fixoperatoren

Fixsudoku-Definition

Ein Sudoku A wird **Fixsudoku** genannt, wenn es einen Operator $\varphi\neq 1$ in der Sudokugruppe G gibt, der das Sudoku A auf sich abbildet: $A\in X$ ist ein **Fixsudoku** $\Leftrightarrow$ Ex. $\varphi\in G$, $\varphi\neq 1$, derart, dass $\varphi(A)=A$.
Solch Operator $\varphi\in G = T^*\otimes H^*\otimes\{1,\tau\}$ wird **Fixoperator** von A genannt. Zusammen mit dem Operator id=1 bilden die Fixoperatoren bezüglich der Hintereinanderausführung die **Fixgruppe** $F_G(A)$.
Folgendes ist zu beachten:
Die Sudokugruppe G operiert auf den Positionen des Sudokus im Raster, nicht wie die Zifferngruppe Z auf die Ziffern eines Sudokus, also die Einträge in die Plätze des Rasters. Der oben im Beispiel fürs Sudoku D gezeigte Sachverhalt begründet nicht, dass D ein Fixsudoku ist, denn $\pi\cdot\tau\notin G$.
Für D muss ein $\varphi\in G$, $\varphi\neq 1$, angegeben sein, sodass $\varphi(D)=D$ gilt. Nun gilt für D jedoch $\sigma\cdot\sigma\sigma°D=D$.
Damit ist dies Sudoku D im definierten Sinne ein Fixsuodoku.

Bahnen von Untergruppen

Zu jedem $A\in X$ wird bei der Operation einer Untergruppe $U\subseteq G^*$ auf dem Raum X aller Sudokus die Teilmenge $U\_A = \{\varphi A \mid \varphi\in U\} \subseteq X$ erzeugt. Man nennt sie **U-Bahn** von A in X, das Sudoku A den **Leader** der Bahn und je zwei Elemente der Bahn **U-konjugiert.**
Die **Bahnlänge** #(U_A), also die Anzahl der Sudokus in solcher Bahn, kann gleich #U sein, aber auch kleiner. Im Fall der kürzeren Bahnlängen gibt es einen Operator $\varphi\neq 1$ aus U derart, dass $\varphi A = A$.
Wenn $U\subseteq G$, sind es Fixsudokus unter U.
Die Menge aller Operatoren aus U, die ein Sudoku A fest lassen, ist eine Untergruppe $F_U(A)$ von U und wird **U-Fixgruppe** von A genannt. $F_G(A)$ wird kurz **Fixgruppe von A** genannt und deren Elemente $\neq 1$ sind die **Fixoperatoren von A**.
Ein $A\in X$ wird **neutrales** Sudoku genannt, wenn es in der Sudokugruppe G keinen Operator $\varphi\neq 1$ gibt, der $\varphi A = A$ leistet. Nach Lemma 1 im Abschnitt „Typen der Fixsudokus“ liegt jeder Fixoperator aus G eines Sudokus A bereits in G_0, ein Sudoku ist also normal, wenn es in G_0 keinen Fixoperator für A gibt.
Eine Untergruppe $U\subseteq G^*$ operiert **fixpunktfrei** auf X, wenn sie keine Fixelemente hat, es also für keinen Operator $\varphi\neq 1$ aus U ein $A\in X$ gibt, derart, dass $\varphi A = A$.
Der trivialen Äquivalenz $\varphi(A) = A \Leftrightarrow \omega\cdot\varphi\cdot\omega^{-1}\cdot\omega A = \omega A$ für $\varphi\in U$, $\omega\in G$ entnimmt man:

- G-konjugierte A haben G-konjugierte U-Fixgruppen: $F_U(\omega A) = \omega F_U(\omega A)\ \omega^{-1}$ mit $\omega\in G$
- G-konjugierte Untergruppen U und $\omega U\omega^{-1}$ haben beide Fixpunkte oder sind beide fixpunktfrei
- Die Bahnen einer fixpunktfreien Untergruppe $U \subseteq G$ haben gleiche Länge #U und zerlegen die Menge X aller Sudokus in $n = \#X / \#U$ Klassen. Somit teilt die Ordnung #U einer fixpunktfreien Untergruppe $U \subseteq G$ die Anzahl #X .

Typen der Fixoperatoren

Für die Charakterisierung von Fixoperatoren bedeutsam sind die folgenden Lemmata.
Lemma 1: Jeder Operator $\varphi\in G=T^*\otimes H^*\otimes\{1,\tau\}$ der Form $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\theta\cdot\eta°\cdot\tau$ ist fixpunktfrei, d.h. jeder Fixoperator eines $A\in X$ liegt in G_0 .
Beweis.
Im Ansatz der Fixgleichung $\varphi A = A$ sei oBdA der Block $a_{1,1}$ des Sudokus A der Normblock e .
Man sieht, das Zwischenbild $e'=\theta\cdot\eta°\cdot\tau\ e$ von e unter dem Produkt $\theta\cdot\eta°\cdot\tau$ in der Darstellung von φ liegt nicht im gleichen Streifen wie das Urbild $e=a_{1,1}$, also im ersten horizontalen oder vertikalen Streifen,
denn neben oder unter dem Block $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ kann weder $\tau e=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$ noch ein solcher mit permutierten Zeilen oder Spalten liegen. Es gäbe einen Widerspruch zu den Sudokubedingungen.
Falls das Zwischenbild e’ auf einem der restlichen 4 Felder des Rasters liegt, wir nehmen beispielsweise an, der Block $e=a_{1,1}$ sei vom globalen Operator $\theta\cdot\eta° = \sigma\cdot\sigma°$ in φ aufs Feld $A_{2,2}$ bewegt.

Der Ansatz $\begin{pmatrix} g_1\cdot h_1° & g_1\cdot h_2° & g_1\cdot h_3° \\ g_2\cdot h_1° & g_2\cdot h_2° & g_2\cdot h_3° \\ g_3\cdot h_1° & g_3\cdot h_2° & g_3\cdot h_3° \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} ta_{3,3} & ta_{1,3} & ta_{2,3} \\ ta_{3,1} & ta_{1,1} & ta_{2,1} \\ ta_{3,2} & ta_{1,2} & ta_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ liefert dann

$g_1\cdot h_1°\cdot t\,a_{3,3} = a_{1,1}$, $g_2\cdot h_2°\cdot t\,a_{1,1} = a_{2,2}$, $g_3\cdot h_3°\cdot t\,a_{2,2} = a_{3,3}$. Daraus ergibt sich rekursiv zunächst $g_1\cdot h_1°\cdot t\cdot g_3\cdot h_3°\cdot t\cdot g_2\cdot h_2°\cdot t\,a_{1,1} = a_{1,1}$ und damit $g_1\cdot h_3\cdot g_2\cdot h_1°\cdot g_3°\cdot h_2°\cdot t = 1$, also $g_1\cdot h_3\cdot g_2\cdot h_1°\cdot g_3°\cdot h_2° = t$. Es wäre demnach $t\in G_0$ im Widerspruch zu $t\notin G$.
Analog führen Rechnungen mit den Ansätzen $\sigma\sigma\cdot\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma\sigma°$, $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$ für die globale Faktoren $\theta\cdot\eta°$ in φ zum Widerspruch.

Lemma 2: Jeder Operator $\varphi\in G_0$ der Form $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\rho_i\cdot\rho_j°$, wobei $i, j\in\{1,2,3\}$, ist fixpunktfrei, d.h. jeder Fixoperator eines $A\in X$ hat globale Faktoren aus der Menge $\{\sigma, \sigma\sigma\}$ oder $\{\sigma°, \sigma\sigma°\}$. Anders gesagt: Die Gruppen $P_{i,j} = T^*\otimes(\{1, \rho_i\}x\{1, \rho_j°\})$, $i,j\in\{1,2,3\}$, operieren im Sudokuraum X fixpunktfrei.

Beweis.
Die Untergruppen $P_{i,j} = T^*\otimes(\{1, \rho_i\}x\{1, \rho_j°\}) \subset T^*\otimes(HxH°)$ sind wegen der Isomorphie von H und H° zur S_3 und deren Gleichungen $s\cdot r_3\cdot ss = r_1 = ss\cdot r_2\cdot s$, $s\cdot r_1\cdot ss = r_2 = ss\cdot r_3\cdot s$, $s\cdot r_2\cdot ss = r_3 = ss\cdot r_1\cdot s$ konjugiert zu $P_{2,2}$. Beispielsweise ist $\sigma\cdot\rho_1\cdot\sigma\sigma = \rho_2$ und $\sigma°\cdot\rho_3\cdot\sigma\sigma° = \rho_2°$. Zudem ist T* Normalteiler in G_0.
Es genügt somit, den Beweis für $P_{2,2} = T^*\otimes(\{1, \rho_2\}x\{1, \rho_2°\})$ zu führen.
T* ist offenbar fixpunktfrei. Zu zeigen ist, dass für jedes $w\in T^*$ die Operatoren $w\cdot\rho_2$ und $w\cdot\rho_2\cdot\rho_2°$ fixpunktfrei sind. Der Fall $w\cdot\rho_2°$ ist zu $w\cdot\rho_2$ τ–konjugiert, kann also ignoriert werden.
a) Fall $\varphi = w\cdot\rho_2$.
Der globale Operator ρ_2 vertauscht im Sudoku A die Horizontalstreifen HS_1 und HS_3, lässt den mittleren Streifen HS_2 fest. Die Fixgleichung $g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\rho_2 A = A$ impliziert im mittleren Horizontalstreifen
$HS_2 = (g_2\cdot h_1° a_{2,1}, g_2\cdot h_2° a_{2,2}, g_2\cdot h_3° a_{2,3}) = (a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3})$, also ist $h_1° = h_2° = h_3° = 1$ und $g_2 = 1$.

Im mittleren Vertikalstreifen VS_2 soll $\begin{pmatrix} g_1 a_{3,1} \\ g_2 a_{2,2} \\ g_3 a_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 a_{1,2} \\ g_2 a_{2,2} \\ g_3 a_{3,1} \end{pmatrix}$ sein, also $g_1 a_{3,1} = g_1 a_{1,2}$ und damit $a_{3,1} = a_{1,2}$.

Solch Streifen widerspricht der Sudokueigenschaft.
b) Fall $\varphi = w\cdot\rho_2\cdot\rho_2°$.
Der globale Operator $\rho_2\cdot\rho_2°$ vertauscht die horizontalen Streifen HS_1 und HS_3 sowie die vertikalen Streifen VS_1, und VS_3 und damit auch alle Eckblöcke $a_{1,1}$, $a_{3,3}$ der Hauptdiagonalen als auch die Eckblöcke $a_{1,3}$ und $a_{3,1}$ der Nebendiagonalen. Nur der Mittelblock $a_{2,2}$ bleibt fest.
Die Fixgleichung $w A = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\rho_2\cdot\rho_2° A = A$ impliziert im mittleren Horizontalstreifen $(g_2\cdot h_1°\, b_{2,3}, g_2\cdot h_2°\, b_{2,2}, g_2\cdot h_3°\, b_{2,1}) = (b_{2,1}, b_{2,2}, b_{2,3})$, also ist $g_2 = 1$ und $h_2° = 1$.
Zudem muss nun $h_1° b_{2,3} = b_{2,1}$ und $h_3°\, b_{2,1} = b_{2,3}$ sein, wobei $h_3°$ und $h_1°$ Spaltenvertauschungen sind.
Solch ein Streifen HS_2 widerspricht der Sudokueigenschaft.

Lemma 3: Jeder Operator $\varphi\in G_0$ der Form $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\theta\cdot\rho_j°$ mit $\theta\in\{\sigma,\sigma\sigma\}$, $j\in\{1,2,3\}$, oder $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\rho_i\cdot\eta°$ mit $\eta°\in\{\sigma°,\sigma\sigma°\}$, $i\in\{1,2,3\}$, ist fixpunktfrei, d.h. der globale Faktor eines Fixoperators eines $A\in X$ ist stets ein Element aus der Menge $M_F = \{\sigma, \sigma\sigma, \sigma°, \sigma\sigma°, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma°, \sigma\cdot\sigma\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°\}$.

Beweis.
Die dritte Potenz von $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\theta\cdot\rho_j°$ mit $\theta\in\{\sigma,\sigma\sigma\}$, $j\in\{1,2,3\}$, hat die Form $\varphi^3 = w\cdot\rho_j \neq 1$, wobei $w\in T^*$. Nach Lemma 2 ist φ^3 fixpunktfrei. Aus dem Annahme $\varphi(A) = A$ folgt hingegen $\varphi^2(A) = \varphi(A) = A$ und damit $\varphi^3(A) = \varphi(A) = A$ im Widerspruch zur Fixpunktfreiheit $\varphi(A)\neq A$.
Analog ergibt sich, dass die dritte Potenz φ^3 eines Operators der Form $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\rho_i\cdot\eta°$ mit $\eta°\in\{\sigma°,\sigma\sigma°\}$, $j\in\{1,2,3\}$, fixpunktfrei ist und damit auch φ.

Zusammengenommen gibt es also nach Lemma (1) kein $A\in X$, sodass $\varphi\cdot\tau(A) = A$ mit $\varphi\in TxT°\otimes HxH°\cdot\tau$, τ der Transponierer, und nach den Lemmata (2),(3) liegt jeder Fixoperator in der Untergruppe $G_1 = T_1xT_2\, xT_3\, xT_1°xT_2°xT_3° \otimes\{1,\sigma,\sigma\sigma\}x\{1,\sigma°,\sigma\sigma°\}\subset G_0$. Jeder Fixoperator hat also die Form $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\theta\cdot\eta°$, wobei $\theta\in\{1,\sigma,\sigma\sigma\}$ und $\eta°\in\{1,\sigma°,\sigma\sigma°\}$ und $\theta\cdot\eta°\neq 1$.
Demnach gibt es unter Bezug auf die Art der globalen Faktoren $\theta\cdot\eta°$ im Fixoperator folgende Typen:
(1) σ–Typ, (2) $\sigma°$–Typ, (3) $\sigma\cdot\sigma°$–Typ, (4) $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ,
(1') $\sigma\sigma$–Typ, (2') $\sigma\sigma°$–Typ, (3') $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ, (4') $\sigma\sigma\cdot\sigma°$–Typ,
Die Korrespondenz zwischen den Gruppen von jeweils 4 Typen ist durchs Quadrieren bewirkt.

In einer Fixgruppe liegt mit einem Operator stets auch dessen Quadrat. Demnach gibt es zufolge der Relationen $\sigma^2=\sigma\sigma$, $(\sigma°)^2=\sigma\sigma°$, $(\sigma\cdot\sigma°)^2=\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$, $(\sigma\cdot\sigma\sigma°)^2=\sigma\sigma\cdot\sigma°$ sowie $(\sigma\sigma)^2=\sigma$, $(\sigma\sigma°)^2=\sigma°$, $(\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°)2=\sigma\cdot\sigma°$, $(\sigma\sigma\cdot\sigma°)^2=\sigma\cdot\sigma\sigma°$ in einer Fixgruppe eines Sudokus mit einem Operator vom Typ (1), (2), (3) oder (4) stets einen vom korrespondirenden Typ (1'), (2'), (3') bzw. (4') und umgekehrt. Zur Klassifizierung der Fixgruppen nach den in ihr enthaltenen Fixoperatoren genügt es, sich auf die herausgestellten Typen (1), (2), (3), (4) zu beschränken.

Satz über Fixoperatoren

(1) Jeder Fixoperator $\varphi\in G$ eines $A\in X$ liegt bereits in der Untergruppe $G_0=T^*\otimes H^*$.

(2) Wenn $\varphi\in G$ Fixoperator eines Sudokus $A\in X$ ist, hat φ oder sein Quadrat φ^2 eine der Formen: $g\cdot h°\cdot\sigma$ (Typ1), $g\cdot h°\cdot\sigma°$ (Typ2), $g\cdot h°\cdot\sigma\cdot\sigma°$ (Typ3), $g\cdot h°\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma°$ (Typ4), wobei $g\cdot h°\in TxT°$.

Korollar: Die Ordnung einer Fixgruppe ist entweder $\#F_G(A)=3$ oder $\#F_G(A)=9$.

Den dargestellten Sachverhalt hat A. Schönhage in [2], [3] in einem Lemma mit ähnlichen Schlüssen bewiesene. Sudokus mit Fixgruppen der Ordnung 9 nannte er **Superfixe** und zeigte durch ein Beispiel, dass es solche Sudokus gibt.

Konjugation von Fixoperatoren

Die Konjugation $\varphi^\rho=\rho\cdot\varphi\cdot\rho$ eines Fixoperators φ von $A\in X$ durch Operatoren $\rho\in\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ sowie analog die Konjunktion $\varphi^{\rho°}=\rho°\cdot\varphi\cdot\rho°$ durch $\rho°\in\{\rho_1°, \rho_2°, \rho_3°\}$ wirkt auf den Typ.
Für einen Fixoperator φ eines Sudokus $A\in X$ gilt zufolge der Relationen
$\rho_i\cdot\sigma\cdot\rho_i=\sigma\sigma$, $\rho_i\cdot\sigma°\cdot\rho_i=\sigma°$ für $i\in\{1,2,3\}$ und $\rho_j°\cdot\sigma\cdot\rho_j°=\sigma$, $\rho_i\cdot\sigma°\cdot\rho_i=\sigma\sigma°$ für $j\in\{1,2,3\}$ folgendes
Konjugations-Lemma
Wenn φ vom σ-Typ $\Rightarrow$ $\rho\cdot\varphi\cdot\rho$ ist für ρA vom $\sigma\sigma$-Typ und $\rho°\cdot\varphi\cdot\rho°$ ist für $\rho°A$ vom σ-Typ,
wenn φ vom $\sigma°$-Typ $\Rightarrow$ $\rho\cdot\varphi\cdot\rho$ ist für ρA vom $\sigma°$-Typ und $\rho°\cdot\varphi\cdot\rho°$ ist für $\rho°A$ vom $\sigma\sigma°$-Typ,
wenn φ vom $\sigma\cdot\sigma°$-Typ $\Rightarrow$ $\rho\cdot\varphi\cdot\rho$ ist für ρA vom $\sigma\sigma\cdot\sigma°$-Typ und $\rho°\cdot\varphi\cdot\rho°$ ist für $\rho°A$ vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$-Typ,
wenn φ vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$-Typ $\Rightarrow$ $\rho\cdot\varphi\cdot\rho$ ist für ρA vom $\sigma\cdot\sigma°$-Typ und $\rho°\cdot\varphi\cdot\rho°$ ist für $\rho°A$ vom $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$-Typ.

Insbesondere liefert also die Transformation eines Fixoperators φ vom Typ(3) durch Konjugation mittels der globalen Operatoren $\rho\in\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ oder $\rho°\in\{\rho_1°, \rho_2°, \rho_3°\}$ einen Fixoperator vom Typ(4') bzw. (4) und induziert dabei einen Isomorphismus der Fixgruppe $F_G(A)$ auf die Fixgruppe $F_G(\rho A)$ bzw. $F_G(\rho°A)$. Analog wird ein Fixoperator vom Typ(4) durch Konjugation mittels eines ρ bzw. $\rho°$ in einen vom Typ (3') bzw. (3) transformiert. Die Fixgruppen $F_G(\rho A)$ und $F_G(\rho°A)$ von ρA bzw. $\rho°A$ sind konjugiert zur Fixgruppe $F_G(A)$ von A. Die Anzahl der zu $F_G(A)$ mittels ρ , $\rho°$ erzeugten Fixgruppen hängt von den beteiligten lokalen Faktoren des Fixoperators φ ab.

Geometrische Deutung der Fixoperator-Typen

Beim Studium der Transformation einen Sudokus A durch einen Fixoperators φ ist es oft hilfreich, sich die Wirkung geometrisch zu veranschaulichen.
Denkt man sich eine gemäß dem Sudoku-Raster strukturierte kartesische Ebene mit einem Fixsudoku A parkettiert, wobei zwecks Normierung etwa A im ersten Quadranten mit einer Ecke am Ursprung im 9x9-Feld eingetragen sei, so beschreiben die globalen Faktoren der Fixoperatoren aus $F_G(A)$ eine Translation des Sudokus im Block-Raster. Der Fixgruppentyp bestimmt diese Translation. Beim σ–Typ sind es vertikale Bewegungen, beim $\sigma°$–Typ horizontale Bewegungen, beim $\sigma\cdot\sigma°$–Typ Bewegungen in Richtung der Hauptdiagonalen des Sudokus, beim $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ Bewegungen in Richtung der Nebendiagonalen. Die lokalen Reihenoperatoren des Fixoperators bewirken danach ähnliche Verschiebungen innerhalb der Blöcke und justieren das Sudoku auf die im Parkett fixierte Gestalt.

§4. Zählergebnisse bei Fixsudokus

Anzahlen diagonalblocknormierter Fixsudokus

In [2] entwickelte A.Schönhage anhand der von den 27 Zeilen und 27 Spalten der 9 Blöcke eines Sudokus gebildeten „Dreiermengen“ Systeme (3*), (4*), (5*), (6*) von jeweils 18 Gleichungen, mittels denen getestet werden kann, welchen der Fixoperatoren-Typen σ, $\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma$ oder $\sigma\cdot\sigma\sigma°$ ein vorgelegtes $A\in X$ zulässt. Im neuen Durchgang seines Zählalgorithmus [4] testete er anhand der Systeme (3*),(4*),(5*),(6*), bei welchen Bezirks-Leadern Fixsudokus vorkamen und fand in seinen 237083 Klassen blockdiagonal normierter Sudokus 1161285 Fixsudokus. Auffällig ist ein Bezirk von dbn-Tripeln mit (e,e,e) als einzigem Blocktripel ,der 64 Fortsetzungen zum Fixsudoku hat, davon haben 4 – Superfixe genannt - Fixoperatoren von jedem Typ. Die restlichen 60 sind normale Fixsudokus ,12 vom σ–Typ, 12 vom $\sigma°$–Typ, 36 vom $\sigma\cdot\sigma°$–Typ, keine vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ.

Unter den $nn_0 = 2^9\cdot p$,p=27704 267971, dbn-Sudokus wurden damit nn_f = 1161825 Fixsudokus entdeckt , insbesondere 4 Superfixe und 36 normale Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma°$–Typ, Keine vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ Sein Pentium-4 schaffte es in weniger als 20 Minuten.

Die nn_{sf} =4 Superfixe, wir schreiben sie U_1,U_2,U_3,U_4 , sind in Liste **$L4_{eee}$** explizit angegeben. Ihre Fixgruppen werden in §5 bestimmt und später in §9 betrachtet. Sie haben Fixoperatoren von jedem der vier Typen σ, $\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma°$ und $\sigma\cdot\sigma\sigma°$.

Auflistungen normaler Fixsudokus

L24eee, L36eee

Zu den insgesamt 64 Fortsetzungen des (e,e,e)-Tripels zum Fixsudoku hat A.Schönhage am 21.Nov.2009 eine Liste $L24_{eee}$ der normalen Fixsudoku vom σ- oder $\sigma°$-Typ per Computer erstellt und zuvor am 9.Nov 2009 eine Liste $L36_{eee}$ der normalen Fixsudoku mit Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma°$–Typ.
Die Liste $L24_{eee}$ zeigt 12 normale Fixsudokus vom σ-Typ und 12 vom $\sigma°$-Typ. Sie werden im §10 betrachtet und sind gemäß ihrer Position auf der Liste A_n, $n\in\{1,2,3,...,24\}$ notiert. Die Halbierung der 24 Fortsetzungen ist durch die Dualität im System bedingt..
Die 36 Sudokus der Liste $L36_{eee}$ sind normale Fixsudokus mit dem rein globalen Fixoperator $\sigma\cdot\sigma°$, kurz **$\sigma\cdot\sigma°$–Sudoku** genannt, ihre Fixgruppe ist durchweg $\{1, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°\}$, werden im §11 betrachtet und sind gemäß ihrer Position auf der Liste S_n, $n\in\{1,2,3,...,36\}$ notiert.
Eine Fortsetzung des Tripels (e,e,e) zum normalen Fixsudoku vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$-Typ gibt es nicht.

Liste $L261_{ebc}$

Die 2 Fixsudokus mit einem Fixoperator vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ sind neben anderen in Liste L261 angegeben und werden im §6 betrachtet und sind gemäß ihrer Position auf der Liste F_n, $n\in\{1,2,3,...,26\}$ durch F_{17} und F_{22} notiert . Es sind Fortsetzungen des Blocktripels

(e,b,c) mit $e = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\8&9&7\end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\9&7&8\end{pmatrix}$.

Zu diesem Tripel gibt es 26 Fortsetzungen zum Fixsudoku. Die am 21.Dez 2008 per Computer erstellte Liste der 26 normalen Fixsudokus zeigt folgende Anzahlen:
16 Fixsudokus mit Fixoperatoren vom σ–Typ,
8 Fixsudokus mit Fixoperatoren vom $\sigma°$–Typ,
kein Fixsusoku mit Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma°$–Typ,
2 Fixsudokus mit Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ.
Im Anhang des Skripts sind die per Computer erstellten Listen einzusehen.

Gesamtzahlen der Fixsudokus.

In M-Bahnen, deren Leader Fixsudokus sind, liegen nur zum Leader M-konjugierte Fixsudokus. Damit ist auch die Anzahl aller Fixsudokus in X bestimmt. Es gibt
$N_f = 9!\cdot 6^4 \cdot nn_f = 9!\cdot 3^4\cdot 2^4 .1\,161\,284$ Fixsudokus, das sind lediglich $0{,}000082\text{‰}_0$ aller $N = 9!\cdot 6^4\cdot nn_0 = 9!\cdot 3^4\cdot 2^{13}\cdot p$ = 6670 903752 021072 936960 Sudokus.
$N_1 = N - N_f = N - 9!.6^{\cdot 4}.1\,161\,284 = 9!.6^4.2.3\,482\,146\,009\,967$ normale Sudokus.
$N_{sf} = 9!\cdot 6^4\cdot nn_{sf} = 9!\cdot 3^4\cdot 2^6 = 7!\cdot 3^6\cdot 2^9 =$ 1881 169920 Superfixe,
$N_{nf} = N_f - N_{sf} = 9!\cdot 3^4\cdot 2^4 .(1\,161\,284-4)$ normale Fixsudokus,
Die N_{nf} enthalten $N_{nf3} = 9!.36^2.36$ normale Fixsudokus vom $\sigma.\sigma°$–Typ , sowie $N_{nf4} = 9!.36^2.36$ normale Fixsudokus vom$\sigma.\sigma\sigma°$–Typ. Die restlichen $N_{nf1+nf2} = 9!.36.36\,.\,1161208$ zerfallen aus

Symmetriegründen hälftig in N_{nf1}=9!580604.36.36. normale Fixsudokus vom $\sigma\cdot$–Typ sowie in N_{nf2}=9!580604.36.36 normale Fixsudokus vom $\sigma\cdot^{0}$Typ

Spezielle Zählergebnisse

Als Fortsetzungen des dbn-Tripels (e,e,e) zum Fixsudoku gibt es,
nn_{sf} = 4 Superfixe U_1,U_2,U_3,U_4
n_{eeef1} =12 normale Fixsudokus mit Fixoperatoren vom σ–Typ,
n_{eeef2} =12 normale Fixsudokus mit Fixoperatoren vom $\sigma°$–Typ,
n_{eeef3} =36 normale Fixsudokus mit Fixoperatoren vom reinen $\sigma\cdot\sigma°$–Typ, alias $\sigma\cdot\sigma°$-Sudokus
n_{eeef4} = 0
dadurch bedingt:
$n_{ee'e'f4}$ =36 normale Fixsusokus mit dem reinen Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ. Die $n_{ee'e'f4}$ =36 normalen Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ ergeben sich ,wenn man in den n_{eeef3} =36 normalen Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma°$–Typ die mittlere und untere Blockzeile vertauscht.

Damit gibt es in der ZxT_{23}*-Bahn des dbn-Tripels (e,e,e)
N_{sf} = $9!\cdot 6^4\cdot nn_{sf}$ = $9!\cdot 3^4\cdot 2^6$ = $7!\cdot 3^6\cdot 2^9$ = 1881 169920 Superfixe,
N_{eeef1} = $9!\cdot 6^4\cdot n_{eeef2}$ = $9!\cdot 3^5\cdot 2^6$ =$\cdot 7!\cdot 3^7\cdot 2^9$ = 5643 509760 normale Fixsudokus vpm $\sigma\cdot$–Typ
N_{eeef2} = $9!\cdot 6^4\cdot n_{eeef2}$ = $9!\cdot 3^5\cdot 2^6$ =$\cdot 7!\cdot 3^7\cdot 2^9$ = 5643 509760 normale Fixsudokus vom $\sigma°$–Typ
N_{eeef3} = $9!\cdot 6^4\cdot n_{eeef3}$ = $9!\cdot 3^6\cdot 2^6$ =$\cdot 7!\cdot 3^8\cdot 2^9$ = 16930 529280 normale Fixsudokus vom reinen $\sigma\cdot\sigma°$–Typ
N_{eeef4} = $9!\cdot 6^4\cdot n_{eeef4}$ = 0
$N_{ee'e'f4}$ = $9!\cdot 6^4\cdot n_{ee'e'f4}$ = $9!\cdot 3^6\cdot 2^6$ =$\cdot 7!\cdot 3^8\cdot 2^9$ = 16930 529280 normale Fixsudokus vom reinen $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ

Anzahlen normaler dbn-Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$-Typ

Die 36 Fixsudokus mit Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma°$–Typ(3) aus der Liste $L36_{eee}$ werden beim Tausch der horizontalen Streifen HS_2,HS_3 mittels des globalen Operator ρ_1 alias der vertikalen Streifen VS_2,VS_3 mittels $\rho_1°$ in Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ(4) transformiert, bei denen das Blocktripel (e,e,e) auf den Raster-Feldern $A_{1,1}$, $A_{3,2}$, $A_{2,3}$ steht, zyklisch betrachtet in Richtung der Nebendiagonalen. Die transformierten Bilder sind normale Fixsudokus mit den rein globalen Fixoperatoren $\sigma\sigma\cdot\sigma°$ und $\sigma\cdot\sigma\sigma°$, kurz **$\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Sudoku** genannt, deren Fixgruppe ist durchweg {1, $\sigma\sigma\cdot\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma\sigma°$}.
Die Abbildung der $\sigma\cdot\sigma°$–Sudokus von Liste $L36_{eee}$ mittels $\rho_1°$ auf die $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Sudokus ist bijektiv.
Demnach gibt es zum Blocktripel (e,e,e) auf den Feldern $A_{1,1}$, $A_{3,2}$, $A_{2,3}$
n_{eeef4} = 36 Fortsetzungen zu normalen $\sigma\cdot\sigma\sigma°$-Susokus und damit insgesamt
N_{eeef4} = $9!\cdot 6^4\cdot n_{eeef4}$ = $9!\cdot 3^6\cdot 2^6$ =$\cdot 7!\cdot 3^8\cdot 2^9$ = 16930 529280 normale Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ in der ZxT_{23}*-Bahn des Tripels (e,e,e) auf den Feldern $A_{1,1}$, $A_{3,2}$, $A_{2,3}$.

