ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA. · G. HEINRICH-WIEN
A. KROMM-GRAZ · E. MELAN-WIEN · K. OSWATITSCH-WIEN
H. PARKUS-WIEN

SCHRIFTLEITUNG
H. PARKUS-WIEN

BAND XV
MIT 109 TEXTABBILDUNGEN

ERNST MELAN ZUM 70. GEBURTSTAG

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1961

Ausbreitung der Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern

Von **W. Nowacki**, Warszawa

Zusammenfassung. Für einen linear-viskoelastischen Körper mit temparaturunabhängigen physikalischen Kennwerten unter der Wirkung verschiedener instationärer Temperaturfelder werden Lösungen für die Spannungsausbreitung angegeben. Besonderes Augenmerk wird dem Biotschen Körper zugewandt.

Die Arbeiten auf dem Gebiet der Analyse von Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern sind erst kürzlich aufgenommen worden, wobei hauptsächlich das Körpermodell mit linearer Charakteristik als Grundlage diente. Die Aufmerksamkeit der Forscher konzentrierte sich in erster Linie auf quasistatische Probleme, also solche, bei denen man bei langsamer zeitlicher Änderung des Temperaturfeldes die inertialen Kräfte außer acht lassen konnte.

Die Untersuchungen auf diesem Gebiet wurden durch die Arbeiten von H. H. Hilton[1] und A. Freudenthal[2] eingeleitet. Das bekannte Korrespondenzprinzip zwischen den Lösungen auf dem Gebiet der linearen Elastizitätstheorie und der Viskoelastizität, das von T. Alfrey[3] in Bezug auf nichtkompressible Körper erdacht und von E. H. Lee[4] auf kompressible Körper verallgemeinert wurde, ist von H. H. Hilton[1] und E. Sternberg[5] auf Probleme der veränderlichen Wärmespannungen ausgedehnt worden. H. Parkus[6] und W. Nowacki[7] führten das thermo-visko-elastische Verschiebungspotential ein, indem sie es bei der Lösung einer Reihe quasistatischer Probbleme zur Anwendung brachten. E. Sternberg[5] bearbeitete eingehend das Problem der Wärmespannungen im unendlichen Raum mit kugeligem Hohlraum, während M. Sokolowski[8] sich mit diesen in einer viskoelastischen Kugel herrschenden Vorgängen befaßte.

Man kann wohl sagen, daß die grundsätzlichen theoretischen Probleme, soweit sie die Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern mit linearer Charakteristik betreffen, zur Zeit als bewältigt angesehen werden können; die Bemühungen der Forscher erstrecken sich nunmehr auf die Untersuchung quasistatischer Wärmespannungen in viskoelastischen Werkstoffen, welche rheologische Eigenschaften aufweisen, die von der Temperatur abhängen[9, 10].

---

[1] H. H. Hilton: "An extension of Alfrey's elastic-visco-elastic analogy to viscoelastic thermal stress problems". Rep. No. TSVE – TR-2, Dep. Aero Eng., University of Illinois (1953).

[2] A. Freudenthal: "Effect of rheological behavior on thermal stresses". Journ. of Appl. Physics, 25 (1954).

[3] T. Alfrey: "Non homogenous stresses in visco-elastic media". Quart. Appl. Mech. 8 (1950).

[4] E. H. Lee: "Stress analysis in visco-elastic bodies" Quart. Appl. Math. 13 (1955).

[5] E. Sternberg: "On transient thermal stresses in linear visco-elasticity". Proc. of the third US National Congr. Appl. Mech., New York (1958).

[6] H. Parkus: „Instationäre Wärmespannungen", Wien (1959).

[7] W. Nowacki: "Thermal stresses due to the action of heat sources in a viscoelastic space". Arch. Mech. Stos. 11 (1959).

[8] M. Sokolowski: „Wärmespannungen in einer Kugel, die aus einem Werkstoff von viscoelastischer Eigenschaft hergestellt ist" (polnisch). Jubiläumsschrift von Prof. W. Wierzbicki, Warszawa (1959).

[9] H. H. Hilton: "Thermal stresses in thic-walled cylinders exhibiting temperature-dependent viscoelastic properties of the Kelvin thype". Proc. Second. US Nat. Congr. Appl. Mech. (1954).

[10] R. Muki and E. Sternberg: "On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperaturedependent properties". Im Druck.

Der Ausbreitung von Wärmespannungen im viskoelastischen Körper mit linearer Charakteristik wurden bisher nur wenige Arbeiten gewidmet. Hier wären die Arbeit von A. Katasonow[11] sowie die Arbeiten von W. Nowacki[12 13] zu nennen.

In der vorliegenden Arbeit werden wir einige Lösungsvarianten für Spannungsausbreitung im unendlichen Raum sowie für eindimensionale Probleme, die sich auf den Halbraum und die Schicht aus viskoelastischem Werkstoff beziehen, angeben.

I. Grundbeziehungen und Gleichungen

Wir untersuchen einen viskoelastischen, isotropen und homogenen Körper mit linearer Charakteristik, welcher der Wirkung eines nichtstationären Temperaturfeldes ausgesetzt ist. Wir werden uns auf kleine Verzerrungen beschränken und voraussetzen, das sowohl die mechanischen als auch die thermischen Moduli nicht von der Temperatur abhängen. Die Annahme einer Unabhängigkeit physikalischer Konstanten von der Temperatur bildet eine ernsthafte Beschränkung, sie verneint nämlich die Empfindlichkeit des Viskositätsmoduls in bezug auf die Temperatur. Die Berücksichtigung einer Veränderlichkeit des Moduls ist zwar möglich[9], sie versucht jedoch erhebliche analytische Schwierigkeiten schon für einfachste quasistatische Probleme.

Das Gleichungssystem, welches die Ausbreitung thermischer Spannungen in einem viskoelastischen Körper mit linearer Charakteristik beschreibt, besteht aus linearen Beziehungen zwischen Spannungs- und Verzerrungszustand, aus linearen Beziehungen zwischen Verzerrungs- und Verschiebungszustand sowie aus den Bewegungsgleichungen.

Die Beziehungen zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verzerrungszustandes nehmen wir in nachstehender Form an[4,5]:

$$P_1(D)\, s_{ij} = P_2(D)\, e_{ij}, \tag{1.1}$$

$$P_3(D)\, \sigma_{ii} = P_4(D)\, (\varepsilon_{ii} - 3\,\alpha_t\, T). \tag{1.2}$$

Hier ist T die Temperatur, α_t der Koeffizient der linearen thermischen Ausbreitung, s_{ij} und e_{ij} die Deviatoren des Spannungs- und Verzerrungszustandes,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}, \tag{1.3}$$

während σ_{ij} und ε_{ij} die Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors sind. Die Operatoren $P_i(D)$, $i = 1, 2, 3, 4$ sind lineare Differentialoperatoren in bezug auf die Zeit t

$$P_i(D) = \sum_{n=0}^{Ni} a_i^{(n)}\, D^n,\ D = \frac{\partial}{\partial t}, \quad a_i^{(Ni)} \neq 0 \tag{1.4}$$

und die $a_i^{(n)}$ sind konstante Größen.

