## 0.1 Inversion und Determinante von Matrizen (Fortsetzung 15.04.)

Sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. In der letzten Vorlesung haben wir die Inversion von Matrizen auf zwei Inversionen von $(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2})$-Matrizen, drei Multiplikationen von $(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2})$-Matrizen und eine Addition von $(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2})$-Matrizen zurückgeführt. Wir bezeichnen mit $I(n)$ die Anzahl der Körperoperationen, die für die Inversion einer $(n \times n)$-Matrix benötigt werden, und mit $M(n)$ die Anzahl der Operationen, die für die Multiplikation zweier $(n \times n)$-Matrizen benötigt werden. Dann gibt es eine positive Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} I(1) &= 1 \\ I(n) &= 2I\Big(\frac{n}{2}\Big) + cM(n) \end{aligned} \tag{1}$$

Auch die Berechnung der Determinante einer Matrix haben wir auf die Multiplikation von Matrizen zurückgeführt. Mit den Bezeichnungen der letzten Vorlesung gilt

$$\det(A) = \det(X)\det(Y)\det(Z) = \det(A_{11})\det(D).$$

Für beide Verfahren muss $A_{11}$ invertierbar sein. Wir legen nun zugrunde, dass $K$ der Körper der reellen Zahlen ist. Für den Körper der komplexen Zahlen funktioniert die folgende Methode ganz ähnlich. Um sicherzustellen, dass $A_{11}$ invertierbar ist, verwenden wir positiv definite Matrizen, denn positive definite Matrizen sind invertierbar. Eine Matrix $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist *positiv definit*, falls für alle Vektoren $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $x^T Bx \ge 0$. Dabei ist $x^T$ der transponierte Vektor $x$, also ein Zeilenvektor. Es gilt $x^T Bx = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j$. Beispielsweise gilt für $B = I_n$ deshalb $x^T Bx = \sum_{i=1}^n x_i^2 = ||x||^2 > 0$ für $x \neq 0$.
Falls $B$ positiv definit ist, ist auch die Untermatrix $B_{11}$ positiv definit. Falls $A$ invertierbar ist, ist $A^T A$ positiv definit, denn $x^T A^T Ax = (Ax)^T Ax = ||Ax||^2 > 0$ für $Ax \neq 0$. Damit is $(A^T A)^{-1}$ mit dem beschriebenen rekursiven Algorithmus berechenbar. Wegen $(A^T A)^{-1} = A^{-1}A^{T-1}$ lässt sich $A^{-1}$ auch $(A^T A)^{-1}$ durch Multiplizieren von rechts mit $A^T$ bestimmen.
Der Algorithmus funktioniert also wie folgt:

**Gegeben:** $(n \times n)$-Matrix $A$, wobei $n$ eine Zweierpotenz ist
(Ansonsten: Fülle die Matrix folgendermaßen bis zur nächsten Zweierpotenz $n+k$ auf: $C = \begin{pmatrix} A & O_{n,k} \\ O_{k,n} & I_k \end{pmatrix}$, wobei $1 < k < n$ und $O_{n,k}$ die $(n \times k)$-Nullmatrix bezeichnet. Dann gilt $C^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0_{n,k} \\ 0_{k,n} & I_k \end{pmatrix}$.)

**Gesucht:** Inverse $A^{-1}$

**Algorithmus:** Falls $n = 1$, invertiere direkt.
Sonst berechne $B = A^T A$.

| | |
|---|---|
| nur dies rekursiv ausführen: | Berechne $B^{-1}$ nach dem Schema aus der letzten Vorlesung, wobei die Inversionen von $(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2})$-Matrizen rekursiv ausgeführt werden. |

Gib $B^{-1}A^T$ zurück.

**Satz 1.** *Falls die Multiplikation von $(n\times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$ mit $M(n)$ Operationen möglich ist, so ist auch die Inversion und die Berechnung des Quadrates der Determinante von $(n\times n)$-Matrizen mit $O(M(n))$ Operationen möglich.*

*Beweis.* Zuerst beweisen wir die Aussagen für die Inversion von Matrizen. Wir haben in Gleichung (1) schon die Rekursionsgleichung für die Anzahl der Operation $I(n)$ für die Inversionen gesehen. Wir setzen voraus, dass es ein $a < \frac{1}{2}$ gibt, so dass gilt $M(\frac{n}{2}) \le aM(n)$. Nun lösen wir die Rekursionsgleichung auf.

$$
\begin{aligned}
I(n) &= 2I\Big(\frac{n}{2}\Big) + cM(n) \\
&= 2\bigg(2I\Big(\frac{n}{4}\Big) + cM\Big(\frac{n}{2}\Big)\bigg) + cM(n) \\
&\vdots \\
&= 2^k I\Big(\frac{n}{2^k}\Big) + c\sum_{i=0}^{k-1}\bigg(M\Big(\frac{n}{2^i}\Big)2^i\bigg) \\
&\underset{k=\log n}{\leq} nI(1) + \underbrace{c\bigg(\sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i a^i\bigg)}_{\text{konstant}} M(n) \\
&\leq c'M(n) + n \quad \text{für eine Konstante } c' \\
&= O(M(n))
\end{aligned}
$$

Sei $D(n)$ die Anzahl der Operationen, die benötigt wird, um das Quadrat der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix zu bestimmen. Es gilt $D(1) = 0$. Gegeben eine $(n \times n)$-Matrix $A$, berechnen wir $B = A^T A$. Nach dem Schema aus der letzten Vorlesung ist $\det(B) = \det(B_{11})\det(D)$. Berechne $\det B$ rekursiv. Es gilt $\det B = (\det A)^2$. Wir erhalten die Rekursionsgleichung:

$$
\begin{aligned}
D(n) &= 2D\Big(\frac{n}{2}\Big) + c_1 M(n) + 2I\Big(\frac{n}{2}\Big) + c_2 \\
D(n) &= 2D\Big(\frac{n}{2}\Big) + O(M(n))
\end{aligned}
$$

Auflösen der Rekursiongleichung zeigt, dass $D(n) = O(M(n))$. $\square$

Es ist nicht klar, wie das Vorzeichen der Determinante von $A$ bestimmt werden kann, und das Wurzelziehen ist keine Körperoperation.

## 0.2 Multiplikation Boolescher Matrizen

Eine *Boolesche Matrix* ist eine 0-1-Matrix, dass heißt $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ist eine Boolesche Matrix, wenn $a_{ij} \in \{0, 1\}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Wir definieren das Produkt zweier Boolescher Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ als $AB = C$, wobei $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik} \wedge b_{kj})$. Für diese Multiplikation sind die „schnellen“ Algorithmen (zum Beispiel von Strassen) nicht direkt anwendbar, weil $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ kein Ring ist.
Daher berechnen wir stattdessen $\hat{c}_{ij} := \sum_{i,j=1}^{n} = a_{ik} b_{kj}$ (das nennt man „Arithmetisierung“). Die $\hat{c}_{ij}$s sind ganze Zahlen von 0 bis $n$. Wir rechnen in $\mathbb{Z}_{n+1}$. Da $(\mathbb{Z}_{n+1}, +, \cdot)$ ein Ring ist, können die $\hat{c}_{ij}$ mit $M(n)$ arithmetischen Operationen berechnet werden. Wir erhalten $c_{ij}$ aus $\hat{c}_{ij}$:

$$
c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \hat{c}_{ij} = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}
$$