§5. Superfixe

Die Ordnung der Fixgruppe eines Fixsudokus A ist entweder $\#F_G(A)=3$ oder $\#F_G(A)=9$.
Sudokus mit Fixgruppen der Ordnung 9 nannte A.Schönhage **Superfixe** und zeigte mit folgendem Beispiel, dass es solche Sudokus gibt (siehe [2]).

$$\textbf{Urbeispiel } \mathbf{U_0} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4&5&6\\7&8&9\\1&2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7&8&9\\1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}3&1&2\\6&4&5\\9&7&8\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}6&4&5\\9&7&8\\3&1&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}9&7&8\\3&1&2\\6&4&5\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2&3&1\\5&6&4\\8&9&7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5&6&4\\8&9&7\\2&3&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}8&9&7\\2&3&1\\5&6&4\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & sse & se \\ s°e & ss\cdot s°e & s\cdot s°e \\ ss°e & ss\cdot ss°e & s\cdot ss°\cdot e \end{pmatrix},$$

wobei e der Normblock.
Dies e-normierte Sudoku hat eine Fixgruppe F_{Go} (U_0) der Ordnung 9, wie sich explizit aus dem Folgenden ergibt.

Superfix U_1

Lokal nahe beim Urbeispiel U_0 , nämlich in gleicher T_{23}*-Bahn von U_0 , $T_{23}^* = T_2 \times T_3 \times T_2° \times T_3°$, liegt das diagonalblocknormierte Sudoku $U_1 = wU_0$, wobei $w = g \cdot h° = 1 \cdot s \cdot ss \cdot 1 \cdot ss° \cdot s° \in T^*$ ein lokaler Operator, der nur Zeilen und Spalten innerhalb der Streifen HS_2, VS_2 sowie HS_3 und VS_3 permutiert. Bei Transformation von U_0 anhand der Operatormatrix von w sieht man:

$$g \cdot h°(U_0) = \begin{pmatrix} 1 & ss° & s° \\ s & s \cdot ss° & s \cdot s° \\ ss & ss \cdot ss° & ss \cdot s° \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e & sse & se \\ s°e & ss \cdot s°e & s \cdot s°e \\ ss°e & ss \cdot ss°e & s \cdot ss° \cdot e \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e & ss \cdot ss°e & s \cdot s°e \\ s \cdot s°e & e & ss \cdot ss°e \\ ss \cdot ss°e & s \cdot s°e & e \end{pmatrix} = U_1.$$

$U_1 = wU_0$ ist also ein zum Urbeispiel T_{23}*-konjugiertes Sudoku mit konjugierter Fixgruppe.

Fixoperatoren von U_1

Der recht einfachen Gestalt von U_1 entnimmt man , dass es durch die globalen Operatoren $\sigma \cdot \sigma°$ sowie $\sigma\sigma \cdot \sigma\sigma°$ auf sich abgebildet wird.

Zudem sieht man anhand der Operatormatrix des lokalen Operators $\mathbf{s \cdot s°} = s \cdot s \cdot s \cdot s° \cdot s° \cdot s°$ aus den Diagonalen D bzw. D° der direkten Produkte $T = T_1 \times T_2 \times T_3$ und $T° = T_1° \times T_2° \times T_3°$, dass

$$\begin{pmatrix} s \cdot s° & s \cdot s° & s \cdot s° \\ s \cdot s° & s \cdot s° & s \cdot s° \\ s \cdot s° & s \cdot s° & s \cdot s° \end{pmatrix} U_1 = \begin{pmatrix} s \cdot s°e & e & ss \cdot ss°e \\ ss \cdot ss°e & s \cdot s° \cdot e & e \\ e & ss \cdot ss°e & s \cdot s°e \end{pmatrix}.$$

Die Transformation dieses Bildes durch einen der globalen Operatoren σ, $\sigma\sigma°$ oder $\sigma\sigma \cdot \sigma°$ aus $H^* = H \times H° \subset G_0$ liefert U_1 zurück. Also sind $\sigma \cdot \mathbf{s \cdot s°}$, $\sigma\sigma° \cdot \mathbf{s \cdot s°}$ und $\sigma\sigma \cdot \sigma° \cdot \mathbf{s \cdot s°}$ Fixoperatoren von U_1.
Die globalen Operatoren kommutieren mit den lokalen, denn $\mathbf{s \cdot s°}$ ist aus der Diagonalen von $T \times T°$.
Die Fixoperatoren kann man also auch $\mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma$, $\mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma\sigma°$, $\mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma\sigma \cdot \sigma°$ schreiben.
Ferner sieht man anhand der Operatormatrix des lokalen Operators $\mathbf{ss \cdot ss°} = ss \cdot ss \cdot ss \cdot ss° \cdot ss° \cdot ss°$,

$$\text{dass} \begin{pmatrix} ss \cdot ss° & ss \cdot ss° & ss \cdot ss° \\ ss \cdot ss° & ss \cdot ss° & ss \cdot ss° \\ ss \cdot ss° & ss \cdot ss° & ss \cdot ss° \end{pmatrix} U_1 = \begin{pmatrix} ss \cdot ss°e & s \cdot s°e & e \\ e & ss \cdot ss° \cdot e & s \cdot s°e \\ s \cdot s°e & e & ss \cdot ss°e \end{pmatrix}.$$

Hier liefern die globalen Operatoren $\sigma\sigma$, $\sigma°$ und $\sigma \cdot \sigma\sigma°$ aus $H^* \subset G_0$ das Sudoku U_1 zurück. Also sind $\sigma\sigma \cdot \mathbf{ss \cdot ss°}$, $\sigma° \cdot \mathbf{ss \cdot ss°}$ und $\sigma \cdot \sigma\sigma° \cdot \mathbf{ss \cdot ss°}$ Fixoperatoren von U_1 .
Für das Sudoku U_1 sind damit acht von der Identität verschiedene Operatoren aus der kleinen Sudokugruppe $G_0 = T \times T° \otimes H \times H°$ aufgezeigt, die das Superfix U_1 fest lassen.

Fixgruppe von U_1

$F_{G_0}(U_1) = \{1, \sigma \cdot \sigma°, \sigma\sigma \cdot \sigma\sigma°, \mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma, \mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma\sigma°, \mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma\sigma \cdot \sigma°, \mathbf{ss \cdot ss°} \cdot \sigma\sigma, \mathbf{ss \cdot ss°} \cdot \sigma°, \mathbf{ss \cdot ss°} \cdot \sigma \cdot \sigma\sigma°\}$.
Die G_0-Bahn von U_1 hat die Länge $\#G_0/9 = 6^8/9 = 4 \cdot 6^6 = 186\,624$.
Diese Bahn enthält nur Superfixe, darunter das Urbeispiel U_0 .

Fixoperatoren des Urbeispiels U_0

Die Fixoperatoren des Urbeispiels $U_0 = w^{-1}U_1$ sind mittels $g = w^{-1}$ wobei $w = 1 \cdot s \cdot ss \cdot 1° \cdot ss° \cdot s° \in T^*$, konjugiert zu $U_1 = wU_0$., denn aus $U_0 = gU_1$ und $\varphi U_1 = U_1 \Leftrightarrow g \cdot \varphi \cdot g^{-1} \cdot gU_1 = gU_1$ für $\varphi \in G$, $g \in G$ ergibt sich, dass $\varphi^g = g \cdot \varphi \cdot g^{-1}$ ein Fixoperator von U_0 genau dann ist, wenn φ einer von U_1 ist.
Fixgruppe des Urbeispiels ist damit $F_{G_0}(U_0) = g\, F_{G_0}(U_1)\, g^{-1}$ mit $g = 1 \cdot ss \cdot s \cdot 1° \cdot s° \cdot ss° \in T^*$.

Superfix U_2

Der globale Operator $\rho_1 \cdot \rho_1° \in H^*$ transformiert U_1 in das diagonalblock-normierte Superfix

$$U_2 = \rho_1 \cdot \rho_1°(U_1) = \begin{pmatrix} e & s \cdot s°e & ss \cdot ss°e \\ ss \cdot ss°e & e & s \cdot s°e \\ s \cdot s°e & ss \cdot ss°e & e \end{pmatrix}. \text{ Fixgruppe ist}$$

$F_{G_0}(U_2) = \{1, \sigma \cdot \sigma°, \sigma\sigma \cdot \sigma\sigma°, \mathbf{ss \cdot ss°} \cdot \sigma, \mathbf{ss \cdot ss°} \cdot \sigma\sigma°, \mathbf{ss \cdot ss°} \cdot \sigma\sigma \cdot \sigma°, \mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma\sigma, \mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma°, \mathbf{s \cdot s°} \cdot \sigma \cdot \sigma\sigma°\}$.

Superfixe U_3 und U_4

Die restlichen zwei diagonalblocknormierte Superfixe sind

$$U_3 = 1 \cdot s \cdot ss \cdot 1 \cdot s° \cdot ss° \cdot \rho_1°(U_1) = \begin{pmatrix} e & s \cdot ss°e & ss \cdot s°e \\ ss \cdot s°e & e & s \cdot ss°e \\ s \cdot ss°e & ss \cdot s°e & e \end{pmatrix},$$

$U_4 = \rho_1 \cdot \rho_1°(U_3) = 1 \cdot ss \cdot s \cdot 1 \cdot ss° \cdot s° \cdot \rho_1(U_1) = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s°e & s\cdot ss°e \\ s\cdot ss°e & e & ss\cdot s°e \\ ss\cdot s°e & s\cdot ss°e & e \end{pmatrix}$.

U_3 ergibt sich also aus U_1, wenn man U_1 mit dem globalen Operator $\rho_1° \in H°$ transformiert und das Bild dann weiter mit dem lokalen Operator $w = 1 \cdot s \cdot ss \cdot 1 \cdot s° \cdot ss° \in T_{23}$, insgesamt also mit dem Operator $\varphi = 1 \cdot s \cdot ss \cdot 1 \cdot s° \cdot ss° \cdot \rho_1° \in G_0$ transformiert, man explizit also wie folgt rechnet:

$$w \cdot \rho_1° \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss°e & s\cdot s°e \\ s\cdot s°e & e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot ss°e & s\cdot s°e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s° & ss° \\ s & s\cdot s° & s\cdot ss° \\ ss & ss\cdot s° & ss\cdot ss° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & s\cdot s°e & ss\cdot ss°e \\ s\cdot s°e & ss\cdot ss°e & e \\ ss\cdot ss°e & e & s\cdot s°e \end{pmatrix} = U_3.$$

Die Fixgruppen dieser Superfixe sind

$F_{Go}(U_3) = \{1, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma°, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma\sigma, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma°, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma° \}$

$F_{Go}(U_4) = \{1, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma°, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma\sigma, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma°, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma° \}$

Bahnen der Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4

T_{23}* -Bahnen

Die Bahnen $T_{23}*\_U_i = \{g\ U_i |\ g \in T_{23}*\}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, der diagonalblocknormierten Sudokus U_1, U_2, U_3, U_4 haben in X die Länge # $T_{23}* = 6^4$, da die Gruppe T_{23}* fixpunktfrei auf X operiert. Jede der Bahnen enthält nur e-normierte Superfixe, denn die Fixgruppe von gU_i ist g-konjugiert zu U_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, und durch Operatoren aus T_{23}* wird der Normblock e im Rasterfeld A_{11} nicht verändert. Somit gibt es $N_{es} = 6^4 \cdot 4$ e-normierte Superfixe.

M-Bahnen

Die Mischgruppen-Bahnen $M\_U_i = \{g\ U_i |\ g \in M\}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, der diagonalblocknormierten Sudokus U_1, U_2, U_3, U_4 haben in X die Länge #M = 9! · 6^4, da die Mischgruppe M =ZxT_{23}* fixpunktfrei auf X operiert und die Zifferngruppe Z ein isomorphes Bild der Gruppe S_9 ist. Die Bahnen zerlegen somit die Menge X_s aller Superfixe in vier gleichgroße Klassen. Somit gibt es $N_s = 9! \cdot 6^4 \cdot 4$ Superfixe.

G_0-Bahnen

In der vom Superfix U_1 geführten Bahn $G_0\_U_1 = \{g\ U_1 |\ g \in G_0\}$ liegen zufolge $U_2 = \rho_1 \cdot \rho_1° (U_1)$, $U_3 = 1 \cdot s \cdot ss \cdot 1 \cdot s° \cdot ss° \cdot \rho_1°(U_1)$, $U_4 = 1 \cdot ss \cdot s \cdot 1 \cdot ss° \cdot s° \cdot \rho_1(U_1)$ auch die diagonalblocknormierten Superfixe U_2, U_3, U_4 . Die Fixgruppe $F_{Go}(U_1)$ hat 9 Elemente. Die Bahn $G_0\_U_1$ hat damit die Länge $L_{Go} = \#(G_0)/\#(F_{Go}(U_1)) = 6^8/9 = 4 \cdot 6^6 = 4 \cdot 36^3 = 186624$.
Jede G_0-Bahn in X_s hat diese Länge $L_{Go} = 4 \cdot 36^3 = 4 \cdot 6^6$.
Insgesamt gibt es $N_{sf} = 9! \cdot 6^4 \cdot nn_{sf} = 9! \cdot 3^4 \cdot 2^6 = 7! \cdot 3^6 \cdot 2^9 =$ 1881 169920 Superfixe,
Damit gibt es $N_{sf}/L_{Go} = 9!/36 = 7! \cdot 2$ G_0-Bahnen aus Superfixe.

G-Bahnen

Die Erweiterung von G_0 durch Verkettung mit dem Transponierer τ zur Gruppe G liefert keine neuen Fixoperatoren für die Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 . Weil $\#(G)/\#(G_0) = 2$, haben die G-Bahnen mit Superfix-Leadern die Länge $L_G = 2 \cdot L_{Go} = 8 \cdot 36^3$.
Damit gibt es insgesamt $N_s/L_G = 7!$ G-Bahnen aus Superfixe.
Bei der Erweiterung werden jeweils zwei G_0-Bahnen, die mittels des Transponierers τ einander überführbar sind, zu einer G-Bahn vereinigt.
Beispielsweise werden die Bahnen $G_0\_U_1$ und $G_0\_\tau(U_1)$) vereinigt, denn

$$\tau(U_1) = \tau(\begin{pmatrix} e & ss\cdot ss°e & s\cdot s°e \\ s\cdot s°e & e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot ss°e & s\cdot s°e & e \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} te & s\cdot s°\cdot te & ss\cdot ss°\cdot te \\ ss\cdot ss°\cdot te & te & s\cdot s°\cdot te \\ s\cdot s°\cdot te & ss\cdot ss°\cdot te & te \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$$te = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \text{ explizit also } \tau(U_1) = \begin{pmatrix} te & tb & ta \\ ta & te & tb \\ tb & ta & te \end{pmatrix}, \text{ mit } ta = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ tb = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abgesehen vom Unterschied zwischen dem Normalblock e und dem transponierten Block te haben

$\tau(U_1)$ und das Superfix $U_2 = \begin{pmatrix} e & s\cdot s^\circ e & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & e & s\cdot s^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & ss\cdot ss^\circ e & e \end{pmatrix}$ die selbe Blockoperatoren-Struktur.

§6. Beispiele normaler Fixsudokus

Aus der Liste $L261_{ebc}$ der 26 Fortsetzungen Fn , $n\in\{1,2,3,...,26\}$ des diagonalblocknormierten Block-Tripel (e,b,c) in den Feldern $A_{1,1}, A_{2,2}, A_{3,3}$ der Hauptdiagonalen

mit $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ zu normalen Fixsudokus werden die Sudokus

F_{01}, F_{05}, F_{17} und F_{22} ausgewählt und deren Fixgruppen bestimmt. In der Liste ist bereits angegeben, von welchem Typ die Fixoperatoren sind. Demnach hat F_{01} einen Fixoperator vom σ–Typ, F_{05} einen vom σ°–Typ und F_{17} und F_{22} sind die einzigen der Liste mit Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$–Typ.

Beispiel F_{01}

$F_{01} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ b & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ e & b & ss\cdot ss^\circ c \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ b & c \end{pmatrix}$.

Es ist $\sigma(F_{01}) = \begin{pmatrix} ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ b & c \\ e & ss\cdot s^\circ b & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ e & b & ss\cdot ss^\circ c \end{pmatrix}$ und damit

$s\cdot s\cdot s \cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot(\sigma(F_{01})) = \begin{pmatrix} s\cdot s^\circ & s\cdot ss^\circ & s\cdot s^\circ \\ s\cdot s^\circ & s\cdot ss^\circ & s\cdot s^\circ \\ s\cdot s^\circ & s\cdot ss^\circ & s\cdot s^\circ \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ b & c \\ e & ss\cdot s^\circ b & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ e & b & ss\cdot ss^\circ c \end{pmatrix}) = F_{01}$.

Analog findet man

$ss\cdot ss\cdot ss \cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot(\sigma\sigma(F_{01})) = \begin{pmatrix} ss\cdot ss^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot ss^\circ \\ ss\cdot ss^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot ss^\circ \\ ss\cdot ss^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot ss^\circ \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} s\cdot s^\circ e & b & ss\cdot ss^\circ c \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ b & c \\ e & ss\cdot s^\circ b & s\cdot s^\circ c \end{pmatrix}) = F_{01}$.

Es gibt in G neben den Operatoren $s\cdot s\cdot s \cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot\sigma$ und $ss\cdot ss\cdot ss \cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot\sigma\sigma$ aus G_0 keine weiteren Operatoren $\neq$id, die das diagonalblocknormierte Sudoku F_{01} fest lassen.
Fixgruppe ist $F_G(F_{01}) = \{1,\ \mathbf{s}\cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot\sigma,\ \mathbf{ss}\cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot\sigma\sigma\}$, wobei also **s** und **ss** aus der Diagonalen $D\subset T_1xT_2xT_3 = T$. Die Fixoperatoren sind vom Typ (1) bzw. (1'):

Beispiel F_{05}

$F_{05} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot ss^\circ e \\ s\cdot ss^\circ b & b & ss\cdot s^\circ b \\ ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ c & c \end{pmatrix}$. Anhand von

$\sigma^\circ(F_{05}) = \begin{pmatrix} s\cdot ss^\circ e & e & ss\cdot s^\circ e \\ ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ b & b \\ c & ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ c \end{pmatrix}$ und $\sigma\sigma^\circ(F_{05}) = \begin{pmatrix} ss\cdot s^\circ e & s\cdot ss^\circ e & e \\ b & ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ c & c & ss\cdot s^\circ c \end{pmatrix}$ sowie

$ss\cdot ss\cdot ss \cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ = \begin{pmatrix} ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ \\ ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ \\ ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ \end{pmatrix}$ und $s\cdot s\cdot s \cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ = \begin{pmatrix} s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ \\ s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ \\ s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ \end{pmatrix}$

erkennt man, dass $ss\cdot ss\cdot ss \cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot\sigma^\circ(F_{05}) = F_{05}$ und $s\cdot s\cdot s \cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot\sigma\sigma^\circ(F_{05}) = F_{05}$.
Fixgruppe ist also $F_G(F_{05}) = \{1,\ \mathbf{ss}\cdot\mathbf{s}^\circ\cdot\sigma^\circ,\ \mathbf{s}\cdot\mathbf{ss}^\circ\cdot\sigma\sigma^\circ\}$, wobei **s**, **ss** aus der Diagonalen $D\subset T_1xT_2xT_3$ und $\mathbf{s}^\circ$, $\mathbf{ss}^\circ$ aus der Diagonalen $D^\circ \subset T_1^\circ xT_2^\circ xT_3^\circ = T^\circ$. Die Fixoperatoren sind vom Typ (2) bzw. (2')

Beispiel F_{17} $\quad F_{17} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b \\ s\cdot s^\circ c & b & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ e & c \end{pmatrix}$. Es ist

$\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ(F_{17}) = \begin{pmatrix} s\cdot s^\circ e & c & ss\cdot ss^\circ b \\ ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b & e \\ b & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ c \end{pmatrix}$, $\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ(F_{17}) = \begin{pmatrix} ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ c & b \\ c & ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ e \\ s\cdot s^\circ b & e & ss\cdot ss^\circ c \end{pmatrix}$ sowie

$ss\cdot ss\cdot ss \cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ = \begin{pmatrix} ss\cdot ss^\circ & ss\cdot ss^\circ & ss\cdot ss^\circ \\ ss\cdot ss^\circ & ss\cdot ss^\circ & ss\cdot ss^\circ \\ ss\cdot ss^\circ & ss\cdot ss^\circ & ss\cdot ss^\circ \end{pmatrix}$, $s\cdot s\cdot s \cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ = \begin{pmatrix} s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ \\ s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ \\ s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ \end{pmatrix}$, also

$ss\cdot ss\cdot ss \cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ(F_{17}) = F_{17}$ sowie $s\cdot s\cdot s \cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ(F_{17}) = F_{17}$.
Fixgruppe ist $F_G(F_{17}) = \{1, \mathbf{ss\cdot ss^\circ} \cdot\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ, \mathbf{s\cdot s^\circ}\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ\}$.
Die Fixoperatoren sind vom Typ (4) bzw. (4')

Beispiel F_{22} $\quad F_{22} = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b \\ ss\cdot s^\circ c & b & s\cdot ss^\circ e \\ s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ e & c \end{pmatrix}$. Es ist

$\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ(F_{22}) = \begin{pmatrix} ss\cdot s^\circ e & c & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b & e \\ b & s\cdot ss^\circ e & ss\cdot s^\circ c \end{pmatrix}$, $\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ(F_{22}) = \begin{pmatrix} s\cdot ss^\circ e & ss\cdot s^\circ c & b \\ c & s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ e \\ ss\cdot s^\circ b & e & ss\cdot s^\circ c \end{pmatrix}$,

$s\cdot s\cdot s \cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ = \begin{pmatrix} s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ \\ s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ & s\cdot ss^\circ \\ s\cdot ss^\circ & s\cdot sss^\circ & s\cdot ss^\circ \end{pmatrix}$, $ss\cdot ss\cdot ss \cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ = \begin{pmatrix} ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ \\ ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ \\ ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ & ss\cdot s^\circ \end{pmatrix}$, also

$s\cdot s\cdot s \cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ(F_{22}) = F_{22}$ sowie $ss\cdot ss\cdot ss \cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ(F_{22}) = F_{22}$.
Fixgruppe ist $F_G(F_{22}) = \{1, \mathbf{s} \cdot \mathbf{ss}^\circ\cdot \sigma\cdot\sigma\sigma^\circ, \mathbf{ss} \cdot \mathbf{s}^\circ\cdot \sigma\sigma\cdot\sigma^\circ\}$.
Die Fixoperatoren sind vom Typ (4) bzw. (4')

Als Beispiele für Sudokus mit Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma^\circ$–Typ werden zwei transformierte Bilder von F_{17} als auch von F_{22} gewählt, die in der Liste $L36_{eee}$ unter den 36 Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma^\circ$–Typ aufgeführt sind. Es sind die einzigen $S_n \in L36eee$, die sich als transformierte Bilder von F_{17} oder F_{22} darstellen lassen. Deren Fixgruppe ist stets $\{1, \sigma\cdot\sigma^\circ, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ\}$, die Fixoperatoren der Sudokus dieser Liste sind also durchweg vom „reinen“ Typ (3) bzw. (3').

Beispiel F'_{17} $= S_5 \in L36_{eee}$ $\qquad F'_{17} = 1\cdot ss\cdot s \cdot 1\cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot\rho_1\, F_{17}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & ss^\circ & s^\circ \\ ss & ss\cdot ss^\circ & ss\cdot s^\circ \\ s & s\cdot ss^\circ & s\cdot s^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b \\ ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ e & c \\ s\cdot s^\circ c & b & ss\cdot ss^\circ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ b & e & ss\cdot s^\circ c \\ ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ b & e \end{pmatrix}.$$

Beispiel F''_{17} $= S_{32} \in L36_{eee}$ $\qquad F''_{17} = 1\cdot s\cdot ss \cdot 1\cdot s\cdot ss^\circ\cdot\rho_1^\circ\, F_{17}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & s^\circ & ss^\circ \\ s & s\cdot s^\circ & s\cdot ss^\circ \\ ss & ss\cdot s^\circ & ss\cdot ss^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & s\cdot s^\circ b & ss\cdot ss^\circ c \\ s\cdot s^\circ c & ss\cdot ss^\circ e & b \\ ss\cdot ss^\circ b & c & s\cdot s^\circ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ c \\ ss\cdot s^\circ c & e & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ c & e \end{pmatrix}.$$

Beispiel F'_{22} $= S_{17} \in L36_{eee}$ $\qquad F'_{22} = 1\cdot s\cdot ss \cdot 1\cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot\rho_1\, (F_{22})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & ss^\circ & s^\circ \\ s & s\cdot ss^\circ & s\cdot s^\circ \\ ss & ss\cdot ss^\circ & ss\cdot s^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b \\ s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ e & c \\ ss\cdot s^\circ c & b & s\cdot ss^\circ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & s\cdot s^\circ c & ss\cdot ss^\circ b \\ ss\cdot ss^\circ b & e & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ c & ss\cdot ss^\circ b & e \end{pmatrix}.$$

Beispiel F''_{22} $= S_{20} \in L36_{eee}$ $\qquad F''_{22} = 1\cdot ss\cdot s \cdot 1\cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot\rho_1^\circ(F_{22})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & s^\circ & ss^\circ \\ ss & ss\cdot s^\circ & ss\cdot ss^\circ \\ s & s\cdot s^\circ & s\cdot ss^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ c \\ ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ e & b \\ s\cdot ss^\circ b & c & ss\cdot s^\circ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ c & e & ss\cdot ss^\circ b \\ ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ c & e \end{pmatrix}.$$

In die Palette von Beispielen normaler Fixsudokus wird schließlich noch eine von A.Schönhage in [2] angegebene Abwandlung des Urbeispiels U_0 aufgenommen und es werden transformierte Bilder davon betrachtet. Das abgewandelte Urbeispiel ist ein normales Fixsudoku mit einem Fixoperator vom σ–Typ . Wir schreiben es

$$U'_0= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&2&3\\4&5&6\\7&8&9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4&5&6\\7&8&9\\1&2&3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9&8&7\\3&2&1\\6&5&4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3&1&2\\6&4&5\\9&7&8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6&4&5\\9&7&8\\3&1&2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7&9&8\\1&3&2\\4&6&5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2&3&1\\5&6&4\\8&9&7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5&6&4\\8&9&7\\2&3&1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8&7&9\\2&1&3\\5&4&6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & ss\,e & s\cdot r_2{}^\circ e \\ s^\circ e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot s^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ ss^\circ e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ\cdot r_2{}^\circ e \end{pmatrix}.$$ Es hat den

Fixoperator $s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot\sigma$, wie man anhand des Ansatzes

$$\begin{pmatrix} s^\circ & s^\circ & s^\circ \\ s^\circ & s^\circ & s^\circ \\ s^\circ & s^\circ & s^\circ \end{pmatrix} \sigma\left(\begin{pmatrix} e & ss\,e & s\cdot r_2{}^\circ e \\ s^\circ e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot s^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ ss^\circ e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ\cdot r_2{}^\circ e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & ss\,e & s\cdot r_2{}^\circ e \\ s^\circ e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot s^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ ss^\circ e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ\cdot r_2{}^\circ e \end{pmatrix}$$ erkennt.

Fixgruppe ist $F_G(U'_0) = \{1, \mathbf{s^\circ}\cdot\sigma, \mathbf{ss^\circ}\cdot\sigma\sigma\}$, wobei $\mathbf{s^\circ}= s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ$, $\mathbf{ss^\circ}= ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ$.