In bezug auf das rechtwinkelige kartesische System nehmen die Beziehungen zwischen den Komponenten des Verzerrungszustandes und den Verschiebungen u_i die Form an

---

[11] A. Katasonow: „Die Ausbreitung von sphärischen thermoviskoelastischen Wellen" (russisch) Wiestn. Mosk. Univ. 3 (1957).

[12] W. Nowacki: "Thermal stress propagation in visco-elastic bodies" (I), Bull. Acad. Pol. Sc. s. techn. 7 (1959).

[13] W. Nowacki: "Thermal stress propagation in visco-elastic bodies" (II), Bull. Acad. Pol. Sci. s. techn. 7 (1959)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{1.5}$$

Wenn wir in den Bewegungsgleichungen

$$\sigma_{ij,j} = \varrho\, \ddot{u}_i \tag{1.6}$$

die Spannungen durch die Verzerrungen ausdrücken und die letzteren wieder durch die Verschiebungen, dann erhalten wir folgendes System von Verschiebungsgleichungen

$$L_1(D)\, u_{i,kk} + L_2(D)\, u_{k,ki} = L_3(D)\, T_{,i} + \varrho\, L_4(D)\, \ddot{u}_i \tag{1.7}$$

wo

$$L_1(D) = P_2(D)\, P_3(D),\ L_2(D) = \frac{1}{3}\,[2\, P_4(D)\, P_1(D) + P_2(D)\, P_3(D)],$$

$$L_3(D) = 2\, P_4(D)\, P_1(D), \quad L_4(D) = 2\, P_1(D)\, P_3(D). \tag{1.8}$$

Wenden wir auf die Gleichungen (1.7) die Laplacesche Transformation an, indem wir voraussetzen, daß für die Verschiebungen die homogenen Anfangsbedingungen gelten, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\bar{\mu}\, \bar{u}_{i,kk} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\, \bar{u}_{k,ki} = \bar{\gamma}\, \bar{T}_{,i} + \varrho\, p^2\, \bar{u}_i, \tag{1.9}$$

wo

$$\bar{\mu} = \frac{P_2(p)}{2\, P_1(p)}, \quad \bar{\lambda} = \frac{P_1(p)\, P_4(p) - P_2(p)\, P_3(p)}{3\, P_1(p)\, P_3(p)}, \quad \bar{\gamma} = (3\,\bar{\lambda} + 2\,\bar{\mu})\, \alpha_t,$$

Funktionen des Parameters p sind und wo ferner

$$\bar{f}(x_r, p) = L\{f(x_r, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(x_r\, t)\, dt,$$

die Laplacesche Transformation in bezug auf t der Funktion $f(x_r, t)$ ist.

Lösen wir nun das System der Gleichungen (1.1), (1.2) nach σ_{ij} auf und führen die Laplace-Transformation aus, dann erhalten wir folgende Beziehungen

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\,\bar{\mu}\,\bar{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}\,(\bar{\lambda}\,\bar{\varepsilon}_{kk} - \gamma\,\bar{T}). \tag{1.10}$$

Es wäre zu beachten, daß wir eine analoge Form zu den Gleichungen (1.9) auch im Falle viskoelastischer Körper mit linearer Charakteristik sowie kontinuierlicher Relaxtionsspektren erhalten. Im Falle des Biotschen Körpers, wo die Beziehungen zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verzerrungszustandes durch die Formeln gegeben sind[14,15],

$$\sigma_{ij} = 2\int_0^t a(t-\tau)\, \frac{\partial \varepsilon_{ij}(x_r, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau +$$

$$+ \delta_{ij}\int_0^t \left\{ b(t-\tau)\, \frac{\partial}{\partial \tau}\, \varepsilon_{kk}(x_r, \tau) - c(t-\tau)\, \frac{\partial}{\partial \tau}\, T(x_r, \tau) \right\} d\tau, \tag{1.11}$$

$$c(t) = [3\, b(t) + 2\, a(t)]\, \alpha_t,$$

[14] M. A. Biot: "Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena" J. Appl. Phys., 25 (1954).

[15] D. S. Berry: "Stress propagation in visco-elastic bodies". J. Mech. Phys. Sol. 6 (1958).

nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an

$$\int_0^t \left\{a(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}u_{i,kk} + [a(t-\tau)+b(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}u_{k,ki}\right\}d\tau =$$

$$= \int_0^t c(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}T_{,i}\,d\tau + \varrho\,\ddot{u}_i. \tag{1.12}$$

Nach Vornahme der Laplace-Transformation auf Grund der Gleichungen (1.12) erhalten wir das Gleichungssystem (1.9) mit der Maßgabe, daß

$$\bar{\mu} = p\,\bar{a},\quad \bar{\lambda} = p\,\bar{b},\quad \bar{\gamma} = p\,\bar{c}. \tag{1.13}$$

Für einen linear-elastischen Körper haben die Bewegungsgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \mu_0\, u_{i,kk}^{(0)} + (\lambda_0 + \mu_0)\, u_{k,ki}^{(0)} &= \gamma_0\, T_{,i} + \varrho\, \ddot{u}_i^{(0)}, \\ \gamma_0 &= (3\lambda_0 + 2\mu_0)\,\alpha_t. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Hier sind $u_i^{(0)}$ die Komponenten des Verschiebungsvektors im vollkommen elastischen Körper und die Größen μ_0, λ_0 die Laméschen Konstanten.

Aus dem Vergleich der Gleichungen (1.14) und (1.9) ergibt sich die bekannte elastisch-viskoelastische Analogie.

Um eine Lösung des viskoelastischen Problems zu erhalten, benützen wir die bekannte Lösung des analogen elastischen Problems. In dieser ersetzen wir die Funktion $u_i^{(0)}$ durch die Transformierte u_i und die Konstanten λ_0, μ_0 durch die Größen $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$. Wenn wir die so modifizierte Lösung rücktransformieren, erhalten wir die gesuchte Lösung des viskoelastischen Problems.

II. Lösung der Verschiebungsgleichung

Wir wollen das System der Verschiebungsgleichungen (1.9) mit Hilfe der Greenschen Funktionen $G_i^{(s)}(x_r, \xi_r, t)$ lösen, die das Gleichungssystem erfüllen

$$\bar{\mu}\,\bar{G}_{i,kk}^{(s)} + (\bar{\lambda}+\bar{\mu})\,\bar{G}_{k,ki}^{(s)} + \delta(x_r - \xi_r)\,\delta_{is} = \varrho\, p^2\, \bar{G}_i^{(s)}. \tag{2.1}$$

