Dr. Karin Quaas
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~quaas

WS 2012/13
Institut für Informatik

Übungsblatt zur Vorlesung „Echtzeitautomaten“
Serie 3

Die Übungen dieser Serie werden in der Übung am 26.11.2012 behandelt.

1. Das Leerheitsproblems für Zeitautomaten ist das Problem zu entscheiden, ob für einen gegebenenen Zeitautomat $\mathcal{A}$ gilt: $L(\mathcal{A}) = \emptyset$. Beweisen Sie, dass das Leerheitsproblem für Zeitautomaten entscheidbar ist.

2. Eine Instanz des SUBSET-SUM-Problems besteht aus einem Paar (A, t), wobei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen und $t \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist. Das Problem ist zu entscheiden, ob es eine Teilmenge B von A gibt, sodass $\sum_{a \in B} a = t$. Dieses Problem ist NP-vollständig.

   Zeigen Sie durch eine Reduktion des SUBSET-SUM-Problems, dass das Erreichbarkeitsproblem für Zeitautomaten mit 2 Uhrenvariablen NP-hart ist.

3. Vervollständigen Sie den Beweis für Theorem 4 (Unentscheidbarkeit des Universalitätsproblems) für Anweisungen der Form

$$I_j : \texttt{If } C_1 = 0 \texttt{ then go to } I_k \texttt{ else } C_1 := C_1 - 1; \texttt{ go to } I_m$$

4. Beweisen Sie: Es ist unentscheidbar, ob die durch einen gegebenen Zeitautomaten $\mathcal{A}$ erkannte Zeitsprache $L(\mathcal{A})$ durch einen deterministischen Zeitautomaten erkennbar ist. *Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis zu Theorem 5 (siehe Rückseite dieser Serie.)*

Theorem 5 *Das Komplementierbarkeitsproblem für Zeitautomaten ist unentscheidbar.*

Beweis. Sei $L \subseteq T\Sigma^+$ eine erkennbare Zeitsprache. und sei $c \notin \Sigma$. Wir definieren eine Zeitsprache L' über $\Sigma \cup \{c\}$ als Vereinigung der folgenden drei Zeitsprachen:

1. $L_1 = L \cdot (\{c\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \cdot (\Sigma \times \mathbb{R}_{\geq 0})^*$. (Hierbei sind die Zeitstempel so zu wählen, dass eine aufsteigende Zeitsequenz entsteht.).

2. $L_2 = \{(\bar{a}, \bar{t}) \in T(\Sigma \cup \{c\})^+ \mid \#_c(\bar{a}) = 0$ of $\#_c(\bar{a}) \geq 2\}$. Hierbei bezeichnet $\#_c(\bar{a})$ die Anzahl der in $\bar{a}$ vorkommenden a.

3. $L_3 = (\Sigma \times \mathbb{R}_{\geq 0})^* \cdot (\{c\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \cdot L(\mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}$ der Zeitautomat aus Aufgabe 2 von Übungsserie 1 ist.

Die Zeitsprache L' ist also erkennbar, denn L_1, L_2, L_3 sind erkennbar, und erkennbare Zeitsprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen.

Wir zeigen: Das Komplement von L', $\overline{L'}$, ist erkennbar gdw. $L = T\Sigma^+$.

Angenommen $L = T\Sigma^+$. Dann folgt zusammen mit den Definitionen von L_1 und L_2: $L' = T(\Sigma \cup \{c\})^+$. Klarerweise ist $\overline{L'} = \emptyset$ und kann durch einen Zeitautomaten über $\Sigma \cup \{c\}$ erkannt werden.

Angenommen $L \neq T\Sigma^+$. Es gibt also ein Zeitwort $w = (a_1, t_1)...(a_n, t_n) \in T(\Sigma)^+ \backslash L$. Betrachte ein Zeitwort $w \cdot (c, t_n + 1) \cdot v$ mit $v \in T\Sigma^+$. (Wähle v so, dass tatsächlich eine aufsteigende Zeitsequenz entsteht.) Dann gilt: $w \cdot (c, t_n + 1) \cdot v \in L'$ gdw. $v \in L(\mathcal{A})$, denn das Wort kann wegen $w \notin L$ nicht in L_1 sein, und wegen genau einem vorkommenden c kann es auch nicht in L_2 sein; also muss es in L_3 sein. Daraus folgt natürlich: $w \cdot (c, t_n + 1) \cdot v \in \overline{L'}$ gdw $v \in \overline{L(\mathcal{A})}$.

Angenommen, es gäbe einen Zeitautomaten $\mathcal{B}$ mit $L(\mathcal{B}) = \overline{L'}$. Nach dem Lesen von $w \cdot (c, t_n + 1)$ gibt es endlich viele Zustände in denen $\mathcal{B}$ sich befinden kann. Aus den gleichen Gründen, aus denen $\overline{L(\mathcal{A})}$ nicht erkennbar ist, kann $\mathcal{B}$ von diesen Zuständen aus unmöglich genau die Wörter v akzeptieren, die in $\overline{L(\mathcal{A})}$ sind. Also kann $\overline{L'}$ nicht erkennbar sein.