3.5 Begrenztes Wachstum

In diesem Abschnitt behandeln wir Wachstumsprozesse, die nicht über alle Grenzen anwachsen und Ab-nahmeprozesse, die nicht bis null hin abnehmen.

Einstieg

Eine Flasche mit Saft wurde in einem Kühlschrank auf 7 °C abgekühlt. Sie wird aus dem Kühlschrank her-ausgenommen und in ein Zimmer mit 24 °C Raumtemperatur gestellt. Bei der Erwärmung der Flüssigkeit beträgt die Temperaturzunahme pro Minute zu jedem Zeitpunkt jeweils 10 % der Differenz zwischen Raumtemperatur und der augenblicklichen Temperatur der Flüssigkeit.

- Erstellen Sie eine Gleichung für die Erwärmungsgeschwindigkeit.
- Zeigen Sie, dass die Funktion T mit $T(t) = 24 - 17 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ die Temperatur des Saftes beim Erwärmen beschreibt, wobei die Zeit t in Minuten nach der Entnahme des Getränks aus dem Kühlschrank und die Temperatur T(t) in °C gemessen wird.
  Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und geben Sie wesentliche Eigenschaften des Funktionsgraphen an.
- Bestimmen Sie, wann der Saft 23 °C warm ist.

Aufgabe

NEWTON'sches Abkühlungsgesetz
Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist proportional zur Temperaturdifferenz.

1 Begrenzte Abnahme

Frisch aufgebrühter 80 °C warmer Kaffee wird in einem 20 °C warmen Raum stehengelassen. In jedem Moment beträgt die Abkühlung 15 % der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur (in $\frac{°C}{min}$). *Momentangeschwindigkeit*

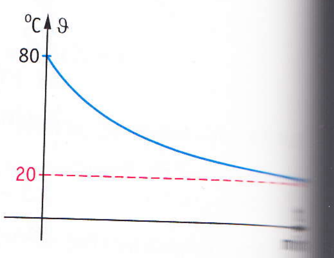
a) Bestimmen Sie anhand einer groben Skizze des Temperaturverlaufs einen Funktionsterm für die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t.
Kontrollieren Sie Ihren Funktionsterm anhand der gegebenen Information zur Abkühlungsgeschwindigkeit.

b) Ermitteln Sie, wann der Kaffee eine angenehme Trinktemperatur von 45 °C aufweist.

Lösung

a) Die Kaffee-Temperatur wird sich zunächst schnell und dann immer langsamer der Raumtemperatur annähern, sie aber theoretisch nie erreichen. Der Graph sieht aus wie der einer exponentiellen Abnahme, der um 20 nach oben verschoben wurde:

$$\vartheta(t) = a \cdot e^{kt} + 20$$



Aus der Anfangsbedingung $\vartheta(0) = 80$ folgt wegen $e^{k \cdot 0} = 1$ sofort:

$$a = 60$$

Damit lautet der Funktionsterm für die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\vartheta(t) = 60 \cdot e^{kt} + 20$$

Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist proportional zur Differenz zwischen Kaffee-Temperatur und Raumtemperatur, also zu $60 \cdot e^{kt}$ mit dem Proportionalitätsfaktor $-0,15$.

Abkühlungsgeschwindigkeiten sind negativ

Da die Temperaturdifferenzen exponentiell abnehmen, ist somit $k = -0{,}15$ und folglich

$$\vartheta(t) = 60 \cdot e^{-0{,}15t} + 20.$$

Zur Kontrolle der Abkühlungsgeschwindigkeit bilden wir die Ableitung:

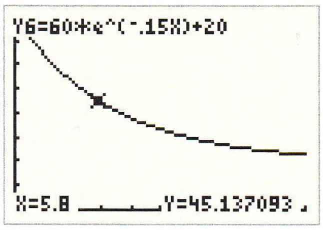
$$\begin{aligned}\vartheta'(t) &= 60 \cdot e^{-0{,}15t} \cdot (-0{,}15)\\ &= \left(60 \cdot e^{-0{,}15} + 20 - 20\right) \cdot (-0{,}15)\\ &= \underbrace{(\vartheta(t) - 20)}_{\text{Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur}} \cdot (-0{,}15)\end{aligned}$$

b) Zu lösen ist die Gleichung $\vartheta(t) = 45$, also $45 = 60 \cdot e^{-0{,}15t} + 20$.

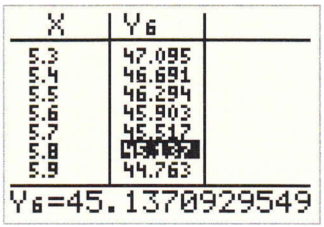
Dies kann auf mehreren Wegen geschehen:

grafisch

$0 \le x \le 20$
$0 \le y \le 80$



tabellarisch



algebraisch

$$\begin{aligned} 45 &= 60 \cdot e^{-0{,}15t} + 20 && \mid -20\\ 25 &= 60 \cdot e^{-0{,}15t} && \mid :60\\ \tfrac{5}{12} &= e^{-0{,}15t} && \mid \ln\\ \ln\left(\tfrac{5}{12}\right) &= -0{,}15t && \mid :(-0{,}15)\\ t &= \frac{\ln\left(\frac{5}{12}\right)}{-0{,}15} \approx 5{,}836\ldots \end{aligned}$$

Ergebnis:

Nach knapp 6 Minuten hat der Kaffee somit die Temperatur von 45 °C erreicht.