Mit $G_i^{(s)}(x_r, \xi_r, t)$ bezeichnen wir die Verschiebung des Punktes (x_r) in Richtung der Achse x_i, welche durch die momentan konzentrierte im Punkt (ξ_r) angreifende Einzelkraft, die in Richtung der Achse x_s wirkt, hervorgerufen wurde. Die Gleichungen (2.1) stellen drei Gleichungssysteme dar ($s = 1, 2, 3$), die wiederum je drei Gleichungssysteme umfassen ($i = 1, 2, 3$). Wenn die Funktionen $G_i^{(s)}$ als bekannt vorausgesetzt werden, so läßt sich die Lösung der Gleichungen in der Form darstellen

$$\bar{u}_i(x_r, p) = -\bar{\gamma}\int_V \bar{G}_i^{(s)}(x_r, \xi_r, p)\,\frac{\partial\bar{T}(\xi_r, p)}{\partial\xi_s}\,dV(\xi_r), \tag{2.2}$$

oder

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x_r, p) &= \bar{\gamma}\int_V \bar{T}(\xi_r, p)\,\frac{\partial G_s^{(i)}(\xi_r, x_r, p)}{\partial\xi_s}\,dV(\xi_r) \\ &= \bar{\gamma}\int_V \bar{T}(\xi_r, p)\,\bar{\Theta}_i(\xi_r, x_r, p)\,dV(\xi_r). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wir haben uns hier den Maxwellschen Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen sowie den Greenschen Integralsatz zunutze gemacht,

$$G_i^{(s)}(x_r, \xi_r, p) = G_s^{(i)}(\xi_r, x_r, p). \tag{2.4}$$

In der Gleichung (2.3) bedeutet $\Theta_i(\xi_r, x_r, t)$ die Dilatation im Punkte (ξ_r), die durch Wirkung der momentan konzentrierten, in Punkt (x_r) wirksamen und in Richtung der Achse x_i gerichteten Einzelkraft hervorgerufen wurde. Wenn wir mit $U_i(x_r, \xi_r, t)$ die Verschiebung des Punktes (x_r) in Richtung der Achse x_i bezeichnen, die durch die Wirkung des im Punkt (ξ_r) gelegenen momentanen Druckzentrum hervorgerufen wurde, so können wir der Gleichung (2.3) die nachfolgende Form geben

$$\bar{u}_i(x_r, p) = -\bar{\gamma} \int_V \bar{T}(\xi_r, p)\, \bar{U}_i(x_r, \xi_r, p)\, dV(\xi_r). \tag{2.5}$$

Im viskoelastischen Raum ist aber[16]

$$\bar{U}_i(x_r, \xi_r, p) = -\frac{1}{4\pi(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{e^{-Rp\bar{\sigma}}}{R}\right) \tag{2.6}$$

wo

$$R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2, \qquad \bar{\sigma}^2 = \frac{\varrho}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}.$$

Mit Beachtung von (2.6), können wir die Beziehung (2.5) in der Weise darstellen

$$\bar{u}_i = \bar{\Phi}_{,i} \tag{2.7}$$

wo die Funktion $\bar{\Phi}$ durch das Integral

$$\bar{\Phi}(x_r, p) = -\frac{\bar{m}}{4\pi} \int_V \frac{\bar{T}(\xi_r, p)\, e^{-Rp\bar{\sigma}}}{R(x_r, \xi_r)}\, dV(\xi_r), \qquad \bar{m} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \tag{2.8}$$

gegeben ist.

Die Funktion Φ ist das dynamische Potential der thermoelastischen Verschiebung.

Die Form der Funktion $\bar{\Phi}$ (2.8) zeigt, daß diese Funktion die Gleichung

$$\bar{\Phi}_{,kk} - p^2 \bar{\sigma}^2 \bar{\Phi} = \bar{m}\, \bar{T}, \quad \Phi(x_r, 0) = \dot{\Phi}(x_r, 0) = 0 \tag{2.9}$$

zu erfüllen hat.

In der Tat, wenn wir (2.7) in das Gleichungssystem (1.9) einsetzen und dieses nach x_i integrieren, erhalten wir die Gleichung (2.9). Die hier erzielten Resultate zeigen, daß das Temperaturfeld in einem unendlichen viskoelastischen Raum nur Dilatationswellen hervorrufen kann.

Wenn wir (2.7) in die Beziehungen (1.10) einsetzen und uns die Gleichung (2.9) zunutze machen, so können wir die Spannungstransformierte mit Hilfe der Funktion Φ folgendermaßen ausdrücken

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu}\,(\bar{\Phi}_{,ij} - \delta_{ij}\, \bar{\Phi}_{,kk}) + \delta_{ij}\, p^2 \varrho\, \bar{\Phi}. \tag{2.10}$$

Die Kenntnis der Funktion $\bar{\Phi}$ genügt also zur Bestimmung der Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen.

[16] W. Nowacki: "Stress propagation in an infinite visco-elastic body produced by a time-variable point force". Arch. Mech. Stos., 11 (1959).

Die Lösung der Gleichung (2.9) können wir gleichfalls in folgender Form darstellen

$$\bar{\Phi} = \int_V \bar{T}(\xi_r, p)\,\bar{\varphi}(x_r, \xi_r, p)\,dV \tag{2.11}$$

Daher ist

$$\Phi(x_r, t) = \int_0^t d\tau \int_V T(\xi_r, \tau)\,\varphi(x_r, \xi_r, t-\tau)\,d\tau. \tag{2.12}$$

Die Funktion $\bar{\varphi}$ muß die Differentialgleichung

$$\bar{\varphi}_{,kk} - p^2\,\bar{\sigma}^2\,\bar{\varphi} = \bar{m}\,\delta(x_r - \xi_r) \tag{2.13}$$

mit den Anfangsbedingungen $\varphi(x_r, 0) = 0$, $\dot{\varphi}(x_r, 0) = 0$ erfüllen.

Die Funktion $\varphi(x_r, t)$ können wir demnach als dynamisches Potential der thermoelastischen Verschiebung[17] bezeichnen, das durch die Wirkung des Temperaturfeldes $T(x_r, t) = \delta(x_r - \xi_r)\,\delta(t)$ hervorgerufen wurde.

Die Funktion $\bar{\varphi}$ können wir, den räumlichen Eigenschaften des Temperaturfeldee entsprechend, spezialisieren. So haben wir im Falle eines Temperaturfeldes, das eins Symmetrie in bezug auf den Punkt aufweist, die Gleichung

$$(\partial_R^2 + 2\,R^{-1}\,\partial_R)\,\bar{\varphi} = \bar{m}\,\delta(R - R_0) \tag{2.14}$$

zu lösen. Wir erhalten

$$\bar{\varphi} = \frac{2\,\bar{m}}{\pi}\,\frac{R_0}{R}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha R\,\sin\alpha R_0}{\alpha^2 + p^2\,\bar{\sigma}^2}\,d\alpha, \tag{2.15}$$

oder

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{m}\,R_0}{p\,\bar{\sigma}\,R}\left[sh\,R\,p\,\bar{\sigma}\cdot e^{-R_0 p\bar{\sigma}}\,H(R_0 - R) + sh\,R_0\,p\,\bar{\sigma}\cdot e^{-Rp\bar{\sigma}}\,H(R - R_0)\right] \tag{2.16}$$

wo $H(z)$ die Heavisidesche Funktion ist. Die Funktion $\bar{\Phi}$ bestimmen wir durch Integration

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} = &-\frac{\bar{m}}{p\,\bar{\sigma}}\Big[sh\,R\,p\,\bar{\sigma}\int_R^\infty \bar{T}(R_0, p)\,e^{-R_0 p\bar{\sigma}}\,R_0\,dR_0 + \\ &+ e^{-Rp\bar{\sigma}}\int_0^R \bar{T}(R_0, p)\,sh\,R_0\,p\,\bar{\sigma}\,R_0\,dR_0\Big].\end{aligned} \tag{2.17}$$

