1.2 Wie erhalte ich Näherungslösungen der Gleichung $x^3 - x + 1 = 0$?

(Fortsetzung zu dem Artikel „1 Symbolisches und approximatives Lösen von Gleichungen“)

von Frank Schumann

Kai ist es bisher nicht gelungen, reelle Lösungen oder auch wenigstens Näherungslösungen für die Gleichung $x^3 - x + 1 = 0$ zu finden. Wir greifen sein Problem erneut auf und definieren aus seinen beiden Umformungsversuchen zwei Funktionen:

Kai´s Umformung 1:

$$x^3 - x + 1 = 0$$
$$x^3 = x - 1$$
$$x = (x-1)^{\frac{1}{3}}$$
$$g(x) := (x-1)^{\frac{1}{3}} \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

Kai´s Umformung 2:

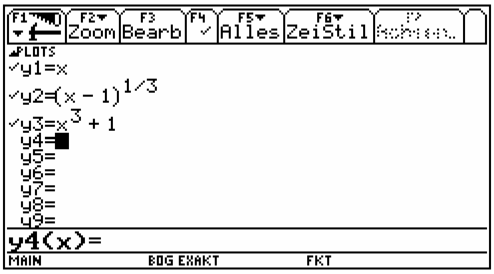
$$x^3 - x + 1 = 0$$
$$x = x^3 + 1$$
$$f(x) := x^3 + 1 \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

Vorüberlegungen: Mögliche Näherungslösungen der Gleichung finden wir dann zum Beispiel, wenn es uns gelingen mag, aus den beiden Schnittpunktansätze:

$x = g(x)$ oder $x = f(x)$

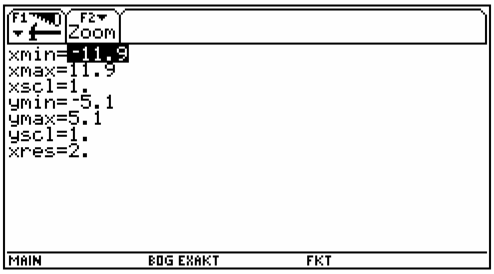
grafische Näherungslösungen zu bestimmen.

Y=Editor/



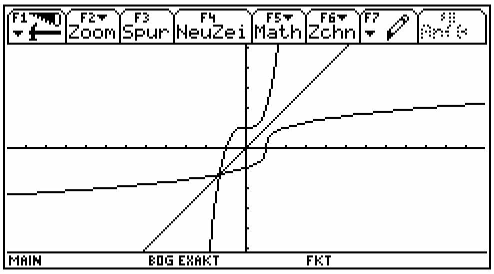
[B 1.1]

WINDOW/



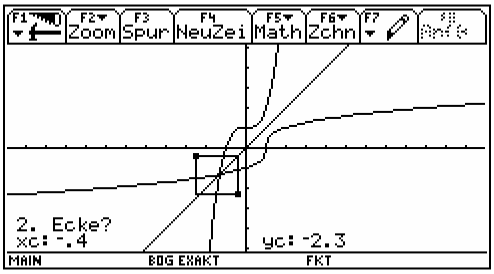
[B 1.2]

GRAPH/



[B 1.3]

GRAPH/Zoom/ZoomBox/



[B 1.4]

Übung 1.1
Sind beide Umformungen von Kai äquivalent?

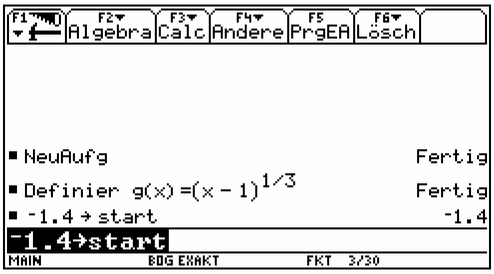
Ziel: Wir versuchen aus den beiden Schnittpunktansätzen Näherungslösungen für die Gleichung $x^3 - x + 1 = 0$ durch ein allgemeines *rechnerisches Verfahren schrittweise* „einzufangen“.

Aufgabe 1:
Bereinigen Sie den HOME-Bildschirm und stellen Sie im MODE-Menü den Ausgabemodus EXAKT ein! Führen Sie dann die Anweisungen 1 bis 5 aus!

