Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Andreas Maletti
Gustav Grabolle
Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 5

Hinweise:

- Abgabeschluss für Lösungen zu Hausaufgaben: **21.06.2018** vor der Vorlesung.
- Die Seminaraufgaben werden in den Übungen vom 11.06. bis 24.06. besprochen.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.

Zur Wiederholung 5.1

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Was ist ein Problem?
- Was ist die charakteristische/halbe charakteristische Funktion einer Sprache?
- Wann ist eine Sprache entscheidbar/semi-entscheidbar?
- Was ist der Unterschied zwischen rekursiv aufzählbar und abzählbar?
- In welchem Verhältnis stehen Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit?

Zur Wiederholung 5.2

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Wann ist das Komplement eines Problems entscheidbar/semi-entscheidbar?
- In welchem Verhältnis stehen Sprachen, semi-entscheidbare Sprachen, Sprachen deren Komplement semi-entscheidbar ist und unentscheidbare Sprachen?
- Wann gilt $L \preceq K$ für zwei Probleme L, K?
- Was ist PCP?

Seminaraufgabe 5.1

(a) Zeigen Sie, dass folgende partielle Funktionen μ-rekursiv sind:

$$\text{(i)} \quad MOD \ : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N} : \quad (n,k) \mapsto \begin{cases} \mathrm{mod}(n,k) & \text{falls } k > 0 \\ \texttt{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \lfloor\sqrt{\cdot}\rfloor \ : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N} : \quad n \mapsto \begin{cases} \sqrt{n} & \text{falls} \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ \texttt{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Geben Sie den Wahrheitswert nachfolgender Aussagen an:

(i) Jede Typ-2-Sprache ist entscheidbar.

(ii) Eine Sprache ist genau dann entscheidbar, wenn sie eine Typ-0-Sprache ist.

(iii) Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie eine Typ-0-Sprache ist.

(iv) Für jede Turingmaschine M ist $L(M)$ entscheidbar.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen (es genügt, notwendige Hilfskonstruktionen zu skizzieren):

(i) Wenn L eine Typ-0-Sprache ist, dann ist L^C eine Typ-0-Sprache.

(ii) $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn $L = dom(f)$ für eine berechenbare partielle Funktion $f : \Gamma^* \dashrightarrow \Sigma^*$.

Hinweis: Für $f : \Gamma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ ist $dom(f) = \{x \in \Gamma^* \mid \exists y \in \Sigma^*.((x,y) \in f)\}$.

Seminaraufgabe 5.2

(a) Geben Sie eine Turingmaschine M mit $M \in \underline{H}$ an.

(b) Wir definieren: P ist ein 2-PCP genau dann, wenn P ein PCP über einem zweielementigen Alphabet ist. Reduzieren Sie

$$L = \{P \mid \text{PCP } P \text{ lösbar}\}$$

auf

$$K = \{P \mid \text{2-PCP } P \text{ lösbar}\}.$$

Seminaraufgabe 5.3

(a) Beweisen Sie die Entscheidbarkeit für nachfolgende Probleme. Benutzen Sie hierzu Theorem 8.14 aus der Vorlesung.

(i) Ist $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ ein pythagoräisches Tripel?

(ii) Ist $\varphi \in \mathbf{AL}$ eine Tautologie?

Hausaufgabe 5.4

(a) Zeigen Sie (durch Angabe einer μ-Rekursion), dass folgende partielle Funktion μ-rekursiv ist:

$$div : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{falls } \frac{x}{y} \in \mathbb{N} \\ \texttt{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen (es genügt notwendige Hilfskonstruktionen zu skizzieren):

(i) Wenn $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine berechenbare, injektive Funktion ist, dann ist f^{-1} berechenbar (vgl. Beweis Theorem 8.6).

(ii) $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn $L = cod(f)$ für eine berechenbare partielle Funktion $f : \Gamma^* \dashrightarrow \Sigma^*$.

(iii) Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ ein entscheidbares Problem und $f : \Sigma^* \dashrightarrow \Gamma^*$ eine berechenbare partielle Funktion ist, dann ist $f(L) \subseteq \Gamma^*$ entscheidbar.

Hinweis: Für $f : \Gamma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ ist $cod(f) = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Gamma^*.((x, y) \in f)\}$.

Hausaufgabe 5.5

Sei Σ ein Alphabet, $M \subseteq \Sigma^*$ eine Menge und $L \subseteq M$ ein Problem. Wir definieren: L ist in M entscheidbar genau dann, wenn $\chi_{L|M}$ berechenbar ist.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen (es genügt, notwendige Hilfskonstruktionen zu skizzieren).

(a) Wenn L in M entscheidbar ist, dann ist L entscheidbar.

(b) Wenn L entscheidbar ist, dann ist L in M entscheidbar.

(c) Ist M entscheidbar, so ist L in M entscheidbar genau dann, wenn L entscheidbar ist.

Hinweis: $\chi_{L|M} = \{(x, y) \in \chi_L \mid x \in M\}$

Hausaufgabe 5.6

Wir betrachten die Menge der endlichen Graphen

$$Graph \quad = \quad \{(V, E) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid V \text{ endlich und } E \subseteq V \times V\} \ ,$$

sowie die Menge der *k-gefärbten* endlichen Graphen

$$Graph_k \quad = \quad \{(V, E, c) \in Graph \times \{1, \ldots, k\}^{\mathbb{N}} \mid c \in \{1, \ldots, k\}^V\} \ .$$

Sei $(V, E, c) \in Graph_k$. Wir sagen die Funktion $c : V \to \{1 \ldots, k\}$ ist eine *gültige k-Färbung* auf (V, E), falls $c(i) \neq c(j)$ für alle $(i, j) \in E$.

Darüber hinaus betrachten wir die Menge der aussagenlogischen Formeln $\mathbf{AL}(\mathrm{VAR})$ über der Menge an Aussagenvariablen $\mathrm{VAR} = \{e_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{c_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, k\}\}$.

(a) Begründen Sie kurz, warum $\{\varphi \in \mathbf{AL}(\mathrm{VAR}) \mid \varphi \text{ ist erfüllbar}\}$ entscheidbar ist.

(b) Geben Sie eine totale, berechenbare (kurze Begründung) Funktion $f : Graph_k \to \mathbf{AL}(\mathrm{VAR})$ an, für welche $f(V, E, c)$ genau dann erfüllbar ist, wenn c eine gültige k-Färbung auf (V, E) ist.

(c) Begründen Sie mit Hilfe von (a) und (b) die Entscheidbarkeit des Problems: Existiert für (V, E) eine gültige k-Färbung?

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass sich $Graphen, Graphen_k$ und $\mathbf{AL}(\mathrm{VAR})$ endlich kodieren lassen.