Im Falle eines axial-symmetrischen Temperaturfeldes, das nur vom Radius $r = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^{1/2}$ abhängig ist, nimmt die Funktion die Form an

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} = &-\bar{m}\,r^{-1/2}\,[I_0(p\,r\,\bar{\sigma})\,K_0(r_0\,p\,\bar{\sigma})\,H(r_0 - r) + \\ &+ K_0(r\,p\,\bar{\sigma})\,I_0(r_0\,p\,\bar{\sigma})\,H(r - r_0)],\end{aligned} \tag{2.18}$$

[17] J. Ignaczak: "A dynamic nucleus o thermo-elastic strain in elastic infinite space and semi-space". Bull. Acad. Pol. Sci., s. techn. 7 (1959).

während wir die Funktion $\bar{\Phi}$ aus der Formel

$$\bar{\Phi} = -\bar{m}\, r^{-1/2} \left[I_0 (r\, p\, \bar{\sigma}) \int_r^\infty K_0 (r_0\, p\, \bar{\sigma})\, \bar{T} (r_0, p)\, d r_0 + \right.$$
$$\left. + K_0 (r\, p\, \bar{\sigma}) \int_0^r I_0 (r_0\, p \bar{\sigma})\, \bar{T} (r_0, p)\, d r_0 \right] \tag{2.19}$$

bestimmen.

Wenn das Temperaturfeld $T(x_1, t)$ in Bezug auf die Ebene $x_2\, x_3$ symmetrisch ist, so bestimmen wir die Funktion $\bar{\varphi}$ aus der Gleichung

$$\bar{\varphi}_{,11} - p^2\, \bar{\sigma}^2\, \bar{\varphi} = -\bar{m}\, [\delta (x_1 - \xi_1) + \delta (x_1 + \xi_1)]. \tag{2.20}$$

Die Lösung dieser Gleichung nimmt folgende Form an

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{m}}{2\, p\, \bar{\sigma}} \left[e^{-p\bar{\sigma}(x_1 - \xi_1)}\, H (x_1 - \xi_1) + e^{p\bar{\sigma}(x_1 - \xi_1)}\, H (\xi_1 - x_1) + \right.$$
$$\left. + e^{-p\bar{\sigma}(x_1 + \xi_1)} \right], \qquad x_1 \geq 0, \qquad \xi_1 > 0. \tag{2.21}$$

während wir die Funktion $\bar{\Phi}$ nach der Formel

$$\bar{\Phi} = -\frac{\bar{m}}{2\, p\, \bar{\sigma}} \left[\int_0^{x_1} \bar{T} (\xi_1, p)\, e^{-p\bar{\sigma}(x_1 - \xi_1)}\, d\xi_1 + \right.$$
$$\left. + \int_{x_1}^\infty \bar{T} (\xi_1, p)\, e^{\bar{\sigma} p (x_1 - \xi_1)}\, d\xi_1 + \int_0^\infty \bar{T} (\xi_1, p)\, e^{-\bar{\sigma} p (x_1 + \xi_1)}\, d\xi_1 \right], \tag{2.22}$$

bestimmen.

Wenn das Temperaturfeld $T(x_1, t)$ zur Ebene $x_2\, x_3$ antisymmetrisch ist, so nimmt die Funktion $\bar{\varphi}$, $\bar{\Phi}$ die Form an

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{m}}{2\, p\, \bar{\sigma}} \left[e^{-\bar{\sigma} p (x_1 - \xi_1)}\, H (x_1 - \xi_1) + e^{\bar{\sigma} p (x_1 - \xi_1)}\, H (\xi_1 - x_1) - e^{-p\bar{\sigma}(x_1 + \xi_1)} \right], \tag{2.23}$$

$$\Phi = -\frac{\bar{m}}{2\, p\, \bar{\sigma}} \left[\int_0^{x_1} \bar{T} (\xi_1, p)\, e^{-\bar{\sigma} p (x_1 - \xi_1)}\, d\, \xi_1 + \right.$$
$$\left. + \int_{x_1}^\infty \bar{T} (\xi_1, p)\, e^{\bar{\sigma} p (x_1 - \xi_1)}\, d\, \xi_1 - \int_0^\infty \bar{T} (\xi_1, p)\, e^{-\bar{\sigma} p (x_1 + \xi_1)}\, d\, \xi_1 \right]. \tag{2.24}$$

Auf diese Weise realisieren wir den Fall des elastischen Halbraumes, der in der Ebene $x_1 = 0$ frei von Spannungen ist.

Wenn im unendlichen Raum in gleichen Abständen h positive und negative ebene Temperaturkerne stationiert werden, so wird die Funktion $\bar{\varphi}$ die Form annehmen:

$$\bar{\varphi} = -\frac{2\, \bar{m}}{h} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin \alpha_n\, \xi_1 \sin \alpha_n\, x_1}{\alpha_n{}^2 + p^2\, \bar{\sigma}^2}, \qquad \alpha_n = \frac{n\, \pi}{n}. \tag{2.25}$$

Die Funktion $\bar{\varphi}$ wird uns zur Bestimmung der Funktion $\bar{\Phi}$ für die Schicht von der Stärke h dienen, in welcher das Temperaturfeld $T(x_1, t)$ herrscht, unter der Voraussetzung, daß in den Eegrenzungsebenen $\sigma_{11} = 0$ ist.

Der hier dargestellte Weg zur Bestimmung der Funktion mit Hilfe des Potentials der thermoelastischen Verzerrung leistet besondere Dienste in den Fällen, in denen das Temperaturfeld zeitlich und räumlich unstetig ist.

Nachstehend weisen wir einen anderen Weg zur Bestimmung der Funktion $\bar{\Phi}$, der im Falle der Wirkung von Wärmequellen bequemer ist.

Wenn wir auf die Gleichung der Wärmeleitung

$$T_{,kk} - \frac{1}{\varkappa}\dot{T} = -\frac{Q}{\varkappa}, \tag{2.26}$$

die Laplace-Transformation ausüben, so erhalten wir

$$\bar{T}_{,kk} - \frac{p}{\varkappa}\bar{T} = -\frac{\bar{Q}}{\varkappa}, \qquad T(x_r, 0) = 0. \tag{2.27}$$

In der Gleichung (2.26) ist $\varkappa = \lambda/\varrho c$, wo λ der Koeffizient der Wärmeleitung, ϱ die Dichte und c die spezifische Wärme ist. Dann wird $Q = W/\varrho\, c$, wo W die durch die Wärmequelle in der Zeit — und Volumeninhalt erzeugte Wärme bedeutet. Eliminieren wir nun aus der Gleichung (2.9) die Funktion $\bar{T}$, indem wir von der Gleichung (2.27) Gebrauch machen, so erhalten wir

$$(\nabla^2 - p^2\bar{\sigma}^2)\left((\nabla^2 - \frac{p}{\varkappa}\right)\bar{\Phi} = -\frac{\bar{m}}{\varkappa}\bar{Q}. \tag{2.28}$$

