Mathematik für Informatiker I **WS08/09**

5. Übung **Abgabe: 21.11.08 bis 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **vollständige Induktion** $4+4+4$ Punkte

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

- Für jede natürliche Zahl n ist $(2n^3+3n^2+n)$ durch 6 teilbar.
- Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$

Aufgabe 2: **Abzählbarkeit** $2+4$ Punkte

a) Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine endliche Menge, B eine abzählbar unendliche Menge mit einer Bijektion $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass auch die Vereinigung $C = A \cup B$ abzählbar unendlich ist und begründen Sie das durch Konstruktion einer bijektiven Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow C$. Natürlich muss man dann auch kurz begründen, dass f bijektiv ist.

b) Drei Mengen A_1, A_2 und A_3 seien paarweise disjunkt und jede von ihnen sei abzählbar unendlich. Dazu sind drei bijektive Funktionen $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow A_i$ gegeben. Zeigen Sie, dass auch die Vereinigung $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ abzählbar unendlich ist und begründen Sie das durch Konstruktion einer bijektiven Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ (mit Begründung der Bijektivität).

Aufgabe 3: **Inklusion-Exklusion** 4 Punkte

Gegeben sind 4 achsenparallele Rechtecke in der Ebene mit ganzzahligen Eckkoordinaten: $R_1 = [0,10]\times[3,4]$, $R_2 = [2,6]\times[1,6]$, $R_3 = [3,7]\times[5,9]$ und $R_4 = [5,9]\times[0,8]$.

Berechnen Sie die von der Vereinigung der vier Rechtecke überdeckte Fläche mit dem Prinzip der Inklusion–Exklusion.

Hinweis 1: Das Prinzip ist eigentlich nur für endliche Mengen anwendbar und die Rechtecke sind unendliche Punkmengen. Da sie aber im ganzzahligen Gitter liegen, kann man sie auch als eine endliche Menge von Gitterzellen auffassen und ihre Fläche mit der Anzahl der Gitterzellen gleichsetzen, d.h. wir schreiben $||R_1|| = (10-0)\cdot(4-3) = 10$ und können Inklusion-Exklusion sinngemäß anwenden.

Hinweis 2: Sie können das Ergebnis durch Nachzählen in einer Skizze **bestätigen** - ein auf diese Art **erzieltes** Ergebnis gilt aber **nicht** als Lösung im Sinne der Aufgabenstellung.