Anweisung 1:
Drücke $\boxed{\text{F4}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$
G $\boxed{(}$ X $\boxed{)}$ $\boxed{=}$
$\boxed{(}$ X $\boxed{-}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

$\boxed{(-)}$ 1 $\boxed{.}$ 4 $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$
S T A R T
$\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.

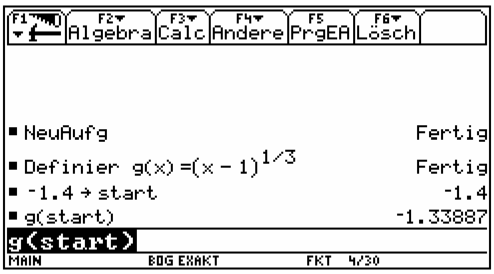
HOME/



[B 1.5]

Anweisung 2: Berechne approximativ den Funktionswert $g(start)$.

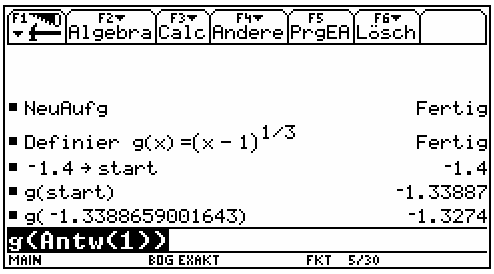
Drücke G $\boxed{(}$ S T A R T $\boxed{)}$ $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.



[B 1.6]

Anweisung 3: Berechne approximativ den Funktionswert $g(Antw(1))$.

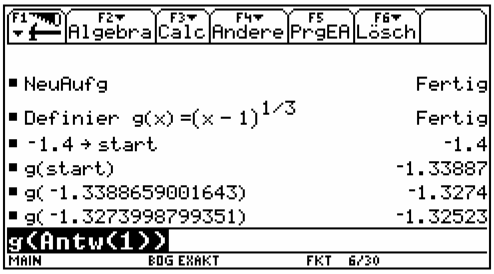
Drücke G [(] [2nd] [(-)] [)] [♦] [ENTER].



[B 1.7]

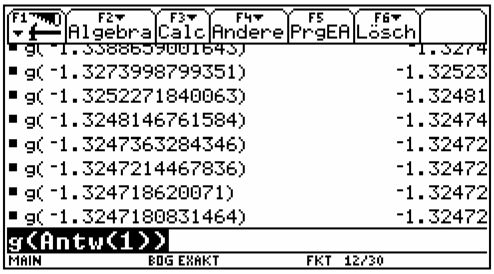
Anweisung 4: Berechne approximativ den Funktionswert $g(Antw(1))$.

Drücke [♦] [ENTER].



[B 1.8]

Anweisung 5: Wiederhole 6-mal den 4. Schritt.



[B 1.9]

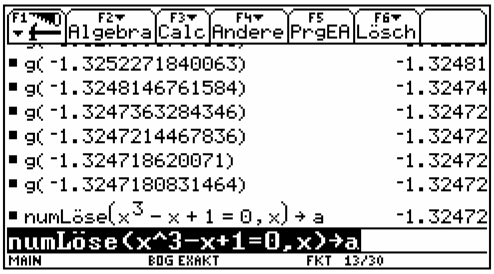
*** Ende des Schrittverfahrens ***

Aus den angewiesenen Funktionswertberechnungen erkennen wir eine eindeutige Zuordnung. Jeder Schrittnummer $n \geq 2$ und $n \in \mathbb{N}$ wird auf eine bestimmte Art und Weise der Wiederholung eindeutig ein reeller Funktionswert $g(n)$ zugeordnet:

Schrittnummer n	Reelle Funktionswerte $g(n)$
2	-1.3388659001643
3	-1.3273998799351
4	-1.3252271840063
5	-1.3248146761584
6	-1.3247363284346
7	-1.3247214467836
8	-1.324718620071
9	-1.3247180831464

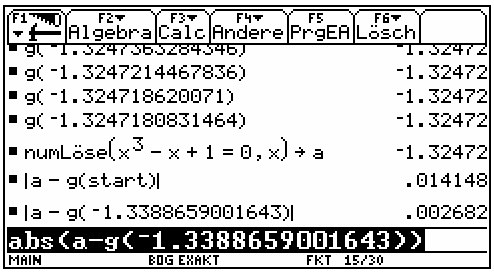
Wir bestimmen mit dem Voyage™ 200 den numerischen Wert des Befehls $numLöse\left(x^3 - x + 1 = 0,\, x\right)$ und speichern ihn unter dem Namen a ab.