Wir wenden auf die letzte Gleichung die komplexe Fouriersche Integraltransformation an, die durch folgende Beziehungen gekennzeichnet ist

$$\begin{aligned} \bar{f}^*(\alpha_r, p) &= (2\pi)^{-3/2}\iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x_r, p)\, e^{i\alpha_k x_k}\, dV, \quad dV = dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ \bar{f}(x_r, p) &= (2\pi)^{-3/2}\iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^*(\alpha_r, p)\, e^{-i\alpha_k x_k}\, dW, \quad dW = d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Die Lösung der Gleichung (2.28) nimmt dann die Gestalt an

$$\bar{\Phi}(x_r, p) = -\frac{\bar{m}}{\varkappa}(2\pi)^{-3/2}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}^*(\alpha_r, p)\, e^{-i\alpha_k x_k}\, dW}{(\alpha_k\alpha_k + p/\varkappa)(\alpha_k\alpha_k + p^2\bar{\sigma}^2)}, \tag{2.30}$$

oder

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x_r, p) = -\frac{\bar{m}(2\pi)^{-3/2}}{p^2\bar{\sigma}^2 - p/\varkappa}\Bigg\{ &\frac{1}{\varkappa}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}^*(\alpha_r, p)\, e^{-i\alpha_k x_k}\, dW}{\alpha_k\alpha_k + p/\varkappa} - \\ &- \frac{1}{\varkappa}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}^*(\alpha_r, p)\, e^{-i\alpha_k x_k}\, dW}{\alpha_k\alpha_k + p^2\bar{\sigma}^2}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Das erste Integral in Klammern auf der rechten Seite der Gleichung (2.31) ist gleich $\bar{T}$; es stellt gleichzeitig die Lösung der Gleichung (2.27) dar. Das zweite Integral kann man als Lösung der Differentialgleichung

$$\bar{S}_{,kk} - p^2 \bar{\sigma}^2 \bar{S} = -\frac{\bar{Q}}{\varkappa}, \quad S(x_r, 0) = \dot{S}(x_r, 0) = 0, \tag{2.32}$$

ansehen, die in ihrem Aufbau zur Gleichung (2.9) analog ist. So können wir also das allgemeine Integral der Gleichung (2.28) in der Form darstellen

$$\bar{\Phi}(x_r, p) = -\frac{\bar{m}}{p^2 \bar{\sigma}^2 - p/\varkappa} (\bar{T} - \bar{S}). \tag{2.33}$$

Es sei hervorgehoben, daß zur Bestimmung der Funktion $\bar{\Phi}$ die Kenntnis der Transformation der Funktion $\bar{T}$ genügt; die Funktion $\bar{S}$ erhalten wir nämlich durch Ersetzen der Größe $p/\varkappa$ durch $p^2 \bar{\sigma}^2$ in der Transformierten $\bar{T}$. In dem besonderen Fall der momentan konzentrierten Wärmequelle, die im Ursprung des Koordinatensystems wirksam ist, haben wir

$$\bar{T} = \frac{Q}{4 \pi \varkappa R} e^{-R\sqrt{p/\varkappa}}. \tag{2.34}$$

Folglich

$$\bar{\Phi} = -\frac{Q\bar{m}}{4 \pi \varkappa R (p^2 \bar{\sigma}^2 - p/\varkappa)} (e^{-R\sqrt{p/\varkappa}} - e^{-Rp\bar{\sigma}}). \tag{2.35}$$

Dieses Resultat erzielen wir auch, wenn wir von der Formel (2.17) Gebrauch machen und die vorgeschriebene Integration durchführen.

Untersuchen wir nun den zeitlich harmonischen Fall des veränderlichen Temperaturfeldes

$$T(x_r, t) = Re\,[e^{i\omega t}\,\hat{T}(x_r)]. \tag{2.36}$$

Da die Verschiebungen und Spannungen sich gleichfalls der Zeit nach harmonisch ändern werden

$$u_i(x_r, t) = Re\,[e^{i\omega t}\,\hat{u}_i(x_r)], \quad \sigma_{ij}(x_r, t) = Re\,[e^{i\omega t}\,\hat{\sigma}_{ij}(x_r)], \tag{2.37}$$

so werden die Verschiebungsgleichungen die Form annehmen:

$$\hat{\mu}\,\hat{u}_{i,kk} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu})\,\hat{u}_{k,ki} = \hat{\gamma}\,\hat{T}_{,i} + \varrho\,(i\,\omega)^2\,\hat{u}_i,$$

wo

$$\hat{\mu} = \frac{P_2(i\omega)}{2 P_1(i\omega)}, \quad \hat{\lambda} = \frac{P_1(i\omega)\,P_4(i\omega) - P_2(i\omega)\,P_3(i\omega)}{3 P_1(i\omega)\,P_3(i\omega)}, \quad \hat{\gamma} = (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\,\alpha_t, \tag{2.38}$$

wenn in dem viskoelastischen Körper die Beziehungen (1.1) und (1.2) gelten, sowie

$$\hat{\mu}(i\omega) = i\omega \int_0^\infty a(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad \hat{\lambda}(i\omega) = i\omega \int_0^\infty b(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

im Falle des Biotschen viskoelastischen Körpers.

Daraus ist zu ersehen, daß wir die Spannungen und Verschiebungen durch die Formeln

$$u_i(x_r, t) = Re\,[e^{i\omega t}\,\hat{\Phi}_{,i}] \tag{2.39}$$

$$\sigma_{ij}(x_r, t) = Re\,\{e^{i\omega t}\,[2\,\hat{\mu}\,(\hat{\Phi}_{,ij} - \delta_{ij}\,\hat{\Phi}_{,kk}) + \varrho\,(i\omega)^2\,\hat{\Phi}]\} \tag{2.40}$$

ausdrücken können.

Die Funktion $\widehat{\Phi}$ erhalten wir, indem wir in die vorher für $\overline{\Phi}$ entwickelten Formeln an Stelle des Laplaceschen Transformationsparameters p die Größe $i\omega$ einsetzen. Wenn wir uns so der Formel (2.33) bedienen, erhalten wir

$$\widehat{\Phi} = -\frac{\widehat{m}}{[(i\omega)^2\,\widehat{\sigma}^2\,(i\omega) - i\omega/\varkappa]}\,(\widehat{T} - \widehat{S}). \tag{2.41}$$

Die Funktion $\widehat{S}$ ist das partikuläre Integral der Gleichung

$$\widehat{S}_{,kk} - (i\omega)^2\,\widehat{\sigma}^2\,\widehat{S} = -\frac{\widehat{Q}}{\varkappa} \tag{2.42}$$

III. Beispiele zur Ausbreitung von Wärmespannungen im viskoelastischen Raum

A. Wärmeschock auf der Oberfläche des viskoelastischen Halbraumes

Das Problem der Ausbreitung von Spannungen, die durch plötzliche Erwärmung der den elastischen Halbraum begrenzenden Ebene hervorgerufen werden, ist von W. I. Danilowskaya[18] für ein vollkommen elastisches Medium gelöst worden.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $T(0, t) = T_0\,H(t)$ sowie der Anfangsbedingung $T(x_1, 0) = 0$ können wir die Laplacesche Transformation der Temperatur durch die Formel

$$\overline{T} = \frac{T_0}{p}\,e^{-x_1\sqrt{p/\varkappa}}, \qquad x_1 > 0 \tag{3.1}$$

ausdrücken.