Aufgabe

LK **2 Differenzialgleichung der begrenzten Abnahme**

Notieren Sie in dem Beispiel von Aufgabe 1 die Information über die Abkühlungsgeschwindigkeit als Differenzialgleichung und ermitteln Sie daraus den Funktionsterm für die Kaffee-Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit.

Lösung

Abnahme bedeutet negative Ableitung.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist durch die Ableitung gegeben:

$\vartheta'(t) = -0{,}15\left(\vartheta(t) - 20\right)$, wobei t in min, $\vartheta(t)$ in °C gemessen wird.

Diese Gleichung ähnelt der Differenzialgleichung exponentieller Prozesse. Noch größere Übereinstimmung ist gegeben, wenn auf der linken Seite statt $\vartheta'(t)$ der wertgleiche Term $\left(\vartheta(t) - 20\right)'$ geschrieben wird:

$$\left(\vartheta(t) - 20\right)' = -0{,}15\left(\vartheta(t) - 20\right)$$

Summenregel der Ableitung

Die Ableitung von $\vartheta(t) - 20$ ist proportional zum Funktionsterm $\vartheta(t) - 20$. Diese Differenzialgleichung hat die Lösung

$$\vartheta(t) - 20 = \left(\vartheta(0) - 20\right)e^{-0{,}15t}; \text{ also}$$
$$\vartheta(t) = 20 + \left(\vartheta(0) - 20\right)e^{-0{,}15t}$$

Weiterführende Aufgabe

3 Begrenzte Zunahme

Milch mit einer Temperatur von 6 °C wird aus dem Kühlschrank genommen und in einen 25 °C warmen Raum gestellt. In jedem Moment erwärmt sie sich pro Minute um 12 % der noch herrschenden Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur. Ermitteln Sie

(1) eine Gleichung für die Erwärmungsgeschwindigkeit,
(2) einen Term für die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit,
(3) den Temperaturverlauf.

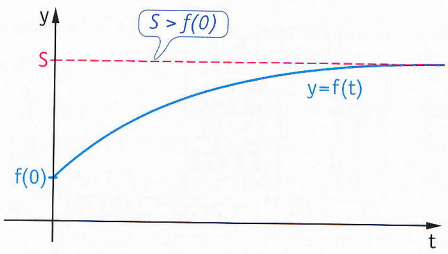
Information

(1) Begrenztes Wachstum

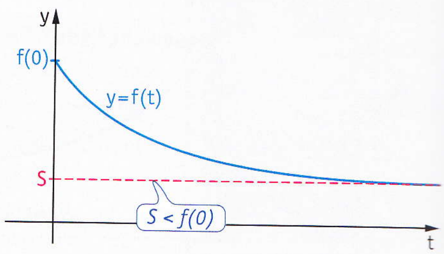
Bei vielen Zu- oder Abnahmeprozessen im Alltag oder in der Natur ist der Zunahme oder der Abnahme eines Bestands eine natürliche Grenze gesetzt, die man **Sättigungsgrenze** oder auch *Kapazität* nennt.
Solche Prozesse bezeichnet man als *begrenzte Zunahme* oder als *begrenzte Abnahme*, falls gilt:
Die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ eines Bestands $f(t)$ ist bei einem begrenzten Wachstumsprozess proportional zur Differenz aus Sättigungsgrenze S und aktuellem Bestand: $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$ mit $k > 0$

Der Bestand $f(t)$ nähert sich dann exponentiell an die Sättigungsgrenze S an:
$f(t) = S + (f(0) - S)\,e^{-kt}$ mit einer Konstanten $k > 0$.

Begrenzte Zunahme



Begrenzte Abnahme



(2) Differenzialgleichung des begrenzten Wachstums

Die Bedingung, dass die Wachstumsgeschwindigkeit proportional zur Differenz aus Sättigungsgrenze und aktuellem Bestand ist, liefert die Differenzialgleichung des begrenzten Wachstums:

$$f'(t) = k \cdot (S - f(t)) \quad \text{mit } k > 0.$$

Diese Differenzialgleichung ähnelt der Differenzialgleichung exponentieller Prozesse. Noch größere Übereinstimmung ist gegeben, wenn man $f'(t)$ durch den wertgleichen Term $(f(t) - S)'$ ersetzt:

$$(f(t) - S)' = k \cdot (S - f(t)) \quad \text{bzw.} \quad (f(t) - S)' = -k \cdot (f(t) - S)$$

Die Ableitung von $f(t) - S$ ist also proportional zum Funktionsterm. Jede Lösung dieser Differenzialgleichung hat die Form $f(t) - S = a \cdot e^{-k \cdot t}$ bzw. $f(t) = S + a \cdot e^{-k \cdot t}$