Lokal nahe bei U'_0 liegt das Fixsudoku $U'_1= w\, U'_0$, wobei $w =1\cdot s\cdot ss \cdot 1\cdot ss^\circ\cdot s^\circ$.
Die Transformation anhand der Operatormatrix von w liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & ss^\circ & s^\circ \\ s & s\cdot ss^\circ & s\cdot s^\circ \\ ss & ss\cdot ss^\circ & ss\cdot s^\circ \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e & sse & s\cdot r_2{}^\circ e \\ s^\circ e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot s^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ ss^\circ e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ\cdot r_2{}^\circ e \end{pmatrix} \mathbf{)}= \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & e & ss\cdot ss^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ e & r_2{}^\circ e \end{pmatrix} = U'_1.$$

Ein Fixoperator von U'_1 ist $\varphi = \mathbf{s}\cdot\mathbf{s^\circ}\cdot\sigma$ mit $\mathbf{s}= s\cdot s\cdot s\in D\subset T_1xT_2xT_3$ und $\mathbf{s^\circ}=s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ\in D^\circ\subset T_1{}^\circ xT_2{}^\circ xT_3{}^\circ$, denn

$$\varphi(\,U'_1) = \begin{pmatrix} s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ \\ s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ \\ s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ \end{pmatrix} \sigma\left(\begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & e & ss\cdot ss^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ e & r_2{}^\circ e \end{pmatrix}\right) = U'_1 .$$

Fixgruppe ist somit $F_G(U'_1) = \{1, \mathbf{s}\cdot\mathbf{s^\circ}\cdot\sigma, \mathbf{ss}\cdot\mathbf{ss^\circ}\cdot\sigma\sigma\}$.

U'_1 ist nicht diagonalblocknormiert. Eine solche Normierung leistet $w=1^\circ\cdot 1^\circ\cdot r_2{}^\circ$. Man erhält

$$w(U'_1)= \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ e & r_2{}^\circ\cdot s\cdot s^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & e & r_2{}^\circ\cdot ss\cdot ss^\circ\cdot r_2{}^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & e & ss\cdot s^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ e & e \end{pmatrix} = U'_{1n} .$$

Fixoperator von U'_{1n} ist $s\cdot s\cdot s\cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot\sigma = \begin{pmatrix} s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot ss^\circ \\ s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot ss^\circ \\ s\cdot s^\circ & s\cdot s^\circ & s\cdot ss^\circ \end{pmatrix}\cdot\sigma$, Fixgruppe von U'_{1n} also

$F_G(U'_{1n}) = \{1, \mathbf{s}\cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot\sigma, \mathbf{ss}\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot\sigma\sigma\}$.
U''_{1n} gehört zu den ersten 12 Fixsudokus A_n , $n\in\{1,2,3,...,12\}$, in der Liste $L24_{eee}$. Alle diese Sudokus haben Fixoperatoren vom σ–Typ. U''_{1n} ist dort als A_7 notiert.

Die Transformation von U'_{1n} mittels $\omega=\pi\cdot\tau\in ZxG$, wobei $\pi=(24)\cdot(37)\cdot(68)$, sodass $\pi(te)=e$, liefert ein normales Fixsudoku $U''_{1n}=\omega U'_{1n}$, das zu den Fixsudokus A_n auf der Liste $L24_{eee}$ gehört, die durch $n\in\{13,14,15,...,24\}$ indiziert Fixoperatoren vom $\sigma°$–Typ haben. Es ist dort als A_{24} notiert ist.

Die Transformation liefert $U''_{1n} = \pi\cdot\tau(U'_{1n}) = \begin{pmatrix} e & s\cdot s°e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot ss°e & e & s\cdot s°e \\ ss\cdot s°e & s\cdot ss°e & e \end{pmatrix}$,

Fixoperator von U''_{1n} ist $\varphi = s\cdot s\cdot ss\cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma° = \begin{pmatrix} s\cdot s° & s\cdot s° & s\cdot s° \\ s\cdot s° & s\cdot s° & s\cdot s° \\ ss\cdot s° & ss\cdot s° & ss\cdot s° \end{pmatrix}\cdot\sigma°$.

Fixgruppe ist $F_G(U''_{1n}) = \{1, s\cdot s\cdot ss\cdot s°\cdot\sigma°, ss\cdot ss\cdot s\cdot ss°\cdot\sigma\sigma°\}$.

§7. Blockschemata

Schema-Definition

Zur systematischen Darstellung von Fixsudokus werden Blockschemata mit lokalen Blocksystem definiert. Dazu belegt man die 81 Leerstellen des Sudoku-Rasters **A** statt mit Ziffern aus {1,2,3,...9} mit Unbestimmten $b_{i,j,k,l}$ aus einer Menge Q, sodass sich das folgende Matrixschema ergibt:

$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$, wobei $b_{i,j} = \begin{pmatrix} b_{i,j,1,1} & b_{i,j,1,2} & b_{i,j,1,3} \\ b_{i,j,2,1} & b_{i,j,2,2} & b_{i,j,2,3} \\ b_{i,j,3,1} & b_{i,j,3,2} & b_{i,j,3,3} \end{pmatrix}$ mit $i, j\in\{1,2,3\}$, wobei die Unbestimmten einer Vorratsmenge Q entnommen seien.

Wir nennen es **Blockschema**, wenn für die Unbestimmten $b_{i,j,k,l}$ folgende Bedingungen erfüllt sind

(a) jeder der 9 Blöcke ist mit 9 verschiedenen Unbestimmten belegt,

(b) die Mengen $\{b_{i,j,k,l}$ mit $k,l\in\{1,2,3\}\}$ und $\{b_{i',j',k,l}$ mit $k,l\in\{1,2,3\}\}$ der Unbestimmten von zwei Blöcken $b_{i,j}$ und $b_{i',j'}$, wobei $i, j\in\{1,2,3\}$ und $i', j'\in\{1,2,3\}$, sind entweder gleich oder ihr Durchschnitt ist leer,

(c) gleiche Blöcke stehen nicht im gleichen horizontalen oder vertikalen Streifen.

Die Menge der auf einen Block b gelegten Unbestimmten ist ein Bild (image) von b in der Menge aller Unbestimmten des Blockschemas B. Wir notieren dieses Bild kurz **im(b)** . Blöcke mit gleichen Unbestimmtenmengen, also gleichem image, nennen wir **mengengleich**. Gemäß der Bedingung (b) kennzeichnet dies eine Äquivalenzrelation im System der neun Blöcke des Blockschemas B. Das Blocksystem zerfällt damit in Klassen. Die Anzahl dieser Klassen, alias der verschiedenen Unbestimmtenmengen, wird **kombinatorischer Rang** des Blockschemas B genannt. Wir schreiben **rg(B)** für diese Zahl. Offenbar ist $1\leq rg(B)\leq 9$.

Im System dieser Klassen mengengleicher Blockschemata stiftet die Inklusion zwischen den Unbestimmtenmengen eine partielle Ordnung.

In mengengleichen Blöcken stehen gleiche Unbestimmte im allgemeinen an zu unterscheidenden Plätzen. Wir schreiben b=b' für zwei Blöcke b, b' des Blocksystems, wenn im(b) = im(b') und zudem die Positionen der Unbestimmten in den Blöcken übereinstimmen .

Schema mit lokalem Blocksystem, lokales Unterschema

Wenn es im Blockschema B für je zwei mengengleiche Blöcke $b_{i,j}$ und $b_{i',j'}$, $i,j\in\{1,2,3\}$, und $i',j'\in\{1,2,3\}$, stets einen Operator $w_{i,j,i',j'}$ aus der Blockgruppe Γ derart gibt, dass $b_{i',j'} = w_{i,j,i',j'}(b_{i,j})$, nennen wir B ein Schema **mit lokalem Blocksystem**.

Ein Schema B' mit lokalem Blocksystem wird **lokales Unterschema** von B genannt, wenn die Blöcke von B' sich durch Blöcke des Systems B **lokal** darstellen lassen, d.h. mittels Operatoren der Blockgruppe.

In einem Schema mit lokalem Blocksystem B können durch Auszeichnung eines Blocks in einer Klasse zum **Initialblock** alle Blöcke dieser Klasse mittels Operatoren der Blockgruppe als Bild des Initialblocks dargestellt werden. Bei der Wahl eines Initialblocks wird den Unbestimmten die Indizierung des Rasters gegeben. Durch Änderung der Initiualblock-Wahl wird somit ein Übergang vom Schema B zu einem Schema B' bewirkt.

Den kombinatorischen Rang rg(B) eines Schemas mit lokalem Blocksystem kann man als „lokale Dimension“ der Blockmenge des Schemas bezüglich der Blockgruppe Γ ansehen und , sofern in allen Klassen Initialblöcke gewählt sind, die Menge der ausgewählten Initialblöcke als Basis einer Darstellung der Blockmenge .

Im vorrangigen Interesse stehen Blockschemata B mit einem lokalem Blocksystem und einem kombinatorischen Rang $rgB\leq 3$. Die folgenden Begriffe und Notationen werden später auf solche Schemata bezogen. Wir definieren sie hier allgemein für beliebige Blockschemata, also für Objekte

der Menge *BX* aller Blockschemata. Da Blockschemata auf einem Sudoku-Raster leben, operiert die Sudokugruppe G auf der Menge *BX* aller Blockschemata. Der kombinatorische Rang ist dabei eine Invariante.
Bei Operation der Sudokugruppe G auf dem Raum *BX* aller Blockschemata studiert man die G-Bahnen G_B = {φ B | φ∈G} für B∈*BX* . Analog sind dort **fixe Blockschemata** und deren Fixoperatoren sowie Gruppen von Fixoperatoren definiert.

Spezialisierungen eines Blockschemas

Wird in einem Blockschema B jede Unbestimmte mit einer Ziffer aus {1,2,3,...,9} belegt, natürlich gleiche Unbestimmte durch gleiche Ziffern, so entsteht eine 9x9-Matrix mit Eingängen aus {1,2,3,...,9}, wir nennen sie eine **Spezialisierung** von B. Gibt es für B eine Spezialisierung zum Sudoku A∈X, kurz **S-Spezialisierung** genannt, wird das Blockschema **generisch** genannt. Die Menge aller **Sudokuspezialisierungen** eines Blockschemas B, alias **S-Spezialisierungen** von B, schreiben wir SudB. Die generischen Blockschemata sind genau jene, für die SudB nicht leer ist. Für A∈SudB wird auch A liegt auf B gesagt.
Beispielsweise kann man das Urbeispiel U_0 eines Superfix als S-Spezialisierung des einrangigen

Blockschemas $U = \begin{pmatrix} a & ssa & sa \\ s^\circ a & ss\cdot s^\circ a & s\cdot s^\circ a \\ ss^\circ a & ss\cdot ss^\circ a & s\cdot ss^\circ\cdot a \end{pmatrix}$ mit lokalen Blocksystem ansehen, wobei der Block

$a=(a_{1,1,k,l})$, k,l∈{1,2,3}, an der Blockposition $A_{1,1}$ des Sudoku-Rasters Initialblock ist, der die Lage der Unbestimmten in allen anderen Blöcken bestimmt.
Die Spezialisierung belegt die Unbestimmten des Blocks a derart durch Ziffern, dass der Initialblock a gleich dem Normblock e wird.
Superfix U_2 ergibt sich als diagonalblocknormierte S-Spezialisierung des einrangigen Blockschemas

$C(a) = \begin{pmatrix} a & s\cdot s^\circ a & ss\cdot ss^\circ a \\ ss\cdot ss^\circ a & a & s\cdot s^\circ a \\ s\cdot s^\circ a & ss\cdot ss^\circ a & a \end{pmatrix}$ bei Belegung des Initialblocks a durch e.

Die Menge aller generischen Blockschemata schreiben wir BX_g . Bei der Operation von G auf dem Raum *BX* aller Blockschemata werden generische Blockschemata wieder in solche abgebildet, also $B\in BX_g \Rightarrow g(B)\in BX_g$ für alle g∈G und jedes B∈*BX*.
Zudem sind die Mengen SudB verträglich unter G, es gilt: A∈SudB ⇒ g(A)∈Sudg(B) für alle g∈G und A∈X .

§ 8. Schemata der Fixoperator-Typen

Für Fixsudoku A∈X werden in Abhängigkeit vom Typ ihrer Fixoperatoren 3-rangige Blockschemata B mit lokalem Blocksystem angegeben, sodass A∈SudB .
Die Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 sowie die Fixsudoku A_n ,n∈{1,2,3,...,24}, der Liste $L24_{eee}$ und die Abwandlung U'_{1n} von U_1, erweisen sich als 1-rangigge S-Spezialisierungen. Die Fixsudokus S_n , n∈{1,2,3,...,36} der Liste L36eee sind 3-rangige S-Spezialisierungen.

<u>σ–Schema</u> Jedes A∈X mit dem Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1^\circ\cdot h_2^\circ\cdot h_3^\circ\cdot\sigma \in G_0$ ist eine S-Spezialisierung des Blockschemas

(1) $$B_\sigma = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_3\cdot(h_2^\circ)^2\, b & g_1\cdot h_3^\circ c \\ g_2\cdot h_1^\circ a & b & g_2\cdot g_1\cdot(h_3^\circ)^2\, c \\ g_3\cdot g_2\cdot(h_1^\circ)^2\, a & g_3\cdot h_2^\circ b & c \end{pmatrix}$$, wobei

$g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1$ und $h_j^\circ\in\{s^\circ, ss^\circ\}$ für j∈{1.2.3}

Reduziertes σ–Schema
Wenn $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1^\circ\cdot h_2^\circ\cdot h_3^\circ\cdot\sigma\in G_0$ ein Fixoperator von A∈X ist, hat das durch $w = (g_3\cdot g_2)\cdot g_3\cdot 1 \in T$ transformierte Sudoku A'=wA den Fixoperator $\varphi' = w\cdot\varphi\cdot w^{-1} = h_1^\circ\cdot h_2^\circ\cdot h_3^\circ\cdot\sigma$ mit auf id=1 reduzierten lokalen Faktoren aus $T= T_1xT_2xT_3$. Das w-transformierte Sudoku A' liegt auf dem Schema

(1*) $$wB_\sigma = \begin{pmatrix} g_3\cdot g_2 a & g_3\cdot (h_2^\circ)^2 b & h_3^\circ c \\ g_3\cdot g_2\cdot h_1^\circ a & g_3 b & (h_3^\circ)^2 c \\ g_3\cdot g_2\cdot (h_1^\circ)^2 a & g_3\cdot h_2^\circ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & (h_2^\circ)^2 b' & h_3^\circ c \\ h_1^\circ a' & b' & (h_3^\circ)^2 c \\ (h_1^\circ)^2 a' & h_2^\circ b' & c \end{pmatrix} = B^*_\sigma$$

mit den Initialblöcken $a' = g_3 \cdot g_2 a$, $b' = g_3 b$, c .

<u>σ°–Schema</u> Jedes $A \in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_3^\circ \cdot \sigma^\circ \in G_0$ ist eine S-Spezialisierung des Blockschemas

(2) $$B_{\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_2^\circ a & (g_1)^2\cdot h_3^\circ\cdot h_2^\circ a \\ (g_2)^2\cdot h_1^\circ\cdot h_3^\circ b & b & g_2\cdot h_3^\circ b \\ g_3\cdot h_1^\circ c & (g_3)^2\cdot h_2^\circ\cdot h_1^\circ c & c \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$g_i^\circ \in \{s^\circ, ss^\circ\}$ für $i \in \{1,2,3\}$ und $h_3^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_1^\circ = 1$.

Reduziertes σ°–Schema

Wenn $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_3^\circ \cdot \sigma^\circ \in G_0$ ein Fixoperator von $A \in X$ ist, hat das durch $w = (h_3^\circ \cdot h_2^\circ) \cdot h_3^\circ \cdot 1^\circ \in T^\circ$ transformierte Sudoku $A' = wA$ den Fixoperator $\varphi' = w \cdot \varphi \cdot w^{-1} = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \sigma^\circ$ mit auf id=1° reduzierten lokalen Faktoren aus $T^\circ = T_1^\circ x T_2^\circ x T_3^\circ$. Das w-transformierte Sudoku A' liegt auf dem Schema

(2*) $$wB_{\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} h_3^\circ\cdot h_2^\circ a & g_1\cdot h_3^\circ\cdot h_2^\circ a & (g_1)^2\cdot h_3^\circ\cdot h_2^\circ a \\ (g_2)^2\cdot h_3^\circ b & h_3^\circ b & g_2\cdot h_3^\circ b \\ g_3 c & (g_3)^2 c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & g_1 a' & (g_1)^2 a' \\ (g_2)^2 b' & b' & g_2 b' \\ g_3 c & (g_3)^2 c & c \end{pmatrix} = B^*_{\sigma^\circ}$$

mit den Initialblöcken $a' = h_3^\circ \cdot h_2^\circ a$, $b' = h_3^\circ b$, c .

<u>σ·σ°–Schema</u> Jedes $A \in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_3^\circ \cdot \sigma \cdot \sigma^\circ \in G_0$ ist eine S-Spezialisierung des 3-rangigen Blockschemas

(3) $$B_{\sigma\cdot\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_3\cdot h_2^\circ\cdot h_1^\circ c & g_1\cdot h_3^\circ b \\ g_2\cdot g_1\cdot h_1^\circ\cdot h_3^\circ b & g_2\cdot h_2^\circ a & c \\ g_3\cdot h_1^\circ c & b & g_3\cdot g_2\cdot h_3^\circ\cdot h_2^\circ a \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ und $h_3^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_1^\circ = 1$.

Reduziertes σ·σ°–Schema

Wenn $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_3^\circ \cdot \sigma \cdot \sigma^\circ \in G_0$ ein Fixoperator von $A \in X$ ist, hat das durch $w = (g_3 \cdot g_2) \cdot g_3 \cdot 1 \cdot (h_3^\circ \cdot h_2^\circ) \cdot h_3^\circ \cdot 1^\circ \in TxT^\circ$ transformierte Sudoku $A' = wA$ den rein globalen Fixoperator $\varphi' = w \cdot \varphi \cdot w^{-1} = \sigma \cdot \sigma^\circ$. Alle lokalen Faktoren von φ sind auf id=1 reduziert. Das w-transformierte Sudoku A' liegt auf dem Schema

(3*) $$w(B_{\sigma\cdot\sigma^\circ}) = \begin{pmatrix} g_3\cdot g_2\cdot h_3^\circ\cdot h_2^\circ a & g_3 c & h_3^\circ b \\ h_3^\circ b & g_3\cdot g_2\cdot h_3^\circ\cdot h_2^\circ a & g_3 c \\ g_3 c & h_3^\circ b & g_3\cdot g_2\cdot h_3^\circ\cdot h_2^\circ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ b' & a' & c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} = B^*_{\sigma\cdot\sigma^\circ}$$

mit Initialblöcken $a' = g_1^{-1} \cdot (h_1^\circ)^{-1} a$, $b' = h_3^\circ b$, $c' = g_3 c$.

<u>σ·σσ°–Typ</u> Jedes $A \in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_3^\circ \cdot \sigma \cdot \sigma\sigma^\circ \in G_0$ ist eine S-Spezialisierung des Blockschemas

(4) $$B_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_2^\circ c & g_1\cdot g_3\cdot h_3^\circ\cdot h_1^\circ b \\ g_2\cdot g_1\cdot h_1^\circ\cdot h_2^\circ c & b & g_2\cdot h_3^\circ a \\ g_3\cdot h_1^\circ b & g_3\cdot g_2\cdot h_2^\circ\cdot h_3^\circ a & c \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ und $h_1^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_3^\circ = 1$

Reduziertes σ·σσ°–Schema

Wenn $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1^\circ \cdot h_2^\circ \cdot h_3^\circ \cdot \sigma \cdot \sigma\sigma^\circ \in G_0$ ein Fixoperator von $A \in X$ ist, hat das durch $w = 1 \cdot (g_1 \cdot g_3) \cdot g_1 \cdot h_3^\circ \cdot (h_3^\circ \cdot h_1^\circ) \cdot 1^\circ \in TxT^\circ$ transformierte Sudoku $A' = wA$ den rein globalen Fixoperator $\varphi' = w \cdot \varphi \cdot w^{-1} = \sigma \cdot \sigma\sigma^\circ$. Alle lokalen Faktoren von φ sind auf id=1 reduziert. Das w-transformierte Sudoku A' liegt auf dem Schema

(4*) $$w(B_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ}) = \begin{pmatrix} h_3^\circ a & g_1 c & g_1\cdot g_3\cdot h_3^\circ\cdot h_1^\circ b \\ g_1 c & g_1\cdot g_3\cdot h_3^\circ\cdot h_1^\circ b & h_3^\circ a \\ g_1\cdot g_3\cdot h_3^\circ\cdot h_1^\circ b & h_3^\circ a & g_1 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ c' & b' & a' \\ b' & a' & c' \end{pmatrix} = B^*_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ}$$

mit den Initialblöcken $a' = h_3^\circ a$, $b' = g_2^{-1} \cdot (h_2^\circ)^{-1} b$, $c' = g_1 c$.

Herleitungen der Schemata σ , $\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma\sigma°$

Die Herleitungen der Schemata verlaufen nach gleichem Muster.
In Bezug auf ein allgemeines Blockschema B wird für den betreffenden Fixoperator φ aus dem Ansatz

$\varphi(\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$ nach Transformation durch den globalen Operator in φ für die lokalen Faktoren ein System von 9 Gleichungen erstellt.

Abhängig vom globalen Faktor σ, $\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma\sigma°$ als auch $\sigma\sigma$, $\sigma\sigma°$, $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$, $\sigma\sigma\cdot\sigma°$ im Fixoperatoren φ fließen aus diesem System eindeutig bestimmte Gleichungen für Produkte aus den beteiligten lokalen Blockoperatoren.

Die Form des Blockschemas zum betrachteten Typ des Fixoperators φ ist abhängig von den durch die globalen Faktoren bestimmen Sequenzen. Initialblöcke sollten nicht in gleichen Sequenzen liegen. Für globale Faktoren $\sigma\cdot\sigma°$ oder $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$ mit den Sequenzen ($b_{1,1}$, $b_{2,2}$, $b_{3,3}$), ($b_{2,1}$,$b_{3,2}$, $b_{1,3}$), ($b_{3,1}$,$b_{1,2}$, $b_{2,3}$) wählen wir Initialblöcke a, b, c auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{3,2}$ $A_{2,3}$. Man könnte auch die Blöcke auf den Rasterfeldern $A_{3,1}$, $A_{2,2}$ $A_{1,3}$ der Nebendiagonalen nehmen. Bei den 6 anderen globalen Faktoren wählen wir Initialblöcke auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $A_{3,3}$ der Hauptdiagonalen.

σ–Schema

Anhand der Operatormatrix des Produkts $g_1\cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1°\cdot h_2° \cdot h_3°$ der lokalen Operatoren im Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\sigma$ ergibt sich folgende Gleichung zwischen Block-Schematas:

Es ist $\sigma(\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}$, also soll sein

$$\begin{pmatrix} g_1\cdot h_1° & g_1\cdot h_2° & g_1\cdot h_3° \\ g_2\cdot h_1° & g_2\cdot h_2° & g_2\cdot h_3° \\ g_3\cdot h_1° & g_3\cdot h_2° & g_3\cdot h_3° \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen

$b_{1,1} = g_1\cdot h_1°\, b_{3,1}$, $b_{1,2} = g_1\cdot h_2°\, b_{3,2}$, $b_{1,3} = g_1\cdot h_3°\, b_{3,3}$

$b_{2,1} = g_2\cdot h_1°\, b_{1,1}$, $b_{2,2} = g_2\cdot h_2°\, b_{1,2}$, $b_{2,3} = g_2\cdot h_3°\, b_{1,3}$

$b_{3,1} = g_3\cdot h_1°\, b_{2,1}$, $b_{3,2} = g_3\cdot h_2°\, b_{2,2}$, $b_{3,3} = g_3\cdot h_3°\, b_{2,3}$

Sukzessives Einsetzen liefert somit

$b_{1,1} = g_1\cdot h_1°\cdot g_3\cdot h_1°\cdot g_2\cdot h_1°\, b_{1,1} \Rightarrow g_1\cdot h_1°\cdot g_3\cdot h_1°\cdot g_2\cdot h_1° =1 \Leftrightarrow g_1\cdot g_3\cdot g_2=1$ und $(h_1°)^3 =1$,

$b_{2,2} = g_2\cdot h_2°\cdot g_1\cdot h_2°\cdot g_3\cdot h_2°\, b_{2,2} \Rightarrow g_2\cdot h_2°\cdot g_1\cdot h_2°\cdot g_3\cdot h_2° =1 \Leftrightarrow g_2\cdot g_1\cdot g_3=1$ und $(h_2°)^3=1$,

$b_{3,1} = g_3\cdot h_3°\cdot g_2\cdot h_3°\cdot g_1\cdot h_3°\, b_{3,3} \Rightarrow g_3\cdot h_3°\cdot g_2\cdot h_3°\cdot g_1\cdot h_3° =1 \Leftrightarrow g_3\cdot g_2\cdot g_1=1$ und $(h_3°)^3 =1$.

Für die Operatoren g_1, g_2, g_3 gilt also $g_3\cdot g_2\cdot g_1=1$ und keiner der Operatoren $h_1°$, $h_2°$, $h_3°$ kann ein Spaltentausch sein.

Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen
{$b_{1,1}$, $b_{2,1}$, $b_{3,1}$} , {$b_{1,2}$, $b_{2,2}$, $b_{3,2}$} , {$b_{1,3}$, $b_{2,3}$, $b_{3,3}$} wählt man $a=b_{1,1}$, $b=b_{2,2}$, $c=b_{3,3}$ als Initialblöcke.
An der entstandenen Form des Schemas B_{σ}. erkennt man, dass die Annahme, einer der lokalen Operatoren $h_1°$, $h_2°$, $h_3°$ sei die Identität 1°, im betreffenden vertikalen Streifen zum Widerspruch gegen die Sudokubedingungen führt..

Das Schema $B^*_\sigma = w\, B_\sigma$ ergibt sich, wenn man B_σ mittels des lokalen Operators $w = (g_3\cdot g_2)\cdot g_3 \cdot 1 \in T$ transformiert und dabei die Gleichung $g_3\cdot g_2\cdot g_1=1$ berücksichtigt, also rechnet:

$$wB_\sigma = \begin{pmatrix} g_3\cdot g_2 & g_3\cdot g_2 & g_3\cdot g_2 \\ g_3 & g_3 & g_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_3\cdot (h_2°)^2\, b & g_1\cdot h_3°\, c \\ g_2\cdot h_1°\, a & b & g_2\cdot g_1\cdot (h_3°)^2\, c \\ g_3\cdot g_2\cdot (h_1°)^2\, a & g_3\cdot h_2°\, b & c \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} g_3 \cdot g_2 a & g_3 \cdot (h_2{}^\circ)^2\, b & h_3{}^\circ c \\ g_3 \cdot g_2 \cdot h_1{}^\circ a & g_3 b & (h_3{}^\circ)^2\, c \\ g_3 \cdot g_2 \cdot (h_1{}^\circ)^2\, a & g_3 \cdot h_2{}^\circ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & (h_2{}^\circ)^2\, b' & h_3{}^\circ c \\ h_1{}^\circ a' & b' & (h_3{}^\circ)^2\, c \\ (h_1{}^\circ)^2\, a' & h_2{}^\circ b' & c \end{pmatrix} = B^*_\sigma\,,$$

wobei anstelle von a, b neue Initialblöcke $a' = g_3 \cdot g_2\, a$, $b' = g_3\, b$ gesetzt sind.

σ°–Schema

Die Herleitung der Schemata B_{σ° und $B^*_{\sigma^\circ}$ verläuft dual zu der des σ–Schemas.

Es ist $\sigma^\circ(\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix}$, also soll sein

$$\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1{}^\circ & g_1 \cdot h_2{}^\circ & g_1 \cdot h_3{}^\circ \\ g_2 \cdot h_1{}^\circ & g_2 \cdot h_2{}^\circ & g_2 \cdot h_3{}^\circ \\ g_3 \cdot h_1{}^\circ & g_3 \cdot h_2{}^\circ & g_3 \cdot h_3{}^\circ \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} b_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen

$b_{1,1} = g_1 \cdot h_1{}^\circ\, b_{1,3}$, $b_{1,2} = g_1 \cdot h_2{}^\circ\, b_{1,1}$, $b_{1,3} = g_1 \cdot h_3{}^\circ\, b_{1,2}$
$b_{2,1} = g_2 \cdot h_1{}^\circ\, b_{2,3}$, $b_{2,2} = g_2 \cdot h_2{}^\circ\, b_{2,1}$, $b_{2,3} = g_2 \cdot h_3{}^\circ\, b_{2,2}$
$b_{3,1} = g_3 \cdot h_1{}^\circ\, b_{3,3}$, $b_{3,2} = g_3 \cdot h_2{}^\circ\, b_{3,1}$, $b_{3,3} = g_3 \cdot h_3{}^\circ\, b_{3,2}$

Sukzessives Einsetzen und Blockoperatoren-Vergleich liefert die Implikationen

$b_{1,1} = g_1 \cdot h_1{}^\circ \cdot g_1 \cdot h_3{}^\circ \cdot g_1 \cdot h_2{}^\circ\, b_{1,1} \Rightarrow g_1 \cdot h_1{}^\circ \cdot g_1 \cdot h_3{}^\circ \cdot g_1 \cdot h_2{}^\circ = 1 \Leftrightarrow (g_1)^3 = 1$ und $h_1{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ = 1$.
$b_{2,1} = g_2 \cdot h_1{}^\circ \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ \cdot g_2 \cdot h_2{}^\circ\, b_{2,1} \Rightarrow g_2 \cdot h_1{}^\circ \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ \cdot g_2 \cdot h_2{}^\circ = 1 \Leftrightarrow (g_2)^3 = 1$ und $h_1{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ = 1$.
$b_{3,1} = g_3 \cdot h_1{}^\circ \cdot g_3 \cdot h_3{}^\circ \cdot g_3 \cdot h_2{}^\circ\, b_{3,1} \Rightarrow g_3 \cdot h_1{}^\circ \cdot g_3 \cdot h_3{}^\circ \cdot g_3 \cdot h_2{}^\circ = 1 \Leftrightarrow (g_3)^3 = 1$ und $h_1{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ = 1$.

Keiner der Operatoren g_1, g_2, g_3 kann also ein Spaltentausch sein und für die $h_1{}^\circ$, $h_2{}^\circ$, $h_3{}^\circ$ gilt $h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ \cdot h_1{}^\circ = 1$.

Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen $\{b_{1,1}, b_{1,3}, b_{1,2}\}$, $\{b_{2,1}, b_{2,3}, b_{2,2}\}$, $\{b_{3,1}, b_{3,3}, b_{3,2}\}$, wählt man $a = b_{1,1}$, $b = b_{2,2}$, $c = b_{3,3}$ als Initialblöcke.

An der entstandenen Form des Schemas B_{σ°. erkennt man, dass die Annahme, einer der lokalen Operatoren g_1, g_2, g_3 sei die Identität 1, im betreffenden horizontalen Streifen zum Widerspruch gegen die Sudokubedingungen führt.

Das Schema $B^*_{\sigma^\circ} = w\, B_{\sigma^\circ}$ ergibt sich, wenn man B_{σ° mittels des lokalen Operators $w = (h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ) \cdot h_3{}^\circ \cdot 1 \in T^\circ$ transformiert und dabei die Gleichung $h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ \cdot h_1{}^\circ = 1^\circ$ berücksichtigt, also rechnet:

$$w(B_{\sigma^\circ}) = \begin{pmatrix} h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ & h_3{}^\circ & 1^\circ \\ h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ & h_3{}^\circ & 1^\circ \\ h_3 \cdot h_2{}^\circ & h_3{}^\circ & 1^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot h_2{}^\circ a & (g_1)^2 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a \\ (g_2)^2 \cdot h_1{}^\circ \cdot h_3{}^\circ b & b & g_2 \cdot h_3{}^\circ b \\ g_3 \cdot h_1{}^\circ c & (g_3)^2 \cdot h_2{}^\circ \cdot h_1{}^\circ c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a & g_1 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a & (g_1)^2 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a \\ (g_2)^2 \cdot h_3{}^\circ b & h_3{}^\circ b & g_2 \cdot h_3{}^\circ b \\ g_3 c & (g_3)^2 c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & g_1 a' & (g_1)^2\, a' \\ (g_2)^2\, b' & b' & g_2 b' \\ g_3 c & (g_3)^2\, c & c \end{pmatrix} = B^*_{\sigma^\circ}\,,$$

wobei anstelle von a, b neue Initialblöcke $a' = h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a$, $b' = h_3{}^\circ b$ gesetzt sind .

σ·σ°–Schema

Zur Herleitung der Form des σ·σ°–Schemas rechnet man :.

Es ist $\sigma \cdot \sigma^\circ(\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$, also soll sein

$$\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1{}^\circ & g_1 \cdot h_2{}^\circ & g_1 \cdot h_3{}^\circ \\ g_2 \cdot h_1{}^\circ & g_2 \cdot h_2{}^\circ & g_2 \cdot h_3{}^\circ \\ g_3 \cdot h_1{}^\circ & g_3 \cdot h_2{}^\circ & g_3 \cdot h_3{}^\circ \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} b_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen

$b_{1,1} = g_1 \cdot h_1{}^\circ\, b_{3,3}$, $b_{1,2} = g_1 \cdot h_2{}^\circ\, b_{3,1}$, $b_{1,3} = g_1 \cdot h_3{}^\circ\, b_{3,2}$
$b_{2,1} = g_2 \cdot h_1{}^\circ\, b_{1,3}$, $b_{2,2} = g_2 \cdot h_2{}^\circ\, b_{1,1}$, $b_{2,3} = g_2 \cdot h_3{}^\circ\, b_{1,2}$
$b_{3,1} = g_3 \cdot h_1{}^\circ\, b_{2,3}$, $b_{3,2} = g_3 \cdot h_2{}^\circ\, b_{2,1}$, $b_{3,3} = g_3 \cdot h_3{}^\circ\, b_{2,2}$

Sukzessives Einsetzen und Blockoperatoren-Vergleich liefert die Implikationen
$b_{1,1} = g_1{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_3{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_2{\cdot}h_2^\circ\ b_{1,1} \Rightarrow g_1{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_3{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_2{\cdot}h_2^\circ =1 \Leftrightarrow g_1{\cdot}g_3{\cdot}g_2=1$ und $h_1^\circ{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ h_2^\circ =1$.
$b_{2,1} = g_2{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_1{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_3{\cdot}h_2^\circ\ b_{2,1} \Rightarrow g_2{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_1{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_3{\cdot}h_2^\circ =1 \Leftrightarrow g_2{\cdot}g_1{\cdot}g_3=1$ und $h_1^\circ{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ h_2^\circ =1$.
$b_{3,1} = g_3{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_2{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_1{\cdot}h_2^\circ\ b_{3,1} \Rightarrow g_3{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_2{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_1{\cdot}h_2^\circ =1 \Leftrightarrow g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$ und $h_1^\circ{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ h_2^\circ =1$.
Fürs Tripel mit den Faktoren g_1, g_2, g_3 gilt $g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$, fürs Tripel mit h_1° , h_2° , h_3° gilt $h_3^\circ{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ h_1^\circ =1$.
Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen
$\{b_{1,1} , b_{2,2} , b_{3,3}\}$, $\{ b_{2,1} , b_{3,2} , b_{1,3}\}$, $\{b_{3,1} , b_{1,2} , b_{2,3} \}$, wählt man die Blöcke $a=b_{1,1}$, $b=b_{3,2}$, $c=b_{2,3}$ auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{3,2}$ $A_{2,3}$ zur Bildung einer Initialbasis. Die Blöcke in der Hauptdiagonalen liegen simultan in einer Sequenz und können hier nicht gut als Initialbasis dienen.

Man erhält das Schema $B_{\sigma\cdot\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_2{}^\circ \cdot h_1{}^\circ c & g_1 \cdot h_3{}^\circ b \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1{}^\circ \cdot h_3{}^\circ b & g_2 \cdot h_2{}^\circ a & c \\ g_3 \cdot h_1{}^\circ c & b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a \end{pmatrix}$, wobei

$g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$ und $h_3^\circ{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ h_1^\circ =1$.

Das Schema $B^*_{\sigma\cdot\sigma^\circ} = wB_{\sigma\cdot\sigma^\circ}$ ergibt sich, wenn man $B_{\sigma\cdot\sigma^\circ}$ mittels des lokalen Operators $w = (g_3{\cdot}g_2){\cdot}g_3 \cdot 1 \cdot (h_3^\circ{\cdot}h_2^\circ) \cdot h_3^\circ{\cdot}1^\circ \in TxT^\circ$ transformiert und dabei die Gleichungen $g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$ und $h_3^\circ{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ h_1^\circ =1$ berücksichtigt, also wie folgt rechnet: $w(B_{\sigma\cdot\sigma^\circ}) =$

$$\begin{pmatrix} g_3 \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ & g_3 \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ & g_3 \cdot g_2 \\ g_3 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ & g_3 \cdot h_3{}^\circ & g_3 \\ h_3 \cdot h_2{}^\circ & h_3{}^\circ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_2{}^\circ \cdot h_1{}^\circ c & g_1 \cdot h_3{}^\circ b \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1{}^\circ \cdot h_3{}^\circ b & g_2 \cdot h_2{}^\circ a & c \\ g_3 \cdot h_1{}^\circ c & b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_3 \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a & g_3\, c & h_3{}^\circ b \\ h_3{}^\circ b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a & g_3\, c \\ g_3\, c & h_3{}^\circ b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_2{}^\circ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ b' & a' & c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} = B^*_{\sigma\cdot\sigma^\circ} ,$$

wobei anstelle von a, b , c neue Initialblöcke $a' = g_3{\cdot}g_2{\cdot}h_3^\circ{\cdot}h_2^\circ a$, $b' = h_3^\circ\, b$, $c' = g_3\, c$ gesetzt sind.
Den Initialblock a' kann man zufolge $g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$ und $h_3^\circ{\cdot}h_2^\circ{\cdot}h_1^\circ =1$ auch $a' = g_1^{-1}{\cdot}(h_1^\circ)^{-1}a$ schreiben.

σ·σσ°–Schema
Zur Herleitung der Form des $\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$–Schemas rechnet man:

Es soll sein: $\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1{}^\circ & g_1 \cdot h_2{}^\circ & g_1 \cdot h_3{}^\circ \\ g_2 \cdot h_1{}^\circ & g_2 \cdot h_2{}^\circ & g_2 \cdot h_3{}^\circ \\ g_3 \cdot h_1{}^\circ & g_3 \cdot h_2{}^\circ & g_3 \cdot h_3{}^\circ \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,1} \\ b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,1} \\ b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,1} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$.

Das führt zum System der 9 Gleichungen
$b_{1,1} = g_1{\cdot}h_1^\circ\ b_{3,2}$, $b_{1,2} = g_1{\cdot}h_2^\circ\ b_{3,3}$, $b_{1,3} = g_1{\cdot}h_3^\circ\ b_{3,1}$
$b_{2,1} = g_2{\cdot}h_1^\circ\ b_{1,2}$, $b_{2,2} = g_2{\cdot}h_2^\circ\ b_{1,3}$, $b_{2,3} = g_2{\cdot}h_3^\circ\ b_{1,1}$
$b_{3,1} = g_3{\cdot}h_1^\circ\ b_{2,2}$, $b_{3,2} = g_3{\cdot}h_2^\circ\ b_{2,3}$, $b_{3,3} = g_3{\cdot}h_3^\circ\ b_{2,1}$
Es ergeben sich nach sukzessives Einsetzen der 9 Gleichungen die Implikationen
$b_{1,1} = g_1{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_3{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ g_2{\cdot}h_3^\circ\ b_{1,1} \Rightarrow g_1{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_3{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ g_2{\cdot}h_3^\circ =1 \Leftrightarrow g_1{\cdot}g_3{\cdot}g_2=1$ und $h_1^\circ{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ h_3^\circ =1$,
$b_{2,2} = g_2{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ g_1{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_3{\cdot}h_1^\circ\ b_{2,2} \Rightarrow g_2{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ g_1{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_3{\cdot}h_1^\circ =1 \Leftrightarrow g_2{\cdot}g_1{\cdot}g_3=1$ und $h_2^\circ{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ h_1^\circ =1$,
$b_{3,3} = g_3{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_2{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_1{\cdot}h_2^\circ\ b_{3,3} \Rightarrow g_3{\cdot}h_3^\circ{\cdot}\ g_2{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ g_1{\cdot}h_2^\circ =1 \Leftrightarrow g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$ und $h_3^\circ{\cdot}h_1^\circ{\cdot}\ h_2^\circ =1$.
Fürs Tripel mit den Faktoren g_1, g_2, g_3 gilt $g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$, fürs Tripel mit h_1° , h_2° , h_3° gilt $h_1^\circ{\cdot}h_2^\circ{\cdot}\ h_3^\circ =1$.
Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen
$\{b_{1,1} , b_{2,3} , b_{3,2}\}$, $\{ b_{2,1} , b_{3,3} , b_{1,2}\}$, $\{b_{3,1} , b_{1,3} , b_{2,2} \}$, wählt man mit den Blöcken $a=b_{1,1}$, $b=b_{3,3}$, $c=b_{2,2}$ auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{3,3}$ $A_{2,2}$ der Hauptdiagonalen eine Initialbasis. Man erhält das Schema

$$B_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot h_2{}^\circ c & g_1 \cdot g_3 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_1{}^\circ b \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1{}^\circ \cdot h_2{}^\circ c & b & g_2 \cdot h_3{}^\circ a \\ g_3 \cdot h_1{}^\circ b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ a & c \end{pmatrix}.$$

Das Schema $B^*_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ} = w\, B_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ}$ ergibt sich, wenn man $B_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ}$ mittels des lokalen Operators $w =1{\cdot}(g_1{\cdot}g_3){\cdot}\ g_1 \cdot h_3^\circ{\cdot}(h_3^\circ{\cdot}h_1^\circ) \cdot 1^\circ \in TxT^\circ$ transformiert und die Gleichungen $g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$ und $h_1^\circ{\cdot}h_2^\circ{\cdot}h_3^\circ=1$ berücksichtigt, also wie folgt rechnet: $w(B_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ}) =$

$$\begin{pmatrix} h_3{}^\circ & h_3{}^\circ \cdot h_1{}^\circ & 1 \\ g_1 \cdot g_3 \cdot h_3{}^\circ & g_1 \cdot g_3 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_1{}^\circ & g_1 \cdot g_3 \\ g_1 \cdot h_3{}^\circ & g_1 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_1{}^\circ & g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot h_2{}^\circ c & g_1 \cdot g_3 \cdot h_3{}^\circ \cdot h_1{}^\circ b \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1{}^\circ \cdot h_2{}^\circ c & b & g_2 \cdot h_3{}^\circ a \\ g_3 \cdot h_1{}^\circ b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ a & c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} h_3{}^\circ a & g_1 c & g_1\cdot g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot h_1{}^\circ b \\ g_1 c & g_1\cdot g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot h_1{}^\circ b & h_3{}^\circ a \\ g_1\cdot g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot h_1{}^\circ b & h_3{}^\circ a & g_1 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ b' & b' & a' \\ b' & a' & c' \end{pmatrix} = B^*_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ},$$

wobei statt a, b , c neue Initialblöcke Initialblöcken $a'= h_3{}^\circ a$, $b'= g_1\cdot g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot h_1{}^\circ b$, $c'= g_1 c$ gesetzt sind. Den Initialblock b' kann man zufolge $g_3\cdot g_2\cdot g_1=1$ und $h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ =1$ auch $a'= g_1^{-1}\cdot(h_1{}^\circ)^{-1}a$ schreiben.

Quadrate von Fixoperatoren

Wenn ein Fixsudoku $A\in X$ einen Fixoperator φ mit einem globalen Faktor aus der Menge $\{\sigma , \sigma^\circ, \sigma\cdot\sigma^\circ , \sigma\cdot\sigma\sigma^\circ\}$ hat, besitzt es mit dem Quadrat φ^2 des Operators einen Fixoperator φ' mit einem globalen Faktor aus der Menge $\{\sigma\sigma , \sigma\sigma^\circ, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ , \sigma\sigma\cdot\sigma^\circ\}$. Die Quadrate der Operatoren haben in Abhängigkeit vom Typ folgende Form

(1) $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot\sigma \in G_0 \;\rightarrow\; \varphi^2 = g_2\cdot g_1 \cdot g_3\cdot g_2\cdot g_1\cdot g_3 \cdot (h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ)^2 \cdot \sigma\sigma$
(2) $\varphi = g_1\cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot\sigma^\circ \in G_0 \rightarrow \varphi^2 = (g_1\cdot g_2\cdot g_3)^2\cdot h_2{}^\circ\cdot h_1{}^\circ \cdot h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ \cdot \sigma\sigma^\circ$
(3) $\varphi = g_1\cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot\sigma\cdot\sigma^\circ \in G_0 \rightarrow \varphi^2 = g_2\cdot g_1 \cdot g_3\cdot g_2\cdot g_1\cdot g_3 \cdot h_2{}^\circ\cdot h_1{}^\circ \cdot h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ \cdot \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$
(4) $\varphi = g_1\cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ \in G_0 \rightarrow \varphi^2 = g_2\cdot g_1 \cdot g_3\cdot g_2\cdot g_1\cdot g_3 \cdot h_3{}^\circ\cdot h_1{}^\circ \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ \cdot \sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$

Die globalen Faktoren in den Quadraten beschreiben Typen (1'), (2'), (3'),(4').
Zum vorgelegten Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\theta\cdot\eta^\circ \in G_0$ dieser Typen $\sigma\sigma$, $\sigma\sigma^\circ$, $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$, $\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$ findet man in analogen Herleitungen folgende Blockschemata:

<u>σσ–Schema</u> Jedes $A\in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\sigma\sigma \in G_0$
ist eine S-Spezialisierung des Blockschemas

(1') $$B_{\sigma\sigma}=\begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_2{}^\circ b & g_1\cdot g_2\cdot (h_3{}^\circ)^2 c \\ g_2\cdot g_3\cdot (h_1{}^\circ)^2 a & b & g_2\cdot h_3{}^\circ c \\ g_3\cdot h_1{}^\circ a & g_3\cdot g_1\cdot (h_2{}^\circ)^2 b & c \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$g_1\cdot g_2 \cdot g_3 =1$ und $h_j{}^\circ\in\{s^\circ,ss^\circ\}$ für $j\in\{1.2,3\}$

Reduziertes σσ-–Schema

Wenn $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot\sigma\in G_0$ ein Fixoperator von $A\in X$ ist, hat das durch $w = (g_2\cdot g_3)\cdot 1\cdot g_2 \in T$ transformierte Sudoku $A'=wA$ den Fixoperator $\varphi'=w\cdot\varphi\cdot w^{-1} = h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ \cdot h_3{}^\circ \cdot\sigma$ mit auf id=1 reduzierten lokalen Faktoren aus $T= T_1xT_2xT_3$. Das w-transformierte Sudoku A' liegt auf dem Schema

(1'*) $$wB_{\sigma\sigma}=\begin{pmatrix} g_2\cdot g_3 a & h_2{}^\circ b & g_2\cdot (h_3{}^\circ)^2 c \\ g_2\cdot g_3\cdot (h_1{}^\circ)^2 a & b & g_2\cdot h_3{}^\circ c \\ g_2\cdot g_3\cdot h_1{}^\circ a & (h_2{}^\circ)^2 b & g_2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & h_2{}^\circ b & (h_3{}^\circ)^2 c' \\ (h_1{}^\circ)^2 a' & b & h_3{}^\circ c' \\ h_1{}^\circ a' & (h_2{}^\circ)^2 b & c' \end{pmatrix} = B'^*_{\sigma\sigma} \text{ mit}$$

den Initialblöcken $a'=g_2\cdot g_3 a$, b, $c'=g_2 c$.

<u>σσ°–Schema</u> Jedes $A\in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\sigma\sigma^\circ \in G_0$
ist eine S-Spezialisierung des Blockschemas

(2') $$B_{\sigma\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & (g_1)^2\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a & g_1\cdot h_3{}^\circ a \\ g_2\cdot h_1{}^\circ b & b & (g_2)^2\cdot h_3{}^\circ\cdot h_1{}^\circ b \\ (g_3)^2\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ c & g_3\cdot h_2{}^\circ c & c \end{pmatrix} \text{ , wobei}$$

$g_i\in\{s,ss\}$ für $i\in\{1.2.3\}$ und $h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ = 1$.

Reduziertes σσ°-–Schema

Wenn $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\sigma\in G_0$ ein Fixoperator von $A\in X$ ist, hat das durch $w =(h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ)\cdot 1^\circ\cdot h_2{}^\circ \in T^\circ$ transformierte Sudoku $A'=wA$ den Fixoperator $\varphi'=w\cdot\varphi\cdot w^{-1} =g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot\sigma\sigma^\circ$ mit auf id=1° reduzierten lokalen Faktoren aus $T^\circ= T_1{}^\circ xT_2{}^\circ xT_3{}^\circ$. Das w-transformierte Sudoku A' liegt auf dem Schema

(2'*) $$wB_{\sigma}=\begin{pmatrix} h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a & (g_1)^2\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a & g_1\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a \\ g_2 b & b & (g_2)^2 b \\ (g_3)^2\cdot h_2{}^\circ c & g_3\cdot h_2{}^\circ c & h_2{}^\circ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & (g_1)^2 a' & g_1 a' \\ g_2 b & b & (g_2)^2 b \\ (g_3)^2 c' & g_3 c' & c' \end{pmatrix} = B'^*_{\sigma\sigma^\circ}$$

mit den Initialblöcken $a'= h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a$, b, $c'=h_2{}^\circ c$.

<u>σσ·σσ°–Schema</u> Jedes $A\in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ \in G_0$
ist eine S-Spezialisierung des Blockschemas

(3') $B_{\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_2{}^\circ c & g_1\cdot g_2\cdot h_3{}^\circ\cdot h_1{}^\circ b \\ g_2\cdot h_1{}^\circ b & g_2\cdot g_3\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a & c \\ g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ c & b & g_3\cdot h_3{}^\circ a \end{pmatrix}$, wobei

$g_1\cdot g_2\cdot g_3 = 1$ und $h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ = 1$.

Reduziertes $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$–Schema

Wenn $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\ \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ \in G_0$ ein Fixoperator von $A\in X$ ist, hat das durch $w = (g_2\cdot g_3)\cdot 1\cdot g_2\cdot (h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ)\cdot 1\cdot h_2{}^\circ \in TxT^\circ$ transformierte Sudoku A'=wA den rein globalen Fixoperator $\varphi' = w\cdot\varphi\cdot w^{-1} = \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$. Alle lokalen Faktoren von φ sind auf id=1 reduziert.
Das w-transformierte Sudoku A' liegt auf dem Schema

(3'*) $w(B_{\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ}) = \begin{pmatrix} g_2\cdot g_3\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a & h_2{}^\circ c & g_2 b \\ g_2 b & g_2\cdot g_3\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a & h_2{}^\circ c \\ h_2{}^\circ c & g_2 b & g_2\cdot g_3\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ b' & a' & c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} = B'^{*}_{\sigma\sigma\cdot\cdot\sigma^\circ}$

mit Initialblöcken $a' = g_1{}^{-1}\cdot(h_1{}^\circ)^{-1}a$, $b' = g_2 b$, $c' = h_2{}^\circ c$.

<u>$\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$–Schema</u> Jedes $A\in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ \in G_0$ ist eine S-Spezialisierung des Blockschemas

(4') $B_{\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_2\cdot h_2{}^\circ\cdot h_1 c & g_1\cdot h_3{}^\circ b \\ g_2\cdot h_1{}^\circ c & b & g_2\cdot g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ a \\ g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b & g_3\cdot h_2{}^\circ a & c \end{pmatrix}$, wobei

$g_1\cdot g_2\cdot g_3 = 1$ und $h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_1{}^\circ = 1$.

Reduziertes $\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$–Schema

Wenn $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ \in G_0$ ein Fixoperator von $A\in X$ ist, hat das durch $w = g_3\cdot(g_3\cdot g_1)\cdot 1\cdot 1^\circ\cdot(h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ)\cdot h_1{}^\circ \in TxT^\circ$ transformierte Sudoku A'=wA den rein globalen Fixoperator $\varphi' = w\cdot\varphi\cdot w^{-1} = \sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$. Alle lokalen Faktoren von φ sind auf id=1 reduziert. Das w-transformierte Sudoku A' liegt auf dem Schema

(4'*) $w(B_{\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ}) = \begin{pmatrix} g_3 a & h_1 c & g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b \\ h_1{}^\circ c & g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b & g_3 a \\ g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b & g_3 a & h_1{}^\circ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ c' & b' & a' \\ b' & a' & c' \end{pmatrix} = B'^{*}_{\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ}$

mit Initialblöcken $a' = g_3 a$, $b' = g_2{}^{-1}\cdot(h_2{}^\circ)^{-1}b$, $c' = h_1{}^\circ c$.

Herleitungen der Schemata $\sigma\sigma$, $\sigma\sigma^\circ$, $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$, $\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$

Die Beweise laufen analog zu den Herleitungen der Schemata σ , σ°, $\sigma\cdot\sigma^\circ$, $\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$.
Im Resultat zeigt sich in den Tripeln der Operatoren g_1, g_2, g_3 als auch von h_1 , h_2, h_3 , notiert als Produkt mit dem Ergebnis 1, eine veränderte Reihenfolge.

$\sigma\sigma$–Schema

Vorgelegt ist der Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\sigma\sigma$.

Es ist $\sigma\sigma\left(\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \end{pmatrix}$, also soll sein

$$\begin{pmatrix} g_1\cdot h_1{}^\circ & g_1\cdot h_2{}^\circ & g_1\cdot h_3{}^\circ \\ g_2\cdot h_1{}^\circ & g_2\cdot h_2{}^\circ & g_2\cdot h_3{}^\circ \\ g_3\cdot h_1{}^\circ & g_3\cdot h_2{}^\circ & g_3\cdot h_3{}^\circ \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen

$b_{1,1} = g_1\cdot h_1{}^\circ\ b_{2,1}$, $b_{1,2} = g_1\cdot h_2{}^\circ\ b_{2,2}$, $b_{1,3} = g_1\cdot h_3{}^\circ\ b_{2,3}$
$b_{2,1} = g_2\cdot h_1{}^\circ\ b_{3,1}$, $b_{2,2} = g_2\cdot h_2{}^\circ\ b_{3,2}$, $b_{2,3} = g_2\cdot h_3{}^\circ\ b_{3,3}$
$b_{3,1} = g_3\cdot h_1{}^\circ\ b_{1,1}$, $b_{3,2} = g_3\cdot h_2{}^\circ\ b_{1,2}$, $b_{3,3} = g_3\cdot h_3{}^\circ\ b_{1,3}$

Sukzessives Einsetzen liefert somit

$b_{1,1} = g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot\ g_2\cdot h_1{}^\circ\cdot\ g_3\cdot h_1{}^\circ\ b_{1,1} \Rightarrow g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot\ g_2\cdot h_1{}^\circ\cdot\ g_3\cdot h_1{}^\circ = 1 \Leftrightarrow g_1\cdot g_2\cdot g_3 = 1$ und $(h_1{}^\circ)^3 = 1$.
$b_{2,2} = g_2\cdot h_2{}^\circ\cdot\ g_3\cdot h_2{}^\circ\cdot\ g_1\cdot h_2{}^\circ\ b_{2,2} \Rightarrow g_2\cdot h_2{}^\circ\cdot\ g_3\cdot h_2{}^\circ\cdot\ g_1\cdot h_2{}^\circ = 1 \Leftrightarrow g_2\cdot g_3\cdot g_1 = 1$ und $(h_2{}^\circ)^3 = 1$.
$b_{3,3} = g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot\ g_1\cdot h_3{}^\circ\cdot\ g_2\cdot h_3{}^\circ\ b_{3,3} \Rightarrow g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot\ g_1\cdot h_3{}^\circ\cdot\ g_2\cdot h_3{}^\circ = 1 \Leftrightarrow g_3\cdot g_1\cdot g_2 = 1$ und $(h_3{}^\circ)^3 = 1$.

Für die Operatoren g_1, g_2, g_3 gilt also $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3=1$ und keiner der Operatoren $h_1°$, $h_2°$, $h_3°$ kann ein Spaltentausch sein.
Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen
$\{b_{1,1}, b_{2,1}, b_{3,1}\}$, $\{b_{1,2}, b_{2,2}, b_{3,2}\}$, $\{b_{1,3}, b_{2,3}, b_{3,3}\}$ wählt man $a=b_{1,1}$, $b=b_{2,2}$, $c=b_{3,3}$ als Initialblöcke.
An der entstandenen Form des Schemas $B_{\sigma\sigma}$ erkennt man, dass die Annahme, einer der lokalen Operatoren $h_1°$, $h_2°$, $h_3°$ sei die Identität 1°, im betreffenden vertikalen Streifen zum Widerspruch gegen die Sudokubedingungen führt.
Das Schema $B^*_{\sigma\sigma}$ ergibt sich, wenn man $B_{\sigma\sigma}$ mittels des lokalen Operators $w = (g_2 \cdot g_3) \cdot 1 \cdot g_3 \in T$ transformiert und dabei die Gleichung $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3=1$ berücksichtigt, also wie folgt rechnet:

$$w(B_{\sigma\sigma}) = \begin{pmatrix} g_2 \cdot g_3 & g_2 \cdot g_3 & g_2 \cdot g_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ g_2 & g_2 & g_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a & g_1 \cdot h_2° b & g_1 \cdot g_2 \cdot (h_3°)^2 c \\ g_2 \cdot g_3 \cdot (h_1°)^2 a & b & g_2 \cdot h_3° c \\ g_3 \cdot h_1° a & g_3 \cdot g_1 \cdot (h_2°)^2 b & c \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} g_2 \cdot g_3 a & h_2° b & g_2 \cdot (h_3°)^2 c \\ g_2 \cdot g_3 \cdot (h_1°)^2 a & b & g_2 \cdot h_3° c \\ g_2 \cdot g_3 \cdot h_1° a & (h_2°)^2 b & g_2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & h_2° b & (h_3°)^2 c' \\ (h_1°)^2 a' & b & h_3° c' \\ h_1° a' & (h_2°)\ b & c' \end{pmatrix} = B^*_{\sigma\sigma} ,$$

wobei anstelle von a, c neue Initialblöcke $a' = g_2 \cdot g_3\, a$, $c' = g_2\, c$ gesetzt.

σσ°–Schema
Die Herleitung läuft dual zu der des σσ–Schemas.