Die Funktion $\overline{\Phi}$ bestimmen wir aus der Formel (2.24). Nach Durchführung der vorgeschriebenen Integration haben wir

$$\overline{\Phi} = -\frac{T_0\,\overline{m}}{p\,[p^2\,\overline{\sigma}^2 - p/\varkappa]}\,[e^{-x_1\sqrt{p/\varkappa}} - e^{-p\,\sigma\,x_1}], \quad x_1 > 0. \tag{3.2}$$

Zu demselben Ergebnis gelangen wir, wenn wir uns der Formel (2.33) bedienen.

Bei dem erörterten Problem sind lediglich die Verschiebung u_1 sowie die Normalspannungen von Null verschieden, wobei nach (2.10)

$$\overline{\sigma}_{11} = p^2\,\varrho\,\overline{\Phi},\ \overline{\sigma}_{22} = \overline{\sigma}_{33} = 2\,\overline{\mu}\,\overline{\Phi}_{,11} + \lambda\,\overline{\Phi}_{,11} - \overline{\gamma}\,\overline{T} = 2\,\overline{\mu}\,\overline{m}\,\overline{T} + \overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^2\,p^2\,\overline{\Phi}. \tag{3.3}$$

Bestimmen wir nun die Wärmespannungen im Biotschen viskoelastischen Körper. Die in den Beziehungen (1.11) erscheinenden Funktionen $a(t)$, $b(t)$ nehmen wir in Form einer exponentionellen Abhängigkeit an

$$a(t) = \mu_0\,e^{-\varepsilon t},\ b(t) = \lambda_0\,e^{-\varepsilon t}. \tag{3.4}$$

Die Annahme derselben Relaxationszeit ε^{-1} für beide Funktionen, welche die rheologischen Eigenschaften eines Mediums charakterisiert, ist gleichbedeutend mit der Annahme eines von der Zeit unabhängigen Poissonschen Koeffizienten $\overline{\nu}$.

[18] W. I. Danilowskaya: „Wärmespannungen im elastischen Halbraum, verursacht durch plötzliche Erwärmung der Oberfläche (russisch), Prikl. Mat. i. Mech. 9,2 (1950).

In Übereinstimmung mit den Formeln (1.13) ist

$$\bar{\mu} = \mu_0 \frac{p}{p+\varepsilon}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_0 \frac{p}{p+\varepsilon}, \tag{3.5}$$

und ferner

$$\bar{\gamma} = \gamma_0, \ \bar{\sigma}^2 = \sigma_0{}^2 \frac{p+\varepsilon}{p}, \quad \sigma_0{}^2 = \frac{\varrho}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \gamma_0 = (3\lambda_0 + 2\mu_0)\,\alpha_t,$$

$$\bar{m} = m_0 = \gamma_0\, \sigma_0{}^2/\varrho.$$

Die Funktion $\bar{\sigma}_{11} = \varrho\, p^2 \bar{\Phi}$ nimmt die Form an

$$\begin{gathered} \bar{\sigma}_{11} = -\frac{T_0\, m_0\, \varrho}{\sigma_0{}^2 (p-\beta)} \left(e^{-x_1 \sqrt{p/\varkappa}} - e^{-x_1 \sigma_0 \sqrt{p(p+\varepsilon)}}\right), \\ \beta = \frac{1}{\varkappa\, \sigma_0{}^2} - \varepsilon > 0, \ \varepsilon > 0. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Führen wir auf Grund des Ausdrucks (3.6) eine inverse Laplace-Transformation durch und setzen die Bezeichnungen ein

$$\zeta = \frac{x_1}{\varkappa\, \sigma_0}, \ \tau = \frac{t}{\varkappa\, \sigma_0{}^2}, \quad \alpha = \varepsilon\, x\, \sigma_0{}^2 \tag{3.7}$$

so erhalten wir

$$\sigma_{11}(\zeta, \tau; \alpha) = -\frac{T_0\, m_0\, \varrho}{\sigma_0{}^2} \left[f_1(\zeta, \tau; \alpha) - g_1(\zeta, \tau; \alpha)\right] \tag{3.8}$$

wo

$$f_1(\zeta, \tau; \alpha) = \frac{1}{2} e^{\tau(1-\alpha)} \left[e^{-\zeta\sqrt{1-\alpha}}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau(1-\alpha)}\right) + e^{\zeta\sqrt{1-\alpha}}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau(1-\alpha)}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} g_1(\zeta, \tau; \alpha) = e^{\tau(1-\alpha)} \Bigg[& e^{-\zeta\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} H(\tau-\zeta) + \\ & + \zeta \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau e^{-\eta(1-\alpha/2)} \frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\eta^2-\zeta^2}\right)}{\sqrt{\eta^2-\zeta^2}} H(\eta-\zeta)\, d\eta \Bigg]. \end{aligned} \tag{3,9}$$

Die verbliebenen Spannungen sind durch die Formeln gegeben.

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -2\mu_0\, m_0\, T_0\, f_2(\zeta, \tau; \alpha) + \frac{\lambda_0\, \sigma_0{}^2}{\varrho} \sigma_{11}, \tag{3.10}$$

wo

$$\begin{aligned} f_2(\zeta, \tau; \alpha) = \frac{e^{-\alpha\tau}}{2} \Bigg[& e^{-i\zeta\sqrt{\alpha}}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - i\sqrt{\alpha\tau}\right) + \\ & + e^{i\zeta\sqrt{\alpha}}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + i\sqrt{\alpha\tau}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die zeitliche Veränderlichkeit der Spannung σ_{11} ist für $\tau < \zeta$, $(t < x_1\, \sigma_0)$ durch die Funktion $f_1(\zeta, \tau; \alpha)$ und für $\tau > \zeta$ durch beide Funktionen f_1, g_1 charakterisiert.

Die Funktion $f_1(\zeta, \tau; \alpha)$ hat einen diffusen Charakter, die Funktion $g_1(\zeta, \tau; \alpha)$ den Charakter einer Längswelle, deren Front sich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = {}^1/\sigma_0$ bewegt.

Für $\tau = \zeta$ erhalten wir einen Sprung in der Spannung von endlichem Werte

$$\sigma_{11}(\zeta, \tau +; \alpha) - \sigma_{11}(\zeta_1 \tau -; \alpha) = \frac{T_0 m_0 \varrho}{\sigma_0^2} e^{-\frac{\alpha\zeta}{2}}, \tag{3.12}$$

der sich sowohl mit dem Parameter α als auch mit der Entfernung ζ verringert.

Für einen linear-elastischen Körper ($\alpha \to 0$) ist dieser Sprung eine konstante Größe. Nach Passieren der Längswelle durch den Querschnitt ζ verringert sich die Spannung in diesem Querschnitt schnell und strebt nach Null.

Man beachte weiter, daß für $x_1 = 0$

$$\sigma_{11} = 0, \ \sigma_{22} = \sigma_{33} = -2\mu_0 m_0 T_0 e^{-\alpha\tau} \tag{3.13}$$

ist.

