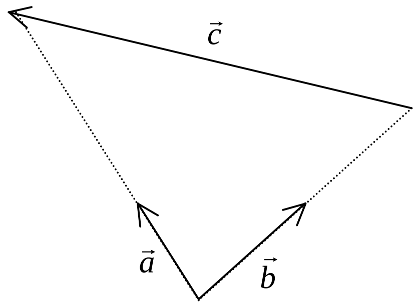
Komplanarität

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen <u>komplanar</u>, wenn sie (bzw. eigentlich zugehörige Pfeile) alle in einer Ebene liegen. Dann kann man aber sicher immer einen davon als Linearkombination der anderen beiden schreiben, zum Beispiel:



hier gilt offensichtlich: $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$
bzw. umgeformt: $3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Beliebige Vielfache dieser Gleichung sind dann natürlich auch richtig, zum Beispiel $6\vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$ oder $-9\vec{a} + 6\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ oder ...

Mit anderen Worten: Genau dann, wenn drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar sind, hat die Gleichung

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}$$

unendlich viele Lösungen für λ, μ und ν. Diese Gleichung entspricht nun aber wieder einem linearen Gleichungssystem, für das man kurz schreiben kann:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn dieses lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat (eine Lösung hat es natürlich immer, nämlich (0, 0, 0)). Dafür, dass ein lineares Gleichungssystem, auf dessen rechter Seite nur Nullen stehen, unendlich viele Lösungen hat, gibt es aber ein einfaches Kriterium: die sogenannte <u>Determinante</u> (oft mit det abgekürzt) der Koeffizientenmatrix muss gleich 0 sein. Wir haben also:

$$\boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind genau dann komplanar, wenn } \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ gilt.}}$$

Die Determinante einer 3×3-Matrix ist eine Zahl, die man auf mehrere Weisen berechnen kann; die einfachste Methode ist die „Regel von Sarrus'': man schreibt die 1. und 2. Spalte der Matrix noch mal daneben und rechnet dann: „Summe der Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus Summe der Produkte entlang der Nebendiagonalen“. Dabei gehen die Hauptdiagonalen von links oben nach rechts unten, die Nebendiagonalen von links unten nach rechts oben – siehe auch Formelsammlung Seite 17!

Beispiel: Es soll geprüft werden, ob die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ komplanar sind. Zu berechnen ist also $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Nach der Regel von Sarrus ist dies:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{matrix} = 2\cdot0\cdot1 + 1\cdot2\cdot3 + 5\cdot(-1)\cdot4 - 3\cdot0\cdot5 - 4\cdot2\cdot2 - 1\cdot(-1)\cdot1 = 0 + 6 - 20 - 0 - 16 + 1 = -29$$

Das Ergebnis ist nicht gleich Null, also sind die drei Vektoren nicht komplanar (liegen nicht in einer Ebene).