Es ist $\sigma\sigma°\left(\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,1} \\ b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,1} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,1} \end{pmatrix}$, also soll sein

$$\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1° & g_1 \cdot h_2° & g_1 \cdot h_3° \\ g_2 \cdot h_1° & g_2 \cdot h_2° & g_2 \cdot h_3° \\ g_3 \cdot h_1° & g_3 \cdot h_2° & g_3 \cdot h_3° \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,1} \\ b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,1} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,1} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen
$b_{1,1} = g_1 \cdot h_1°\, b_{1,2}$, $b_{1,2} = g_1 \cdot h_2°\, b_{1,3}$, $b_{1,3} = g_1 \cdot h_3°\, b_{1,1}$
$b_{2,1} = g_2 \cdot h_1°\, b_{2,2}$, $b_{2,2} = g_2 \cdot h_2°\, b_{2,3}$, $b_{2,3} = g_2 \cdot h_3°\, b_{2,1}$
$b_{3,1} = g_3 \cdot h_1°\, b_{3,2}$, $b_{3,2} = g_3 \cdot h_2°\, b_{3,3}$, $b_{3,3} = g_3 \cdot h_3°\, b_{3,1}$
Sukzessives Einsetzen und Blockoperatoren-Vergleich liefert die Implikationen
$b_{1,1} = g_1 \cdot h_1° \cdot g_1 \cdot h_2° \cdot g_1 \cdot h_3°\, b_{1,1} \Rightarrow g_1 \cdot h_1° \cdot g_1 \cdot h_2° \cdot g_1 \cdot h_3° = 1 \Leftrightarrow (g_1)^3 = 1$ und $h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° = 1$.
$b_{2,1} = g_2 \cdot h_1° \cdot g_2 \cdot h_2° \cdot g_2 \cdot h_3°\, b_{2,1} \Rightarrow g_2 \cdot h_1° \cdot g_2 \cdot h_2° \cdot g_2 \cdot h_3° = 1 \Leftrightarrow (g_2)^3=1$ und $h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° = 1$.
$b_{3,1} = g_3 \cdot h_1° \cdot g_3 \cdot h_2° \cdot g_3 \cdot h_3°\, b_{3,1} \Rightarrow g_3 \cdot h_1° \cdot g_3 \cdot h_2° \cdot g_3 \cdot h_3° = 1 \Leftrightarrow (g_3)^3=1$ und $h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° = 1$.
Keiner der Operatoren g_1, g_2, g_3 kann also ein Spaltentausch sein und für die $h_1°$, $h_2°$, $h_3°$ gilt $h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° = 1$.
Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen
$\{b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}\}$, $\{b_{2,1}, b_{2,2}, b_{2,3}\}$, $\{b_{3,1}, b_{3,2}, b_{3,3}\}$ wählt man $a=b_{1,1}$, $b=b_{2,2}$, $c=b_{3,3}$ als Initialblöcke.
An der entstandenen Form des Schemas $B_{\sigma\sigma°}$. erkennt man: Die Annahme, einer der lokalen Operatoren g_1, g_2, g_3 sei die Identität 1, führt im betreffenden horizontalen Streifen zum Widerspruch gegen die Sudokubedingungen.
Das Schema $B^*_{\sigma\sigma°} = w\, B_{\sigma\sigma^*}$ ergibt sich, wenn man $B_{\sigma\sigma°}$ mittels des lokalen Operators $w = (h_2° \cdot h_3°) \cdot 1° \cdot h_2° \in T°$ transformiert und dabei die Gleichung $h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° = 1°$ berücksichtigt, also rechnet:

$$w(B_{\sigma\sigma°}) = \begin{pmatrix} h_2° \cdot h_3° & 1 & h_2° \\ h_2° \cdot h_3° & 1 & h_2° \\ h_2 \cdot h_3° & 1 & h_2° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & (g_1)^2 \cdot h_2° \cdot h_3° a & g_1 \cdot h_3° a \\ g_2 \cdot h_1° b & b & (g_2)^2 \cdot h_3° \cdot h_1° b \\ (g_3)^2 \cdot h_1° \cdot h_2° c & g_3 \cdot h_2° c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_2° \cdot h_3° a & (g_1)^2 \cdot h_2° \cdot h_3° a & g_1 \cdot h_2° \cdot h_3° a \\ g_2 b & b & (g_2)^2 b \\ (g_3)^2 \cdot h_2° c & g_3 \cdot h_2° c & h_2° c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & (g_1)^2 a' & g_1 a' \\ g_2 b & b & (g_2)^2 b \\ (g_3)^2 c & g_3 c & c \end{pmatrix} = B^*_{\sigma\sigma°} ,$$

wobei anstelle von a, c neue Initialblöcke $a' = h_2° \cdot h_3°\, a$, $c' = h_2° c$ setzt.

σσ·σσ°–Schema

Es ist $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°(\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,1} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,1} \\ b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,1} \end{pmatrix}$, also soll sein

$$\begin{pmatrix} g_1\cdot h_1° & g_1\cdot h_2° & g_1\cdot h_3° \\ g_2\cdot h_1° & g_2\cdot h_2° & g_2\cdot h_3° \\ g_3\cdot h_1° & g_3\cdot h_2° & g_3\cdot h_3° \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,1} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,1} \\ b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,1} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen

$b_{1,1} = g_1\cdot h_1°\ b_{2,2}$, $b_{1,2} = g_1\cdot h_2°\ b_{2,3}$, $b_{1,3} = g_1\cdot h_3°\ b_{2,1}$

$b_{2,1} = g_2\cdot h_1°\ b_{3,2}$, $b_{2,2} = g_2\cdot h_2°\ b_{3,3}$, $b_{2,3} = g_2\cdot h_3°\ b_{3,1}$

$b_{3,1} = g_3\cdot h_1°\ b_{1,2}$, $b_{3,2} = g_3\cdot h_2°\ b_{1,3}$, $b_{3,3} = g_3\cdot h_3°\ b_{1,1}$

Sukzessives Einsetzen und Blockoperatoren-Vergleich liefert die Implikationen

$b_{1,1} = g_1\cdot h_1°\cdot g_2\cdot h_2°\cdot g_3\cdot h_3°\ b_{1,1} \Rightarrow g_1\cdot h_1°\cdot g_2\cdot h_2°\cdot g_3\cdot h_3° =1 \Leftrightarrow g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3° =1$.

$b_{2,1} = g_2\cdot h_1°\cdot g_3\cdot h_2°\cdot g_1\cdot h_3°\ b_{2,1} \Rightarrow g_2\cdot h_1°\cdot g_3\cdot h_2°\cdot g_1\cdot h_3° =1 \Leftrightarrow g_2\cdot g_3\cdot g_1=1$ und $h_2°\cdot h_3°\cdot h_1° =1$.

$b_{3,1} = g_3\cdot h_1°\cdot g_1\cdot h_2°\cdot g_2\cdot h_3°\ b_{3,1} \Rightarrow g_3\cdot h_1°\cdot g_1\cdot h_2°\cdot g_2\cdot h_3° =1 \Leftrightarrow g_3\cdot g_1\cdot g_2=1$ und $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3° =1$.

Für die Faktoren in $g_1\cdot g_2\cdot g_3$ gilt $g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$, für die Faktoren in $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°$ analog $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3° =1$.

Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen

$\{b_{1,1}, b_{3,3}, b_{2,2}\}$, $\{b_{2,1}, b_{1,3}, b_{3,2}\}$, $\{b_{3,1}, b_{2,3}, b_{1,2}\}$, wählt man $a=b_{1,1}$, $b=b_{3,2}$, $c=b_{2,3}$ auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{3,2}$ $A_{2,3}$ als Initialblöcke. Die Blöcke der Hauptdiagonalen liegen simultan in einer Sequenz und können nicht gut als Initialbasis dienen.

Man erhält das Schema $B_{\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_2°c & g_1\cdot g_2\cdot h_3°\cdot h_1°b \\ g_2\cdot h_1°b & g_2\cdot g_3\cdot h_2°\cdot h_3°a & c \\ g_3\cdot g_1\cdot h_1°\cdot h_2°c & b & g_3\cdot h_3°a \end{pmatrix}$, wobei

$g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3° =1$.

Das w-transformierte Schema $B^*_{\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ ergibt sich, wenn man $B_{\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ mittels des lokalen Operators $w = (g_2\cdot g_3)\cdot 1\cdot g_2\ \cdot (h_2°\cdot h_3°)\cdot 1°\cdot h_2° \in TxT°$ transformiert und dabei die Gleichungen $g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3° =1$ berücksichtigt , also wie folgt rechnet: $w(B_{\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°}) =$

$$\begin{pmatrix} g_2\cdot g_3\cdot h_2°\cdot h_3° & g_2\cdot g_3 & g_2\cdot g_3\cdot h_2° \\ h_2°\cdot h_3° & 1 & h_2 \\ g_2\cdot h_2\cdot h_3° & g_2 & g_2\cdot h_2° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_2°c & g_1\cdot g_2\cdot h_3°\cdot h_1°b \\ g_2\cdot h_1°b & g_2\cdot g_3\cdot h_2°\cdot h_3°a & c \\ g_3\cdot g_1\cdot h_1°\cdot h_2°c & b & g_3\cdot h_3°a \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} g_2\cdot g_3\cdot h_2°\cdot h_3°a & h_2°c & g_2 b \\ g_2°b & g_2\cdot g_3\cdot h_2°\cdot h_3°a & h_2°c \\ h_2°c & g_2°b & g_2\cdot g_3\cdot h_2°\cdot h_3°a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ b' & a' & c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} = B^*_{\sigma\cdot\sigma°}\ ,$$

wobei anstelle von a, b, c, neue Initialblöcke $a'=g_2\cdot g_3\cdot h_2°\cdot h_3°\ a$, $b'= g_2\ b$, $c'= h_2°\ c$ gesetzt sind.

Den Initialblock a' kann man zufolge $g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_1°\cdot h_2°\cdot h_3° =1$ auch $a'= g_1^{-1}\cdot(h_1°)^{-1}a$ schreiben.

σσ·σ°–Schema

Es soll sein: $\begin{pmatrix} g_1\cdot h_1° & g_1\cdot h_2° & g_1\cdot h_3° \\ g_2\cdot h_1° & g_2\cdot h_2° & g_2\cdot h_3° \\ g_3\cdot h_1° & g_3\cdot h_2° & g_3\cdot h_3° \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} b_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$

Das führt zum System der 9 Gleichungen

$b_{1,1} = g_1\cdot h_1°\ b_{2,3}$, $b_{1,2} = g_1\cdot h_2°\ b_{2,1}$, $b_{1,3} = g_1\cdot h_3°\ b_{2,2}$

$b_{2,1} = g_2\cdot h_1°\ b_{3,3}$, $b_{2,2} = g_2\cdot h_2°\ b_{3,1}$, $b_{2,3} = g_2\cdot h_3°\ b_{3,2}$

$b_{3,1} = g_3\cdot h_1°\ b_{1,3}$, $b_{3,2} = g_3\cdot h_2°\ b_{1,1}$, $b_{3,3} = g_3\cdot h_3°\ b_{1,2}$

Es ergeben sich nach sukzessives Einsetzen der 9 Gleichungen die Implikationen

$b_{1,1} = g_1\cdot h_1°\cdot g_2\cdot h_3°\cdot g_3\cdot h_2°\ b_{1,1} \Rightarrow g_1\cdot h_1°\cdot g_2\cdot h_3°\cdot g_3\cdot h_2° =1 \Leftrightarrow g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_3°\cdot h_2°\cdot h_1° =1$

$b_{2,2} = g_2\cdot h_2°\cdot g_3\cdot h_1°\cdot g_1\cdot h_3°\ b_{2,2} \Rightarrow g_2\cdot h_2°\cdot g_3\cdot h_1°\cdot g_1\cdot h_3° =1 \Leftrightarrow g_2\cdot g_3\cdot g_1=1$ und $h_2°\cdot h_1°\cdot h_3° =1$

$b_{3,3} = g_3\cdot h_3°\cdot g_1\cdot h_2°\cdot g_2\cdot h_1°\ b_{3,3} \Rightarrow g_3\cdot h_3°\cdot g_1\cdot h_2°\cdot g_2\cdot h_1° =1 \Leftrightarrow g_3\cdot g_1\cdot g_2=1$ und $h_3°\cdot h_2°\cdot h_1° =1$

sowie die Gleichungen $g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_3°\cdot h_2°\cdot h_1° =1$.

Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen

$\{b_{1,1}, b_{3,2}, b_{2,3}\}$, $\{b_{2,1}, b_{1,2}, b_{3,3}\}$, $\{b_{3,1}, b_{2,2}, b_{1,3}\}$, wählt man mit den Blöcken $a=b_{1,1}$, $b=b_{2,2}$, $c=b_{3,3}$ auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{3,3}$ $A_{2,2}$ der Hauptdiagonalen eine Initialbasis. Man erhält das Schema

$$B_{\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_2\cdot h_2{}^\circ\cdot h_1{}^\circ c & g_1\cdot h_3{}^\circ b \\ g_2\cdot h_1{}^\circ c & b & g_2\cdot g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ a \\ g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b & g_3\cdot h_2{}^\circ a & c \end{pmatrix}.$$

Das Schema $B^*_{\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ} = w\, B_{\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ}$ ergibt sich, wenn man $B_{\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ}$ mittels des lokalen Operators $w = g_3\cdot(g_3\cdot g_1)\cdot 1\cdot 1^\circ\cdot(h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ)\cdot h_1{}^\circ \in T\times T^\circ$ transformiert und dabei die Gleichungen $g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_1{}^\circ=1$ berücksichtigt, also wie folgt rechnet: $w\, B_{\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ} =$

$$\begin{pmatrix} g_3 & g_3\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ & g_3\cdot h_1{}^\circ \\ g_3\cdot g_1 & g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ & g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ \\ 1 & h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ & h_1{}^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_2\cdot h_2{}^\circ\cdot h_1{}^\circ c & g_1\cdot h_3{}^\circ b \\ g_2\cdot h_1{}^\circ c & b & g_2\cdot g_3\cdot h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ a \\ g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b & g_3\cdot h_2{}^\circ a & c \end{pmatrix} =.$$

$$\begin{pmatrix} g_3 a & h_1{}^\circ c & g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b \\ h_1{}^\circ c & g_3\cdot g_1\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b & g_3 a \\ g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ b & g_3 a & h_1{}^\circ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' & b' \\ b' & b' & a' \\ b' & a' & c' \end{pmatrix} = B^*_{\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ},$$

wobei anstelle von a, b, c neue Initialblöcke $a' = g_3\, a$, $b' = g_3\cdot g_1\cdot h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\, b$, $c' = h_1{}^\circ\, c$ gesetzt sind.
Den Initialblock b' kann man zufolge $g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_1{}^\circ=1$ auch $b' = g_2{}^{-1}\cdot(h_2{}^\circ)^{-1}\, b$ schreiben.

Resumee

In Abhängigkeit vom Typ seines Fixoperators $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1{}^\circ\cdot h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ\cdot\theta\cdot\eta$ ist ein Fixsudoku $A\in X$ stets konjugiert zu einem Sudoku $A'=wA$, $w\in T\times T^\circ$, das auf einem der reduzierten Schemata B_1^*, $B_{1'}^*$, B_2^*, $B_{2'}^*$, B_3^*, B_4^* liegt, wobei

$$B_1^* = \begin{pmatrix} a & (h_2{}^\circ)^2 b & h_3{}^\circ c \\ h_1{}^\circ a & b & (h_3{}^\circ)^2 c \\ (h_1{}^\circ)^2 a & h_2{}^\circ b & c \end{pmatrix},\; B_{1'}^* = \begin{pmatrix} a & h_2{}^\circ b & (h_3{}^\circ)^2 c \\ (h_1{}^\circ)^2 a & b & h_3{}^\circ c \\ h_1{}^\circ a & (h_2{}^\circ)^2 b & c \end{pmatrix},\; h_j{}^\circ\in\{s^\circ,ss^\circ\} \text{ für } j\in\{1.2.3\}.$$

Es ist $w = (g_3\cdot g_2)\cdot g_3\cdot 1 \in T$ beim σ–Typ von φ, $w = (g_2\cdot g_3)\cdot 1\cdot g_2 \in T$ beim $\sigma\sigma$–Typ .

$$B_2^* = \begin{pmatrix} a & g_1 a & (g_1)^2 a \\ (g_2)^2 b & b & g_2 b \\ g_3 c & (g_3)^2 c & c \end{pmatrix},\; B_{2'}^* = \begin{pmatrix} a & (g_1)^2 a & g_1 a \\ g_2 b & b & (g_2)^2 b \\ (g_3)^2 c & g_3 c & c \end{pmatrix},\; g_i{}^\circ\in\{s^\circ,ss^\circ\} \text{ für } i\in\{1,2,3\}.$$

Es ist $w = (h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ)\cdot h_3{}^\circ\cdot 1^\circ \in T^\circ$ beim σ°–Typ von φ, $w = (h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ)\cdot 1^\circ\cdot h_2{}^\circ \in T^\circ$ beim $\sigma\sigma^\circ$–Typ.

$$B_3^* = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$ Es ist $w = (g_3\cdot g_2)\cdot g_3\cdot 1\cdot(h_3{}^\circ\cdot h_2{}^\circ)\cdot h_3{}^\circ\cdot 1^\circ \in T\times T^\circ$ beim $\sigma\cdot\sigma^\circ$–Typ von φ,

$w = (g_2\cdot g_3)\cdot 1\cdot g_2\cdot(h_2{}^\circ\cdot h_3{}^\circ)\cdot 1\cdot h_2{}^\circ \in T\times T^\circ$ beim $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$–Typ .

$$B_4^* = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix},$$ Es ist $w = 1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1\cdot h_3{}^\circ\cdot(h_3{}^\circ\cdot h_1{}^\circ)\cdot 1^\circ \in T\times T^\circ$ beim $\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$–Typ von φ,

$w = g_3\cdot(g_3\cdot g_1)\cdot 1\cdot 1^\circ\cdot(h_1{}^\circ\cdot h_3{}^\circ)\cdot h_1{}^\circ$ beim $\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$–Typ.
B_3^* hat, im Raster zyklisch ergänzt, gleiche Blöcken in Richtung der Hauptdiagonalen,
B_4^* hat sie, im Raster zyklisch ergänzt, in Richtung der Nebendiagonalen.
Ist $A\in X$ ein Superfix, gibt es zu jedem der Blockschemata ein auf diesem liegendes A', das zu A w-konjugiert ist.

Hauptsatz

1) Jedes Fixsudoku A mit einem Fixoperator vom Typ σ ($\sigma\sigma$) ist lokal konjugiert zu einem Sudoku $wA\in$ Sud B_1^* ($wA\in$ Sud $B_{1'}^*$) mit $w\in T$,
2) Jedes Fixsudoku A mit einem Fixoperator vom Typ σ° ($\sigma\sigma^\circ$) ist lokal konjugiert zu einem Sudoku $wA\in$ Sud B_2^* ($wA\in$ Sud $B_{2'}^*$) mit $w\in T^\circ$,
3) Jedes Fixsudoku A mit einem Fixoperator vom Typ $\sigma\cdot\sigma^\circ$ oder $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$ ist lokal konjugiert zu einem Sudoku $wA\in$ Sud B_3^* mit $w\in T\times T^\circ$,
4) Jedes Fixsudoku A mit einem Fixoperator vom Typ $\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$ oder $\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$ ist lokal konjugiert zu einem Sudoku $wA\in$ Sud B_4^* mit $w\in T\times T^\circ$.

In Abhängigkeit vom Typ seiner Fixoperatoren gibt es zu jedem Fixsudoku A ein lokal transformiertes Bild A'=wA in einem der „Fixsudoku-Quellen" B_1^*, $B_{1'}^*$, B_2^*, $B_{2'}^*$, B_3^*, B_4^* .
Solche Verwandtschaft in den Quellen haben
normale Fixsudokus mit Fixoperatoren der Typen $\sigma, \sigma\sigma$ nur in B_1^*, $B_{1'}^*$,
normale Fixsudokus mit Fixoperatoren der Typen $\sigma°$, $\sigma\sigma°$ nur in B_2^*, $B_{2'}^*$.
normale Fixsudokus mit Fixoperatoren der Typen $\sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$ nur in B_3^*,
normale Fixsudokus mit Fixoperatoren der Typen $\sigma\cdot\sigma\sigma°$, $\sigma\sigma\cdot\sigma°$ nur in B_4^*.
Superfixe haben lokal transformierte Verwandtschaft in jedem der Quellen B_1^*, $B_{1'}^*$, B_2^*, $B_{2'}^*$,B_3^*, B_4^*.

Bemerkungen zur Generik der reduzierten Schemata
Für die S-Spezialisierungen der Schemata B_1^*, $B_{1'}^*$, B_2^*, $B_{2'}^*$, B_3^*, B_4^* gilt:
In Sud B_1^* liegen alle Fixsudokus, die Fixoperatoren der Form $\varphi = h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\sigma$ haben.
In Sud $B_{1'}^*$ liegen alle Fixsudokus, die Fixoperatoren der Form $\varphi = h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\sigma\sigma$ haben.
In Sud B_2^* liegen alle Fixsudokus, die Fixoperatoren der Form $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot\sigma°$ haben.
In Sud $B_{2'}^*$ liegen alle Fixsudokus, die Fixoperatoren der Form $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot\sigma\sigma°$ haben.
In Sud B_3^* liegen alle Fixsudokus, die rein globale Fixoperatoren$\varphi = \sigma\cdot\sigma°$ oder $\varphi' = \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$ haben.
In Sud B_4^* liegen alle Fixsudokus, die rein globale Fixoperatoren $\varphi = \sigma\cdot\sigma\sigma°$ oder $\varphi' = \sigma\sigma\cdot\sigma°$ haben.

Die Palette der Beispiele zeigt. dass keine der Mengen $SudB_1^*$, $SudB_2^*$, $SudB_3^*$, $SudB_4^*$ leer ist.
S-Spezialisierungen der Schemata B_1^*, $B_{1'}^*$ ergeben sich, wenn die Belegung eines Horizontalstreifens den Sudokubedingungen genügt, S-Spezialisierungen von B_2^*, $B_{2'}^*$ ergeben sich, wenn dies für einen Vertikalstreifen der Schemata zutrifft.
S-Spezialisierungen der Schemata B_3^* , B_4^* ergeben sich, wenn die Belegung der vom Horizontalstreifen (a,c,b) und des Vertikalstreifens (a,b,c) bzw. (a,c,b) gebildeten Blockfigur, geometrisch also die von diesen Streifen gebildete Winkelfigur $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & & \\ c & & \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & & \\ b & & \end{pmatrix}$ den Sudokubedingungen genügt.

Schema-Transformation , Beispiele
Die Operatoren aus $\{\rho_1, \rho_2 , \rho_3 , \rho_1°, \rho_2°, \rho_3°\}$ stiften Bijektionen zwischen den Blockschemata: $SudB_1^* \to Sud\ B_1^*$, $SudB_2^* \to Sud\ B_2^*$, $SudB_3^* \to Sud\ B_4^*$, $B_4^* \to Sud\ B_3^*$ und damit auch für die Fixsudokus, die auf diesen Schemata liegen.

Die Konjunktion eines Fixoperators mittels σ , $\sigma\sigma$ sowie $\sigma°$ oder $\sigma\sigma°$ bewirkt wegen $\sigma\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma=\sigma\sigma$ und $\sigma\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma=\sigma$ als auch $\sigma°\cdot\sigma\sigma°\cdot\sigma\sigma°=\sigma\sigma°$ und $\sigma°\cdot\sigma°\cdot\sigma\sigma°=\sigma°$ keine Änderung des Typs eines Fixoperators.
Bei Konjugation mittels ρ_1, ρ_2, ρ_3 aus H werden Fixoperatoren vom σ–Typ in Fixoperatoren vom $\sigma\sigma$–Typ transformiert und umgekehrt Fixoperatoren vom $\sigma\sigma$–Typ in den σ–Typ.
Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma°$–Typ werden zufolge der Gleichungen $\rho_i\cdot\sigma\cdot\rho_i=\sigma\sigma$ und $\rho_i\cdot\sigma\sigma\cdot\rho_i = \sigma$ durch Operatoren $\rho_i \in H$, $i \in \{1,2,3\}$ in den $\sigma\sigma\cdot\sigma°$–Typ und umgekehrt jene vom Typ $\sigma\sigma\cdot\sigma°$–Typ in den $\sigma\cdot\sigma°$–Typ transformiert. Ferner werden Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ in den $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ und umgekehrt die vom $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ in den $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ transformiert.
Einen analogen Wechsel zwischen den Typen bewirkt die Konjugation durch die Operatoren $\rho_1°$, $\rho_2°$, $\rho_3°$ aus H°.
Der Konjunktion eines Fixoperators φ eines Sudokus $A \in X$ durch ein $\rho_i \in H$ oder $\rho_j° \in H°$ korrespondiert die Transformation des Fixsudokus A durch dieses $\rho_i \in H$ oder $\rho_j° \in H°$, $i,j \in \{1,2,3\}$, und damit auch die Transformation des Blockschemas, auf dem das Fixsudoku A liegt.
Beispiel 1. $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema $\to$ $\sigma\cdot\sigma°$–Schema
Das Schema $B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ lässt sich mittels des Operators $\rho_1°$, also durch Tausch der vertikalen Streifen VS_2, VS_3 ins Schema $\rho_1° B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ mit einer Initialbasis auf den Raster-Plätzen $A_{1,1}$, $A_{2,3}$, $A_{3,2}$ transformieren.
Explizit ergibt sich

$$\rho_1°\ B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°} = \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_3° \cdot h_1° b & g_1 \cdot h_2° c \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1° \cdot h_2° c & g_2 \cdot h_2° a & b \\ g_3 \cdot h_1° b & c & g_3 \cdot g_2 \cdot h_2° \cdot h_3° a \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1 \text{ und } h_1° \cdot h_2° \cdot h_3° = 1.$$

Wenn das Schema $B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ mit den lokalen Faktoren des Fixoperators $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma° \in G_0$ von F_{17} erstellt ist, liegt das Sudoku $\rho_1° F_{17}$ auf dem Schema $\rho_1° B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ und hat $\varphi' = \rho_1°\cdot\varphi\cdot\rho_1°$ als Fixoperator.

Beispiel 2. $\sigma\cdot\sigma°$–Schema $\rightarrow$ $\sigma\sigma\cdot\sigma°$–Schema

Das Schema $B_{\sigma\cdot\sigma°}$ mit seiner nicht in der Diagonalen liegenden Initialsbasis $\{b_{1,1}, b_{2,1}, b_{2,3}\}$ lässt sich mittels des globalen Operators ρ_1, also durch Tausch der horizontalen Streifen HS_2, HS_3 ins Schema $\rho_1 B_{\sigma\cdot\sigma°}$ mit einer Initialbasis in der Hauptdiagonalen transformieren Explizit ergibt sich

$$\rho_1 B_{\sigma\cdot\sigma°} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_3\cdot h_2°\cdot h_1° c & g_1\cdot h_3° b \\ g_3\cdot h_1° c & b & g_3\cdot g_2\cdot h_3°\cdot h_2° a \\ g_2\cdot g_1\cdot h_1°\cdot h_3° b & g_2\cdot h_2° a & c \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1 \text{ und } h_3°\cdot h_2°\cdot h_1° = 1.$$

Wenn das Schema $B_{\sigma\cdot\sigma°}$ mit den lokalen Faktoren des Fixoperators $\varphi' = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\sigma\cdot\sigma° \in G_0$ von F'_{17} erstellt ist, liegt das transformierte Sudoku $\rho_1 F'_{17}$ auf dem Schema $\rho_1 B_{\sigma\cdot\sigma°}$ und hat $\varphi'' = \rho_1\cdot\varphi'\cdot\rho_1$ als Fixoperator.

Beispiel 3. $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema $\rightarrow$ $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema

Das Schema $B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ lässt sich mittels des Operators ρ_1, also durch Tausch der horizontalen Streifen HS_2, HS_3 ins Schema $\rho_1 B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ mit einer Initialbasis auf den Raster-Plätzen $A_{1,1}$, $A_{2,3}$, $A_{3,2}$ transformieren. Explizit ergibt sich

$$\rho_1° B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°} = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_2° c & g_1\cdot g_3\cdot h_3°\cdot h_1° b \\ g_3\cdot h_1° b & g_3\cdot g_2\cdot h_2° a & c \\ g_2\cdot g_1\cdot h_1°\cdot h_2° c & b & g_2\cdot h_3° a \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1 \text{ und } h_1°\cdot h_2°\cdot h_3° = 1.$$

Wenn das Schema $B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ mit den lokalen Faktoren des Fixoperators $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1°\cdot h_2°\cdot h_3°\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma° \in G_0$ von F_{17} erstellt ist, liegt das Sudoku $\rho_1° F_{17}$ auf dem Schema $\rho_1° B_{\sigma\cdot\sigma\sigma°}$ und hat $\varphi' = \rho_1\cdot\varphi\cdot\rho_1$ als Fixoperator.

§9. Quellbilder der diagonalblocknormierten Superfixe

Die vier von A.Schönhage entdeckten Superfixe

$$U_1 = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss° e & s\cdot s° e \\ s\cdot s° e & e & ss\cdot ss° e \\ ss\cdot ss° e & s\cdot s° e & e \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} e & s\cdot s° e & ss\cdot ss° e \\ ss\cdot ss° e & e & s\cdot s° e \\ s\cdot s° e & ss\cdot ss° e & e \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss° e & ss\cdot s° e \\ ss\cdot s° e & e & s\cdot ss° e \\ s\cdot ss° e & ss\cdot s° e & e \end{pmatrix},\quad U_4 = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s° e & s\cdot ss° e \\ s\cdot ss° e & e & ss\cdot s° e \\ ss\cdot s° e & s\cdot ss° e & e \end{pmatrix}, \text{ wobei } e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

sind 1-rangige Spezialisierungen des Blockschemas B_3*. Anhand der in §8 entwickelten Methoden bestimmen wir deren vom Fixoperator abhängigen Quellbilder in den anderen Blockschemata.

(I) **Superfix U_1** $= \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss° e & s\cdot s° e \\ s\cdot s° e & e & ss\cdot ss° e \\ ss\cdot ss° e & s\cdot s° e & e \end{pmatrix}$, wobei $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **.**

$F_{G_0}(U_1) = \{1, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{s}\cdot\mathbf{s°}\cdot\sigma, \mathbf{s}\cdot\mathbf{s°}\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{s}\cdot\mathbf{s°}\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma°, \mathbf{ss}\cdot\mathbf{ss°}\cdot\sigma\sigma, \mathbf{ss}\cdot\mathbf{ss°}\cdot\sigma°, \mathbf{ss}\cdot\mathbf{ss°}\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma°\}$, dabei kurz $\mathbf{s} = s\cdot s\cdot s$, $\mathbf{ss} = ss\cdot ss\cdot ss$, $\mathbf{s°} = s°\cdot s°\cdot s°$ und $\mathbf{ss°} = ss°\cdot ss°\cdot ss°$ notiert.