Die Druckspannungen σ_{22}, σ_{33} sind von α und τ abhängig. Für $\tau = 0$ nehmen sie den konstanten Wert $-2\mu_0 m_0 T_0$ zu, den wir im Falle eines vollkommen elastischen Körpers für $\tau \neq 0$ erhalten.

Wenn auf dem Rande $x_1 = 0$ eines viskoelastischen Halbraumes die Temperatur $T(0_1 t) = T_0 \cos \sigma t$ vorgeschrieben wird, so ist das Temperaturfeld durch die Funktion

$$T(x_{11} t) = T_0 \, Re \left[e^{i\omega t - x_1 \sqrt{i\omega/\varkappa}} \right], \quad x_1 > 0 \tag{3.14}$$

gegeben.

Wir berechnen ferner die Funktion $\widehat{\Phi}$, indem wir uns der Formel (2.41) bedienen

$$\widehat{\Phi} = \frac{\widehat{m}\, T_0}{(i\omega)^2 \widehat{\sigma}^2 - i\omega/\varkappa} \left[e^{-x_1 \sqrt{i\omega/\varkappa}} - e^{-x_1 \widehat{\sigma}^{i\omega}} \right]. \tag{3.15}$$

Für den Biotschen Körper erhalten wir unter Voraussetzung der Beziehungen (3.4)

$$\widehat{\mu}(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} a(t)\, dt = \mu_0 \frac{1}{\varepsilon + i\omega}, \quad \widehat{\lambda}(i\omega) = \lambda_0 \frac{1}{\varepsilon + i\omega},$$

$$\widehat{m} = m_0, \quad \widehat{\sigma}^2 = \sigma_0^2 \frac{i\omega + \varepsilon}{i\omega}, \tag{3.16}$$

Die Normalspannung σ_{11} erhalten wir aus der Formel

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, t) &= Re \left[\varrho\, e^{i\omega t} (i\omega)^2 \widehat{\Phi} \right] \\ &= \frac{m_0 T_0 \varrho}{\sigma_0^2} Re \left\{ \frac{i\omega\, e^{i\omega t}}{i\omega - \beta} \left[e^{-x_1 \sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa}}} - e^{-x_1 \sigma_0 \sqrt{i\omega(\varepsilon + i\omega)}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Die verbliebenen Normalspannungen sind durch die Formel

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\lambda_0 \sigma_0^2}{\varrho} \sigma_{11} - 2 m_0 \mu_0 T_0 \, Re \left[\frac{i\omega}{\varepsilon + i\omega} e^{i\omega t - x_1 \sqrt{i\omega/\varkappa}} \right]. \tag{3.18}$$

gegeben.

B. Spannungsausbreitung, die in einem viskoelastischen Raum durch eine kontinuierliche Flächenwärmequelle hervorgerufen wird

Möge in der Ebene $x_1 = 0$ die kontinuierliche Wärmequelle $Q(x_1, t) = Q_0\, \delta(x_1)\, H(t)$ wirksam sein. Die Laplace-Transformation des Temperaturfeldes hat hier die Form

$$\overline{T} = \frac{Q_0}{2\, p \sqrt{\varkappa p}}\, e^{-x_1 \sqrt{p/\varkappa}}, \qquad x_1 > 0. \tag{3.19}$$

Ferner bestimmen wir die Funktion $p^2\, \overline{\Phi}$, indem wir uns der Formel (2.33) bedienen.

$$p^2\, \overline{\Phi} = -\frac{Q_0\, \overline{m}\, p}{2\, \varkappa\, [p^2 \overline{\sigma}^2 - p/\varkappa]} \left[\frac{e^{-x_1 \sqrt{p/\varkappa}}}{\sqrt{p/\varkappa}} - \frac{e^{-x_1 p \overline{\sigma}}}{p\, \overline{\sigma}}\right]. \tag{3.20}$$

Für den viskoelastischen Biotschen Körper erhalten wir

$$\overline{\sigma}_{11} = p^2\, \varrho\, \overline{\Phi} = -\frac{Q_0\, m_0\, \varrho}{2\, \varkappa\, \sigma_0{}^2\, (p - \beta)} \left[\sqrt{\frac{\varkappa}{p}}\, e^{-x_1 \sqrt{p/\varkappa}} - \frac{e^{-x_1 \sigma_0 \sqrt{p(p+\varepsilon)}}}{\sigma_0 \sqrt{p\,(p+\varepsilon)}}\right]. \tag{3.21}$$

Nach Durchführung der Rücktransformation auf Grund obiger Gleichung und Einführung der Bezeichnungen (3.7), finden wir, daß

$$\sigma_{11}(\zeta, \tau; \alpha) = -\frac{m_0\, Q_0\, \varrho}{2\, \sigma_0}\, [f_4(\zeta, \tau; \alpha) - g(\zeta, \tau; \alpha)] \tag{3.22}$$

wo

$$f_4(\zeta, \tau; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}}\, e^{\tau(1-\alpha)} \left[e^{-\zeta\sqrt{1-\alpha}}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau\,(1-\alpha)}\right) - \right.$$
$$\left. - e^{\zeta\sqrt{1-\alpha}}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau\,(1-\alpha)}\right)\right] \tag{3.23}$$

$$g(\zeta, \tau; \alpha) = e^{\tau(1-\alpha)} \int_0^\tau e^{-\eta\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\, I_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\eta^2 - \zeta^2}\right) d\eta \cdot H(\tau - \zeta).$$

Die Spannungen σ_{22}, σ_{33}, werden durch die Formel ausgedrückt

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -m_0\, \mu_0\, Q_0\, \sigma_0\, f_5(\zeta, \tau; \alpha) + \frac{\lambda_0\, \sigma_0{}^2}{\varrho}\, \sigma_{11}, \tag{3.24}$$

wo

$$f_5(\zeta, \tau; \alpha) = \frac{i\, e^{-\alpha\tau}}{2\sqrt{\alpha}} \left[e^{i\zeta\sqrt{\alpha}}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + i\sqrt{\tau\alpha}\right) - e^{-i\zeta\sqrt{\alpha}}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - i\sqrt{\tau\alpha}\right)\right]. \tag{3.25}$$

C. Spannungsausbreitung, die in einem viskoelastischen Raum durch eine konzentrierte kontinuierliche Wärmequelle hervorgerufen wird

Es möge im Ursprung des Koordinatensystems eine konzentrierte kontinuierliche Wärmequelle $Q(R_1\, t) = Q_0\, \delta(R)\, H(t)$ wirksam sein. Nach Einsetzen der Temperaturtransformierten

$$\overline{T}(R_1 p) = \frac{Q_0}{4\pi R p} e^{-R\sqrt{p/\varkappa}}, \; R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{3.26}$$

in die Formel (2.33) erhalten wir

$$\Phi = -\frac{Q_0 \overline{m}}{4\pi\varkappa Rp(p^2\overline{\sigma}^2 - p/\varkappa)} (e^{-R\sqrt{p/\varkappa}} - e^{-R\overline{\sigma}p}). \tag{3.27}$$

Die Spannungstransformierten sind durch die Formeln

$$\overline{\sigma}_{RR} = -4\overline{\mu} R^{-1} \overline{\Phi}_{,R} + \varrho p^2 \overline{\Phi} \tag{3.28}$$

$$\overline{\sigma}_{\varphi\varphi} = \overline{\sigma}_{\vartheta\vartheta} = -2\overline{\mu}(\overline{\Phi}_{,RR} + R^{-1}\overline{\Phi}_{,R}) + \varrho p^2 \overline{\Phi} = \\ = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_{RR} - 2\overline{\mu}\,\overline{m}\,\overline{T} + \frac{1}{2}\frac{3\overline{\lambda} + 2\overline{\mu}}{\overline{\lambda} + 2\overline{\mu}} \varrho p^2 \overline{\Phi}. \tag{3.29}$$

gegeben.