$numLöse\left(x^3 - x + 1 = 0,\, x\right) \to a$ und $a = -1.3247179572448$.



[B 1.10]

Die reellen Funktionswerte $g(n)$ nehmen zu dem Näherungswert a eine besondere Relation ein. Deutlich wird diese durch die Abstandsberechnung zwischen dem Wert a und dem jeweiligen reellen Funktionswert $g(n)$.



[B 1.11]

Schrittnummer n	Reelle Funktionswerte $g(n)$	$\lvert a - g(n) \rvert$
2	-1.3388659001643	0.0141479429195
3	-1.3273998799351	0.0026819226903
4	-1.3252271840063	…
5	-1.3248146761584	…
6	-1.3247363284346	…
7	-1.3247214467836	…
8	-1.324718620071	…
9	-1.3247180831464	…

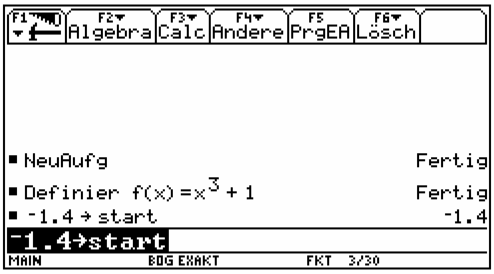
Übung 1.2
Vervollständigen Sie die Tabelle in der dritten Spalte und bestätigen Sie somit die Interpretationen: Je größer die natürliche Zahl n wird, desto „näher“ kommen die reellen Funktionswerte an eine numerische Lösung der Gleichung $x^3 - x + 1 = 0$ heran.
In Symbolen: $n \uparrow \Rightarrow \lvert a - g(n) \rvert \to 0$

Wir betrachten ein zweites ähnliches Schrittverfahren mit dem wir ebenso eine schrittweise Annäherung reeller Funktionswerte an eine numerische Lösung der Gleichung $x^3 - x + 1 = 0$ beabsichtigen. Dabei nehmen wir Bezug zu der bereits definierten Funktion f.

Übung 1.3
Bereinigen Sie den HOME-Bildschirm und folgen Sie den vier Anweisungen.

Anweisung 1: Legen Sie die folgende CAS-Applikation an.

HOME/



[B 1.12]

Anweisung 2:	Berechnen Sie approximativ den Funktionswert $f(start)$.
Anweisung 3:	Berechnen Sie approximativ den Funktionswert $f(Antw(1))$.
Anweisung 4:	Wiederholen Sie 7-mal die Anweisung 3.
	*** Ende ***

Gelingt mit diesen 4 Anweisungen das Vorhaben der Annäherung: $n\uparrow \Rightarrow |a - f(n)| \to 0$?

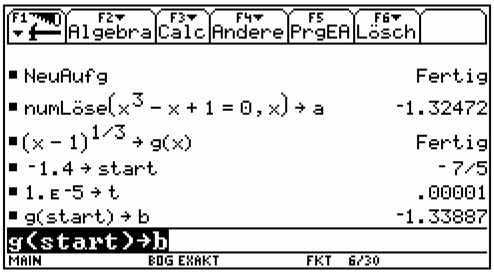
Um den Ablauf des Schrittverfahrens sinnvoll zu planen, ist es wichtig zu wissen, wie genau ist die produzierte Näherungslösung. Deshalb geben wir eine nicht negative reelle Zahl t vor, sodass die Genauigkeitsforderung

$$|a - g(n)| \le t$$

bei Verwendung der Funktion g erfüllt werden muss.