<u>σ–Schema:</u> U_1 hat den Fixoperator $\varphi = s\cdot s\cdot s\cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma$.

Transformations-Operator: $w = ss\cdot s\cdot 1$

$$\mathbf{B_1*}:\quad wU_1 = \begin{pmatrix} 1°\cdot sse & ss°\cdot se & s° e \\ s°\cdot sse & 1°\cdot se & ss° e \\ ss°\cdot sse & s°\cdot se & 1° e \end{pmatrix} \text{ mit Fixoperatoren } s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma \text{ und } ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma\sigma .$$

<u>σσ–Schema:</u> U_1 hat den Fixoperator $\varphi = ss\cdot ss\cdot ss\cdot ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma\sigma$.

Transformations-Operator: $w' = s\cdot 1\cdot ss$

$\mathbf{B_{1'}*}$: $w'U_1 = \begin{pmatrix} 1°\cdot se & ss°e & s°\cdot sse \\ s°\cdot se & 1°e & ss°\cdot sse \\ ss°\cdot se & s°e & 1°sse \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren s°·s°·s° · σ und ss°·ss°·ss° · σσ .

σ°–Schema: U_1 hat den Fixoperator φ = ss·ss·ss · ss°·ss°·ss° · σ° .
Transformations-Operator: w = s°·ss°·1°

$\mathbf{B_2*}$: $wU_1 = \begin{pmatrix} 1\cdot s°e & ss\cdot s°e & s\cdot s°e \\ s\cdot ss°e & 1\cdot ss°e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot 1°e & s\cdot 1°e & 1\cdot 1°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren ss·ss·ss · σ° und s·s·s · σσ° .

σσ°–Schema: U_1 hat den Fixoperator φ = s·s·s · s°·s°·s° · σσ° .
Transformations-Operator: w' = ss°·1°·s°

$B_{2'}*$: $w'U_1 = \begin{pmatrix} 1\cdot ss°e & ss\cdot ss°e & s\cdot ss°e \\ se & e & sse \\ ss\cdot s°e & s\cdot s°e & 1\cdot s°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren ss·ss·ss · σ° und s·s·s · σσ° .

σ·σ°–Schema: U_1 hat den Fixoperator φ = 1·1·1 · 1°·1°·1° · σ·σ° .
Transformations-Operator: w = id.
B_3*: $wU_1 = U_1$ mit Fixoperatoren σ·σ° und σσ· σσ° .
σσ·σσ°–Schema: U_1 hat den Fixoperator φ = 1·1·1 · 1°·1°·1° · σσ·σσ° .
Transformations-Operator: w' = id.
$B_{3'}*$: $w'U_1 = U_1$ mit Fixoperatoren σ·σ° und σσ· σσ° .
σ·σσ°–Schema: U_1 hat den Fixoperator φ = ss·ss·ss · ss°·ss°·ss° · σ·σσ° .
Transformations-Operator: w = 1·s·ss·ss°·s°·1°

B_4*: $wU_1 = \begin{pmatrix} 1\cdot ss°e & ss\cdot 1°e & s\cdot s°e \\ ss\cdot 1°e & s\cdot s°e & 1\cdot ss°e \\ s\cdot s°e & 1\cdot ss°e & ss\cdot 1°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren σ·σσ° und σσ·σ° .

σσ·σ°–Schema: U_1 hat den Fixoperator φ = s·s·s · s°·s°·s° · σσ·σ° .
Transformations-Operator: w'= s·ss·1·1°ss°·s°

$B_{4'}*$: $w'U_1 = \begin{pmatrix} 1\cdot se & ss\cdot s°e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot s°e & ss\cdot ss°e & 1\cdot se \\ ss\cdot ss°e & 1\cdot se & ss\cdot s°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren σ·σσ° und σσ·σ° .

Die Quellbilder von U_1 sind nicht diagonalblocknormiert. Bei den Superfixen U_2, U_3, U_4 werden nun nur die Quellbilder in den Schemata B_1*, B_2* , B_3*, B_4* hergestellt. Auf eine Herstellung von Quellbilder in den Schemata $B_{1'}*$, $B_{2'}*$, $B_{3'}*$, $B_{4'}*$, also zu den Operatoren-Typen σσ, σσ°, σσ··σσ° , σσ·σ° wird verzichtet.

(II) **Superfix U_2** = $\begin{pmatrix} e & s\cdot s°e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot ss°e & e & s\cdot s°e \\ s\cdot s°e & ss\cdot ss°e & e \end{pmatrix}$

F_{Go} (U_2) ={1,σ·σ°, σσ·σσ°, **ss·ss°**·σ, **ss·ss°**·σσ°, **ss·ss°**·σσ·σ°, **s·s°**·σσ, **s·s°**·σ°, **s·s°**·σ·σσ°}.
σ–Typ: U_2 hat den Fixoperator φ = ss·ss·ss · ss°·ss°·ss° · σ .
Transformations-Operator: w = s·ss·1

$\mathbf{B_1*}$: $wU_2 = \begin{pmatrix} 1°\cdot se & s°\cdot sse & ss°\cdot 1e \\ ss°\cdot se & 1°\cdot sse & s°\cdot 1e \\ s°\cdot se & ss°\cdot sse & 1°\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren ss°·ss°·ss° · σ und s°·s°·s° · σσ .

σ°–Typ: U_2 hat den Fixoperator φ = s·s·s · s°·s°·s° · σ° .
Transformations-Operator: w = ss°·s°·1°

B_2*: $wU_2 = \begin{pmatrix} 1\cdot ss°e & s\cdot ss°e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot s°e & 1\cdot s°e & s\cdot s°e \\ s\cdot 1°e & ss\cdot 1°e & 1\cdot 1°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren s·s·s · σ° und ss·ss·ss · σσ° .

σ·σ°–Typ: U_2 hat den Fixoperator φ = 1·1·1 · 1°·1°·1° · σ·σ° . Transformations-Operator: w = id

$B_3{}^*$: $wU_2 = \begin{pmatrix} 1\cdot 1°e & s\cdot s°e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot ss°e & 1\cdot 1°e & s\cdot s°e \\ s\cdot s°e & ss\cdot ss°e & 1\cdot 1°e \end{pmatrix} = U_2$ mit Fixoperatoren $\sigma\cdot\sigma°$ und $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$.

<u>σ·σσ°–Typ:</u> U_2 hat den Fixoperator $\varphi = s\cdot s\cdot s\cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma°$.
Transformations-Operator: $w = 1\cdot ss\cdot s\cdot s°\cdot ss°\cdot 1°$

$B_4{}^*$: $wU_2 = \begin{pmatrix} 1\cdot s°e & s\cdot 1°e & ss\cdot ss°e \\ s\cdot 1°e & ss\cdot ss°e & 1\cdot s°e \\ ss\cdot ss°e & 1\cdot s°e & s\cdot 1°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $\sigma\cdot\sigma\sigma°$ und $\sigma\sigma\cdot\sigma°$.

(III) Superfix U_3 $= \begin{pmatrix} e & s\cdot ss°e & ss\cdot s°e \\ ss\cdot s°e & e & s\cdot ss°e \\ s\cdot ss°e & ss\cdot s°e & e \end{pmatrix}$

$F_{Go}(U_3) = \{1, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma°, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma\sigma, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma°, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma°\}$
<u>σ–Typ:</u> U_3 hat den Fixoperator $\varphi = ss\cdot ss\cdot ss\cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma$.
Transformations-Operator: $w = s\cdot ss\cdot 1$

$B_1{}^*$: $wU_3 = \begin{pmatrix} 1°\cdot se & ss°\cdot sse & s°\cdot 1e \\ s°\cdot se & 1°\cdot sse & ss°\cdot 1e \\ ss°\cdot se & s°\cdot sse & 1°\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma$ und $ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma\sigma$.

<u>σ°–Typ:</u> U_3 hat den Fixoperator $\varphi = s\cdot s\cdot s\cdot ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma°$.
Transformations-Operator: $w = s°\cdot ss°\cdot 1°$

$B_2{}^*$: $wU_3 = \begin{pmatrix} 1\cdot s°e & s\cdot s°e & ss\cdot s°e \\ ss\cdot ss°e & 1\cdot ss°e & s\cdot ss°e \\ s\cdot 1°e & ss\cdot 1°e & 1\cdot 1°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $s\cdot s\cdot s\cdot\sigma°$ und $ss\cdot ss\cdot ss\cdot\sigma\sigma°$.

<u>σ·σ°–Typ:</u> U_3 hat den Fixoperator $\varphi = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1°\cdot 1°\cdot 1°\cdot\sigma\cdot\sigma°$. Transformations-Operator: $w = id$.

$B_3{}^*$: $wU_3 = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss°e & ss\cdot s°e \\ ss\cdot s°e & e & s\cdot ss°e \\ s\cdot ss°e & ss\cdot s°e & e \end{pmatrix} = U_3$ mit Fixoperatoren $\sigma\cdot\sigma°$ und $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$.

<u>σ·σσ°–Typ:</u> U_3 hat den Fixoperator $\varphi = s\cdot s\cdot s\cdot ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma°$.
Transformations-Operator: $w = 1\cdot ss\cdot s\cdot ss°\cdot s°\cdot 1°$

$B_4{}^*$: $wU_3 = \begin{pmatrix} 1\cdot ss°e & s\cdot 1°e & ss\cdot s°e \\ s\cdot 1°e & ss\cdot s°e & 1\cdot ss°e \\ ss\cdot s°e & 1\cdot ss°e & s\cdot 1°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $\sigma\cdot\sigma\sigma°$ und $\sigma\sigma\cdot\sigma°$.

(IV) Superfix U_4 $= \begin{pmatrix} e & ss\cdot s°e & s\cdot ss°e \\ s\cdot ss°e & e & ss\cdot s°e \\ ss\cdot s°e & s\cdot ss°e & e \end{pmatrix}$

$F_{Go}(U_4) = \{1, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma\sigma°, \mathbf{s\cdot ss°}\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma°, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma\sigma, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma°, \mathbf{ss\cdot s°}\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma°\}$
<u>σ–Typ:</u> U_4 hat den Fixoperator $\varphi = s\cdot s\cdot s\cdot ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma$.
Transformations-Operator: $w = ss\cdot s\cdot 1$

$B_1{}^*$: $wU_4 = \begin{pmatrix} 1°\cdot sse & s°\cdot se & ss°\cdot 1e \\ ss°\cdot sse & 1°\cdot se & s°\cdot 1e \\ s°\cdot sse & ss°\cdot se & 1°\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma$ und $s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma\sigma$.

<u>σ°–Typ:</u> U_4 hat den Fixoperator $\varphi = ss\cdot ss\cdot ss\cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma°$.
Transformations-Operator: $w = ss°\cdot s°\cdot 1°$

$B_2{}^*$: $wU_4 = \begin{pmatrix} 1\cdot ss°e & ss\cdot ss°e & s\cdot ss°e \\ s\cdot s°e & 1\cdot s°e & ss\cdot s°e \\ ss\cdot 1°e & s\cdot 1°e & 1\cdot 1°e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $ss\cdot ss\cdot ss\cdot\sigma°$ und $s\cdot s\cdot s\cdot\sigma\sigma°$.

<u>σ·σ°–Typ:</u> U_4 hat den Fixoperator $\varphi = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1°\cdot 1°\cdot 1°\cdot\sigma\cdot\sigma°$. Transformations-Operator: $w = id$.

B_3^*: $wU_4 = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot ss^\circ e \\ s\cdot ss^\circ e & e & ss\cdot s^\circ e \\ ss\cdot s^\circ e & s\cdot ss^\circ e & e \end{pmatrix} = U_4$ mit Fixoperatoren $\sigma\cdot\sigma^\circ$ und $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$.

<u>$\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$–Typ:</u> U_4 hat den Fixoperator $\varphi = ss\cdot ss\cdot ss \cdot s^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$.
Transformations-Operator: $w = 1\cdot s\cdot ss\cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot 1^\circ$

B_4^*: $wU_4 = \begin{pmatrix} 1\cdot s^\circ e & ss\cdot 1^\circ e & s\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot 1^\circ e & s\cdot ss^\circ e & 1\cdot s^\circ e \\ s\cdot ss^\circ e & 1\cdot s^\circ e & ss\cdot 1^\circ e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $\sigma\cdot\sigma\sigma^\circ$ und $\sigma\sigma\cdot\sigma^\circ$.

§10. Die Fixsudokus der Liste $L24_{eee}$

Zu den insgesamt 64 Fortsetzungen des (e,e,e)-Tripels zum Fixsudoku hat A.Schönhage am 21.Nov 2009 eine Liste $L24_{eee}$ der normalen Fixsudoku mit Fixoperatoren vom σ–Typ oder σ°–Typ per Computer erstellt. Im Folgenden werden die gemäß ihrer Position auf der Liste $L24_{eee}$ notierten 12 Fixsudokus $A_1, A_2, A_3,...,A_{12}$ vom σ-Typ in Fixsudokus wA_i , $w\in T$, mit reduzierten Fixoperatoren transformiert und damit deren Quellbilder wA_i , $i\in\{1,2,3,...,12\}$, im Blockschema B_1^* hergestellt..

Fixsudoku A_1 = $\begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ e \\ s\cdot ss^\circ e & e & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot s^\circ e & s\cdot s^\circ e & e \end{pmatrix}$, wobei $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

<u>A_1</u> hat den Fixoperator $\varphi = s\cdot s\cdot s \cdot ss^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma$.
Transformations-Operator: $w = ss\cdot s\cdot 1$

B_1^*: $wA_1 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot se & s^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $ss^\circ\cdot s^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma$ und $s^\circ\cdot ss^\circ\cdot ss^\circ \cdot \sigma\sigma$.

Fixsudoku A_2 = $\begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot s^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & e & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ e & e \end{pmatrix}$. <u>$A_2$</u> hat den Fixoperator $\varphi = s\cdot s\cdot s \cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma$.

Transformations-Operator: $w = ss\cdot s\cdot 1$

B_1^*: $wA_2 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot se & s^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $s^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma$ und $ss^\circ\cdot s^\circ\cdot ss^\circ \cdot \sigma\sigma$.

Fixsudoku A_3 = $\begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot s^\circ e \\ s\cdot ss^\circ e & e & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot s^\circ e & s\cdot ss^\circ e & e \end{pmatrix}$. <u>$A_3$</u> hat den Fixoperator $\varphi = s\cdot s\cdot s \cdot ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma$.

Transformations-Operator: $w = ss\cdot s\cdot 1$

B_1^*: $wA_3 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot se & s^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $ss^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma$ und $s^\circ\cdot s^\circ\cdot ss^\circ \cdot \sigma\sigma$.

Fixsudoku A_4 = $\begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ e & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot s^\circ e & e & s\cdot s^\circ e \\ s\cdot ss^\circ e & ss\cdot s^\circ e & e \end{pmatrix}$. <u>$A_4$</u> hat den Fixoperator $\varphi = ss\cdot ss\cdot ss \cdot s^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma$.

Transformations-Operator: $w = s\cdot ss\cdot 1$

B_1^*: $wA_4 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot se & s^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $s^\circ\cdot ss^\circ\cdot s^\circ \cdot \sigma$ und $ss^\circ\cdot s^\circ\cdot ss^\circ \cdot \sigma\sigma$.

Die Quellbilder wA_4 und wA_2 haben die gleichen Fixoperatoren. Ihre Initialblöcke sse , se in den Vertikalstreifen VS_1, VS_2 haben die Plätze getauscht.

Fixsudoku A_5 = $\begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ e & ss\cdot s^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & e & s\cdot ss^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & ss\cdot s^\circ e & e \end{pmatrix}$. $\underline{A}_5$ hat den Fixoperator φ = ss·ss·ss · ss°·s°·s° · σ **.**

Transformations-Operator: w = s·ss·1

B_1*: $wA_5 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot se & s^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren ss°·s°·s° · σ und s°·ss°·ss° · $\sigma\sigma$.

Die Quellbilder wA_5 und wA_1 haben die gleichen Fixoperatoren. Ihre Initialblöcke sse , se in den Vertikalstreifen VS_1, VS_2 haben die Plätze getauscht.

Fixsudoku A_6 = $\begin{pmatrix} e & s\cdot s^\circ e & ss\cdot s^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & e & s\cdot ss^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & ss\cdot ss^\circ e & e \end{pmatrix}$. $\underline{A}_6$ hat den Fixoperator φ = ss·ss·ss · ss°·ss°·s° · σ **.**

Transformations-Operator: w = s·ss·1

B_1*: $wA_6 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot se & s^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren ss°·ss°·s° · σ und s°·s°·ss° · $\sigma\sigma$.

Die Quellbilder wA_6 und wA_3 haben die gleichen Fixoperatoren. Ihre Initialblöcke sse , se in den Vertikalstreifen VS_1, VS_2 haben die Plätze getauscht.

Fixsudoku A_7 = $\begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & e & ss\cdot s^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot s^\circ e & e \end{pmatrix}$. $\underline{A}_7$ hat den Fixoperator φ = s·s·s · s°·s°·ss° · σ **.**

Transformations-Operator: w = ss·s·1

B_1*: $wA_7 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot se & s^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren s°·s°·ss° · σ und ss°·ss°·s° · $\sigma\sigma$.

Fixsudoku A_8 = $\begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & e & ss\cdot s^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & s\cdot s^\circ e & e \end{pmatrix}$. $\underline{A}_8$ hat den Fixoperator φ = s·s·s · ss°·s°·ss° · σ **.**

Transformations-Operator: w = ss·s·1

B_1*: $wA_8 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot se & s^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren ss°·s°·ss° · σ und s°·ss°·s° · $\sigma\sigma$.

Fixsudoku A_9 = $\begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ e & s\cdot ss^\circ e \\ s\cdot s^\circ e & e & ss\cdot s^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ e & s\cdot ss^\circ e & e \end{pmatrix}$. $\underline{A}_9$ hat den Fixoperator φ = s·s·s · s°·ss°·ss° · σ **.**

Transformations-Operator: w = ss·s·1

B_1*: $wA_9 = \begin{pmatrix} 1^\circ\cdot sse & s^\circ\cdot se & ss^\circ\cdot 1e \\ s^\circ\cdot sse & 1^\circ\cdot se & s^\circ\cdot 1e \\ ss^\circ\cdot sse & ss^\circ\cdot se & 1^\circ\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren s°·ss°·ss° · σ und ss°·s°·s° · $\sigma\sigma$.

Fixsudoku A_{10} = $\begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ e & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot s^\circ e & e & s\cdot s^\circ e \\ s\cdot ss^\circ e & ss\cdot s^\circ e & e \end{pmatrix}$. $\underline{A}_{10}$ hat den Fixoperator φ = ss·ss·ss · s°·s°·ss° · σ **.**

Transformations-Operator: $w = s{\cdot}ss{\cdot}1$

B_1*: $wA_{10} = \begin{pmatrix} 1°\cdot se & ss°\cdot sse & ss°\cdot 1e \\ s°\cdot se & 1°\cdot sse & s°\cdot 1e \\ ss°\cdot se & s°\cdot sse & 1°\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $s°{\cdot}s°{\cdot}ss° \cdot \sigma$ und $ss°{\cdot}ss°{\cdot}s° \cdot \sigma\sigma$.

Die Quellbilder wA_{10} und wA_7 haben die gleichen Fixoperatoren. Ihre Initialblöcke sse , se in den Vertikalstreifen VS_1, VS_2 haben die Plätze getauscht.

Fixsudoku $A_{11} = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss°e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot ss°e & e & s\cdot s°e \\ s\cdot s°e & ss\cdot s°e & e \end{pmatrix}$. $\underline{A}_{11}$ hat den Fixoperator $\varphi = ss{\cdot}ss{\cdot}ss \cdot ss°{\cdot}s°{\cdot}ss° \cdot \sigma$ **.**

Transformations-Operator: $w = s{\cdot}ss{\cdot}1$

B_1*: $wA_{11} = \begin{pmatrix} 1°\cdot se & ss°\cdot sse & ss°\cdot 1e \\ ss°\cdot se & 1°\cdot sse & s°\cdot 1e \\ s°\cdot se & s°\cdot sse & 1°\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $ss°{\cdot}s°{\cdot}ss° \cdot \sigma$ und $s°{\cdot}ss°{\cdot}s° \cdot \sigma\sigma$.

Die Quellbilder wA_{11} und wA_8 haben die gleichen Fixoperatoren. Ihre Initialblöcke sse , se in den Vertikalstreifen VS_1, VS_2 haben die Plätze getauscht.

Fixsudoku A_{12} $= \begin{pmatrix} e & s\cdot s°e & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot s°e & e & s\cdot s°e \\ s\cdot ss°e & ss\cdot ss°e & e \end{pmatrix}$. $\underline{A}_{12}$ hat den Fixoperator $\varphi = ss{\cdot}ss{\cdot}ss \cdot s°{\cdot}ss°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$ **.**

Transformations-Operator: $w = s{\cdot}ss{\cdot}1$

B_1*: $wA_{12} = \begin{pmatrix} 1°\cdot se & s°\cdot sse & ss°\cdot 1e \\ s°\cdot se & 1°\cdot sse & s°\cdot 1e \\ ss°\cdot se & ss°\cdot sse & 1°\cdot 1e \end{pmatrix}$ mit Fixoperatoren $s°{\cdot}ss°{\cdot}ss° \cdot \sigma$ und $ss°{\cdot}s°{\cdot}s° \cdot \sigma\sigma$.

Die Quellbilder wA_{12} und wA_9 haben die gleichen Fixoperatoren. Ihre Initialblöcke sse , se in den Vertikalstreifen VS_1, VS_2 haben die Plätze getauscht.

Anzahl der Fixsudokus vom σ-Typ auf Liste L24 .
Die 6 Quellbilder wA_1, wA_2, wA_3, wA_7, wA_8, wA_9 auf dem Schema B_1* haben den Initialblock sse im Vertikalstreifen VS_1 und realisieren folgende 6 Fixoperatoren mit reduzierten lokalen Faktoren:
$\varphi_1'=ss°{\cdot}s°{\cdot}s°{\cdot}\sigma$, $\varphi_2' = s°{\cdot}ss°{\cdot}s°{\cdot}\sigma$, $\varphi_3'= ss°{\cdot}ss°{\cdot}s°{\cdot}\sigma$,
$\varphi_7'=s°{\cdot}s°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$, $\varphi_8' = ss°{\cdot}s°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$, $\varphi_9'= s°{\cdot}ss°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$.
Die 6 Quellbilder wA_4, wA_5, wA_6, wA_{10}, wA_{11}, wA_{12} auf dem Schema B_1* haben den Initialblock se im Vertikalstreifen VS_1 und realisieren ebenfalls diese 6 Fixoperatoren mit reduzierten lokalen Faktoren:
$\varphi_4'=s°{\cdot}ss°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$, $\varphi_5' = ss°{\cdot}s°{\cdot}s°{\cdot}\sigma$, $\varphi_6'= ss°{\cdot}ss°{\cdot}s°{\cdot}\sigma$,
$\varphi_{10}'=s°{\cdot}s°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$, $\varphi_{11}' = ss°{\cdot}s°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$, $\varphi_{12}'= s°{\cdot}ss°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$.
Die hier fehlenden 2 Fixoperatoren $\varphi_0'=s°{\cdot}s°{\cdot}s°{\cdot}\sigma$, $\varphi_0'' = ss°{\cdot}ss°{\cdot}ss°{\cdot}\sigma$ treten zusammen mit dem Initialblock sse im Vertikalstreifen VS_1 bei den Superfixen U_1 und U_4 auf sowie bei den Superfixen U_2 und U_3 zusammen mit dem Initialblock se in VS_1. Insgesamt gibt es somit
$n_{1eee} = 2{\cdot}(2^3\text{-}2) = 2{\cdot}6 = 12$ normale Fixsudokus vom σ-Typ auf der Liste $L24_{eee}$.

§11. Die Fixsudokus der Liste $L36_{eee}$

Zu den insgesamt 64 Fortsetzungen des (e,e,e)-Tripels zum Fixsudoku hat A.Schönhage am 9.Nov 2009 eine Liste $L36_{eee}$ der normalen Fixsudoku mit Fixoperatoren vom $\sigma{\cdot}\sigma°$–Typ per Computer erstellt. Alle 36 Fortsetzungen dieser Liste sind Sudokus, deren Fixgruppe durchweg $\{1, \sigma{\cdot}\sigma°, \sigma\sigma{\cdot}\sigma\sigma°\}$ ist, wir notieren sie S_n, $n\in\{1,2,3,...,36\}$ gemäß ihrer Position auf der Liste.

Die 36 normalen Fixsudokus der Liste $L36_{eee}$ sind 3-rangige Spezialisierungen des Schemas B_3*. Das zeigt folgende Liste $L36B_{eee}$, in der alle 36 normalen $\sigma{\cdot}\sigma°$–Sudokus in einer Blockoperatoren-Darstellung aufgeführt sind.

Liste $L36B_{eee}$ (Liste der normalen Fixsudokus diagonalblocknormierter $\sigma{\cdot}\sigma°$–Sudokus)

$S_1 = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss°c & s\cdot s°b \\ s\cdot s°b & e & ss\cdot ss°c \\ ss\cdot ss°c & s\cdot s°b & e \end{pmatrix}$, $S_{36} = \begin{pmatrix} e & s\cdot s°b & ss\cdot ss°c \\ ss\cdot ss°c & e & s\cdot s°b \\ s\cdot s°b & ss\cdot ss°c & e \end{pmatrix}$,

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} = b_1 ,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} = c_1 .$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b \\ s\cdot s^\circ b & e & ss\cdot ss^\circ c \\ ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{35} = \begin{pmatrix} e & s\cdot s^\circ b & ss\cdot ss^\circ c \\ ss\cdot ss^\circ c & e & s\cdot s^\circ b \\ s\cdot s^\circ b & ss\cdot ss^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} = b_2 ,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} = c_2 .$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ b & e & ss\cdot s^\circ c \\ ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{34} = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ c \\ ss\cdot s^\circ c & e & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$S_{15} = \begin{pmatrix} e & s\cdot s^\circ c & ss\cdot ss^\circ b \\ ss\cdot ss^\circ b & e & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ c & ss\cdot ss^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{22} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ c & e & ss\cdot ss^\circ b \\ ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} = b_3 ,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} = c_3 .$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b \\ s\cdot s^\circ b & e & ss\cdot ss^\circ c \\ ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{33} = \begin{pmatrix} e & s\cdot s^\circ b & ss\cdot ss^\circ c \\ ss\cdot ss^\circ c & e & s\cdot s^\circ b \\ s\cdot s^\circ b & ss\cdot ss^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$S_{16} = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b \\ ss\cdot s^\circ b & e & s\cdot ss^\circ c \\ s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{21} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ c \\ s\cdot ss^\circ c & e & ss\cdot s^\circ b \\ ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = b_4 ,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = c_4 .$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ b & e & ss\cdot s^\circ c \\ ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{32} = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ c \\ ss\cdot s^\circ c & e & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ b & ss\cdot s^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$S_{17} = \begin{pmatrix} e & s\cdot s^\circ c & ss\cdot ss^\circ b \\ ss\cdot ss^\circ b & e & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ c & ss\cdot ss^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{20} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ c \\ s\cdot s^\circ c & e & ss\cdot ss^\circ b \\ ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} = b_5 ,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} = c_5 .$$

Anhand dieser $\sigma\cdot\sigma°$-Sudokus ergeben sich die Fortsetzungen des Blocktripels (e,b,c)= (e,b_5,c_5) zu Fixsudokus F_{17} und F_{22} mit Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ aus Liste $L261_{ebc}$ vom 21.Dez 2008:
$F_{17}=1ss\cdot s\cdot 1°\cdot s°\cdot ss°\cdot\rho_1 S_5 = 1ss\cdot s\cdot 1°\cdot ss°\cdot s°\cdot\rho_1°S_{32}$, $F_{22}=1s\cdot ss\cdot 1°\cdot s°\cdot ss°\cdot\rho_1 S_{17} = 1s\cdot ss\cdot 1°\cdot s°\cdot ss°\cdot\rho_1° S_{20}$.