Es ist zu ersehen, daß für die Bestimmung der Spannungen die Kenntnis der Funktionen $p^2\overline{\Phi}$ sowie $\overline{\mu}\,\overline{\Phi}_{,R}$ genügt.

Für den Biotschen viskoelastischen Körper ist

$$p^2\overline{\Phi} = -\frac{A}{R(p-\beta)} (e^{-R\sqrt{p/\varkappa}} - e^{-R\sigma_0\sqrt{p(p+\varepsilon)}}), \; \beta = \frac{1}{\varkappa\sigma_0^2} - \varepsilon, \tag{3.30}$$

$$R^{-1}\overline{\mu}\,\overline{\Phi}_{,R} = \frac{A\mu_0}{R^3}\left[\frac{e^{-R\sqrt{p/\varkappa}}(1 + R\sqrt{p/\varkappa})}{p(p-\beta)(p+\varepsilon)} - \frac{e^{-R\sigma_0\sqrt{p(p+\varepsilon)}}(1 + R\sigma_0\sqrt{p(p+\varepsilon)})}{p(p-\beta)(p+\varepsilon)}\right],$$

$$A = \frac{Q_0 m_0}{4\pi\varkappa\sigma_0^2}. \tag{3.31}$$

Wenn wir (3.30) und (3.31) in (3.28) einsetzen und die Rücktransformation vornehmen sowie die Bezeichnungen (3.7) einführen, erhalten wir

$$\sigma_{RR}(\zeta,\tau;\alpha) = -\frac{Q_0 m_0 \mu_0}{\pi\varkappa^2\sigma_0\zeta^3}\left[\frac{1}{1-\alpha}(f_1 - f_3 - g_1 + g_3) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha}(f_2 - f_3 - g_2 + g_3) + \zeta(f_4 - f_5 - g_4) + \vartheta\zeta^2(f_1 - g_1)\right], \; \vartheta = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{4\mu_0}. \tag{3.32}$$

Hier sind die Funktionen $f_1(\zeta,\tau;\alpha)$ und $g_1(\zeta,\tau;\alpha)$ durch die Formeln (3.9), die Funktionen $f_2(\zeta\;\tau;\alpha)$ durch die Formel (3.11) gegeben, während die Funktionen f_4 $(\zeta,\tau;\alpha)$ und $f_5(\zeta,\tau;\alpha)$ durch die Formeln (3.23) und (3.25) ausgedrückt sind.

Weiter ist

$$f_3(\zeta,\tau;\alpha) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

$$g_2(\zeta,\tau;\alpha) = e^{-\alpha\tau}\left[e^{\frac{\alpha\zeta}{2}} H(\tau-\zeta) + \frac{\alpha\zeta}{2}\int_0^\tau e^{\frac{\eta\alpha}{2}} \frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\eta^2-\zeta^2}\right)}{\sqrt{\eta^2-\zeta^2}} H(\eta-\zeta)\,d\eta,\right],$$

$$g_3(\zeta, \tau; \alpha) = e^{-\frac{\alpha\zeta}{2}} H(\tau - \zeta) + \frac{\alpha\zeta}{2} \int_0^\tau e^{-\frac{\eta\alpha}{2}} \frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\eta^2 - \zeta^2}\right)}{\sqrt{\eta^2 - \zeta^2}} H(\eta - \zeta)\, d\eta,$$

$$g_4(\zeta, \tau; \alpha) = \int_0^\tau e^{(1-\alpha)\tau - \eta\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} I_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\eta^2 - \zeta^2}\right) H(\eta - \zeta)\, d\eta. \tag{3.33}$$

Im Querschnitt $\zeta = \text{const.}$ und für den Augenblick $\tau = \zeta$ erhalten wir einen Spannungssprung σ_{11} von der Größe

$$\sigma_{RR}(\zeta, \tau + ; \alpha) - \sigma_{RR}(\zeta, \tau - ; \alpha) = \frac{Q_0\, m_0\, \varrho}{4\pi\varkappa^2\sigma_0{}^3\zeta}\, e^{-\frac{\alpha\zeta}{2}}. \tag{3.34}$$

Dieser Sprung verringert sich mit der Entfernung ζ sowie mit der Zunahme des Parameters α.

Für einen linear-elastischen Körper ($\alpha \to 0$) ist dieser Sprung umgekehrt proportional zu ζ.

Die verbliebenen Normalspannungen bestimmen wir aus der Formel (3.29). Nach Durchführung der Rücktransformation erhalten wir

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{2}\sigma_{RR} - \frac{Q_0\,\mu_0\, m_0}{2\pi\sigma_0\varkappa\zeta}\,[f_2(\zeta, \tau; \alpha) +$$
$$+ \vartheta_0\,(f_1(\zeta, \tau; \alpha) - g_1(\zeta, \tau; \alpha)], \qquad \vartheta_0 = \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{4\varkappa\mu_0}. \tag{3.35}$$

Wenn in den Ausdrücken (3.32), (3.35) Grenzübergänge $\alpha \to 0$ vorgenommen werden, so erhalten wir die bekannten Bezeichnungen für die Spannungen eines vollkommen elastischen Körpers. So nimmt beispielsweise die Spannung $\sigma_{RR}(\zeta, \tau; \alpha)$ die Form an

$$\sigma_{RR}(\zeta, \tau, 0) = -\frac{Q_0\,\mu_0\, m_0}{\pi\varkappa^2\sigma_0\zeta^3}\left\{\frac{1}{2} e^\tau \left[(1 + \zeta + \vartheta\zeta^2)\, e^{-\zeta} \cdot\right.\right.$$
$$\cdot\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) + (1 - \zeta + \vartheta\zeta^2)\, e^{\zeta}\, erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right)\Big] -$$
$$-\left(1 + \tau - \frac{1}{2}\zeta^2\right) erfc\,\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \zeta\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\, e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}} -$$
$$\left. - [(1 + \zeta + \vartheta\zeta^2)\, e^{\tau - \zeta} - \tau - 1]\, H(\tau - \zeta)\right\}. \tag{3.36}$$

Die in diesem Abschnitt dargestellten Lösungen beziehen sich auf den Biotschen viskoelastischen Körper. Die Anwendung dieses Modells gestattete die Erzielung von Ergebnissen, die für eine Diskussion geeignet sind. Das ergibt sich aus seiner Sondereigenschaft, namentlich aus der Annahme, daß die Größe $\bar{\nu}$ konstant ist.

Für das Maxwellsche Modell, besonders aber für das Kelvinsche Modell erhält man Resultate von einer verhältnismäßig komplizierteren Struktur.

(Eingegangen am 3. Oktober 1960)