Aufgabe 2:
Stellen Sie zunächst den Startzustand her! Erzeugen Sie mit der folgenden CAS-Applikation eine Näherungslösung für die Gleichung $x^3 - x + 1 = 0$, sodass eine vorgegebene Genauigkeit mit einer Toleranz von $t := 0.00001$ nicht überschritten wird. Beginnen Sie Ihre Arbeit mit der Übernahme des nachfolgenden HOME-Bildschirms:

HOME

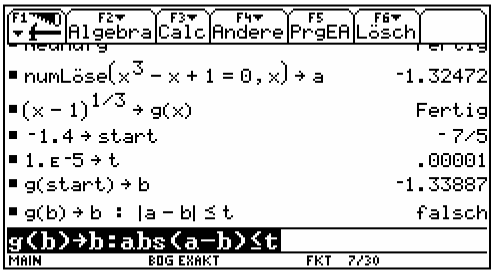


[B 1.13]

Geben Sie dann weiter ein:

G [(] B [)]
[STO▸] B
[2nd][θ] für [:]
A B S [(] A [−] B [)]
[2nd] 5 für MATH
8 für Test
4 für ≤
T
[◆] [ENTER]

Hinweis: Wir nehmen an, dass der Wert a ein genauer Wert ist. Hintergrund für die Annahme ist: $a^3 - a + 1 = -2 \cdot 10^{-13} \approx 0$.



[B 1.14]

Welche Bedeutung hat das Wort falsch?

Drücken Sie dann wieder: [◆] [ENTER] und interpretieren Sie die Ausgabe!

Gestalten Sie Ihre CAS-Applikation selbstständig weiter und geben Sie eine geeignete Näherungslösung an!

(Näherungslösung: -1.3247214467836)

V200-INFO-2-1: Im HOME-Bildschirm können in der Schreibzeile zwei Einzelanweisungen, getrennt durch einen Doppelpunkt - drücke dazu [2nd] [θ] für [:] - eingegeben werden. Die jeweilige symbolische oder approximative Ausgabe bezieht sich dabei auf die vom Doppelpunkt rechtsstehende Einzelanweisung.

(Näherungslösung: -1.3247214467836)

Mit der Toleranzzahl t wird die angestrebte Genauigkeit der Näherungslösung festgelegt. Dabei ist die Existenz eines genauen Wertes, wie dem Wert a, aber notwendig. Doch wie kann man die Genauigkeit einer Näherungslösung beurteilen, wenn man a nicht kennt? Zum Beispiel unter den Umständen, dass der numerische Lösebefehl - HOME/Algebra/numLöse(…) – für eine ausgewählte Gleichung nicht realisierbar ist.

Wir wissen: Jede Gleichung lässt sich in einen Nullstellenansatz $f(x) = 0$ überführen. So eben zum Beispiel die Gleichung $x^3 = x - 1$ in $x^3 - x + 1 = 0$ mit $f(x) := x^3 - x + 1$.

Kennt man einen Kandidaten x_0 für eine Näherungslösung, so entscheidet der Abstand der Zahl $f(x_0)$ zur Zahl 0 über die angestrebte Genauigkeit von x_0. Je kleiner $|f(x_0)|$ ausfällt, desto genauer ist x_0 selbst. Statt von der Toleranz spricht man hierbei von der Nullstellentoleranz t_0. Es gilt dann das Kriterium Nullstellentoleranz: $|f(x_0)| \le t_0$.

Übung 1.4

Bereinigen Sie den HOME-Bildschirm und bestimmen Sie mithilfe der CAS-Appliaktion eine Näherungslösung x_0 der Gleichung $x^3 = x - 1$, die eine Nullstellentoleranz von 10^{-5} nicht überschreiten soll. Füllen Sie die dritte Spalte der Tabelle aus!

Schrittnummer n	Reelle Funktionswerte $g(n)$	$\lvert f(x_0)\rvert \le 10^{-5}$
2	-1.3388659001643	falsch
3	-1.3273998799351	
4	-1.3252271840063	
5	-1.3248146761584	
6	-1.3247363284346	
7	-1.3247214467836	
8	-1.324718620071	
9	-1.3247180831464	

a) Ab welcher Schrittnummer an wird die Nullstellentoleranz zum ersten Mal unterschritten?

b) Wie viele Näherungswerte $g(n)$ aus der Tabelle erfüllen das Kriterium der Nullstellentoleranz?

c) Wie viele Näherungswerte $g(n)$ aus der Tabelle erfüllen nicht das Kriterium der Nullstellentoleranz?

(Antwort: a) ab der 8. Schrittnummer; b) unendlich viele; c) 6)

V200-INFO-2-2: Näherungslösungen von Gleichungen haben nur dann einen Sinn, wenn man Aussagen über ihre Genauigkeit treffen kann.