$$S_6 = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b \\ ss\cdot s^\circ b & e & s\cdot ss^\circ c \\ s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{31} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ c \\ s\cdot ss^\circ c & e & ss\cdot s^\circ b \\ ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$S_{23} = \begin{pmatrix} e & s \cdot s^{\circ} c & ss \cdot ss^{\circ} b \\ ss \cdot ss^{\circ} b & e & s \cdot s^{\circ} c \\ s \cdot s^{\circ} c & ss \cdot ss^{\circ} b & e \end{pmatrix}, \quad S_{14} = \begin{pmatrix} e & ss \cdot ss^{\circ} b & s \cdot s^{\circ} c \\ s \cdot s^{\circ} c & e & ss \cdot ss^{\circ} b \\ ss \cdot ss^{\circ} b & s \cdot s^{\circ} c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} = b_6, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = c_6 .$$

$$S_{7} = \begin{pmatrix} e & ss \cdot ss^{\circ} c & s \cdot s^{\circ} b \\ s \cdot s^{\circ} b & e & ss \cdot ss^{\circ} c \\ ss \cdot ss^{\circ} c & s \cdot s^{\circ} b & e \end{pmatrix}, \quad S_{30} = \begin{pmatrix} e & s \cdot s^{\circ} b & ss \cdot ss^{\circ} c \\ ss \cdot ss^{\circ} c & e & s \cdot s^{\circ} b \\ s \cdot s^{\circ} b & ss \cdot ss^{\circ} c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} = b_7, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} = c_7 .$$

$$S_{8} = \begin{pmatrix} e & ss \cdot ss^{\circ} c & s \cdot s^{\circ} b \\ s \cdot s^{\circ} b & e & ss \cdot ss^{\circ} c \\ ss \cdot ss^{\circ} c & s \cdot s^{\circ} b & e \end{pmatrix}, \quad S_{29} = \begin{pmatrix} e & s \cdot s^{\circ} b & ss \cdot ss^{\circ} c \\ ss \cdot ss^{\circ} c & e & s \cdot s^{\circ} b \\ s \cdot s^{\circ} b & ss \cdot ss^{\circ} c & e \end{pmatrix},$$

$$S_{24} = \begin{pmatrix} e & ss \cdot s^{\circ} c & s \cdot ss^{\circ} b \\ s \cdot ss^{\circ} b & e & ss \cdot s^{\circ} c \\ ss \cdot s^{\circ} c & s \cdot ss^{\circ} b & e \end{pmatrix}, \quad S_{13} = \begin{pmatrix} e & s \cdot ss^{\circ} b & ss \cdot s^{\circ} c \\ ss \cdot s^{\circ} c & e & s \cdot ss^{\circ} b \\ s \cdot ss^{\circ} b & ss \cdot s^{\circ} c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} = b_8, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} = c_8 .$$

$$S_{9} = \begin{pmatrix} e & s \cdot ss^{\circ} c & ss \cdot s^{\circ} b \\ ss \cdot s^{\circ} b & e & s \cdot ss^{\circ} c \\ s \cdot ss^{\circ} c & ss \cdot s^{\circ} b & e \end{pmatrix}, \quad S_{28} = \begin{pmatrix} e & ss \cdot s^{\circ} b & s \cdot ss^{\circ} c \\ s \cdot ss^{\circ} c & e & ss \cdot s^{\circ} b \\ ss \cdot s^{\circ} b & s \cdot ss^{\circ} c & e \end{pmatrix},$$

$$S_{25} = \begin{pmatrix} e & s \cdot s^{\circ} c & ss \cdot ss^{\circ} b \\ ss \cdot ss^{\circ} b & e & s \cdot s^{\circ} c \\ s \cdot s^{\circ} c & ss \cdot ss^{\circ} b & e \end{pmatrix}, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} e & ss \cdot ss^{\circ} b & s \cdot s^{\circ} c \\ s \cdot s^{\circ} c & e & ss \cdot ss^{\circ} b \\ ss \cdot ss^{\circ} b & s \cdot s^{\circ} c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = b_9, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = c_9 .$$

$$S_{10} = \begin{pmatrix} e & ss \cdot s^{\circ} c & s \cdot ss^{\circ} b \\ s \cdot ss^{\circ} b & e & ss \cdot s^{\circ} c \\ ss \cdot s^{\circ} c & s \cdot ss^{\circ} b & e \end{pmatrix}, \quad S_{27} = \begin{pmatrix} e & s \cdot ss^{\circ} b & ss \cdot s^{\circ} c \\ ss \cdot s^{\circ} c & e & s \cdot ss^{\circ} b \\ s \cdot ss^{\circ} b & ss \cdot s^{\circ} c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = b_{10}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} = c_{10} .$$

$$S_{11} = \begin{pmatrix} e & ss \cdot s^{\circ} c & s \cdot ss^{\circ} b \\ s \cdot ss^{\circ} b & e & ss \cdot s^{\circ} c \\ ss \cdot s^{\circ} c & s \cdot ss^{\circ} b & e \end{pmatrix}, \quad S_{26} = \begin{pmatrix} e & s \cdot ss^{\circ} b & ss \cdot s^{\circ} c \\ ss \cdot s^{\circ} c & e & s \cdot ss^{\circ} b \\ s \cdot ss^{\circ} b & ss \cdot s^{\circ} c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} = b_{11}\,,\ \ c = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = c_{11}\,.$$

$$S_{18} = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b \\ ss\cdot s^\circ b & e & s\cdot ss^\circ c \\ s\cdot ss^\circ c & ss\cdot s^\circ b & e \end{pmatrix},\ S_{19} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ c \\ s\cdot ss^\circ c & e & ss\cdot s^\circ b \\ ss\cdot s^\circ b & s\cdot ss^\circ c & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix} = b_{18}\,,\ \ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} = c_{18}\,.$$

Anmerkung zur Anzahl der Sudokus in Liste L36B$_{eee}$

Die Variation der 36 diagonalblocknormierten $\sigma\cdot\sigma°$-Sudokus S_1, S_2,S_3,...,S_{36} in ihrer Gestalt wird durch die Position der 4 Blockoperatoren s·s , ss·ss° , ss·s°, s·ss° in den Rasterfeldern $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{2,3}$ alias $A_{2,1}$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$ sowie durch die Position der 26 verschiedenen Blöcke aus den 12 Paar-Mengen $\{b_1,c_1\}$, $\{b_2,c_2\}$,$\{b_3,c_3\}$,...,$\{b_{11},c_{11}\}$,$\{b_{18},c_{18}\}$ bewirkt. Es ist $\{b_5,c_5\}$ das einzige diagonalblocknormierte Paar unter diesen. Fortsetzungen des Tripels (e,b_5,c_5) zu normalen Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$-Typ sind $F_{17}=1ss\cdot s\cdot 1°\cdot s°\cdot ss°\cdot\rho_1 S_5 = 1ss\cdot s\cdot 1°\cdot ss°\cdot s°\cdot\rho_1° S_{32}$ und $F_{22}=1s\cdot ss\cdot 1°\cdot s°\cdot ss°\cdot\rho_1 S_{17} = 1s\cdot ss\cdot 1°\cdot s°\cdot ss°\cdot\rho_1°\, S_{20}$ auf der Liste L261 vom 21.Dez 2008.
Die 36 Sudokus gruppieren sich in
6 2er-Mengen $\{S_1,S_2\}$, $\{S_3,S_4\}$, $\{S_7,S_{30}\}$, $\{S_{10},S_{27}\}$, $\{S_{11},S_{26}\}$, $\{S_{18},S_{19}\}$,
6 4er-Mengen $\{S_3,S_{34},S_{15},S_{22}\}$, $\{S_4,S_{33},S_{16},S_{21}\}$, $\{S_5,S_{32},S_{17},S_{20}\}$, $\{S_6,S_{31},S_{23},S_{14}\}$, $\{S_8, S_{29}, S_{24},S_{13},\}$ $\{S_9,S_{28},S_{25},S_{12}\}$.
Dass sich genau 36 $\sigma\cdot\sigma°$-Sudokus bilden, ist in der Ziffern-Verteilung in den 26 Blöcken verborgen. Eine Einführung von Operatoren für die einzelnen Zeilen, Spalten und diagonalen Reihen in den Blöcken wäre nötig, um dies strukturell in Verbindung mit deren Wirkung zur Einhaltung der Sudokubedingungen aufzuhellen. Für weitere Anzahlbestimmungen genügt das Zählergebnis 36.

Anzahlen von $\sigma\cdot\sigma°$–Sudokus

Jedes $A\in X$ mit einem Fixoperator vom $\sigma\cdot\sigma°$-Typ ist konjugiert zu einem $wA\in$Sud B_3* mit $w\in TxT°$.
Jede S-Spezialisierung des Schemas B_3* ist ein $\sigma\cdot\sigma°$-Sudoku.
Jedes Fixsudokus, zu deren Fixgruppe $\sigma\cdot\sigma°$ gehört, liegt in Sud B_3*.
Es gibt 9!·4 diagonalblocknormierte superfixe $\sigma\cdot\sigma°$–Sudokus, alias dbn-Superfixe.
Es gibt 9!·36 diagonalblocknormierte normalfixe $\sigma\cdot\sigma°$–Sudokus. Es ist $\#B_3$*= 9!·40 .

In M-Bahnen, deren Leader Fixsudokus sind, liegen nur zum Leader M-konjugierte Fixsudokus.
$M = Z \times T_{23}$* operiert fixpunktfrei auf der Menge X aller Sudokus. Es ist $\#M=6^4$. Damit gibt es
$N_{sf0} = 9!\cdot 6^4\cdot 4 = 9!\cdot 3^4\cdot 2^6 = 7!\cdot 3^6\cdot 2^9 =$ 1881 169920 superfixe $\sigma\cdot\sigma°$–Sudokus, alias Superfixe,
$N_{nf0} = 9!\cdot 6^4\cdot 36 = 9!\cdot 3^6\cdot 2^6 = 7!\cdot 3^8\cdot 2^9 =$ 16930 529280 normalfixe $\sigma\cdot\sigma°$–Sudokus,
$N_{f0} = 9!\cdot 6^4\cdot 40 = 9!\cdot 3^4\cdot 2^7\cdot 5 = 7!\cdot 3^6\cdot 2^{10}\cdot 5 =$ 18811 699200 $\sigma\cdot\sigma°$–Sudokus.

§ 12. Konstruktion von Sudokus

Beim Zählen aller diagonalblocknormierten Sudokus wurde jede vorgegebene Belegung der Blöcke $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$ in der Hauptdiagonalen durch Auffüllen der restlichen Leerfelder sukzessive fortgesetzt bis zum vollständigen Sudoku. Dabei wurden stets alle zu den Vorgaben passenden Sudokus erzeugt. Es war ein Fortsetzungsprozess aus einer Teilbelegung des Rasters, der in überwiegender Zahl normale Sudokus lieferte und in geringer Zahl Fixsudokus. Das hat seinen Grund. Gegenüber den normalen Sudokus haben Fixsudokus , die Beispiele zeigten es, eine dem Typ nach von globalen Operatoren geleitete und intern von Blockoperatoren getragene lokale Abhängigkeit der Blöcke. Solche Abhängigkeiten unter den Blöcken eines Sudokus lassen sich anhand von Blockschemata mit lokalem Blocksystem beschreiben.
Die Menge { a, b, c } der drei zur lokalen Darstellung von Fixsudokus ausgewählten Blöcke in Hauptdiagonallage ist bei allen vier Beweisen ein Erzeugersystem für das durch den Ansatz der Fixpunktgleichung entstandene Schema mit lokalem Blocksystem.
Bei der Belegung der drei Blöcke des Initialblock-Tripels durch die Ziffern 1,2,3,...,9 gibt es keine Einschränkung. Das hat sich beim Zählen aller diagonalblocknormierten Sudokus mit der Feststellung „Kein Haus ist leer“ für diagonalblocknormierte Blocktripel erwiesen. Ob jedoch die durch die lokale Abhängigkeit von den Initialblöcken induzierte Belegung der restlichen 6 Blöcke eines Schemas den

Sudoku-Bedingungen genügt, muss geprüft werden. Es hängt von den beteiligten lokalen Operatoren ab. Dieser Frage wird nachgegangen.

Präsudokus, Teilsudokus, Blockfiguren

Es werden Begriffe definiert, mit denen sich ein Fortsetzen von Teilmengen aus Blöcken zu Blockschemata mit lokalem Blocksystem darstellen lässt.

Präsudoku

Eine Belegung einer Teilmenge M der 81 Leerstellen des Rasters durch Ziffern aus {1,2,3,...,9} derart, dass in der belegten Teilmenge M die Sudokubedingung

Keine Ziffer in M tritt in Reihen oder Blöcken mehrfach auf

erfüllt ist, nennen wir Präsudoku. auf der Menge M **.**

Teilsudoku.

Eine Belegung einer Teilmenge M der 81 Leerstellen des Rasters durch Ziffern aus {1,2,3,...,9} derart, dass für die belegte Teilmenge M

eine Fortsetzung zu einem (vollen) Sudoku existiert,

nennen wir **Teilsudoku** auf der Menge M .

Jedes Teilsudoku ist offenbar ein Präsudoku, die Umkehrung gilt nicht.
Die Vorgabe eines Tripels $(a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3})$ von mit Ziffern aus {1,2,3,...,9} belegten Blöcken in diagonalblocknormierter Form liefert Beispiele für Teilsudokus, denn beim Zählprozess aller diagonalblocknormierten Sudokus war kein „Haus“ leer.

Blockfiguren

Eine Teilmenge von Blöcken eines Blockschemas B mit lokalem Blocksystem nennen wir **Blockfigur** von B. Beispiele sind neben den Diagonalen die **Streifenfiguren** , also Horizontalfiguren sowie Vertikalfiguren.

horizontal: $H = \begin{pmatrix} w_1 a & w_2 b & w_3 c \end{pmatrix}$, *vertikal:* $V = \begin{pmatrix} w_1 a \\ w_2 b \\ w_3 c \end{pmatrix}$, wobei $w_i \in \Gamma$ für $i \in \{1,2,3\}$.

Existiert für eine Blockfigur F eine Spezialisierung zu einem Präsudoku, wird sie **generische Blockfigur** genannt. Im Fall der Horizontalfiguren H heißt das:
Für die Unbestimmenten im Blocktripel (a,b,c) gibt es eine Belegung mit Ziffern aus {1,2,3,...,9} derart, dass die sich ergebende Spezialisierung zum numerischen Blocktripel (a_0,b_0,c_0) ein Präsudoku ist.
Das sichert nicht, dass dies ein Teilsudoku ist , also zu einem Sudoku fortgesetzt werden kann.

Der Begriff des Ranges im Blockschema überträgt sich auf Blockfiguren. Er ist oft maßgeblich dafür, ob eine Blockfigur generisch ist oder nicht.
Beispielsweise sind Horizontal- und Vertikalfiguren vom Rang 3 stets generisch, unabhängig von den Blockoperatoren $w_i \in \Gamma$ für $i \in \{1,2,3\}$. Bei 1-rangigen Streifenfiguren spielen die Blockoperatoren eine Rolle.
Für die Menge aller Präsudoku einer generischen Blockfigur F schreiben wir **praeF** ,
für die Menge aller Teilsudoku von F entsprechend **sud F** .
Offenbar ist sudF $\subseteq$ praeF . Dabei kann die Menge sudF leer sein. In diesem Fall gibt es für die Blockfigur F keine Spezialisierung, die zum Sudoku fortsetzbar ist.

... . Ende des Konstrukts Sud-Theorie(1) aus der Math.Theorie von W.Jehne.

Gliederung von **Sud-Theorie(1)** VS01 (FO 171209)

$\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema , reduziertes $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema
$\sigma\sigma\cdot\sigma°$–Schema , reduziertes $\sigma\sigma\cdot\sigma°$–Schema
Herleitungen der Schemata $\sigma\sigma$, $\sigma\sigma°$, $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$, $\sigma\sigma\cdot\sigma°$
Resumee
Hauptsatz
Generik der reduzierten Schemata
Schema-Transformation, Beispiele

§9. Quellbilder der diagonalblocknormierten Superfixe

§10. Die Fixsudokus der Liste $L24_{eee}$

§11. Die Fixsudoku der Liste $L36_{eee}$

§12. Begriffe zur Sudoku-Konstruktion
Präsudokus, Teilsudokus, Blockfiguren

Schriften

[1] A. Schönhage Programme zur Fortsetzung von Diagonalblöcken Juli/August 2008
[2] A. Schönhage Ein Algorithmus zum Erkennen von Fixsudokus , August /Dez 2008
[3] A. Schönhage Nachtrag zu [2] , Ende Nov 2008
[4] A. Schönhage Nachtrag zu [1] , Ende Dez 2008
[5] B. Felgenhauer , F.Jarvis Enumering possible Sudoku

Fixsudoku-Listen
$L4S_{eee}$ im Nachtrag zu [2], Dez 2008, mit den 4 dbn-Superfixen U_1, U_2, U_3, U_4
$L24_{eee}$ vom 21.Nov 2009 mit 12 normalenm Fixsudokus vom σ-Typ sowie 12 vom $\sigma°$-Typ.
$L36_{eee}$ vom 9.Nov 2009 mit 36 normalen Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma°$-Typ der Fixgruppe $\{1, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°\}$,
$L261_{ebc}$ vom 21.Dez 2008 mit 16 nomalen Fixsudokus vom σ-Typ, 8 vom $\sigma°$-Typ, 2 vom $\sigma\cdot\sigma\sigma°$-Typ.

Gliederung

§8. Schemata der Fixoperatoren-Typen
σ–Schema , reduziertes $\sigma\cdot$–Schema
$\sigma°$–Schema , reduziertes $\sigma°\cdot$–Schema
$\sigma\cdot\sigma°$–Schema , reduziertes $\sigma\cdot\sigma°$–Schema
$\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema , reduziertes $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema
Herleitungen der Schemata σ, $\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma\sigma°$
Quadrate von Fixoperatoren
$\sigma\sigma$–Schema , reduziertes $\sigma\sigma\cdot$–Schema
$\sigma\sigma°$–Schema , reduziertes $\sigma\sigma°\cdot$–Schema
$\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema , reduziertes $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Schema
$\sigma\sigma\cdot\sigma°$–Schema , reduziertes $\sigma\sigma\cdot\sigma°$–Schema
Herleitungen der Schemata $\sigma\sigma$, $\sigma\sigma°$, $\sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°$, $\sigma\sigma\cdot\sigma°$
Resumee
Hauptsatz
Bemerkungen zur Generik der reduzierten Schemata
Schema-Transformation, Beispiele

§9. Quellbilder der diagonalblocknormierten Superfixe
§10. Die Fixsudokus der Liste $L24_{eee}$
§11. Die Fixsudokus der Liste $L36_{eee}$

Anmerkung zu den Sudokus der Liste L261
Das Tripel (e,b,c) repräsentiert 12 diagonalblocknormierte Tripel mit jeweils 26 Fortsetzungen zum Fixsudoku, darunter beispielsweise auch das Tripel (e,c,b). Jedes der 12 Tripel dieses Bezirks hat 2 Fortsetzungen zum Fixsudoku mit Fixoperatoren vom $\sigma\cdot\sigma\sigma^{\circ}$–Typ (4). Welcher Zusammenhang zwischen den 24 Fortsetzungen der 12 Tripel dieses Bezirks und den 36 normalen Fixsudokus vom Typ(3) beim Bezirksleader-Tripel (e,e,e) besteht ist nicht geklärt.
Eine Liste der 12 Tripel des Bezirks und Sondierung der 2 Fixsudokus vom Typ(4) in deren Fortsetzungslisten zu jeweils 26 Fixsudokus könnte helfen, Einsicht zu gewinnen.

Vorausblick auf §7 , §xx, §xy
Im Abschnitt „Normale Fixsudokus" werden die zwei Fixsudokus mit Fixoperatoren vom Typ(4) der Liste L261, wir schreiben sie F_{17} und F_{22}, neben Fixsudokus aus der Liste zu Sudokus mit Fixoperatoren der Typen (1) und (2), die wir F_{01} und F_{05} notieren, betrachtet. Dabei werden von F_{17} als auch F_{22} zwei transformierte diagonalblocknormierte Bilder F'_{17} , $F“_{17}$ bzw. F'_{22} , $F“_{22}$ erstellt, die Fixoperatoren vom Typ (3) haben und die man unter den Fortsetzungen des Tripels (e,e,e) in Liste $L36_{eee}$ findet.
Ferner wird ein von A.Schönhage [2] angegebenes normales Fixsudoku U_1' vom Typ(1), eine Abwandlung des Urbeispiels U_1 , ins diagonalblocknormierte U'_{1n} transformiert. Es zeigt sich, dass es eines jener 24 Fortsetzungen des Tripels (e,e,e) ist, die nicht zu den 36 Sudokus vom Typ(3) der Liste $L36_{eee}$ gehören.
Im Abschnitt „Normale Fixsudokus" werden die zwei Fixsudokus mit Fixoperatoren vom Typ(4) der Liste L261, wir schreiben sie F_{17} und F_{22}, neben Fixsudokus aus der Liste zu Sudokus mit Fixoperatoren der Typen (1) und (2), die wir F_{01} und F_{05} notieren, betrachtet. Dabei werden von F_{17} als auch F_{22} zwei transformierte diagonalblocknormierte Bilder F'_{17} , $F“_{17}$ bzw. F'_{22} , $F“_{22}$ erstellt, die Fixoperatoren vom Typ (3) haben und die man unter den Fortsetzungen des Tripels (e,e,e) in Liste $L36_{eee}$ findet.
Ferner wird ein von A.Schönhage [2] angegebenes normales Fixsudoku U_1' vom Typ(1), eine Abwandlung des Urbeispiels U_1 , ins diagonalblocknormierte U'_{1n} transformiert. Es zeigt sich, dass es eines jener 24 Fortsetzungen des Tripels (e,e,e) ist, die nicht zu den 36 Sudokus vom Typ(3) der Liste $L36_{eee}$ gehören.

Anmerkung zur Bezirksbildung des Leader-Tripels (e,b,c)
Insgesamt wurden 12 diagonalblocknormierte Tripel mit 26 Fortsetzungen zum normalen Fixsudoku festgestellt. Beim Zählprozess lagen sie im Bezirk des Leader-Tripels (e,b,c) .
Dies Bezirksleader-Tripel repräsentiert gemäß dem Zählprozess eine Menge M_{ebc} von diagonalblocknormierten Tripeln (e,b*,c*), die sich aus dem Tripel (e,b,c) mittels Operatoren der Sudokugruppe G ergeben und damit äquivalente Fortsetzungen haben. Es werden dazu anhand der drei Blöcke e,b,c bei unterschiedlicher Position der drei Blöcke in der Hauptdiagonalen $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $A_{3,3}$ Unterbezirke, d.h. Teilmengen diagonalblocknormierter Tripel gebildet und dann diese Teilmengen zur Menge M_{ebc} zusammengefasst.
Der Unterbezirk U_{ebc} zur Position ebc wird in folgender Weise gebildet:
Mittels der 72 lokalen Operatoren aus der Gruppe $T_1xT_1°x\{1,\tau\}$ wird das Tripel (e,b,c) ins Tripel (e',b,c) oder τ(e',b,c)=(te',tb,tc) transformiert, danach der im Feld A_{11} entstandenen Block e' bzw. τe' durch eine Ziffernpermutation $\omega\in Z$ in die e-Form renormiert und die entstandenen Blöcke ωb , ωc bzw. $\omega\cdot$tb , $\omega\cdot$tc in den Positionen A_{22}, A_{33} des Rasters mittels Operatoren aus $T_{23}*=T_2xT_2°xT_3xT_3°$ auf diagonalnormierte Gestalt gebracht.
Ein weiteres mögliche Tripel ist (e,c,b) sowie jene, die den Positionierungen bec, ceb, bce, cbe zuzuordnen sind, obgleich sie im Ansatz nicht diagonalblocknormiert sind. Für diese wird mittels

zusätzlich globaler Operatoren in entsprechender Weise eine Menge (Unterbezirk) zum Tripel (e,b,c) äquivalenter diagonalblocknormierter Tripel gebildet. Die Tripel aller Unterbezirke zusammengenommen bilden dann den durchs Tripel (e,b,c) bestimmten Bezirk, repräsentiert von einem der dbn-Tripel des Bezirks.

§6. Beispiele normaler Fixsudokus

Zum normalblocknormierten Block-Tripel (e,b,c) in den Feldern $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $A_{3,3}$ der Hauptdiagonalen mit $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ hat A. Schönhage unter den Fortsetzungen zum vollen Sudoku insgesamt 26 normale Fixsudokus gezählt ([1], list 261 vom 21.Dez.2008) und dabei angegeben, welche globalen Operatoren als Faktoren in ihren Fixgruppen vorkommen.
Zu den dort vorkommenden drei Fixgruppen-Typen σ, $\sigma°$, $\sigma\cdot\sigma\sigma°$ werden Beispiele betrachtet.
Die zum $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ betrachteten Fixsudokus F_{17}, F_{22} sind jene zwei allein möglichen diagonalblocknormierten normalen Fixsudokus dieses Typs. Es sind S-Spezialisierungen eines Blockschemas mit lokalem Blocksystem vom Rang 3. Da die Blöcke e,b,c zudem „lokal unabhängig“ sind, d.h. es gibt keine Blockoperatoren aus Γ derart, dass einer der Blöcke sich anhand der anderen darstellen lässt, sind sie nicht als S-Spezialisierung eines Systems vom Rang < 3 darstellbar.

Von den vier möglichen Fixgruppen-Typen zur Ordnung 3 kam in Liste261 der $\sigma\cdot\sigma°$-Typ nicht vor. Normale Fixsudokus dieses Typs gibt es unter den Fortsetzungen des Blocktripels (e,e,e) in der Hauptdiagonalen. Zu diesem Tripel (e,e,e) wurden 283576 Fortsetzungen zum vollen Sudokus gezählt, darunter die oben betrachteten Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 neben weiteren 60 normalen Fixsudokus. Unter diesen sind gemäß der Liste $L36_{eee}$ vom 9.Nov 2009 insgesamt 36 normale Fixsudokus vom $\sigma\cdot\sigma°$-Typ mit der speziellen Fixgruppe $\{1, \sigma\cdot\sigma°, \sigma\sigma\cdot\sigma\sigma°\}$, ferner gemäß der Liste $L24_{eee}$ vom 21.Nov 2009 insgesamt 12 normale Fixsudokus vom σ-Typ sowie 12 vom $\sigma°$-Typ.

Beispiel F_{01} σ–Typ(1)

$$F_{01} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s°b & s\cdot s°c \\ s\cdot s°e & b & ss\cdot ss°c \\ ss\cdot ss°e & s\cdot ss°b & c \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \sigma(F_{01}) = \begin{pmatrix} ss\cdot ss°e & s\cdot ss°b & c \\ e & ss\cdot s°b & s\cdot s°c \\ s\cdot s°e & b & ss\cdot ss°c \end{pmatrix} \text{ und damit}$$

$$s\cdot s\cdot s \cdot s°\cdot ss°\cdot s°\cdot(\sigma(F_{01})) = \begin{pmatrix} s\cdot s° & s\cdot ss° & s\cdot s° \\ s\cdot s° & s\cdot ss° & s\cdot s° \\ s\cdot s° & s\cdot ss° & s\cdot s° \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} ss\cdot ss°e & s\cdot ss°b & c \\ e & ss\cdot s°b & s\cdot s°c \\ s\cdot s°e & b & ss\cdot ss°c \end{pmatrix} \right) = F_{01}.$$

Analog findet man

$$ss\cdot ss\cdot ss \cdot ss°\cdot s°\cdot ss°\cdot(\sigma\sigma(F_{01})) = \begin{pmatrix} ss\cdot ss° & ss\cdot s° & ss\cdot ss° \\ ss\cdot ss° & ss\cdot s° & ss\cdot ss° \\ ss\cdot ss° & ss\cdot s° & ss\cdot ss° \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s\cdot s°e & b & ss\cdot ss°c \\ ss\cdot ss°e & s\cdot ss°b & c \\ e & ss\cdot s°b & s\cdot s°c \end{pmatrix} \right) = F_{01}.$$

Es gibt in G neben den Operatoren $s\cdot s\cdot s \cdot s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma$ und $ss\cdot ss\cdot ss \cdot ss°\cdot s°\cdot ss°\cdot\sigma\sigma$ aus G_0 keine weiteren Operatoren #1, die das diagonalblocknormierte Sudoku F_{01} fest lassen.
Fixgruppe ist $F_G(F_{01}) = \{1, \mathbf{s}\cdot s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma, \mathbf{ss}\cdot ss°\cdot s°\cdot ss°\cdot\sigma\sigma\}$.

Transformiert man F_{01} durch $w = ss\cdot s\cdot 1 \in T$, ergibt sich

$$F'_{01} = wF_{01} = \begin{pmatrix} a' & s°b' & s°c \\ s°a' & b' & ss°c \\ ss°a' & ss°b' & c \end{pmatrix}, \text{ wobei kurz } a' = sse, \; b' = sb \text{ gesetzt.}$$

Fixoperator von F'_{01} ist das w-konjugierte Bild $\varphi' = w\cdot\varphi\cdot w^{-1}$ des Fixoperators $\varphi = \mathbf{s}\cdot s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma$, wobei $w = ss\cdot s\cdot 1$, also $\varphi' = ss\cdot s\cdot 1\cdot(s\cdot s\cdot s \cdot s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma)\cdot s\cdot ss\cdot 1$
$= ss\cdot s\cdot 1\cdot(s\cdot s\cdot s) \cdot 1\cdot s\cdot ss \cdot (s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma) = 1\cdot 1\cdot 1\cdot s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma = s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma$.
Fixgruppe ist $F_G(F'_{01}) = \{1, s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma, ss°\cdot s°\cdot ss°\cdot\sigma\sigma\}$.
Die Fixoperatoren von F'_{01} sind gegenüber jenen von F_{01} um die Faktoren **s , ss** $\in T = T_1xT_2xT_3$ reduziert.

Beispiel F_{05} $\sigma°$–Typ(2)

$F_{05} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s°e & s\cdot ss°e \\ s\cdot ss°b & b & ss\cdot s°b \\ ss\cdot s°c & s\cdot ss°c & c \end{pmatrix}$. Anhand von

$\sigma°(F_{05}) = \begin{pmatrix} s\cdot ss°e & e & ss\cdot s°e \\ ss\cdot s°b & s\cdot ss°b & b \\ c & ss\cdot s°c & s\cdot ss°c \end{pmatrix}$ und $\sigma\sigma°(F_{05}) = \begin{pmatrix} ss\cdot s°e & s\cdot ss°e & e \\ b & ss\cdot s°b & s\cdot ss°b \\ s\cdot ss°c & c & ss\cdot s°c \end{pmatrix}$ sowie

$ss\cdot ss\cdot ss \cdot s°\cdot s°\cdot s° = \begin{pmatrix} ss\cdot s° & ss\cdot s° & ss\cdot s° \\ ss\cdot s° & ss\cdot s° & ss\cdot s° \\ ss\cdot s° & ss\cdot s° & ss\cdot s° \end{pmatrix}$ und $s\cdot s\cdot s \cdot ss°\cdot ss°\cdot ss° = \begin{pmatrix} s\cdot ss° & s\cdot ss° & s\cdot ss° \\ s\cdot ss° & s\cdot ss° & s\cdot ss° \\ s\cdot ss° & s\cdot ss° & s\cdot ss° \end{pmatrix}$

erkennt man, dass $ss\cdot ss\cdot ss \cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma°(F_{05})=F_{05}$ und $s\cdot s\cdot s \cdot ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma\sigma°(F_{05})=F_{05}$.
Fixgruppe ist also $F_G(F_{05}) = \{1,\ \mathbf{ss} \cdot \mathbf{s°}\cdot \sigma° ,\ \ \mathbf{s} \cdot \mathbf{ss°} \cdot \sigma\sigma°\}$.

