Klausur **Numerische Mathematik** **WS 2008/09** **Dr. T. Wenisch** 100% = 40 Punkte

Name: ______________________________ **Punkte:** **Note:**

Vorname: ______________________________

Matr. Nr.: ______________________________

1. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle der Funktion

$$f_{(x)} = x^3 + \frac{25}{8}x^2 + \frac{19}{16}x - \frac{15}{16}$$

a) Beginnen Sie die Näherung an der Stelle x_0=1 und rechnen Sie bis x_4. (6)

b) Die gesuchte Nullstelle liegt bei x_0=0,375. berechnen Sie den absoluten und relativen Fehler Ihres Näherungswertes x_4. (2)

c) Welchen Vorteil hätte es, anstelle des Newton-Verfahrens das Sekanten-Verfahren zu verwenden? (1)

d) Würden Sie beim Sekanten-Verfahren eine schellere oder langsamere Konvergenz als beim Newton-Verfahren erwarten? (1)

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix A durch (3)

b) Gegeben ist der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 90 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (4)

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mittels der LR-Zerlegung aus a).

c) gegeben sei nun die Matrix $C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -3 \\ 3 & 2 & a \end{pmatrix}$ (2)

Welchen Wert muss a (mindestens) haben, damit bei einer iterativen Lösung des Gleichungssystems $C \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Sicherheit Konvergenz erwartet werden kann?

d) Bei welchem Iterationsverfahren erwarten Sie eine schnellere Konvergenz, beim Gesamtschrittverfahren (Jacobi-Verfahren) oder beim Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel-Verfahren) ? (1)

3. Die Punkte

x_i	-2	1	2
y_i	3	5	4

sollen mit kubischen Splines interpoliert werden.

a) Stellen Sie die Bedingungen für eine Interpolation mit natürlichen Splines auf. (6)
(Hinweis: stellen Sie nur das LGS auf, Sie müssen es nicht lösen und die Splines nicht berechnen)

b) gegeben sind folgende kubische Splinefunktionen (Koeffizenten gerundet) (2)

$$s_1(x) = -0{,}07x^3 - 0{,}42x^2 + 0{,}46x + 5{,}03$$
$$s_2(x) = 0{,}21x^3 + 0{,}42x^2 + 1{,}29x + 5{,}03$$
$$s_3(x) = 0{,}21x^3 - 1{,}25x^2 + 1{,}29x + 4{,}75$$
$$s_4(x) = 0{,}07x^3 + 1{,}25x^2 - 0{,}46x - 4{,}75$$

Welche dieser Funktionen sind eine geeignete Interpolation für die oben genannten Punkte

c) Könnten Sie die Werte auch mit periodischen Splines interpolieren? (2)
Begründen Sie Ihre Antwort.

4. a) Notieren Sie die Trapezsummenregel für das Integral $I = \int_a^b f_{(x)}\,dx$ (2)

b) Berechnen Sie $I = \int_0^1 2 \cdot \sin(2x)\,dx$ nach der Trapezsummenregel. Teilen Sie dazu das Integral in 4 Teilintervalle. (Hinweis: Argumente in Radiant !) (4)

c) skizzieren Sie die Funktion $f_{(x)} = 2 \cdot \sin(2x)$ (2)

d) Welchen Wert erwarten Sie für das Integral $I = \int_{-1}^{1} f_{(x)}\,dx$? Begründen Sie Ihre Antwort. (2)

Hinweise und Klausurbedingungen:

- Schreiben Sie bitte deutlich und lesbar
- Geben Sie dieses Aufgabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab.
- Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen
- Die Herleitung der Lösung muss erkennbar sein, notieren Sie daher den Rechenweg.
- Bearbeitungszeit 90 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, schriftliche Unterlagen

Bitte Unterschreiben

Mit meiner Unterschrift erkläre ich, dass ich

- mich gesundheitlich in der Lage fühle, an dieser Klausur teilzunehmen
- zu dieser Prüfungsleistung zugelassen bin
- diese Klausurarbeit selbständig verfasst habe
- keine anderen als die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe

Datum: ____________ Unterschrift: __________________________

Lösungen:

1. a) $f'_{(x)} = 3x^2 + \frac{25}{4}x^2 + \frac{19}{16}$

$x_0=1$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x)}}{f'_{(x)}}$
x_1	0,5808383
x_2	0,4088794
x_3	0,3761676
x_4	0,3750015

b) $\Delta x_{0abs} = 0{,}3750015 - 0{,}3750000 = 0{,}0000015$

$$\Delta x_{0rel} = \frac{0{,}3750015 - 0{,}3750000}{0{,}3750000} = 0{,}000004 = 0{,}0004\%$$

c) es muss keine Ableitung berechnet werden

d) langsamere Konvergenz

2. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 58 \end{pmatrix}$

b) $L \cdot y = b \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 58 \end{pmatrix} \qquad R \cdot x = y \qquad x = \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) diagonaldominant (Zeilensummenkriterium) wenn |a| > 5

d) schnellere Konvergenz beim Einzelschrittverfahren

3. a) kubischer Spline: $s_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$s'_{(x)} = 3ax^2 + 2bx + c$

$s''_{(x)} = 6ax + 2b$

Bedingungen:

Punkte

$s_1(-2) = 3$ ⇨ $-8a_1+4b_1-2c_1+d_1=3$

$s_1(1) = 5$ ⇨ $a_1+b_1+c_1+d_1=5$

$s_2(1) = 5$ ⇨ $a_2+b_2+c_2+d_2=5$

$s_2(2) = 4$ ⇨ $8a_2+4b_2+2c_2+d_2=4$

Steigung

$s_1'(1) = s'_2(1)$ ⇨ $3a_1+2b_1+c_1=3a_2+2b_2+c_2$

Krümmung

$s_1''(1) = s''_2(1)$ ⇨ $6a_1+2b_1=6a_2+2b_2$

natürlicher Spline

$s_1''(-2) = 0$ ⇨ $-12a_1+2b_1=0$

$s_2''(2) = 0$ ⇨ $12a_2+2b_2=0$

b) s_1 und s_3 sind geeignet

c) nein, $y_1 \neq y_3$

4. a) $I = h \cdot \left(\frac{f_{(a)} + f_{(b)}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{(x_i)} \right)$

b) $I = 0{,}25 \cdot \left(\frac{f_{(0)}}{2} + f_{(0,25)} + f_{(0,5)} + f_{(0,75)} + \frac{f_{(1)}}{2} \right)$

$= 0{,}25 \cdot (0{,}0000 + 0{,}9589 + 1{,}6829 + 1{,}9950 + 0{,}9093) = 1{,}3865$

c) Sinuskurve, $y_{max}=2$, Periode=π (Maßstab: y Faktor 2 gestreckt; x Faktor 2 gestaucht)

d) I = 0 wegen Punktsymmetrie, positive und negative Beiträge heben sich auf