Ein begrenzter Wachstumsprozess wird durch eine Differenzialgleichung der Form

$$f'(t) = k \cdot (S - f(t)) \text{ mit } k > 0 \text{ beschrieben.}$$

Die Lösungen dieser Differenzialgleichungen sind Funktionen der Form

$$f(t) = S + a \cdot e^{-k \cdot t} \quad \text{mit } k > 0.$$

Ist der Anfangswert $f(0)$ vorgegeben, so hat die Differenzialgleichung nur die Lösung

$$f(t) = S + (f(0) - S) \cdot e^{-k \cdot t} \quad \text{mit } k > 0.$$

Weiterführende Aufgabe

DSL: **D**igital **S**ubscriber **L**ines (engl.): Internetverbindung mit hohen Übertragungsraten bis 210 Mbit/s.

GTR **4 Ermitteln eines Funktionsterms für begrenztes Wachstum mithilfe von Regression**

In einer Gemeinde mit 5 000 Internet-Anschlüssen stellen die Internetnutzer ihre Anschlüsse schrittweise auf DSL um:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl	571	1 101	1 507	1 820	2 104	2 415	2 657	2 903	3 150	3 312	3 456	3 602

Beschreiben Sie den Wachstumsprozess als beschränktes Wachstum mit geeigneter Grenze. Ermitteln Sie dann mithilfe des Regressionsbefehls für exponentielle Regression den Funktionsterm.

Information

(3) Ermitteln des Funktionsterms für begrenztes Wachstum mithilfe von Regression

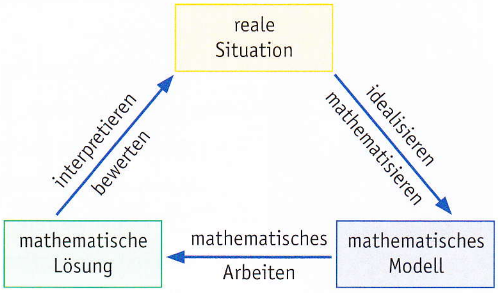
Bei der Anpassung einer Wachstumsfunktion für begrenztes Wachstum an Datenpaare muss man zunächst die Wachstumsgrenze kennen. Dann kann man die Differenzen zu ihr ermitteln und für diese eine exponentielle Regression durchführen.

(4) Wachstumsprozesse und Modelle der Wirklichkeit

Wir haben drei Arten von Wachstumsprozessen kennengelernt:

- das lineare Wachstum (Änderungsrate ist konstant),
- das exponentielle Wachstum (Änderungsrate ist proportional zum Bestand),
- das beschränkte Wachstum (Änderungsrate ist proportional zum Unterschied zwischen einer Sättigungsgrenze und dem Bestand).

Bei allen behandelten Wachstumsprozessen handelt es sich um sogenannte *mathematische Modelle*. Ein solches mathematisches Modell kann aufgefasst werden als ein Abbild des tatsächlichen Vorgangs in der Wirklichkeit, das jedoch die Wirklichkeit nicht vollständig, sondern nur in Teilaspekten darstellt.



Ein solches mathematisches Modell kann als (anfänglicher) Versuch zur Darstellung der Wirklichkeit erste gute Dienste leisten. Damit wird das Aufstellen von Vorhersagen über zukünftige Entwicklungen möglich, die aber stets an der Realität überprüft werden müssen. Abweichungen der Prognosen von den tatsächlich zu beobachtenden Erscheinungen führen dann zu Veränderungen im Modellansatz. Eine neuerliche Überprüfung an der Realität führt dann vielleicht zu einem wieder geänderten Ansatz. Nach der begründeten Entscheidung für einen Wachstumstyp müssen dann auch alle Konstanten und Beziehungen eventuell vielfach angesetzt, überprüft und andauernd daraufhin untersucht werden, ob die beobachtbare Wirklichkeit noch in angemessener Weise durch die Modellannahmen wiedergegeben wird.

Obwohl Größen in der Realität nur diskrete Werte annehmen – es gibt keine halben Menschen oder Atome –, beschreiben wir sie im Modell der Einfachheit halber stets kontinuierlich. Beim Interpretieren der mathematischen Lösung in der realen Situation ist dann geeignet zu runden.

Übungsaufgaben

5 Pilze können in Dörrautomaten getrocknet werden und verlieren dabei erheblich an Gewicht. Dies zeigt die folgende Messung:

Trockenzeit t (in min)	0	1	4	6	9	12	14	20
Gewicht (in % des Anfangsgewichtes)	100	83	54	39	22	19	14	8

Das Gewicht eines Pilzes sinkt allerdings auch bei längerer Trocknung nicht unter 6 % seines Anfangsgewichts.

a) Stellen Sie die Daten grafisch dar. Welches Wachstumsmodell kann benutzt werden? Begründen Sie Ihre Wahl.

b) Ermitteln Sie anhand geeigneter Wertepaare den Funktionsterm einer Funktion, welche den Gewichtsverlauf bei diesem Modell näherungsweise beschreibt. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a).