Transformiert man F_{05} durch $w= ss°\cdot s°\cdot 1° \in T°$, ergibt sich

$F'_{05} = wF_{05} = \begin{pmatrix} a' & s°b' & s°c \\ s°a' & b' & ss°c \\ ss°a' & ss°b' & c \end{pmatrix}$, wobei kurz $a'=ss°e$, $b'=s°b$ gesetzt.

Fixoperator von F'_{01} ist das w-konjugierte Bild $\varphi'=w\cdot\varphi\cdot w^{-1}$ des Fixoperators φ, wobei $w=ss°\cdot s°\cdot 1° \in T°$,
also $\varphi' = ss°\cdot s°\cdot 1°\cdot(ss\cdot ss\cdot ss \cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma°)\cdot s°\cdot ss°\cdot 1°$
$=ss\cdot ss\cdot ss\cdot(ss°\cdot s°\cdot 1°)\cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot(1°\cdot s°\cdot ss°)\cdot\sigma° = ss\cdot ss\cdot ss \cdot 1°\cdot 1°\cdot 1°\cdot\sigma° = ss\cdot ss\cdot ss\cdot \sigma°$.
Die Fixoperatoren von F'_{05} sind gegenüber jenen von F_{05} um die Faktoren $\mathbf{s°},\mathbf{ss°} \in T°=T_1°xT_2°xT_3°$ reduziert.

Beispiel F_{17} $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ(4): $F_{17} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss°c & s\cdot s°b \\ s\cdot s°c & b & ss\cdot ss°e \\ ss\cdot ss°b & s\cdot s°e & c \end{pmatrix}$. Es ist

$\sigma\cdot\sigma\sigma°(F_{17}) = \begin{pmatrix} s\cdot s°e & c & ss\cdot ss°b \\ ss\cdot ss°c & s\cdot s°b & e \\ b & ss\cdot ss°e & s\cdot s°c \end{pmatrix}$, $\sigma\sigma\cdot\sigma°(F_{17}) = \begin{pmatrix} ss\cdot ss°e & s\cdot s°c & b \\ c & ss\cdot ss°b & s\cdot s°e \\ s\cdot s°b & e & ss\cdot ss°c \end{pmatrix}$ sowie

$ss\cdot ss\cdot ss \cdot ss°\cdot ss°\cdot ss° = \begin{pmatrix} ss\cdot ss° & ss\cdot ss° & ss\cdot ss° \\ ss\cdot ss° & ss\cdot ss° & ss\cdot ss° \\ ss\cdot ss° & ss\cdot ss° & ss\cdot ss° \end{pmatrix}$, $s\cdot s\cdot s \cdot s°\cdot s°\cdot s° = \begin{pmatrix} s\cdot s° & s\cdot s° & s\cdot s° \\ s\cdot s° & s\cdot s° & s\cdot s° \\ s\cdot s° & s\cdot s° & s\cdot s° \end{pmatrix}$, also

$ss\cdot ss\cdot ss \cdot ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma°(F_{17}) = F_{17}$ sowie $s\cdot s\cdot s \cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma°(F_{17})=F_{17}$.
Fixgruppe ist $F_G(F_{17}) = \{1, \mathbf{ss} \cdot \mathbf{ss°} \cdot \sigma\cdot\sigma\sigma° ,\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{s°}\cdot \sigma\sigma\cdot\sigma° \}$.

Beispiel F_{22} $\sigma\cdot\sigma\sigma°$–Typ(4): $F_{22} = \begin{pmatrix} e & s\cdot ss°c & ss\cdot s°b \\ ss\cdot s°c & b & s\cdot ss°e \\ s\cdot ss°b & ss\cdot s°e & c \end{pmatrix}$. Es ist

$\sigma\cdot\sigma\sigma°(F_{22}) = \begin{pmatrix} ss\cdot s°e & c & s\cdot ss°b \\ s\cdot ss°c & ss\cdot s°b & e \\ b & s\cdot ss°e & ss\cdot s°c \end{pmatrix}$, $\sigma\sigma\cdot\sigma°(F_{22}) = \begin{pmatrix} s\cdot ss°e & ss\cdot s°c & b \\ c & s\cdot ss°b & ss\cdot s°e \\ ss\cdot s°b & e & ss\cdot s°c \end{pmatrix}$,

$s\cdot s\cdot s \cdot ss°\cdot ss°\cdot ss° = \begin{pmatrix} s\cdot ss° & s\cdot ss° & s\cdot ss° \\ s\cdot ss° & s\cdot ss° & s\cdot ss° \\ s\cdot ss° & s\cdot sss° & s\cdot ss° \end{pmatrix}$, $ss\cdot ss\cdot ss \cdot s°\cdot s°\cdot s° = \begin{pmatrix} ss\cdot s° & ss\cdot s° & ss\cdot s° \\ ss\cdot s° & ss\cdot s° & ss\cdot s° \\ ss\cdot s° & ss\cdot s° & ss\cdot s° \end{pmatrix}$, also

$s\cdot s\cdot s \cdot ss°\cdot ss°\cdot ss°\cdot\sigma\cdot\sigma\sigma°(F_{22})= F_{22}$ sowie $ss\cdot ss\cdot ss \cdot s°\cdot s°\cdot s°\cdot\sigma\sigma\cdot\sigma°(F_{22})=F_{22}$.
Fixgruppe ist $F_G(F_{22}) = \{1,\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{ss°}\cdot \sigma\cdot\sigma\sigma° ,\ \mathbf{ss} \cdot \mathbf{s°}\cdot \sigma\sigma\cdot\sigma°\}$.

Beispiele zu den Schema-Typen

<u>Beispiele</u>

Auf diesem Schema liegen das Fixsudoku F_{01} und die Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 sowie U'_{1n} .

F_{01} hat den Fixoperator $\varphi = s{\cdot}s{\cdot}s \cdot s^\circ{\cdot}ss^\circ{\cdot}s^\circ{\cdot}\sigma$. Spezialisiert man $g_1=g_2=g_3=s$, $h_1^\circ=h_3^\circ=s^\circ$, $h_2^\circ=ss^\circ$ sowie a durch den Einheitsblock e und b , c gemäß Liste L261, liegt F_{01} auf B_σ .
Superfix U_1 hat die Fixgruppe
$F_G(U_1) =\{1,\sigma{\cdot}\sigma^\circ, \sigma\sigma{\cdot}\sigma\sigma^\circ, s{\cdot}\mathbf{s^\circ}{\cdot}\sigma, s{\cdot}\mathbf{s^\circ}{\cdot}\sigma\sigma^\circ, s{\cdot}\mathbf{s^\circ}{\cdot}\sigma\sigma{\cdot}\sigma^\circ, \mathbf{ss}{\cdot}\mathbf{ss}^\circ{\cdot}\sigma\sigma, \mathbf{ss}{\cdot}\mathbf{ss}^\circ{\cdot}\sigma^\circ, \mathbf{ss}{\cdot}\mathbf{ss}^\circ{\cdot}\sigma{\cdot}\sigma\sigma^\circ \}$. Man erhält es, wenn man $g_1=g_2=g_3=s$, $h_1^\circ=h_2^\circ=h_3^\circ=s^\circ$ setzt und die Blöcke a,b,c zu a=b=c=e spezialisiert.
U'_{1n} erhält man, wenn neben a=b=c=e gesetzt wird: $g_1=g_2=g_3=s$, $h_1^\circ=s^\circ$, $h_2^\circ=s^\circ$, $h_3^\circ=ss^\circ$.

<u>Beispiele</u>
Auf diesem Schema liegen das Fixsudoku F_{05} und auch die Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 .
F_{05} hat den Fixoperator $\varphi = ss{\cdot}ss{\cdot}ss \cdot s^\circ{\cdot}s^\circ{\cdot}s^\circ{\cdot}\sigma^\circ$. Spezialisiert man $g_1=g_2=g_3=ss$, $h_1^\circ=h_2^\circ=h_3^\circ=s^\circ$ sowie a durch den Einheitsblock e und b , c gemäß Liste L261, liegt F_5 auf B_{σ° .
Das Superfix U_1 ergibt sich, wenn neben a=b=c=e gesetzt wird: $g_1=g_2=g_3=ss$, $h_1^\circ=h_2^\circ=h_3^\circ=ss^\circ$.
$F_{Go}(U_1) =\{1,\sigma{\cdot}\sigma^\circ, \sigma\sigma{\cdot}\sigma\sigma^\circ, s{\cdot}\mathbf{s^\circ}{\cdot}\sigma, s{\cdot}\mathbf{s^\circ}{\cdot}\sigma\sigma^\circ, s{\cdot}\mathbf{s^\circ}{\cdot}\sigma\sigma{\cdot}\sigma^\circ, \mathbf{ss}{\cdot}\mathbf{ss}^\circ{\cdot}\sigma\sigma, \mathbf{ss}{\cdot}\mathbf{ss}^\circ{\cdot}\sigma^\circ, \mathbf{ss}{\cdot}\mathbf{ss}^\circ{\cdot}\sigma{\cdot}\sigma\sigma^\circ \}$.

<u>Beispiele</u>

Fixgruppe von $F'_{17} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ b \\ s\cdot ss^\circ b & e & ss\cdot s^\circ c \\ ss\cdot s^\circ c & s\cdot ss^\circ b & e \end{pmatrix}$ ist $F_G(F'_{17}) = \{1, \sigma{\cdot}\sigma^\circ, \sigma\sigma{\cdot}\sigma\sigma^\circ \}$.

F'_{17} liegt auf $B_{\sigma\cdot\sigma^\circ}$, wenn man $g_1=g_2=g_3=h_1^\circ=h_3^\circ=h_2^\circ=1$ setzt und die Blöcken a,b,c durch a=e sowie b=s·ss°<u>b</u>, c=ss·s°<u>c</u> gemäß den Angaben für <u>b</u> (=b) und <u>c</u> (=c) in Liste L261 spezialisiert.
F'_{22} liegt somit auf $B_{\sigma\cdot\sigma^\circ}$, wenn man $g_1=g_2=g_3=h_1^\circ=h_3^\circ=h_2^\circ=1$ setzt und die Blöcken a, b, c durch a=e sowie b=ss·ss°<u>b</u>, c=s·s°<u>c</u> gemäß den Angaben für <u>b</u> (=b) und <u>c</u> (=c) in Liste L261 spezialisiert.
Das Superfix U_1 ergibt sich, wenn man $g_1=g_2=g_3=1$, $h_1^\circ=h_2^\circ=h_3^\circ=1^\circ$ setzt und die Blöcke a,b,c zu a=e, b=s·s°e , c=ss·ss°e spezialisiert.
<u>Beispiele</u>
Der Fixoperator $\sigma{\cdot}\sigma^\circ$ von F'_{17} hat bereits die reduzierte Form und liefert somit den Operator $w=1\in TxT^\circ$, also ist $wF'_{17} =F'_{17}$. Auf dem Schema (3*) liegt F'_{17}, wenn man wie zuvor in $\sigma{\cdot}\sigma^\circ$–Schema $g_1=g_2=g_3=h_1^\circ=h_3^\circ=h_2^\circ=1$ setzt und die Blöcken a, b, c durch a=e sowie b=s·ss°b, c=ss·s°c gemäß den Angaben für <u>b</u> (=b) und <u>c</u> (=c) in Liste L261 spezialisiert. Analoge Sachverhalte erkennt man für die Fixsudokus F''_{17}, F'_{22}, F''_{22} als auch für die Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 .

<u>Beispiele</u>

Fixgruppe von $F_{17} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b \\ s\cdot s^\circ c & b & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ e & c \end{pmatrix}$ ist $F_G(F_{17}) = \{1, \mathbf{ss}\cdot\mathbf{ss}^\circ{\cdot}\sigma{\cdot}\sigma\sigma^\circ , \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}^\circ{\cdot}\ \sigma\sigma{\cdot}\sigma^\circ \}$.

F_{17} liegt auf (4), wenn man $g_1=g_2=g_3=ss$, $h_1^\circ=h_3^\circ=h_2^\circ=ss^\circ$ setzt und neben a=e die Blöcken b und c gemäß der Angabe in Liste L261 spezialisiert.
Fixgruppe von F_{22} ist $F_G(F_{22}) = \{1, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{ss}^\circ{\cdot}\ \sigma{\cdot}\sigma\sigma^\circ, \mathbf{ss}{\cdot}\mathbf{s}^\circ{\cdot}\sigma\sigma{\cdot}\sigma^\circ\}$. F_{22} liegt auf (4), wenn man $g_1=g_2=g_3=s$, $h_1^\circ=h_3^\circ=h_2^\circ=ss^\circ$ setzt und a durch e und die Blöcken b und c gemäß der Liste L261 spezialisiert.
Das Superfix U_1 ergibt sich, wenn man $g_1=g_2=g_3=ss$, $h_1^\circ=h_2^\circ=h_3^\circ=ss^\circ$ setzt und die Blöcke a,b,c durch a=b=c=e spezialisiert.
<u>Beispiele</u>
Der Fixoperator $\varphi= ss{\cdot}ss{\cdot}ss{\cdot}ss^\circ{\cdot}ss^\circ{\cdot}ss^\circ{\cdot}\sigma{\cdot}\sigma\sigma^\circ$ von F_{17} liefert $w=1{\cdot}s{\cdot}ss \cdot ss^\circ{\cdot}s^\circ{\cdot}1^\circ\in TxT^\circ$. Damit ist

$$wF_{17} = \begin{pmatrix} ss^\circ & s^\circ & 1 \\ s\cdot ss^\circ & s\cdot s^\circ & s \\ ss\cdot ss^\circ & ss\cdot s^\circ & ss \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & ss\cdot ss^\circ c & s\cdot s^\circ b \\ s\cdot s^\circ c & b & ss\cdot ss^\circ e \\ ss\cdot ss^\circ b & s\cdot s^\circ e & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ss^\circ e & ssc & s\cdot s^\circ b \\ ssc & s\cdot s^\circ b & ss^\circ e \\ s\cdot s^\circ b & ss^\circ e & ssc \end{pmatrix}.$$

Man sieht: Sudoku wF_{17} liegt auf dem Schema(4*), wenn man $g_1=g_2=g_3=ss$ und $h_1^\circ=h_3^\circ=h_2^\circ=ss^\circ$ setzt sowie neben a=e die Blöcke b und c gemäß der Angabe in Liste L261 spezialisiert.

Zwischen den Sudokus F_{17} und F'_{17} besteht nach §6 der Zusammenhang
$F'_{17} =1{\cdot}ss{\cdot}s \cdot 1^\circ{\cdot}ss^\circ{\cdot}s^\circ{\cdot}\rho_1\, F_{17}$ alias $F_{17} = 1{\cdot}ss{\cdot}s{\cdot}1^\circ{\cdot}ss^\circ{\cdot}s^\circ{\cdot}\rho_1\, F'_{17}$.
Hier sieht man: ρ_1F_{17} als auch $\rho_1{\cdot}wF_{17}$) liegen auf (3*) und $\rho_1F'_{17}$ als auch $\rho_1{\cdot}wF'_{17}$ auf (4*) .

Analoge Sachverhalte erkennt man über den Zusammenhang der Fixsudokus F_{22} und F'_{22} sowie den Zusammenhang zwischen den Superfixen U_1, U_2, U_3, U_4 , also etwa zwischen U_1 und U_3. zufolge $U_3=1\cdot s\cdot ss\cdot 1\cdot s°\cdot ss°\cdot \rho_1°\, U_1$

Beispiel

Fixgruppe von $F_{01} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s°b & s\cdot s°c \\ s\cdot s°e & b & ss\cdot ss°c \\ ss\cdot ss°e & s\cdot ss°b & c \end{pmatrix}$ ist $F_G(F_{01}) = \{1, \mathbf{s}\cdot s°\cdot ss°\cdot s°\cdot\sigma\ ,\ \mathbf{ss}\cdot ss°\cdot s°\cdot ss°\cdot\sigma\sigma\}$.

F_{01} liegt somit auf $B_{\sigma\sigma}$, wenn a durch e und b , c gemäß Liste L261 numerisch spezialisiert werden sowie gesetzt wird: $g_1=g_2=g_3=ss$ und $h_1°=h_3°=ss°$, $h_2°=s°$.

Beispiel

Fixgruppe von $F_{05} = \begin{pmatrix} e & ss\cdot s°e & s\cdot ss°e \\ s\cdot ss°b & b & ss\cdot s°b \\ ss\cdot s°c & s\cdot ss°c & c \end{pmatrix}$ ist $F_G(F_{05}) = \{1,\ \mathbf{ss}\cdot \mathbf{s}°\cdot\sigma°,\ \ \mathbf{s}\cdot \mathbf{ss}°\cdot\sigma\sigma°\}$.

F_{05} liegt somit auf $B_{\sigma\sigma}$, wenn a durch e und b , c gemäß Liste L261 numerisch spezialisiert werden sowie gesetzt wird: $g_1=g_2=g_3=s$, $h_1°=h_2°=h_3°=ss°$.

Nachtrag Januar 2011

Meine nach Januar 2010 verfaßten Sudokuskripten auf der homepage basieren anders als die Version der voranstehenden Sudoku-Theorie auf den folgenden Definitionen .

Sudokus und Sudokugruppe

Sudokus

Ein Sudoku ist eine 9x9-Matrix, deren 81 Felder neben deren 9 Zeilen und 9 Spalten eine Blockstruktur aus neun 3x3-Matrizen $A_{ij} = (a_{ijkl})$ - ijkl $\in$ { 1,2,3 }- so dass $A=(A_{ij})= (a_{ijkl})$ und die Belegung der 81 Felder a_{ijkl} durch Ziffern aus der Menge $N_9 = \{1,2,3....,9\}$ den Sudokubedingungen genügt, d.h. in jeder Zeile,jeder Spalte und jedem Block von A kommen alle neun Ziffern vor. Ersetzt man die neun Ziffern durch neun andere Symbole, sprechen wir von einem Sudokumuster. Gemäß der Blockstruktur hat man drei Blockzeilen ($A_{i,1}$, $A_{i,2}$, $A_{i,3}$) und drei Blockspalten ($A_{1,j}$, $A_{2,j}$, $A_{3,j}$). Jeder der insgesamt 6 Blockstreifen enthält jeweils 3 der durch i,k$\in$\{1,2,3,\} gekennzeichneten lokalen Zeilen bzw. der durch j,l $\in$\{1,2,3\} gekennzeichneten lokalen Spalten der Matrix A.
Die Menge aller Sudokus notieren wir X_{sud} .

Normierte Sudokus

Ein Sudoku heißt normiert, wenn der Block $A_{1,1}$ die 3x3-Matrix e ist

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Eine Permutation der neun Ziffern hat auf die Belegung der Matrix A gemäß den Sudokubedingungen keinen wesentlichen Einfluß. Demnach lässt sich jedes Sudoku durch eine Ziffernpermutation in ein normiertes Sudoku transformieren. Die Menge der normierten Sudokus notieren wir X_{norm} .

Globale Operatoren der Sudokugruppe G_0

Man kann auch ein Sudoku A aus der Menge X_{Sud} in ein Sudoku A' transformieren durch Permutation der Blockzeilen unter der Mitnahme ihrer lokalen Zeilen zusammen mit deren Belegung durch Ziffern. Es gibt 3 Blockzeilen und gemäß der symmetrischen Gruppe S_3 insgesamt also 6 Permutationen, die wir neben id=1 in Zyklendarstellung wie folgt notieren:
R= (1,2,3) , RR = (3,21) , R_1 = (2,3) , R_2 = (1,3) , R_3 = (1,2).
Analog gibt es 6 Permutationen für die 3 Blockspalten, die wir neben id =1 in Zyklendarstellung analog notieren:
S = (1,2,3) , SS = (3,2,1) , S_1 = (2,3) , S_2 = (1,3) , S_3 = (1,2).
Die Hintereinanderausführung iner Blockzeilenoperation mit einer Blockzeilenoperation ist vertauschbar.. Die sich ergebenen 36 Produkte sind die „globalen Operatoren" der kleinen Sudokugruppe G_0.

Lokale Operatoren der Sudokugruppe G_0

Auch Permutationen der jeweils 3 Zeilen einer Blockzeile oder jeweils 3 Spalten einer Blockspalte verletzen die Sudokubedingungen nicht. Demnach hat man Tripel lokaler Zeilenpermutationen innerhalb jeder der 3 Blockzeilen sowie lokaler Spaltenpermutationen innerhalb jeder der 3 Blockspalten . Abhängig vom Kontext notieren wir allgemein die Tripel der lokalen Zeilenoperatoren $g = (g_1,g_2,g_3)$ oder $u = (u_1,u_2,u_3)$. Die jeweils 6 möglichen Permutationen der lokalen Permutation einer Blockzeile notieren wir neben id = 1 in Zyklendarstellung
r = (1,2,3) , rr = (3,2,1) , r_1 = (2,3) , r_2 = (1,3) , r_3 = (1,2).
Es gibt 6^3 = 216 Tripel lokaler Zeilenoperatoren.
Analog gibt es 216 Tripel lokaler Spaltenoperatoren, die wir allgemein $h = (h_1,h_2,h_3)$ oder $v = (v_1,v_2,v_3)$ schreiben und deren Komponenten - also die möglichen Permutationen der lokalen Spalten in einer Blockspalte – wir speziell neben id=1 in Zyklendarstellung notieren
s = (1,2,3) , ss = (3,2,1) , s_1 = (2,3) , s_2 = (1,3) , s_3 = (1,2).
Die Hintereinanderausführung eines Tripels lokaler Zeilenoperatoren mit einem Tripel lokaler Spaltenoperatoren ist vertauschbar. Damit gibt es 6^6 = 216.216 = 46 656 lokale Operatoren in **G_0**.
Die Abbildung ghA=A' eines Sudokus A auf sein Bild A' durch den Operator g•h lässt sich anhand einer Blockdarstellung (A_{ij}) von A und den Komponenten g_i des Tripels g und h_j des Tripels h explizit durch $ghA = (g_i h_j A_{ij})$ beschreiben, $i,j \in \{1,2,3\}$. In diesem Sinne korrespondiert dem Produkt g•h eine Operatormatrix $(g_i h_j)$ auf Blöcke eingeschränkter lokaler Operatoren g_i, h_j alias dem Produkt u•v=w die Operatormatrix $(u_i v_j)$.

Verknüpfung lokaler mit globalen Operatoren in G_0

Die Hintereinanderausführung eines Tripels lokaler Zeilenoperationen mit einer globalen Blockspaltenoperation ist vertauschbar, ebenso die Hintereinanderausführung eines Tripels lokaler Spaltenoperationen mit einer globalen Blockzeilenoperation.
Nicht vertauschbar ist die Hintereinanderausführung eines Tripels lokaler Zeilenoperatoren mit einem globalen Blockzeilenoperator, ebenso die Hintereinanderausführung eines Tripels lokaler Spaltenoperatoren mit einem globalen Spaltenoperator.
Man hat die Vertauschungsregeln:

$R \bullet (g_1,g_2,g_3) = (g_3,g_1,g_2) \bullet R$ analog $S \bullet (h_1,h_2,h_3) = (h_3,h_1,h_2) \bullet S$
$RR \bullet (g_1,g_2,g_3) = (g_2,g_1,g_3) \bullet RR$ $SS \bullet (h_1,h_2,h_3) = (h_2,h_1,h_3) \bullet S_3$
$R_1 \bullet (g_1,g_2,g_3) = (g_1,g_3,g_2) \bullet R_1$ $S_1 \bullet (h_1,h_2,h_3) = (h_1,h_3,h_2) \bullet S_1$

$R_2\bullet(g_1,g_2,g_3) = (g_3,g_2,g_1)\bullet R_2$ $S_2\bullet(h_1,h_2,h_3) = (h_3,h_2,h_1)\bullet S_2$
$R_3\bullet(g_1,g_2,g_3) = (g_2,g_1,g_3)\bullet R_3$ $S_3\bullet(h_1,h_2,h_3) = (h_2,h_1,h_3)\bullet S_3$

Ein Element der Gruppe G_0 notieren wir allgemein in folgender Form
$\varphi = gh\, X_R\, X_S$ mit $X_R \in\{1,R,RR,R_1,R_2,R_3\}$ und $X_S \in\{1,S,SS,S_1,S_2,S_3\}$.
In der Anwendung des Operators φ auf ein Sudodu A mit dem Bild A' - kurz φ (A) = A'- wird φ von rechts nach links gelesen.
Es gibt 6^8 = 1 679 616 Operatoren dieser Art. Es ist die Ordnung der Sudokugruppe G_0.

Transponieren eines Sudokus
Das Transponieren τ eines Sudokus unter Mitnahme der Belegung der 81 Felder durch Symbole (Ziffern) berührt nicht die Sudokubedingungen. Es werden lediglich Zeilen und Spalten in der Sudoku-Matrix und dabei auch in den mitgenommenen Blöcken getauscht. Nimmt man die Transponierer τ eines Sudokus zu den Operatoren von G_0 als globalen Operator dazu, ergibt sich die Sudokugruppe G. Man hat folgende Vertauschungsregeln: Beim Vertauschen von τ mit Zeilenoperatoren von G_0 sind diese in Spaltenoperatoren zu wandeln. Analoges gilt beim vertauschen von τ mit Spaltenoperatoren. Es ist τ^2 = id. Demnach ist #(G)= 2• #(G_0).
Der Transponierer τ offenbart eine Dualität in der Theorie der Sudokus. Die Zuordnung τ(A)= A' überträgt die Zeilen-Spalteneigenschaften eines Sudokus A in Spalten-Zeileneigenschaften des Bildes A' und τ (A')=A bringt sie zurück. Inbesondere ist
$\tau(e)=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$ der duale Block zum Normblock e. Die Ziffernpermutation ,die den Normblock e in sein duales Bild überführt, ist ungerade.

Untergruppen der Sudokugruppe G
Wichtige Untergruppen lokaler Operatoren der Sudokugruppe G sind die Gruppe T_r der Tripel g alias u der lokalen Zeilenoperatoren ,sowie die Gruppe T_s der Tripel h alias v der lokalen Spaltenoperatoren, sowie deren direktes Produkt $T_r x T_s$ gebildet aus den Produkten g•h alias u•v =w. Die Normierung eines Sudokus bleibt durch die Operatoren der betrachteten Gruppen nicht generell erhalten. Sie bleibt hingegen stets genau dann erhalten, wenn man in den Tripeln g_1=1 alias u_1=1 und h_1=1 alias v_1=1 setzt. Auf diese Weise ergibt sich als Untergruppe von T das direkte Produkt $T_{2x3,} = T_{2x3,r}$ x $T_{2x3,s}$. Der Faktor $T_{2x3,r}$ wird gebildet von den Tripeln (1,g_2,g_3) alias (1,u_2,u_3) und der Faktor $T_{2x3,s}$ von den Tripeln (1,h_2,h_3) alias (1,v_2,v_3). Es ist # T_{2x3}= 36•36= 1296.

Dreiermengen eines Sudokus
Eine wichtige Invariante bei der Transformation eines Sudokus A durch ein Element der Gruppe Go liefern die von Arnold Schönhage entdeckten Dreiermengen ,die sich aus den Ziffern (Symbole) der Zeilen sowie der Spalten der 9 Blöcke eines Sudokus A ergeben. Ein Sudoku enthält mindestens 3 verschiedene horizontale und 3 verschiedene vertikale Dreiermengen und höchstens 27 in jeder Richtung von den insgesamt „9über3“ = (9•8•7) : (1•2•3) = 84 Möglichkeiten aus der Menge der 9 Ziffern (Symbole). Ihre Anzahl notieren wir d_{hor} / d_{ver}.

Beispiel: $V_1 = \begin{pmatrix} e & re & rre \\ se & rse & rrse \\ sse & rsse & rrsse \end{pmatrix}$, $d_{hor} / d_{ver} = 3/3$. (Nachtrag Januar 2013)

Im Sudoku V_1 wird die Menge der horizontalen Dreiermengen aller neun Blöcke von den Mengen {1,2,3}, {4,5,6}, {7,8,9} und die Menge der vertikalen Dreiermengen der neun Blöcke von den Mengen {1,4,7}, {2,5,8}, {3,6,9} gebildet. Insgesamt sind es hier die 6 Dreiermengen ,die der Normblock hergibt. Insgesamt gibt es 64•1296 normierte Sudokus mit $d_{hor} / d_{ver} = 3/3$ Dreiermengen. Auf der homepage ist dies im Skript Sudoku-Ornamente im Abschnitt „Scheinornamente“ dargelegt.
Es gilt: $\#X_{norm,d=6} = 64 \bullet \# T_{2x3} = 64 \bullet 1296$. (Im Skript Sudoku-Ornamente ist eine Konstruktionsmethode dieser Sudokus gezeigt)
Bei Transformation eines Sudokus A mit dem Transformierer $\tau \in G$ werden horizontale Dreiermengen zu vertikalen und umgekehrt.
Bei einer Ziffernpermutation ändern sich im allgemeinen die Dreiermengen, jedoch bleiben d_{hor} und d_{ver} invariant.

Siehe hierzu : Schönhage Einige Sudoku-Studien, Dezember 2010
Homepage http://www.iai.uni-bonn.de/~schoe/